5. PRAVIDLA PRO POČÍTÁNÍ S MATICEMI

Důsledky plynoucí z předchozích definic základních operací s maticemi se dají stručně vystihnout takto:

Celá řada pravidel, která platí pro počítání s komplexními čísly, platí formálně stejně pro počítání s maticemi. Jde zvláště o následující pravidla, v nichž předpokládáme, že uvedené matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ jsou vhodného typu (aby příslušné operace měly smysl).

5.1. Pravidla pro sčítání matic:

1. Zákon komutativní: $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$
2. Zákon asociativní: $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})$

5.2. Pravidla pro skalární násobení matice číslem:

1. Zákon komutativní: $a\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}a$
2. Zákony asociativní: $(ab)\,\boldsymbol{A} = a(b\boldsymbol{A})$
   $(a\boldsymbol{A})(b\boldsymbol{B}) = (ab)\,\boldsymbol{AB}$
3. Zákony distributivní: $(a + b)\,\boldsymbol{A} = a\boldsymbol{A} + b\boldsymbol{A}$
   $a(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = a\boldsymbol{A} + a\boldsymbol{B}\,.$

5.3. Pravidla pro násobení matic:

1. Zákon asociativní: $(\boldsymbol{AB})\,\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$
2. Zákony distributivní: $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\,\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AC} + \boldsymbol{BC}$
   $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{CA} + \boldsymbol{CB}\,.$

O tom, že pro násobení matic neplatí (obecně) komutativní zákon (takže $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$). viz příklad *6* na straně 26.

5.4. Báze čtvercových matic. Každou čtvercovou matici $\boldsymbol{A}$ (s prvky a_{jk}) stupně n je možno jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinaci matic $\mathbf{E}_{jk}$ takto:

$$\mathbf{A} = a_{11}\mathbf{E}_{11} + a_{12}\mathbf{E}_{12} + \ldots + a_{1n}\mathbf{E}_{1n} + \ldots + a_{nn}\mathbf{E}_{nn} = \\ = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\mathbf{E}_{jk} .$$

O maticích $\mathbf{E}_{jk}$ říkáme, že tvoří *bázi* všech čtvercových matic stupně n.

Důkazy vzorců, uvedených v odst. 5.1 až 5.4 jsou většinou velmi jednoduché. Poněkud složitější je důkaz asociativního zákona pro násobení (5.3.1), a na ten se omezíme. Ostatní důkazy nechť si čtenář provede jako cvičení.

Nechť prvky matic $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ jsou (po řadě) a_{jk}, b_{kr}, c_{rs}, přičemž

$$j = 1, 2, \ldots, m ; \quad k = 1, 2, \ldots, n ;$$
$$r = 1, 2, \ldots, h ; \quad s = 1, 2, \ldots, p .$$

Protože $\mathbf{A}$ je typu m/n, kdežto $\mathbf{B}$ typu n/h, je matice $\mathbf{AB}$ typu m/h. Označme její prvky u_{jr}, přičemž podle (4) je

$$u_{jr} = a_{j1}b_{1r} + a_{j2}b_{2r} + \ldots + a_{jn}b_{nr} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{kr} .$$

Prvky matice $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ typu m/p označme v_{js}, přičemž je

$$v_{js} = \sum_{r=1}^{h} u_{jr}c_{rs} = \sum_{k=1,\ r=1}^{n,h} a_{jk}b_{kr}c_{rs} .$$

Naproti tomu matice $\mathbf{BC}$ je typu n/p. Jsou-li $\tilde{u}_{ks}$ její prvky, pak podle (4) platí

$$\tilde{u}_{ks} = \sum_{r=1}^{h} b_{kr}c_{rs} .$$

Konečně matice $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ je typu m/p, a označíme-li její prvky $\tilde{v}_{js}$, podle (4) platí

$$\tilde{v}_{js} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\tilde{u}_{ks} = \sum_{k=1,r=1}^{n,h} a_{jk}b_{kr}c_{rs} = v_{js} .$$

Protože matice $(\mathbf{AB})\,\mathbf{C}$ a $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ jsou téhož typu a mají stejnolehlé prvky stejné, je vzorec 5.3.1 dokázán.

5.5. Poznámka. Z uvedených vzorců se snadno odvodí vzorce obecnější, které platí pro libovolný počet matic. Tak např. ze vzorce 5.3.1 plyne, že libovolná uspořádaná skupina matic

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$$

vhodných typů (takových, aby násobení bylo definováno) má jediný součin, který značíme

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \ldots \mathbf{A}_n .$$

Tento součin závisí jenom na pořadí matic, nikoli však na tom, jak sousední matice sdružujeme. Tak např. součin čtyř matic můžeme počítat kterýmkoli z těchto způsobů:

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 \mathbf{A}_4 = \mathbf{A}_1[\mathbf{A}_2(\mathbf{A}_3\mathbf{A}_4)] = \mathbf{A}_1[(\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3)\,\mathbf{A}_4] =$$
$$= (\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)(\mathbf{A}_3\mathbf{A}_4) = [\mathbf{A}_1(\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3)]\,\mathbf{A}_4 = [(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)\,\mathbf{A}_3]\mathbf{A}_4$$

5.6. Umocňování čtvercových matic. Je-li $\mathbf{A}$ libovolná čtvercová matice a p libovolné přirozené číslo, pak definujeme matici $\mathbf{A}^p$ vztahem

$$\mathbf{A}^p = \underbrace{\mathbf{A}\mathbf{A} \ldots \mathbf{A}}_{p} .$$

Nazýváme ji *p-tou mocninou matice* $\mathbf{A}$.
Kromě toho definujeme *nultou mocninu* čtvercové matice $\mathbf{A}$ vzorcem

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{E} .$$

Příklad 5. Vypočtěme $\mathbf{A}^2$, přičemž $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Řešení: Podle vzorce (4) dostáváme

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{O} .$$

5.7. Dvě pravidla pro transponování matic. Následující dvě pravidla pro transponování matic nemají obdoby v aritmetice komplexních čísel. Platí totiž

$$1.\quad (\mathbf{A} + \mathbf{B})' = \mathbf{A}' + \mathbf{B}' \tag{5}$$

$$2.\quad (\mathbf{AB})' = \mathbf{B}'\mathbf{A}' . \tag{6}$$

Důkaz prvního vzorce je snadný. Dokážeme druhý.

Nechť a_{jk} jsou prvky matice $\mathbf{A}$ typu m/n, kdežto b_{kr} jsou prvky matice $\mathbf{B}$ typu n/h. Potom $\mathbf{AB}$ je matice typu m/h a její prvky jsou

$$u_{jr} = a_{j1}b_{1r} + a_{j2}b_{2r} + \ldots + a_{jn}b_{nr} .$$

Transponovaná matice $(\mathbf{AB})'$ je typu h/m a její prvky jsou

$$u'_{rj} = u_{jr} = a_{j1}b_{1r} + a_{j2}b_{2r} + \ldots + a_{jn}b_{nr} .$$

Matice $\mathbf{B}'$ je typu h/n a její prvky jsou

$$b'_{rk} = b_{kr} ,$$

kdežto matice $\mathbf{A}'$ je typu n/m s prvky

$$a'_{kj} = a_{jk} .$$

Proto matice $\mathbf{B}'\mathbf{A}'$ je typu h/m a má prvky

$$\hat{u}_{rj} = b'_{r1}a'_{1j} + b'_{r2}a'_{2j} + \ldots + b'_{rn}a'_{nj} =$$
$$= b_{1r}a_{j1} + b_{2r}a_{j2} + \ldots + b_{nr}a_{jn} = u'_{rj} .$$

Protože matice $(\mathbf{AB})'$, $\mathbf{B}'\mathbf{A}'$ jsou téhož typu h/m a mají stejné prvky, plyne odtud vztah (6).

5.8. Multiplikační konstanty pro matice $\mathbf{E}_{jk}$. Podle odst. 5.4 je každá čtvercová matice n-tého stupně $\mathbf{A}$ lineární kombinací čtvercových matic $\mathbf{E}_{jk}$. Protože součin $\mathbf{E}_{jk}\mathbf{E}_{rs}$ představuje matici n-tého stupně, dá se vyjádřit jako lineární kombinace matic $\mathbf{E}_{jk}$. Koeficienty v těchto lineárních kombinacích jsou tzv. *multiplikační konstanty* matic $\mathbf{E}_{jk}$. Kolik je všech multiplikačních konstant?

Všech matic $\mathbf{E}_{jk}$ je n^2, takže všech součinů $\mathbf{E}_{jk}\mathbf{E}_{rs}$ je celkem $(n^2)^2 = n^4$. Pro každý takový součin obdržíme n^2 multiplikačních konstant. Proto všech multiplikačních konstant je úhrnem

$$n^4 \,.\, n^2 = n^6 .$$

Abychom je určili, vypočteme součin

$$\boldsymbol{E}_{jk}\boldsymbol{E}_{rs} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \\ \underbrace{\hphantom{0 \dots 1}}_{k} \hphantom{\dots 0} \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \\ \underbrace{\hphantom{0 \dots 1}}_{s} \hphantom{\dots 0} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ r \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Protože jde o součin dvou čtvercových matic stupně n, představuje uvažovaný součin opět čtvercovou matici stupně n. Tato podle vztahu (4) může mít prvky od nuly různé jenom v j-tém řádku a s-tém sloupci. Avšak pro prvek λ_{jk} ležící v j-tém řádku a k-tém sloupci uvažované matice zřejmě platí

$$\lambda_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad k \neq r\,, \\ 1 & \text{pro} \quad k = r\,. \end{cases}$$

Proto je

$$\boldsymbol{E}_{jk}\boldsymbol{E}_{rs} = \begin{cases} \boldsymbol{O} & \text{pro} \quad k \neq r\,, \\ \boldsymbol{E}_{js} & \text{pro} \quad k = r\,. \end{cases}$$

Těmito vztahy (pro $j, k, r, s = 1, 2, \dots, n$) jsou multiplikační konstanty určeny a je zřejmé, že každá z nich má hodnotu buď 0, nebo 1.

5.9. Zaměnitelné a nilpotentní matice. Důležitá vlastnost, kterou se odlišuje počítání s maticemi od počítání s obyčejnými komplexními čísly, je tato:

Když a, b jsou dvě libovolná komplexní čísla, pak platí pro násobení komutativní zákon

$$ab = ba\,.$$

Naproti tomu pro násobení matice $\boldsymbol{A}$ typu m/n maticí $\boldsymbol{B}$ typu n/m neplatí vždycky

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}\,.$$

Aby takový vztah platil, musilo by být předně $m = n$, takže obě matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ musí být čtvercové téhož stupně n (vzhledem k tomu, že $\boldsymbol{AB}$ je matice stupně m, kdežto $\boldsymbol{BA}$ matice stupně n). Avšak i když $m = n$, není vždy $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$. Ukážeme to na příkladě.

Příklad 6. Určeme oba součiny $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{BA}$ matic

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Řešení: Vynásobením podle (4) obdržíme

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{BA} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \text{ takže } \boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}.$$

Tím docházíme k této definici:

Dvě čtvercové matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ téhož řádu n se nazývají *zaměnitelné* (podrobněji: *vzájemně zaměnitelné*), právě když platí vztah

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}.$$

V tom případě též říkáme, že matice $\boldsymbol{A}$ je zaměnitelná s maticí $\boldsymbol{B}$, nebo též, že $\boldsymbol{B}$ je zaměnitelná s maticí $\boldsymbol{A}$.

Předešlý příklad *6* zároveň ukazuje, že rovnice

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$$

může platit, aniž jeden z činitelů $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ součinu $\boldsymbol{AB}$ je nulovou maticí, na rozdíl od počítání s obyčejnými komplexními čísly. (Jsou-li a, b komplexní čísla, pak je $ab = 0$, právě když aspoň jedno z obou čísel a, b je nula.)

Zejména se může stát, že čtvercová matice $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{O}$, avšak některá její mocnina $\boldsymbol{A}^p = \boldsymbol{O}$. V tom případě se $\boldsymbol{A}$ nazývá *nilpotentní* matice.

Např. matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

je nilpotentní, jak plyne z příkladu 5 na str. 23.

5.10. Poznámka o abstraktních algebrách. Množina všech čtvercových matic n-tého řádu nad tělesem T spolu s operacemi, které jsme právě zavedli, je příkladem algebry nad tělesem T.

Algebrou nad nějakým tělesem T rozumíme neprázdnou (abstraktní) množinu $\mathfrak{A}$, na níž jsou definovány tři operace, označené symboly, např. $\oplus$, $\odot$, $\bigcirc$. Tyto operace jsou definovány takto:

1. Operace $\oplus$, zvaná *sčítání*, přiřazuje ke každým dvěma rovným nebo různým prvkům $a \in \mathfrak{A}$, $b \in \mathfrak{A}$ další prvek $c \in \mathfrak{A}$, který se značí

$$a \oplus b$$

a nazývá se *součet* prvku a s prvkem b.

2. Operace $\odot$, zvaná *násobení*, přiřazuje ke každým dvěma rovným nebo různým prvkům $a \in \mathfrak{A}$, $b \in \mathfrak{A}$ další prvek $d \in \mathfrak{A}$, který se značí

$$a \odot b$$

a nazývá *součin* prvku a s prvkem b (v uvedeném pořadí).

3. Operace $\bigcirc$, zvaná *skalární násobení*, přiřazuje ke každému prvku $a \in \mathfrak{A}$ a každému číslu $\alpha \in T$ určité prvky

$$\alpha \bigcirc a\,, \quad a \bigcirc \alpha$$

z množiny $\mathfrak{A}$, které nazýváme *skalární součin* čísla α s prvkem a, popř. *skalární součin prvku a s číslem* α.

Přitom uvedené tři operace splňují podobné zákony, které jsou popsány v předešlých pravidlech uvedených v odst. 5.1 až 5.4.

Tak např. pro každé tři prvky $a \in \mathfrak{A}$, $b \in \mathfrak{A}$, $c \in \mathfrak{A}$ platí

$$a \oplus b = b \oplus a\,,$$
$$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)\,, \ldots \text{ atd}\,.$$

Pravidlo z odst. 5.4 zní zde takto: Každý prvek $a \in \mathfrak{A}$ lze vyjádřit ve tvaru

$$a = (\alpha_1 \bigcirc v_1) \oplus (\alpha_2 \bigcirc v_2) \oplus \ldots \oplus (\alpha_n \bigcirc v_n)\,,$$

tj. jako součet skalárních součinů vhodných čísel $\alpha_\nu \in T$ (pro $\nu = 1, 2, \ldots, n$) a vhodných, vždy týchž prvků $v_\nu \in \mathfrak{A}$. To znamená, že prvky $v_1, v_2, \ldots, v_n$ tvoří *bázi* algebry $\mathfrak{A}$.

Poznamenejme ještě, že o algebrách najde čtenář poučení např. v knihách

DEURING, M.: Algebren. Springer, Berlin 1935;
DICKSON, L. E.: Algebren und ihre Zahlentheorie. Zürich 1927;
KUROŠ, A. G.: Kapitoly z obecné algebry. Academia, Praha 1968.