

Mathematics throughout the ages

Benno Klotzek

Stetigkeit und Unstetigkeit in der Geometrie

In: Eduard Fuchs (editor): Mathematics throughout the ages. Contributions from the summer school and seminars on the history of mathematics and from the 10th and 11th Novembertagung on the history and philosophy of mathematics, Holbaek, Denmark, October 28-31, 1999, and Brno, the Czech Republic, November 2-5, 2000. (German). Praha: Prometheus, 2001. pp. 131–146.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/401242>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

STETIGKEIT UND UNSTETIGKEIT IN DER GEOMETRIE ¹

BENNO KLOTZEK

1 Messung und Stetigkeit

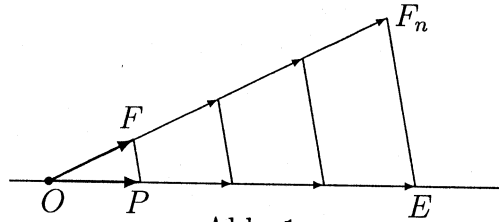
Die ersten Zeugnisse menschlicher Kultur zeigen mangels diesbezüglicher Bedürfnisse kaum entwickelte Zahlssysteme – etwa 1, 2, 3, viele –, auch rudimentär in der bloßen Unterscheidung von Einzahl- und Mehrzahlform der Subjekte und Objekte in den natürlichen Sprachen zu erkennen; eine Verfeinerung der Angaben mittels zusätzlicher Kardinalzahl ist möglich, aber nicht zwingend.

Dagegen entstand die Geometrie aus vielfältigen Bedürfnissen des täglichen Lebens. Schon in den *A n f ä n g e n* ist ein ausgeprägter *Formensinn* zu erkennen, u.a. in der (diskreten) *Ornamentik*, etwa auf Waffen, Geweben, Tongefäßen und deren Scherben. Beim Bau von Hütten und Häusern ging es um Geradlinigkeit und Rechtwinkligkeit, aber auch die Kreislinie spielte eine mehr oder weniger große Rolle. Die einfachsten Elemente geometrischer Formgebung sind *Kreisbogen* und *Geradlinigkeit*, zu realisieren mit dem gespannten Seil/dem Faden/der Schnur oder mit Zirkel und Lineal; sie führten zunächst zu handwerklichen Regeln.

In Mesopotamien und Ägypten bildete sich die Kunst der Aufteilung von Ländereien nach den jährlichen Überschwemmungen heraus; auch der aus dem Griechischen stammende Name *Geometrie* weist darauf hin. Es wurden Längen, Flächen- und Rauminhalte gemessen, wobei sich die Einheiten oft auf den menschlichen Körper bezogen: Elle, Fuß, Schritt, ... Die großen Fortschritte sind in Mesopotamien, Ägypten und China ab der Zeit zu verzeichnen, als eine ganze Schicht, die der Schreiber bzw. Beamten, nicht im elementaren Bedürfnis des Überlebens verhaftet blieb, sondern sogar Muße für *Raum-* und *Zeitmessung* besaß, für Astronomie und die Beschäftigung mit Kugeln, Kreisen und Winkeln.

¹Erweiterte Fassung des gleichlautenden Beitrages des Autors in **Mathematik-interdisziplinär** (Herausgeber: Jürgen Flachsmeier, Rudolf Fritsch, Hans-Christian Reichel), Shaker Verlag, Aachen 2000.

Was heißt *Messung* im einfachsten Fall, der Längenmessung? Gegeben seien eine Längeneinheit e (oder gleich eine Skala, etwa mit dezimaler Teilung).



$$n = 4$$

$$e = |\overline{OE}|$$

$$\frac{e}{4} = |\overline{OP}|$$

Abb. 1

Die (auch konstruktiv gemäß Abb. 1 ausführbare) Teilung in n gleiche Teile sichert uns z.B. die dezimale Teilung

$$e_1 := \frac{1}{10}e, e_2 := \frac{1}{100}e, e_3 := \frac{1}{1000}e, \dots, e_k := \frac{1}{10^k}e, \dots$$

Eine beliebige Länge b werde durch die Strecke \overline{OB} (B im Strahl OE^+) repräsentiert (Abb. 2). Wir suchen die natürlichen Zahlen $n_0, n_1, \dots, n_k, \dots$ der Eigenschaft

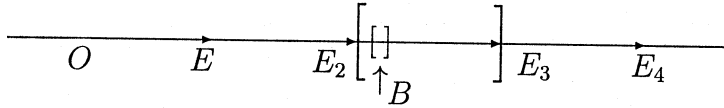


Abb. 2

$$\begin{array}{ll} n_0e \leq b < (n_0 + 1)e & n_00 \leq n_1 < n_00 + 10 \\ n_1e_1 \leq b < (n_1 + 1)e_1 & n_10 \leq n_2 < n_10 + 10 \\ n_2e_2 \leq b < (n_2 + 1)e_2 & \text{-----} \\ \text{-----} & \text{-----} \\ n_ke_k \leq b < (n_k + 1)e_k & n_{k-1}0 \leq n_k < n_{k-1}0 + 10 \\ \text{-----} & \text{-----} \end{array}$$

so daß bei vorgegebenem Genauigkeitsmaß $\frac{1}{10^k}e$ die Abweichung von $\frac{n_k}{10^k}e$ und b kleiner als $\frac{1}{10^k}e$ ausfällt.

A n m e r k u n g 1. Grundvoraussetzung für die *Meßbarkeit* ist die Aussage, die oben wie bei EUDOXOS und ARCHIMEDES unbewiesen benutzt wurde: *Zu gegebenen positiven Längen a, b gibt es stets eine positive natürliche Zahl n mit $na > b$.*

A n m e r k u n g 2. Die letzten Endes für b gesuchte *exakte Maßzahl* kann im allgemeinen nur in einem *unendlichen* Prozeß gewonnen werden, auch wenn für jedes vorgegebene Genauigkeitsmaß in *endlich* vielen

Testschritten, nämlich in $n_k + 1$ Schritten, die Näherungsgröße $\frac{n_k}{10^k}e$ bestimmbar ist.

PYTHAGORAS VON SAMOS (um 580–500 v.Chr.) und seine Schüler postulierten ein derartiges Primat der natürlichen Zahl, daß der oben beschriebene Prozeß bei geeigneter Teilung ebenfalls endlich sein müßte, d.h., daß jede Maßzahl mittels eines geeigneten Bruches $\frac{p}{q}$ darstellbar und mithin *rational* wäre. Ironie des Schicksals: Ein Pythagoräer entdeckte die *Irrationalität* am Symbol der Pythagoräer – einem regelmäßigen Sternfünfeck –, die einfacher im Verhältnis von Seitenlänge a und Diagonale d im Quadrat vorkommt. Denn nach dem Satz des PYTHAGORAS haben wir in diesem Beispiel noch die (algebraische) Gleichung $2a^2 = d^2$; wäre $d = \frac{p}{q}a$ und $\frac{p}{q}$ nicht kürzbar, also $2q^2 = p^2$, dann müßte $p = 2p'$ gerade und folglich q ungerade sein – im Widerspruch zur neuen Gleichung $q^2 = 2p'^2$.

Wie wir noch sehen werden, können nicht alle Maßzahlen durch *algebraische* Gleichungen beschrieben werden. Dazu kann das folgende Beispiel herangezogen werden.

Die naheliegende Frage der Bestimmung der Maßzahl des Umfangs eines Kreises bezüglich seines Durchmessers oder des Flächeninhalts des Einheitskreises bezüglich des Einheitsquadrates führte auf die Bestimmung von π , etwa eingekleidet in den Problemen der Bestimmung von Mantelflächeninhalt und Volumen eines zylindrischen Silos. Anfangs wurde in Mesopotamien und Ägypten, im alten China und anderswo für π stets die grobe Näherung $n_0 = 3$ genutzt, aber im alten Ägypten z.B. auch $\pi \approx \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3,16\dots$, ein periodischer Dezimalbruch, da solche Dezimalbrüche für rationale Zahlen charakteristisch sind. In der Antike finden wir die Idee der *Approximation* und *Konvergenz* am deutlichsten bei ARCHIMEDES VON SYRAKUS (287–216 v.Chr.): Über um- und einbeschriebene regelmäßige 6-, 12-, \dots , 96-Ecke hat er die Abschätzung

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

gefunden. Die Geschichte der Zahl π beendete F. LINDEMANN (1852–1939) erst 1882 durch den Beweis ihrer Transzendenz: Sie genügt keiner algebraischen Gleichung und ist folglich irrational.

Die Entdeckung der Irrationalität führte nicht nur zu einer Krise der Schule der Pythagoräer, sondern der gesamten Mathematik, die durch EUDOXOS VON KNIDOS (um 408–355 v.Chr.) mit seiner Proportionslehre überwunden wurde, deren wichtigstes Element die folgende Definition darstellt:

$$a : b = c : d : \iff \forall_{m,n \in \mathbb{N}} ma \stackrel{\leq}{\approx} nb \implies mc \stackrel{\leq}{\approx} nd.$$

Es wurde so die geometrische Analysis begründet, die Exhaustionsmethode unentbehrliches Hilfsmittel, etwa zur Begründung der Volumenformel $V = \frac{1}{3}G \cdot h$ für Pyramiden und Kegel. Infolge der größeren Leistungsfähigkeit der geometrischen Methoden wurde bis etwa zur Großen Französischen Revolution “Geometrie” als Synonym für “Mathematik” gebraucht.

2 Axiomatische Fixierung der euklidischen Geometrie

EUKLID VON ALEXANDRIA (etwa 365–300 v.Chr.) hat um 325 v.Chr. das mathematische Wissen seiner Zeit in den “Elementen” logisch streng zusammengefaßt, wobei er von Postulaten und Axiomen ausging (vgl.[1]). Nach Vorarbeiten von M. PASCH (1843–1930) formulierte D. HILBERT (1862–1943) in [4], aus Vorlesungen für Lehrer hervorgegangen, zur Präzisierung der *Elemente*

- I. Axiome der Verknüpfung
- II. Axiome der Anordnung
- III. Axiome der Kongruenz
- IV. Axiom der Parallelen
- V. Axiome der Stetigkeit:

V1 (Axiom des Messens oder Archimedisches Axiom). *Sind AB und CD irgendwelche Strecken, so gibt es eine Anzahl n derart, daß das n-malige Hintereinander-Abtragen der Strecke CD von A aus auf den durch B gehenden Halbstrahl über den Punkt B hinausführt.*

V2 (Axiom der linearen Vollständigkeit). *Das System der Punkte einer Geraden mit seinen Anordnungs- und Kongruenzbeziehungen ist keiner solchen Erweiterung fähig, bei welcher die zwischen den vorigen Elementen bestehenden Beziehungen sowie auch die aus den Axiomen I–III folgenden Grundeigenschaften der linearen Anordnungen und Kongruenz, und V1 erhalten bleiben.*

Statt dieser Stetigkeitsaxiome kann leicht ein Dutzend logisch äquivalenter Axiomgruppen angegeben werden, beispielsweise in [7]:

St. Jede nicht leere, nach oben bzw. unten beschränkte Teilmenge einer Geraden besitzt eine kleinste obere bzw. größte untere Schranke.

D. HILBERT hat wesentliche Teile der Schulgeometrie aus I – IV entwickelt. Nach A. TARSKI (1901–83) ist nur der von Stetigkeitsaxiomen unabhängige Teil der Geometrie *elementar*. Zu ihm gehört die *Dreiecksungleichung*:

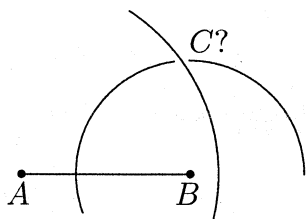


Abb. 3a

Wenn a, b, c Seitenlängen eines Dreiecks sind und o.B.d.A. $a \leq b$ ist, dann gilt $b - a < c < b + a$. Ist von diesem Satz auch die Umkehrung richtig: Wenn a, b, c Längen mit $a \leq b$ und $b - a < c < b + a$ sind, dann sind a, b, c Seitenlängen eines Dreiecks? Die Beantwortung der Frage läuft auf die Lösung einer Konstruktions-

saufrage hinaus. Wir können deshalb auch fragen, ob das Erfülltsein der Dreiecksungleichung, das sich für die Lösung der Konstruktionsaufgabe als notwendige Bedingung erweist, dazu auch hinreicht. Bekanntlich läuft die Aufgabe auf die Bestimmung von Kreisschnittpunkten hinaus.

Gilt $b - a < c < b + a$, dann können wir eine Strecke \overline{AB} der Länge c in der Konstruktionsebene ε wählen. Die Frage lautet nun, ob sich die Kreise $k(A, b)$ und $k(B, a)$ in ε schneiden (vgl. Abb. 3a). Ein ähnliches Problem tritt auf, wenn β, b, c mit $0 < \beta < 2R$ und $b > c$ vorgegeben sind: Wir wählen einen Winkel der Größe β , tragen von seinem Scheitel B aus auf einem Schenkel eine Strecke der Länge c ab und erhalten A (Abb. 3b). Trifft $k(A, b)$ den anderen Schenkel BP^+ ?

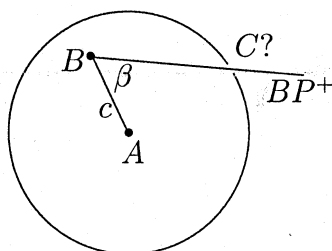


Abb. 3b

Es lässt sich zeigen, dass die **E i n d e u t i g k e i t** der gesuchten Schnittpunkte aus den Dreieckskongruenzsätzen sss bzw. sSW folgt. Die **E x i s t e n z** der gesuchten Schnittpunkte lässt sich mit Hilfe der Inzidenz-, Anordnungs- und Kongruenz- bzw. Bewegungsaxiome **n i c h t** herleiten. Ihre Herleitung wird nach dem Stetigkeitsaxiom möglich. Man kann diese

nichtelementare Herleitung dieser elementaren Aussagen umgehen, indem man folgende Axiome des Zirkels formuliert:

- Z_1 . In einer Ebene schneiden sich ein Kreis und eine Halbgerade, deren Anfangspunkt vom Kreismittelpunkt einen Abstand kleiner als der Radius hat, in genau einem Punkt.
- Z_2 . In einer Ebene schneiden sich zwei Kreise in einer Halbebene bezüglich der Verbindungsgeraden der Kreismittelpunkte in genau einem Punkt, wenn ihre Radien und der Abstand der Mittelpunkte der Dreiecksungleichung genügen.

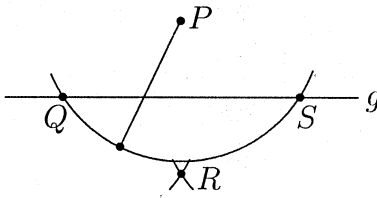


Abb. 3c

Da wir die Eindeutigkeit der Schnittpunkte postuliert haben, können die Dreieckskongruenzsätze sSW und sss mit Hilfe der Eindeutigkeitsaussagen in Z_1 bzw. Z_2 hergeleitet werden. Die Existenzaussagen in Z_1 und Z_2 sind für Konstruktionen in der Ebene wie das *Errichten einer Senkrechten*, das

Fällen eines Lotes, das *Halbieren von Strecken und Winkeln* sowie die *Konstruktion einer Mittelsenkrechten* bedeutsam. Um z.B. von einem Punkt P auf eine Gerade $g (\not\equiv P)$ das Lot zu fällen, ziehen wir um P durch einen Punkt aus der offenen Halbebene gP^- einen Kreis, der g nach Z_1 in zwei Punkten Q, S trifft; die Kreise um Q und S mit demselben Radius schneiden sich etwa nach Z_2 in gP^- in genau einem Punkt R , für den nach wie gewünscht $gPR \perp g$ gilt (Abb. 3c).

Abschließend wollen wir nochmals die Dreieckskonstruktionen behandeln: Es ist bemerkenswert, da EUKLID keine Bedenken gegen eine (stillschweigende) Verwendung von Z_2 hatte. Dagegen hatte er die Lösbarkeit der Aufgabe bei gegebenen α, β, c durch die Formulierung seines 5. Postulates erreicht. Als generelle Bedingungen setzen wir voraus, da alle Längen größer als o sind und alle Winkelgrößen zwischen o und $2R$ liegen.

Vorgabe	Lösbarkeit	Eindeutigkeit (bis auf Kongruenz)
a, b, c	nach Z_2 , falls a, b, c die Dreiecksungleichung erfüllen	nach sss
a, b, γ	nach K_1	nach sws
β, b, c	für $b > c$ nach Z_1	nach sSW für $b > c$
α, β, c	nach dem Wechselwinkelsatz, falls $\alpha + \beta < 2R$	nach sws

Wir können also von einer *sss*-, einer *sws*- bzw. *sSW-Konstruktion* sowie von einer *D-wsw-Konstruktion* als Dreiecks-Grundkonstruktion sprechen und auch sie wie andere Grundkonstruktionen als "Unterprogramme" bei der Lösung von Konstruktionsaufgaben nutzen.

A n m e r k u n g 3. Werden I – IV, Z_1 und Z_2 vorausgesetzt, so erhalten wir die analytische Geometrie des dreidimensionalen Raumes über einem *euklidischen Körper*.

A n m e r k u n g 4. In seinem 4. Problem von 1900 hat HILBERT den Begriff der "der euklidischen Geometrie nächststehenden" Theorie eingeführt. Wird in seinem Axiomensystem III5 bzw. *sws* durch die Dreiecksungleichung ersetzt, dann erhalten wir die Banach-Minkowskische Geometrie, in der selbst die Orthogonalität nichtelementar begründet wird, d.h. mit Stetigkeitsaxiom.

3 Verallgemeinerung zur Riemannschen Geometrie

Die Stetigkeitsaxiome gestatten, die Fragen der Konvergenz befriedigend zu beantworten. Dazu benötigen wir keineswegs die volle Euklidische Geometrie, sondern nur Begriffe und Aussagen, deren Bedeutung erst im vorigen Jahrhundert herausgestellt wurde:

Wir haben oben für das Messen ein beliebig gewünschtes Genauigkeitsmaß ε hervorgehoben; damit ist um den Streckenendpunkt B eine Kugel vom Radius ε bestimmt, in der der Endpunkt $E_x(x = \frac{nk}{10^k})$ der Näherungsgröße liegen muß. Diese anschauliche Vorstellung kann noch verallgemeinert werden, indem derartige Kugeln durch irgendwie gestaltete *Umgebungen* ersetzt werden, präzisiert:

Gegeben sei eine (Punkt-) Menge \mathbb{P} und eine Menge \mathbb{U} von Umgebungen, die in \mathbb{P} enthalten sind. Ein Paar (\mathbb{P}, \mathbb{U}) heißt genau dann *Hausdorffscher Raum* (nach FELIX HAUSDORFF (1868–1942) benannt), wenn

- (1) für alle $P \in \mathbb{P}$ und $U, U' \in \mathbb{U}$ mit $P \in U, U'$ ein Element $V \in \mathbb{U}$ mit $P \in V \subseteq U, U'$,
- (2) zu jedem $P \in \mathbb{P}$ ein $U \in \mathbb{U}$ mit $P \in U$ und zu je zwei Elementen $P, Q \in \mathbb{P}$ Elemente $U, V \in \mathbb{U}$ mit $P \in U, Q \in V$ und $U \cap V = \emptyset$

existiert bzw. existieren. Statt $P \in U \in \mathbb{U}$ schreiben wir kurz U_P (Umgebung von P).

In jedem Hausdorffschen Raum läßt sich *Konvergenz* mit *e i n d e u t i g e m* Grenzwert erklären: $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ *strebt gegen* P (kurz $P_n \rightarrow P$) genau dann, wenn jede Umgebung von P alle P_n bis auf *endlich* viele Ausnahmen enthält; es kann

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n$$

geschrieben werden, denn unter der Voraussetzung $Q \neq P$ existieren nach dem zweiten Teil von (2), dem *Hausdorffschen Trennungsaxiom* T_2 , U_P und U_Q ohne gemeinsame Punkte; da U_P fast alle P_n enthält, können in U_Q nur endlich viele P_n liegen, d.h. $P_n \not\rightarrow Q$.

Eine Punktmenge M , für deren Punkte P stets ein $U_P \subseteq M$ existiert, heißt *offen*. Dieser Begriff gestattet eine Antwort auf die Frage, wann eine Abbildung oder Funktion $f : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$ eines Hausdorffschen Raumes in einen Hausdorffschen Raum die Konvergenz erhält: Um aus $P_n \rightarrow P$ auch $f(P_n) \rightarrow f(P)$ zu erhalten, ist es hinreichend, daß alle Umgebungen von $f(P)$ offene Urbilder besitzen. Eine Abbildung dieser Eigenschaft heißt *stetig*. Eine bijektive und stetige Abbildung f , für die die Umkehrabbildung $f^{-1} : \mathbb{P}' \rightarrow \mathbb{P}$ ebenfalls stetig ist, wird *topologisch* (oder ein *Homöomorphismus*) genannt.

Der Teil der Geometrie, der einzig und allein Stetigkeit voraussetzt, hat sich im vorigen Jahrhundert als *Topologie*, als Theorie topologischer Räume, aus der Geometrie herausgelöst; man erhält eine Charakterisierung *topologischer Räume*, indem man in der obigen Definition der Hausdorffschen Räume T_2 streicht. Aber auch die Forderungen an einen Hausdorffschen Raum sind so allgemein, daß es möglich ist, sich \mathbb{P} beispielsweise als eine Fläche des Anschauungsraumes vorzustellen. Somit kann man nach der *linearen Approximation* fragen, nach der *Differenzierbarkeit* und deren Stetigkeit. Bevor wir diese Idee näher erläutern, ist noch eine historische Reminiszenz angebracht.

Nach zwei Jahrtausenden erfolgloser Versuche, das 5. *Postulat* EUKLIDS zu beweisen (vgl. etwa [7]), gab es erste Zweifel an der Euklidischen Raumvorstellung:

...Auch über ein anderes Thema, das bei mir schon fast 40 Jahr alt ist, habe ich zuweilen in einzelnen freien Stunden wieder nachgedacht, ich meine die ersten Gründe der Geometrie: ich weiss nicht, ob ich Ihnen je über meine Ansichten darüber gesprochen habe. Auch hier habe ich manches noch weiter consolidiert, und meine Überzeugung, dass wir die Geometrie nicht vollständig a priori begründen können, ist, wo möglich, noch fester geworden. Inzwischen werde ich

wohl noch lange nicht dazu kommen, meine sehr ausgedehnten Untersuchungen darüber zur öffentlichen Bekanntmachung auszuarbeiten, und vielleicht wird diess auch bei meinen Lebzeiten nie geschehen, da ich das Geschrei der Bötter scheue, wenn ich meine Ansicht ganz aussprechen wollte ...”

(Aus einem Brief von GAUSS an BESSEL vom 27.1.1829, vgl. [3], S. 200.)

Unabhängig voneinander entdeckten C.F. GAUSS (1777–1855, 1816, unveröffentlicht), N.I. LOBAČEVSKIJ (1792–1856, 1826) und J. BOLYAI (1802–60, 1831) eine nichteuklidische Geometrie. Und 1854 formulierte B. RIEMANN (1826–66) in seiner Habilitationsvorlesung “Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen” (vgl. [8]) zunächst die Idee der *n*-dimensionalen C^r -Mannigfaltigkeit, hier nach [6] als Tripel

$$(\mathbb{P}, \mathbb{U}, \{f_M\}_{M \in \mathbb{M} \subseteq \mathbb{O}})$$

durch die Forderungen definiert, daß (\mathbb{P}, \mathbb{U}) hausdorffsch ist, das Mengensystem \mathbb{M} eine offene Überdeckung von \mathbb{P} darstellt, jede (*Karte* genannte) Abbildung f_M einen in \mathbb{E}^n (*n*-dimensionaler euklidischer Raum) offenen Bildbereich $f_M(M)$ besitzt und darüber hinaus M topologisch auf $f_M(M)$ abbildet, wobei für jeden gemeinsamen Punkt $P \in M, N \in \mathbb{M}$ eine Umgebung U_P derart existiert, daß die (auf $f_M(U_P)$ eingeschränkte) Nacheinanderausführung $f_N f_M^{-1}|_{f_M(U_P)}$ *r*-mal stetig differenzierbar ist, d.h. in Symbolen

0) (\mathbb{P}, \mathbb{U}) hausdorffsch

1) \mathbb{M} offene Überdeckung von \mathbb{P}

2) $f_M : M \rightarrow \mathbb{E}^n$ (*n*-dimensionaler euklidischer Raum) $\wedge f_M(M)$ offen
 $\wedge f_M : M \rightarrow f_M(M)$ topologisch

3) $P \in M, N \in \mathbb{M} \Rightarrow \exists_{U_P \subseteq M, N} f_N f_M^{-1}|_{f_M(U_P)}$ *r*-mal stetig differenzierbar.

Auf die oben genannte Habilitationsvorlesung geht auch die Idee des *n*-dimensionalen Riemannschen Raumes zurück, hier nach [6] als Quadrupel

$$(\mathbb{P}, \mathbb{U}, \{f_M\}_{M \in \mathbb{M} \subseteq \mathbb{O}}, b)$$

durch die Forderungen

i) $(\mathbb{P}, \mathbb{U}, \{f_M\}_{M \in \mathbb{M} \subseteq \mathbb{O}})$ bogenweise zusammenhängende, *n*-dimensionale differenzierbare C^r -Mannigfaltigkeit

ii) $b = b(P)$ ein Feld von positiv definiten, symmetrischen, stetig differenzierbaren Bilinearformen

erklärt; wird “positiv definit” durch “von einem festen positiven Index” ersetzt, dann haben wir einen *n-dimensionalen pseudo-Riemannschen Raum*. Schon die umrissenen Begriffserklärungen zeigen, daß für die *Differentialgeometrie* die r -mal stetige Differenzierbarkeit, wobei über $r > 0$ noch geeignet verfügt werden kann, **g r u n d l e g e n d e** Voraussetzung ist. In der klassischen Kurven- und Flächentheorie reicht für die Lösung der meisten Problemstellungen dreimal stetige Differenzierbarkeit aus; so können Bogenlängen und Inhalte gekrümmter Flächen, Krümmungsmaße, Parallelverschiebung und Abbildungen von Flächen (einschließlich Kartennetzentwürfe), aber auch die Fundamentalsätze der Kurven- und Flächentheorie behandelt werden. Es gibt zahlreiche Anwendungen der Riemannschen Geometrie. Die Heimat der relativistischen Physik sind pseudo-Riemannsche Räume, wozu uns A. EINSTEIN (1879–1955, 1905, 1916) und H. MINKOWSKI (1864–1909) Brücken geschlagen haben. Es sei nur erwähnt, daß aufgrund der Krümmung des Raumes die Geraden, die in den Anfängen am besten über Lichtstrahlen zu realisieren sind, durch *Geodätische*, Kurven verschwindender geodätischer Krümmung, zu ersetzen sind. Übrigens hat die Entdeckung der Konstanz der (Vakuum-)Lichtgeschwindigkeit durch A.A. MICHELSON (1852–1931, 1881) ganz wesentlich die Entwicklung erst der speziellen und dann der allgemeinen Relativitätstheorie durch EINSTEIN initiiert.

4 Liesche Gruppen

Für den Logiker A. TARSKI bilden die von Stetigkeitsaxiomen unabhängigen Teile der Geometrie die *elementare* Theorie. D. HILBERT schließt im Hauptteil von [4] mit den oben zitierten Stetigkeitsaxiomen sein Axiomensystem ab und entwickelt so insbesondere für Lehrer die Elementargeometrie weitgehend ohne Stetigkeit. Im (später hinzugefügten) Anhang IV von [4] wird jedoch der konträre, von S. LIE (1842–99) entwickelte Standpunkt untersucht, bei dem die von infinitesimalen Transformationen erzeugte Bewegungsgruppe am Anfang steht. Zur begrifflichen Klärung der damit zusammenhängenden Fragen hat das anläßlich des 2. Internationalen Mathematikerkongresses 1900 in Paris formierte 5. Hilbertsche Problem “LIES Begriff der kontinuierlichen Transformationsgruppe ohne die Annahme der Differenzierbarkeit der die Gruppe definierenden Funktionen” beigetragen; insbesondere wurde der Begriff der Lieschen Gruppe präzisiert:

Eine C^r -Mannigfaltigkeit, die zugleich Gruppe ist und deren Grup-

penoperationen C^r -Abbildungen darstellen – kurz: $b^{-1} \cdot a \in C^r$ –, heißt *Liesche Gruppe*. Beispielsweise bilden die durch reguläre oder gar orthogonale reelle $n \times n$ -Matrizen bestimmten Abbildungsgruppen Liesche Gruppen der Dimension n^2 bzw. $\binom{n}{2}$, die sogenannte *lineare Gruppe* $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ bzw. die *orthogonale Gruppe* $\mathbf{O}(n)$.

HILBERT konnte schon feststellen, daß LIES Forderung nach der Differenzierbarkeit der “die Gruppe definierenden Funktionen” unter gewissen Voraussetzungen entbehrlich ist. Heute wissen wir, daß in der obigen Definition einer reellen Lieschen Gruppe u.a. sowohl $r = \omega$ (*analytische*, die Gruppe definierende Funktionen) als auch $r = 0$ (*kontinuierliche Gruppe*) gesetzt werden kann, weil jede kontinuierliche Gruppe bei geeigneter Wahl von Karten Liesche Gruppe der Klasse C^ω ist.

A n m e r k u n g 5. Mit Bezug zu seinem 5. Problem von 1900 untersucht HILBERT in [4, S. 178–230] eine Ebene mit e i n e r Karte und den folgenden Axiomen:

- I. *Die Bewegungen bilden eine Gruppe.*
- II. *Wenn A und M beliebige voneinander verschiedene Punkte der Ebene sind, so kann man den Punkt A durch Drehung um M stets in unendlichviele verschiedene Lagen bringen.*
- III. *Wenn es Bewegungen gibt, durch welche Punktetripel in beliebiger Nähe des Punktetripels ABC in beliebige Nähe des Punktetripels $A'B'C'$ übergeführt werden können, so gibt es stets auch eine solche Bewegung, durch welche das Punktetripel ABC genau in das Punktetripel $A'B'C'$ übergeht.*

Dabei werden *Bewegungen* als stetige, die Umlaufsinne erhaltende Punkttransformationen aufgefaßt, die im Fall der *Drehung um M* den Fixpunkt M besitzen. HILBERT beweist mit Hilfe vielfältiger Aussagen über Jordansche Kurven und Gebiete, daß *eine ebene Geometrie, in welcher die Axiome I–III erfüllt sind, entweder die Euklidische oder die Bolyai-Lobačevskijsche ebene Geometrie ist.*

5 Diskontinuierliche Bewegungsgruppen

Die Idee, daß ein Massenpunkt *sich unter der Wirkung einer stetigen Abbildungsgruppe bewegt* und dessen Bahn eine stetige Kurve darstellt, bildete die selbstverständliche naturwissenschaftliche Vorstellung. Die Optik, die Lehre vom Licht, hat in neuerer Zeit auch das ursprüngliche Grundverständnis von der Stetigkeit der Prozesse in Natur und Technik

erschüttert, obwohl seit den Anfängen der Geometrie Muster mit deckungsgleichen bzw. kongruenten “Wiederholungen” betrachtet wurden. Dieses Phänomen kann folgendermaßen präzisiert werden: Wir haben ein Muster M und eine Gruppe \mathbb{B} von Bewegungen τ , die das Muster festlassen: $M^\tau = M$ für alle $\tau \in \mathbb{B}$.

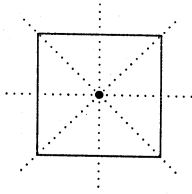


Abb. 4

In Abb. 4 ist M ein Quadrat, das bei den Drehungen der Ebene um seinen Mittelpunkt um $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ und 360° wie bei den Spiegelungen der Ebene an seinen Diagonalen bzw. Mittellinien und nur bei diesen acht Bewegungen als Ganzes festbleibt.

Die *Bahn* oder der *Orbit* $P^\mathbb{B}$ eines beliebigen Punktes P unter \mathbb{B} ist per definitionem die Menge $\{P^\tau : \tau \in \mathbb{B}\}$. In Abb. 4 wirkt \mathbb{B} *diskontinuierlich*, letztlich im hohen Grade unstetig; beispielsweise besteht die Bahn eines Eckpunktes gerade aus den vier Eckpunkten. Von Ornamenten abgeleitet finden wir als charakterisierende Eigenschaften *diskontinuierlicher Bewegungsgruppen* beispielsweise

$$(LEO) \quad \forall_{P, X, r > 0} \text{card}(U_r(X) \cap P^\mathbb{B}) < \infty$$

(lokale **E**ndlichkeit der **O**rbits gemäß [5])

$$(IPO) \quad \forall_P \exists_{r > 0} \text{card}(U_r(P) \cap P^\mathbb{B}) = 1$$

(**I**soliertheit der **P**unkte in ihrem **O**rbit gemäß [2]).

Zur Klassifikation der diskontinuierlichen Bewegungsgruppen der euklidischen Ebene \mathbb{E}^2 wird die Untergruppe $\mathbf{V} \subseteq \mathbb{B}$ der in \mathbb{B} enthaltenen Verschiebungen betrachtet. \mathbb{B} wird nun *Rosetten-, Fries-* bzw. *Wandmustergruppe* genannt, je nachdem ob \mathbf{V} null-, ein- oder zweidimensional ist.

- Eine Rosettengruppe hat stets einen Fixpunkt O . Sie ist eine Gruppe von Drehungen um O , wobei die Bahn eines Punktes $P \neq O$ aus den Ecken eines regelmäßigen n -Ecks besteht, d.h., die Drehwinkel betragen Vielfache von $\frac{360^\circ}{n}$, oder eine sogenannte Diedergruppe, die etwa aus obiger Drehgruppe durch Hinzunahme von n Spiegelungen an regelmäßig angeordneten Geraden durch O entsteht.
- Es gibt nur 7 Typen von Friesgruppen, wobei die durch \mathbf{V} bestimmte Richtung oder gar eine Achse dieser Richtung ausgezeichnet ist, so daß nur Drehungen mit Winkeln von 180° möglich sind.

- Es existieren 17 Typen von Wandmustergruppen. Bei ihnen gibt es aufgrund der *kristallographischen Beschränkung* nur die Drehwinkel von $60^\circ, 90^\circ, 120^\circ$ und 180° .

In \mathbb{E}^3 gibt es 230 Typen von *Raumgruppen*, diskontinuierliche Bewegungsgruppen mit dreidimensionalem \mathbf{V} (E.S. FJODOROV (1851–1919, 1890)/A. SCHOENFLIES (1853–1928, 1891)).

6 Verallgemeinerte diskontinuierliche Bewegungsgruppen

LEO und IPO, die in unendlich dimensionalen euklidischen Räumen nicht mehr äquivalent sind, erfassen die Deckabbildungsgruppen von Ornamenten, lassen aber gewisse Muster unberücksichtigt. Deshalb können, von LEO und IPO ausgehend, in *metrischen Räumen* schwächere Diskretheitsbedingungen gesucht werden. Nur durch Änderung in den Quantifizierungen erhalten wir, wenn wir noch die Abkürzungen $F(\mathbb{B}) := \{Y : Y^{\mathbb{B}} = \{Y\}\}$ und $\text{card}_{PXr} := \text{card}(U_r(X) \cap P^{\mathbb{B}})$ benutzen, folgendes Bedingungssystem

$D_0.$	Endlichkeit der Orbits (EO)	$D'_0.$	$\exists_{P \notin F(\mathbb{B})}$	$\text{card } P^{\mathbb{B}} < \infty$
$D_1.$	$\forall_{P, X, r > 0} \text{card}_{PXr} < \infty$ (LEO)	$D'_1.$	$\exists_{P \notin F(\mathbb{B})} \forall_{X, r > 0}$	$\text{card}_{PXr} < \infty$
$D_2.$	$\forall_P \exists_{r > 0} \text{card}_{PPr} = 1$ (IPO)	$D'_2.$	$\exists_{P \notin F(\mathbb{B})} \exists_{r > 0}$	$\text{card}_{PPr} = 1$
$D_3.$	$\exists_X \forall_P \exists_{r > 0} \text{card}_{PXr} \leq 1$	$D'_3.$	$\exists_{P \notin F(\mathbb{B}), X, r > 0}$	$\text{card}_{PXr} \leq 1$

Der logische Zusammenhang wird in Abb. 5 veranschaulicht; in metrischen Räumen mit nur totalbeschränkten Umgebungen $U_r(X)$ gilt $D_1 = D_2$ und $D'_1 = D'_2$. Die Bedingung D'_3 gestattet, auf dem Torus die Trennung periodischer von quasiperiodischen Bahnen. Die D'_3 -diskreten Bewegungsgruppen werden auch *schwach diskontinuierlich* genannt.

In [11] wurden alle schwach diskontinuierlichen Bewegungsgruppen der euklidischen Ebene \mathbb{E}^2 angegeben:

- Bei einer *verallgemeinerten Rosettengruppe* ist \mathbb{B}^+ eine beliebige Untergruppe der Gruppe aller Drehungen um O . Sie sind sämtlich D_3 -diskret.
- Alle 7 Typen von Friesgruppen lassen sich verallgemeinern. Die *verallgemeinerten Friesgruppen* sind D'_3 -diskret.

- Von den 17 Typen von Wandmustergruppen lassen gerade die 9 mit nur zweizähligen Drehzentren eine Verallgemeinerung zu, vier Typen jedoch zwei, so daß 13 *verallgemeinerte* Typen existieren, die dann “Streifenmuster” erzeugen.

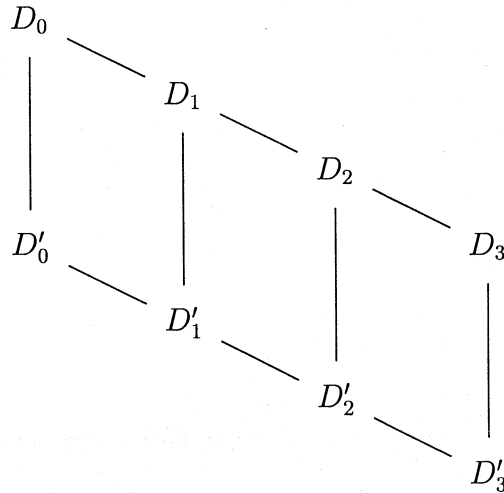


Abb. 5

Die schwach diskontinuierlichen Bewegungsgruppen sind dadurch gekennzeichnet, daß *infinitesimale Bewegungen existieren*, d.h. beliebig kleine, positive Beträge bzw. Normen und beliebig kleine, positive Drehwinkel bei Verschiebungen, Drehungen oder Schraubungen bezüglich \mathbb{E}^3 . D'_3 -diskrete Bewegungsgruppen \mathbb{B} können infinitesimale Verschiebungen enthalten, so daß der Zusammenhang zwischen \mathbf{V} und \mathbb{Z}^n unter einem neuen Blickwinkel zu sehen ist, insbesondere für Raumgruppen und $n = 3$ ist \mathbb{Z}^3 im allgemeinen mit einer unendlichen Gruppe zu erweitern, um eine zu $\mathbf{V}(= \mathbf{V}(\mathbb{B}))$ isomorphe Gruppe zu bekommen.

(A) Um einerseits Beziehungen zu den klassischen Raumgruppen zu erhalten, kann eine Erweiterung von \mathbb{Z}^3 in zwei Schritten erfolgen: Zunächst mit einer der bekannten endlichen Gruppen und dann mit einer von einer Dehnung in einer bzw. in zwei Richtungen erzeugten Gruppe, etwa mit dem Dehnungskoeffizienten 5. Das sind die Verallgemeinerungen mit *kristallographischer Beschränkung*.

(B) Andererseits wird, um echt neue Typen beschreiben zu können, zunächst \mathbb{Z} algebraisch oder transzendent so zu einem \mathbb{Z}^* erweitert, daß beispielsweise bis auf Isomorphie C_k mit \mathbb{Z}^{*2} verträglich wird, und dann eine zu $\mathbb{Z}^{*2} \times \mathbb{Z}$ isomorphe Verschiebungsgruppe V betrachtet; solche \mathbb{Z}^{*2} umfassen alle Quasigitter.

Zu (A). Von den 230 Typen diskontinuierlicher Raumgruppen lassen sich 194 je auf wenigstens zwei verschiedene Arten verallgemeinern; insgesamt können $2 \cdot 285 = 570$ neue Typen beschrieben werden. Dazu ist eine Fallunterscheidung mit 230 Fällen zu bewältigen.

Zu (B). Abschließend werden zunächst unendlich viele Beispiele für D'_3 -diskrete Bewegungsgruppen mit unendlicher Punktgruppe angegeben, die keine Erweiterungen von klassischen Raumgruppen sind. Dazu wird zunächst eine Gruppe mit infinitesimalen Elementen und einer zweidimensionalen Translationsgruppe konstruiert. Für eine natürliche Zahl $n = 5$ oder $n \geq 7$ werden die Translation t mit dem Vektor $e := (1, 0)$ und die Drehung d_n um den Winkel $2\pi/n$ als Erzeugende gewählt. Die zur Translationsgruppe gehörenden Vektoren bilden ein sogenanntes Quasigitter, das man auch nach Erweiterung von \mathbb{Z} durch $\cos(2\pi/n)$ und $\sin(2\pi/n)$ zu $\mathbb{Z}^*(n)$ als zweidimensionales $\mathbb{Z}^*(n)$ -Gitter auffassen kann. Zu seiner Symmetriegruppe gehört jede Drehung um einen Gitterpunkt um einen Winkel von $2k\pi/n$, $1 \leq k < n$. Erweitert man die Symmetriegruppe nochmals mit einer Verschiebung senkrecht zur Ebene des $\mathbb{Z}^*(n)$ -Gitters, erhält man Gruppen der gesuchten Art.

Außerdem kann ein beliebiger Winkel φ , $\varphi \notin \{2\pi/n : n \in \mathbb{N}\}$ gewählt und die obige Konstruktion mit φ statt $2\pi/n$ vorgenommen werden.

Es gibt unendlich viele Verallgemeinerungen ohne kristallographische Beschränkung; ihre Anzahl ist \aleph_0 bei Quasigittern, im allgemeinen $\aleph = \text{card } \mathbb{R}$. (KLOTZEK/WENDLAND).

References

- [1] Euklid: *Die Elemente, Übersetzung aus dem Griechischen von Clemens Thaer, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften*, Bd. 235, Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt a.M., 3. Auflage 1997.
- [2] L. Fejes Tóth: *Regular Figures*. Pergamon Press, Oxford 1964. Reguläre Figuren. Akademiai Kiado Budapest/B.G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1965.
- [3] C.F. Gauss: *Werke VIII*, B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1900.
- [4] D. Hilbert: *Grundlagen der Geometrie*, (1. Aufl. 1899) 14. Aufl., B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart 1999.
- [5] D. Hilbert und St. Cohn-Vossen: *Anschauliche Geometrie*. Verlag Julius Springer, Berlin 1932/2. Aufl. Berlin 1996.
- [6] B. Klotzek: *Einführung in die Differentialgeometrie*, 3. Aufl. Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt a.M. 1997.
- [7] B. Klotzek: *Euklidische und nichteuklidische Elementargeometrien*, Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt a.M. 2001.

- [8] B. Riemann: *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, 2. Aufl., Verlag Julius Spinger, Berlin 1921. (Neu herausgegeben und erläutert von H. Weyl.)
- [9] D. J. Struik: *Abriß der Geschichte der Mathematik*, 6. Aufl., Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1976. (Übersetzung aus dem Amerikanischen und Russischen).
- [10] H. Wussing: *Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1979/Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt a.M. 1989.
Vgl. auch
- [11] B. Klotzek: *Diskontinuierliche Bewegungsgruppen verschiedenen Grades in verschiedenen Geometrien*. In: P.L. Butzer, H.Th. Jongen, W. Oberschelp (Herausgeber), *Charlemagne and his Heritage: 1200 Years of Civilization and Science in Europe*. Vol. 2: *Mathematical Arts*, S. 257–271. Brepols Publishers, Turnhout 1998.

sowie die in [6], [7] und [11] angegebene Literatur.

Benno Klotzek
Universität Potsdam
Postfach 601553
14415 Potsdam
Germany