Karel Svoboda
Práce z diferenciální geometrie

In: Zdeněk Třešňák (author); Petra Šarmanová (author); Bedřich Půža (author): Otakar Borůvka. (Czech). Brno: Nadace Universitas Masarykiana v Brně, 1996. pp. 175--181.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401301

rozvodné sítě. Borůvka ovšem nevyřešil pouze tento konkrétní problém, ale zobecnil ho natolik, že jeho výsledek se stal jedním z fundamentálních výsledků moderní diskrétní matematiky.

Práce z diferenciální geometrie

prof. RNDr. Karel Svoboda, CSc.

Důležitou část vědecké činnosti prof. Borůvky tvoří jeho práce z diferenciální geometrie. Lze je rozdělit na dvě skupiny, z nichž jedna obsahuje pojednání zabývající se otázkami projektivní diferenciální geometrie a druhá shrnuje práce z diferenciální geometrie ploch ve vícerozměrných prostorech s konstantní křivostí.

První Borůvkova geometrická práce [3] navazuje na výsledky G. Fubiniho a E. Cartana o projektivní deformaci ploch. Na základě metody sdělené E. Čechem provedl Borůvka integraci systémů diferenciálních rovnic jimiž jsou určeny jisté typy ploch, které lze projektivně deformovat v sebe. Až na jeden případ jsou v této práci určeny konečné rovnice ploch, při nichž grupa projektivních deformací v sebe, závislá na dvou parametrech, obsahuje podgrupu kolineací v sebe, nebo při nichž všechny projektivní deformace jsou kolineacemi.

V pozoruhodných pracích [5] a [7], které vznikly z podnětu E. Čecha, jsou studovány poprvé v literatuře analytické korespondence mezi dvěma projektivními rovinami a odvozeny jejich vlastnosti invariantní vzhledem k dvojicím transformací projektivní grupy. Ke každé dvojici bodů odpovídajících si v korespondenci mezi dvěma rovinami lze přiřadit projektivně invariantní kubickou diferenciální formu ψ, jejíž vymizení určuje tzv. charakteristické směry korespondence v uvažovaném bodě. Jejich geometrický význam je dán tím, že inflexnímu bodu křivky v jedné rovině odpovídá inflexní bod odpovídající křivky v druhé rovině tehdy a jen tehdy, když tečna křivky v uvažovaném bodě má charakteristický směr. Korespondence mezi dvěma rovinami jsou pak klasifikovány podle počtu charakteristických směrů ve čtyři druhy, a to korespondence prvního druhu se třemi charakteristickými směry, korespondence druhého druhu se dvěma charakteristickými směry, korespondence třetího druhu s jedním charakteristickým směrem a korespondence čtvrtého druhu, jejichž každý směr je charakteristický a které jsou totožné s projektivními příbuznostmi. V jednotlivých případech jsou odvozeny základní invarianty korespondence vzhledem ke grupě projektivních transformací a rozřešeny otázky jejich existence a obecnosti. Zvláštní pozornost je věnována korespondencím, jejichž charakteristické křivky jsou přímky. V případě korespondencí prvního druhu je nalezena obecná třída takových korespondencí, které mají vlastnost, že charakteristické přímky obalují v každé z obou rovin křivku třetí třídy. Nerozřešeným problémem zde zůstává otázka, zda existují další korespondence prvního druhu mající za charakteristické křivky přímky. V případě korespondencí druhého a třetího druhu jsou zjištěny všechny korespondence zmíněné vlastnosti a popsány jednoduchou geometrickou konstrukcí. Výsledky o analytických korespondencích mezi dvěma rovinami jsou stručně shrnuty v pojednání [8].

V práci [9], navazující na obecnou teorii korespondencí mezi dvěma rovinami, vyšetřuje Borůvka existenci a obecnost korespondencí, jejichž charakteristické křivky lze vyjádřit rovnicí $dx^3 - dy^3 = 0$, a existenci a obecnost korespondencí, jejichž kubickou diferenciální formu ψ lze uvést na tvar $dx^3 - dy^3$.

Další dvě práce týkající se projektivní diferenciální geometrie jednají o projektivní deformaci ploch. V práci [15] jsou mezi plochami, které připouštějí jednoparametrickou grupu projektivních transformací, určeny ty, jež jsou současně v netriviální projektivní deformaci s jinými plochami.

V práci [16] si klade Borůvka za úkol vyšetření vlastností ploch, jejichž konjugovaná síť projektivní deformace je tvořena vrstvami Segre-Darbouxových křivek. V této souvislosti je ukázáno, že požadované vlastnosti mají všechny plochy rotační a kromě toho čtyřparametrická soustava nerotačních ploch. Každá z těchto ploch je projektivně deformovatelná na jednoparametrickou soustavu rotačních ploch a každá rotační plocha je v deformaci opět s rotační plochou. Autor ukazuje, že existují takové rotační plochy, které lze projektivně deformovat na plochy, jež rotační nejsou.

Druhou a obsažnější část vědecké činnosti prof. Borůvky v geometrii tvoří jeho práce o plochách ve vícerozměrných prostorech s konstantní křivostí. K těmto úvahám přistoupil Borůvka z podnětu prof. E. Cartana v práci [10], v níž jsou studovány jisté minimální plochy čtyřrozměrného prostoru s konstantní křivostí, jimiž se v případě eukleidovského prostoru zabývali S. Kwietniewski, K. Kommerell, L. P. Eisenhart. V každém bodě plochy tvoří koncové body vektorů normální křivosti tzv. indikatrici normální křivosti. Indikatrix je elipsa, která má v případě minimální plochy střed v příslušném bodě plochy. Ve zmíněné práci je dokázána obecnost a existence minimálních ploch, jejichž indikatrix je kružnice, a odvozena jejich zajímavá geometrická konstrukce. V této souvistosti se dochází k ploše, která je průmětem Veronesovy plochy z bodu neležícího na nadploše singulárních kuželoseček a která je mezi uvažovanými minimálními plochami neeukleidovského prostoru charakterizována tím, že poloměr indikatrice je konstantní. Tato práce byla v úplném znění uveřejněna také ve francouzském jazyce jako pojednání [11] a ve stručném výtahu [12].

V následující práci [14] se Borůvka zabývá minimálními plochami pětirozměrného prostoru s konstantní křivostí, jejichž indikatrix je kružnice. Zjišťuje obecnost a existenci těchto ploch a popisuje jejich charakteristické projektivní vlastnosti na základě vlastností konjugované sítě, která je na ploše tvořena minimálními křivkami. Jedním ze získaných výsledků je geometrická interpretace Guichardova problému a určena obecnost jeho řešení. V neeukleidovském prostoru existují plochy mající konstantní poloměr kružnice normální křivosti. Kromě existenčních otázek odvozuje autor jejich rovnice v konečném tvaru. Práce [13], mající týž název, obsahuje stručný přehled výsledků pojednání [14].

Obsahem další práce [19] je studium křivek čtyřrozměrného eukleidovského prostoru, jejichž všechny křivosti jsou konstantní. Tyto křivky, zvané nadkružnice, mají řadu zajímavých vlastností, které jsou přirozeným zobecněním vlastností kružnice. V souvislosti s nadkružnicemi čtyřrozměrného prostoru byly zvláště studovány jisté parabolické plochy, které mají lokální vlastnost, že indikatrix normální křivosti v každém jejich bodě má vrchol v tomto bodě a konstantní poměr os. Autor vyšetřil podrobně jednotlivé typy těchto ploch a odvodil jejich jednoduchou geometrickou konstrukci. Stručný přehled dosažených výsledků byl uveřejněn v pojednání [20].

Na předcházející práci navazuje Borůvka v pojednání [22], v němž studuje plochy $2n$-rozměrného eukleidovského prostoru, jejichž indikatrix první normální křivosti má jeden vrchol v bodě plochy a konstantní poměr os a jejichž oskulační prostor řádu k ($k = 3, 4, \cdots, 2n-2$) je v každém bodě plochy právě $(k+2)$-rozměrný.

Ústřední postavení mezi Borůvkovými pracemi z metrické diferenciální geometrie zaujímá trojdílná práce [21], [26], [27]. V první z těchto prací je nejprve vypracována obecná teorie normální křivosti plochy v n-rozměrném prostoru s konstantní křivostí, opírající se o pojem indikatricí normální křivosti řádu k (≥ 1); tyto křivky jsou množinami koncových bodů odpovídajících vektorů k-té normální křivosti všech křivek, které procházejí obecným bodem plochy v libovolném směru v jeho tečné rovině. Autor ukazuje, že tyto indikatrice jsou v každém bodě plochy racionálními uzavřenými křivkami. Podrobně si všímá případu, kdy indikatrice normální křivosti řádu k ($1 \leq k \leq m \leq \frac{n}{2}$) jsou v každém bodě plochy kružnicemi se středy v bodě plochy, a dokazuje, že plochy mající tyto vlastnosti existují v libovolném n-rozměrném prostoru s konstantní křivostí a že závisí obecně na $2(n-m-1)$ funkcích jedné proměnné. V druhé ze zmíněných prací podává Borůvka rozšíření Frenetových vzorců pro analytické křivky r-rozměrného parabolického hermiteovského prostoru. V odvozených vzorcích se vyskytuje $r-1$ reálných kladných analytických funkcí dvou reálných proměnných, které se nazývají skalární křivosti uvažované analytické křivky. Tyto funkce vyhovují $r - 1$ diferenciálním rovnicím, jejichž splnění je nutnou a postačující podmínkou k tomu, aby existovala analytická křivka, která má uvedené funkce za své skalární křivosti. Při daných skalárních křivostech vyhovujících zmíněným rovnicím je příslušná analytická křivka určena až na pohyby v uvažovaném hermiteovském prostoru. Úvahy o analytických křivkách hermiteovského parabolického prostoru jsou v úzké souvislosti se studiem ploch v $2r$-rozměrném eukleidovském prostoru, jemuž věnoval Borůvka poslední ze tří zmíněných prací. V izometrickém zobrazení r-rozměrného hermiteovského parabolického prostoru na $2r$-rozměrný reálný eukleidovský prostor je obrazem každé analytické křivky hermiteovského prostoru charakteristická plocha (ve smyslu Levi-Civity) eukleidovského prostoru. Autor ukazuje, že plocha uvažovaného prostoru je charakteristickou plochou tehdy a jen tehdy, když všechny její indikatrice normální křivosti jsou v každém bodě plochy kružnicemi se středy v tomto bodě, a odvozuje jednoduchý vztah mezi poloměry těchto kružnic a skalárními křivostmi příslušné analytické křivky. Z řady dalších pozoruhodných výsledků uveďme tvrzení, že v uvažovaném eukleidovském prostoru existuje právě jedna charakteristická plocha, která obsahuje danou reálnou analytickou křivku lineárního podprostoru dimenze nejméně r a jejíž hlavní roviny protínají dva lineární, komplexně sdružené podprostory dimenze $r - 1$, ležící na absolutní kvadrice prostoru. Pojednání [24] a [28] obsahují přehled předcházejících výsledků o analytických křivkách a o jejich reálném zobrazení charakteristickými plochami.

Myšlenkově na tyto práce navazuje Borůvka v pojednání [23], v němž se zabývá geometrickými vlastnostmi ploch $2r$-rozměrného projektivního prostoru, jejichž parametrické vyjádření je dáno $2r + 1$ lineárně nezávislými sférickými funkcemi prvního druhu řádu r. Tyto plochy byly předtím studovány z hlediska projektivního (G. Tzitzéica) i metrického (E. Cartan). Autor je definuje v projektivním prostoru soustavou diferenciálních rovnic, jejíž integrací dochází k rovnicím plochy v konečném tvaru. Na základě diskuse této soustavy zjišťuje, že uvažovaná plocha je množinou průsečíků dvojic oskulačních r-rozměrných prostorů sestrojených v imaginárně sdružených bodech racionální normální imaginární křivky stupně $2r$. Tato konstrukce ukazuje, že na uvažované ploše existuje konjugovaná síť křivek se stejnými invarianty, jejíž Laplaceova posloupnost se ukončí v obou směrech po r transformacích na křivce, pomocí níž je plocha vytvořena. K uvažované ploše lze přiřadit regulární kvadriku, vzhledem k níž je uvedená křivka sdružena sama k sobě, a sestrojit jednojednoznačné zobrazení bodů plochy na dvojice diametrálně protilehlých bodů koule. Autor studuje velmi podrobně geometrické vlastnosti tohoto zobrazení a odvozuje zajímavé projektivní vlastnosti uvažovaných ploch. V neeukleidovské metrice určené zmíněnou kvadrikou ukazuje souvislosti s úvahami E. Cartana a dokazuje, že každá uvažovaná plocha je minimální plochou, jejíž všechny indikatrice normální křivosti jsou kružnicemi s konstantními poloměry. V závěru práce ukazuje, že minimální plochy šestirozměrného neeukleidovského prostoru, jejichž všechny křivky mají tutéž konstantní normální křivost, jsou právě plochy vyjádřené sférickými funkcemi prvního druhu a třetího stupně. Přehled výsledků této práce byl uveřejněn v pojednání [17].

Do okruhu otázek, jimiž se Borůvka zabýval v předcházejících pracích, nepatří pojednání [18], v němž jsou vyšetřovány plochy, jejichž metrická normála splývá s Čechovou osou. Tento požadavek je ekvivalentní s podmínkou, že Segreovy křivky na ploše jsou křivkami geodetickými. Autor nalezl dvouparametrickou soustavu takových ploch a ukázal, že patří do skupiny ploch W a že jejich hlavní poloměry křivosti vyhovují algebraické rovnici desátého stupně. Odvodil dále, že každá jiná plocha uvažovaných vlastností, pokud existuje, závisí nejméně na sedmi konstantách.

S výjimkou první geometrické práce užíval prof. Borůvka ve všech ostatních pojednáních Cartanovy metody pohyblivého reperu, jejímuž studiu se věnoval na popud akademika E. Čecha. Předcházející stručný přehled výsledků nám nedovoluje podrobně vyzvednout dokonalé zvládnutí této metody a zběhlost v jejím použití k řešení různých problémů. Je však třeba zdůraznit, že Borůvka byl prvním českým matematikem vůbec, který ve svých pracích užil Cartanovy metody, a že tak přispěl nemalou měrou k jejímu rozšíření u nás. Jeho zásluhy v tomto směru byly mezinárodně oceněny tím, že byl v r. 1952 zvolen v Paříži do čestného výboru složeného z 50 předních světových matematiků; tento výbor vydal vědecké dílo E. Cartana. Na Borůvkovy práce navazuje řada matematiků domácích i zahraničních, jak o tom svědčí citáty jeho prací u jiných autorů a skutečnost, že některé jeho výsledky byly pojaty do učebnic diferenciální geometrie. Zvláště významnými a pro další vývoj geometrie důležitými jsou práce o analytických korespondencích, na jejichž základě vznikla v pozdější době celá řada prací budujících soustavně teorii korespondencí. Zmínky zasluhuje zejména geometrická škola v Bologni, vycházející přímo ze zmíněných Borůvkových prací. Přestože se prof. Borůvka věnoval v další své činnosti výhradně otázkám algebry a teorii diferenciálních rovnic a k vlastní tvůrčí práci v geometrii se nevrátil, neztratil zájem o současné dění v oboru diferenciální geometrie, zvláště pak v těch jejích úsecích, v nichž dříve pracoval.

Práce z moderní algebry

prof. RNDr. František Šik, DrSc.

Všechny Borůvkovy práce z algebry se týkají grupoidů a rozkladů množin, kromě učebnic o maticích [23] (viz. seznam ostatních publikací), [71] a další práce [29] – chronologicky první algebraické –, která obsahuje tyto zajímavé výsledky: Nechť X je matice řádu n. Je-li j nejmenší z hodností matic X, X^2, $X^3, \dots$ (říkáme, že X je rodu $n-j$), pak matice X má přesně $n-j$ nulových charakteristických kořenů, a obráceně. O minimálním polynomu ψ matice X se zde tvrdí, že ψ je reducibilní nad polem K, právě když existuje nad K nenulo-