## 5.3. Rozvoj algebraické geometrie křivek

*Geometrie, ve svém širším významu, je věda, jejímž cílem je vyšetřování vlastností obrazců. Obrazec je vzájemný vztah ohraničených prostorů mezi sebou. To je tedy vlastnost křivek a ploch; křivky jsou hranice povrchů a plochy hranice těles.*

Lardner v roce 1831, [Lar31, str. xi]

Výraznější pokrok směrem k osamostatnění algebraické geometrie nebyl možný bez upevnění logických základů vhodného prostoru pro algebraicko-geometrické objekty a tím je projektivní prostor. I když základy některých partií projektivní geometrie položil Desargues (viz str. 100), jeho myšlenky nezaznamenaly větší ohlas a mnohé bylo v 19. století znovuobjevováno. Některé pojmy a věty projektivní geometrie byly uvedeny v pracích Mongeova žáka L. Carnota,[45] ale za tvůrce prvního uceleného systému projektivní geometrie lze považovat až J. V. Ponceleta. Ve spise z roku 1822 *Traité des propriétés projectives des figures (Traktát o projektivních vlastnostech útvarů)* položil základy projektivní geometrie budované syntetickou metodou. Použití algebry si vyžádalo až zavedení imaginárních prvků. K dalšímu rozvoji tohoto směru přispěl také Brianchon,[46] který v roce 1806 zformuloval duální větu k větě Pascalově.[47] Brianchon dospěl v práci z roku 1817 *Mémoire sur les lignes du* 2$^{\mathrm{d}}$ *ordre (Memoár o čarách 2. řádu)* téměř až k definici duality – stěžejního pojmu projektivní geometrie, ale nakonec tento pojem zavádí Poncelet. O vypracování algebraických metod projektivní geometrie se zasloužili zejména A. G. Möbius,[48] J. Plücker[49] a A. Cayley.[50] Přímku v trojrozměrném projektivním prostoru určenou body $A = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ a $B = (b_0, b_1, b_2, b_3)$ dodnes vyjadřujeme pomocí tzv. Plückerových souřadnic

$$p_{ij} = \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix}; \quad i, j = 0, 1, 2, 3; \quad i \neq j, \tag{5.7}$$

[45] Lazare Nicolas Marguérite Carnot (1753–1823); *De la corrélation des figures en géométrie (O korelaci útvarů v geometrii)*, 1801; *Géométrie de position (Geometrie polohy)*, 1803.

[46] Charles Julien Brianchon (1785–1864).

[47] Brianchonova věta: Spojnice průsečíků stran šestiúhelníka kuželosečce opsaného procházejí jedním bodem. Pascalova věta viz str. 101.

[48] Augustus Ferdinand Möbius (1790–1868).

[49] Julius Plücker (1801–1868).

[50] Arthur Cayley (1821–1895).

které jsou vzájemně svázané vztahem

$$p_{01}p_{23} + p_{02}p_{31} + p_{03}p_{21} = 0. \tag{5.8}$$

Současně se intenzivně rozvíjí i metody syntetické projektivní geometrie v pracích J. Steinera[51] a M. Chaslese.[52] Chasles v pracích *Traité de géométrie superieure (Traktát o vyšší geometrii)* z roku 1852 a *Traité des sections coniques (Traktát o kuželosečkách)* z roku 1865 rozvíjí výstavbu projektivní geometrie lineárních útvarů, kuželoseček a kvadratických ploch na základě elementárních útvarů, projektivních transformací a dvojpoměru.

V souvislosti s pokrokem algebraických metod v projektivní geometrii se v první polovině 19. století vydělila z analytické geometrie jako samostatný celek teorie algebraických křivek vyššího stupně. Tento jev je historiky matematiky většinou považován za vznik algebraické geometrie jako samostatné vědní disciplíny.[53] Základním prostorem pro studium algebraických křivek se stala projektivní rovina, v homogenních projektivních souřadnicích se pevně ustálilo používání nevlastních a imaginárních prvků.

## 5.3.1. Julius Plücker

Algebraický základ některých základních pojmů projektivní geometrie (homogenní souřadnice, nevlastní a imaginární prvky, dualita apod.) vytvořil Plücker už v dvoudílné knize *Analytisch-geometrische Entwicklungen (Analyticko-geometrické výzkumy)* I, II, 1828-31. V práci z roku 1835 *System der analytischen Geometrie (Systém analytické geometrie)* opravil mnoho Eulerových nepřesností v klasifikaci křivek 4. stupně. Sám se však dopustil některých nových omylů. Významným přínosem bylo úplné vyjasnění počtu inflexních bodů kubické křivky a stanovení všech typů singularit křivek 4. stupně. V práci z roku 1839 *Theorie der algebraischen Curven (Teorie algebraických křivek)* Plücker zkoumá důležité invarianty rovinné algebraické křivky:

$n$ – *stupeň* – maximální možný počet průsečíků křivky s přímkou,

$m$ – *třída* – maximální možný počet tečen křivky jdoucích jedním bodem,

$u$ – počet uzlových bodů křivky,

[51] Jacob Steiner (1796–1863).
[52] Michel Chasles (1793–1880).
[53] Viz např. [Fuc96b, str. 88].

$v$ – počet bodů vratu křivky,

$i$ – počet inflexních bodů křivky,

$t$ – počet dvojnásobných tečen křivky.

Využil své algebraické metody projektivní geometrie na stanovení vztahů mezi těmito číselnými invarianty, které jsou dnes nazývány Plückerovy vzorce – vztahy (5.9), (5.10) a duální Plückerovy vzorce – vztahy (5.11), (5.12):

**Tvrzení.** Pro křivku stupně $n$, která kromě $u$ uzlových bodů a $v$ bodů vratu nemá jiné singularity, platí:

$$m = n(n-1) - 2u - 3v \tag{5.9}$$

$$i = 3n(n-2) - 6u - 8v \tag{5.10}$$

$$n = m(m-1) - 2t - 3i \tag{5.11}$$

$$v = 3m(m-2) - 6t - 8i. \tag{5.12}$$

Použitím duality Plücker ukázal, že pro přímky projektivní roviny je možné zavést přímkové souřadnice $(u_0, u_1, u_2)$, pomocí nichž všechny tečny křivky

$$f(x_0, x_1, x_2) = 0$$

lze vyjádřit jistou rovnicí $\varphi(u_0, u_1, u_2) = 0$. Přičemž křivky

$$C_f : \; f(x_0, x_1, x_2) = 0,$$
$$C_\varphi : \; \varphi(u_0, u_1, u_2) = 0$$

jsou navzájem duální a jejich body, tečny i číselné invarianty bijektivně korespondují.

K rozvoji teorie algebraických křivek přispěl také L. Hesse.[54] Ke křivce o rovnici $f(x_0, x_1, x_2) = 0$ studoval příslušnou křivku stupně $3n(n-2)$ zadanou rovnicí

$$\left\| \frac{\delta^2 f}{\delta x_i \delta x_j} \right\| = 0, \tag{5.13}$$

která se ukázala jako důležitá při zkoumání inflexních bodů a dostala po něm název ***Hesseho křivka***.

Algebraickou teorii křivek završil Salmon[55] pracemi *Treatese on the higher plane curves (Traktát o vyšších rovinných křivkách)* z roku 1852 a

[54] Lugwig Otto Hesse (1811–1874).
[55] George Salmon (1819–1904).

CONTENTS.

| | PAGE. |
|---|---|
| CHAPTER I. | |
| TANGENTIAL CO-ORDINATES, | 1 |
| CHAPTER II. | |
| GENERAL PROPERTIES OF ALGEBRAIC CURVES. | |
| I.—Number of Terms in the General Equation, | 16 |
| Theorems hence derived, as to the Intersections of Curves, | 21 |
| II.—Multiple Points and Tangents of Curves, their Nature illustrated, | 26 |
| Points of Inflexion, | 35 |
| III.—Theorem of continued Product of Segments of a Transversal, | 43 |
| Diameters, | 47 |
| Poles and Polars, | 51 |
| Their Equations found in general, | 55 |
| IV.—General Investigation of Multiple Points and Tangents, | 61 |
| V.—Theory of Reciprocal Curves, | 90 |
| VI.—Envelopes, how found, | 92 |
| Equations of Reciprocal Curves calculated, | 98 |
| Theory of Evolutes, | 104 |
| Caustics, | 115 |
| VII.—Foci, | 119 |
| VIII.—Tracing of Curves, | 128 |
| CHAPTER III. | |
| CURVES OF THE THIRD DEGREE. | |
| I.—Principal Forms of the Equation illustrated, | 131 |
| II.—Properties of their Points of Inflexion, | 139 |
| III.—Analysis of their different possible Figures, | 143 |
| IV.—Properties of their Poles and Polars, | 148 |
| V.—Considerations respecting their Double Points, | 157 |
| VI.—Special Methods for Cubics of the Third Class, | 164 |
| VII.—Special Methods for Cubics of the Fourth Class, | 170 |
| VIII.—Focal Properties of Circular Cubics, | 172 |
| IX.—Discussion of the General Equation, | 181 |

xii CONTENTS.

| | PAGE. |
|---|---|
| CHAPTER IV. | |
| CURVES OF THE FOURTH DEGREE, | 195 |
| CHAPTER V. | |
| TRANSCENDENTAL CURVES, | 205 |
| CHAPTER VI. | |
| GENERAL METHODS. | |
| Transformation of Curves, | 226 |
| Geometrical Methods, | 243 |
| CHAPTER VII. | |
| APPLICATIONS OF THE INTEGRAL CALCULUS. | |
| Quadrature of Curves, | 249 |
| Rectification of Curves, | 255 |
| Trajectories and Involutes, | 271 |
| Elliptic Co-ordinates, | 276 |
| Successive Evolutes of Curves, | 279 |
| NOTES. | |
| On Linear Transformations, | 283 |
| On Poles and Polars by Tangential Co-ordinates, | 284 |
| On Elimination, | 285 |
| On Imaginary Points and Lines, | 301 |
| On Curves of Pursuit, | 306 |
| On obtaining Focal Properties by Inversion, | 306 |
| On the ultimate Involute of a Curve, | 307 |

**Tabulka 5.1:** Obsah Salmonova spisu *A treatise on higher plane curves: Intended as a sequel to a treatise on conic sections* z roku 1852, viz [Sal25]

*Modern higher algebra (Moderní vyšší algebra)* z roku 1859. Tyto spisy jsou koncipovány jako učebnice[56] Představu o tom, co tehdy teorie křivek zahrnovla je možno si udělat podle obsahu Salmonova spisu – viz tabulka 5.1. Podrobná studie prací Salmona a jejich porovnání se spisem Lardnera *A Treatise on Algebraic Geometry*[57] i dalšími spisy z 19. století již zcela přesahuje možnosti této práce.[58]

[56]Salmon napsal v letech 1848–1862 čtyři spisy koncipované jako učebnice *A treatise on conic sections* (1848), *A treatise on higher plane curves: Intended as a sequel to a treatise on conic sections* (1852), *Lessons introductory to the modern higher algebra (1859)* a *A treatise on the analytic geometry of three dimensions* (1862).

[57]Viz [Lar31].

[58]Domníváme se, že si tato tematika zasluhuje samostatnou studii.

### 5.3.2. Biracionální transformace

Všechny lineární transformace mají společné některé vlastnosti: zachování incidence, invariantnost dvojpoměru čtyř bodů na přímce, invariantnost stupně algebraické křivky, invariantnost násobnosti bodů, resp. tečen algebraické křivky. Dnes bychom řekli, že to jsou všeobecné vlastnosti projektivní grupy. Nápadnou vlastností, kterou se liší nelineární geometrické transformace od lineárních, je všeobecně různost algebraické křivky a stupně jejího obrazu v transformaci. Příkladem takové transformace je kruhová inverze v rovině, zobrazující přímku na kružnici, kterou se zabýval už Apollónios (viz str. 50). Inverze se objevují i v matematice 17. století, avšak teprve ve století 19. přichází v souvislosti s rozvojem projektivní a neeukleidovské geometrie větší vlna zájmu o tato zobrazení. Zpočátku zůstává spíše u studia speciálních případů, ale studium algebraických křivek vede v šedesátých letech 19. století k zobecnění těchto metod. Impulsem byla snaha transformovat algebraické křivky v reálné (resp. i komplexní) projektivní rovině tak, aby se snížil „stupeň“ jejich singularity.

První krok v tomto směru učinil L. Cremona.[59] Nelineární algebraické transformace, které použil na transformaci křivek v práci *Sulle transformazioni geometriche delle figure piane (O geometrických transformacích rovinného útvaru)* z roku 1862, se staly základem pro budování teorie biracionálních transformací.[60] Postupně se staly objektem samostatného zkoumání a daly podnět k rozvoji ucelené oblasti algebraické geometrie. Největší zásluhy na jejím budování měli příslušníci italské školy algebraické geometrie a od roku 1870 škola německá, zejména M. Noeter,[61] E. Noeter[62] a B. L. Waerden.[63] Z Cremonovy italské školy algebraické geometrie jmenujme zejména F. Brioschiho[64] a E. Bettiho.[65]

[59] Antonio Luigi Gaudenzio Giuseppe Cremona (1830–1903).

[60] Na Cremonovu počest bývají někdy biracionální transformace nazývány Cremonovy.

[61] Max Noeter (1844–1921).

[62] Emmy Amalie Noeter (1882–1935).

[63] Bartel Leendert van der Waerden (1903–1996).

[64] Francesco Brioschi (1824–1897).

[65] Škola, do níž jsou zahrnováni Corrado Segre (1863–1924), Giuseppe Veronese (1854–1917), Federigo Enriques (1871–1946), Guido Castelnuovo (1865–1952), Francesco Severi (1879–1961) a další rozpracovávala směr, který udali v Německu Clebsch a Noeter a který navazuje na výsledky anglických algebraických geometrů.