Historický vývoj pojmu křivka

5.1 Funkce a podněty matematické analýzy

In: Lenka Lomtatidze (author): Historický vývoj pojmu křivka. (Czech). Brno: Nadace Universitas v Brně, 2007. pp. 171–174.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401114

teorie algebraických křivek vyššího stupně. Tento jev je historiky matematiky většinou považován za vznik algebraické geometrie jako samostatné vědní disciplíny.[8] Algebraickému pohledu na křivky se věnujeme v sekci 5.3.

V sekcích 5.2, 5.3 sledujeme vývoj teorie křivek přibližně do poloviny 19. století, kdy v pojetí křivky nastává výrazná změna definicí variety u B. Riemanna. Přínosu B. Riemanna se věnujeme samostatně v sekci 5.4. Na závěr této kapitoly uvádíme krátké pojednání o pojetí křivky u B. Bolzana, což je z historického hlediska velmi zajímavé, ale na další vývoj teorie křivek neměly Bolzanovy práce žádný vliv (viz sekce 5.5).

5.1. Funkce a podněty matematické analýzy

Nikdo neumí vysvětlit, co to je funkce.
Ale: „Funkce f je dána, jestliže je každému reálnému číslu a přiřazeno nějakým určitým předepsaným způsobem číslo b [...]*“.* Weyl v roce 1927.

[Juš76b, str. 82]

Pojem funkce pravděpodobně poprvé použil Leibniz v roce 1673 v rukopise *Methodus tangentium inversa, seu du functionibus (Inverzní metoda tečen nebo–li o funkcích).*[9] Pojetí funkce se ještě u samotného Leibnize postupně vyvíjí. V první fázi je funkce chápána zcela geometricky, pojem funkce je pevně spojen s křivkou a její tečnou v daném bodě. Funkcemi Leibniz nazývá úseky na osách objevující se při konstrukci tečny a dalších přímek příslušných danému bodu (normála, chorda apod.); řeší i úlohu opačnou: jak najít ordinály bodů křivky, jestliže pro danou křivku a tečný bod splňují nějakou funkci. Zatímco v prvním případě jsou pro něj funkcemi křivky průměty a úseky na osách jakožto objekty, v druhém případě rozumí funkcí jisté geometrické pravidlo.

Poprvé Leibniz publikoval své původní pojetí funkce jako obecného termínu pro různé lineární elementy pevně spojené s křivkou v *Acta Eruditorum* v roce 1692. V letech 1692–94 se pojem funkce objevuje také v korespondenci mezi bratry Johannem a Jacobem Bernoulliovými a Leibnizem. Jacob Bernoulli používá v roce 1694 v *Acta Eruditorum* také termín *Functionslinie (funkční čára)*, čímž míní křivku.[10] Jak jsme

[8] Viz např. [Fuc96b, str. 88].

[9] Viz [Juš70, str. 144]. Tento rukopis některé historické práce opomíjejí, např. [Can01, str. 5] uvádí rok 1692.

[10] Viz [Can01, str. 242].

ukázali v předchozí kapitole, kladl se postupně stále větší důraz na rovnice křivek a pozornost matematiků se přesouvala od křivek jako geometrických objektů na symboly v těchto rovnicích. Proměnná veličina začala být chápána jako hodnota závislá na ostatních konstantách a proměnných v rovnici a nikoliv na křivce samotné. Tento posun se odráží i v korespondenci mezi Leibnizem a Joh. Bernoullim. Postupně pojem funkce ztrácí svůj striktně geometrický charakter a klade se větší důraz na souvislost s rovnicí než s obrázkem – Joh. Bernoulli píše o *funkci proměnné* místo o *funkci křivky.* Kromě toho Leibniz považuje Descartovy názvy užité v klasifikaci křivek za nevyhovující a rozděluje v roce 1684 křivky na algebraické a transcendentní. Motivem odklonu od Descartovy terminologie byla skutečnost, že i mechanické křivky začaly být studovány v geometrii.[11]

Pod pojmem funkce se stále častěji rozumí analytický výraz. Toto pojetí bylo vlastní i Newtonovi. Poprvé formuluje definici pojmu funkce Joh. Bernoulli v roce 1718.

Funkcí proměnné veličiny se nazývá veličina sestavená libovolným způsobem z této proměnné veličiny a konstant.[12] [Ber42, str. 241, II]

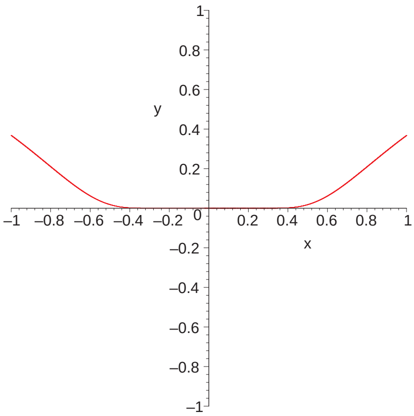
V polovině osmnáctého století byl pojem chápán jako analytický výraz reprezentovaný mocninnou řadou a v tomto smyslu je zformulována definice v knize Eulera *Introductio in Analysin Infinitorum* z roku 1748 (viz odstavec 5.2.1). Hned na počátku 19. století se pojem funkce stal centrálním objektem zkoumání matematické analýzy. Matematická analýza se formovala jako teorie o manipulování s funkcemi a rozvíjel se soubor prostředků pro vyšetřování vlastností funkcí nebo pro jejich vyhledávání (určování funkcí s danými vlastnostmi). Tím, jak vlastně jednotliví matematici v té době chápali pojem funkce, se zabývá řada prací z historie matematiky.[13] Jisté je, že vžitá představa funkce dané jedním a týmž analytickým výrazem všude tam, kde ji lze vyšetřovat, již byla nereálná. Přesto se ještě v devatenáctém století s tímto pojetím ztotožňovala řada matematiků. Např. Lagrange na pojetí funkce jako mocninné řady budoval celou analýzu.[14] Postupně se ale začíná ukazovat, že toto pojetí nestačí. Jednak jsou známy křivky, které nejde popsat

[11] Viz [Juš70, str. 104].

[12] *On apelle ici fonction d'une grandeur variable, une grantité composée de quelque manère que ce soit de cette grandeur variable et de constantes.*

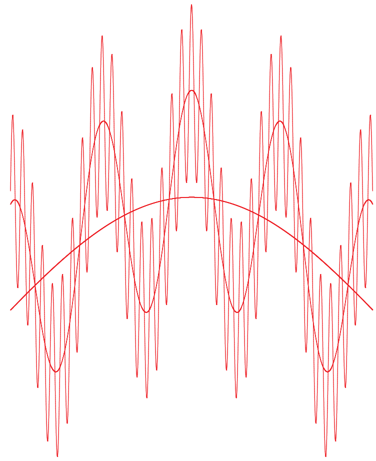
[13] U nás se tomuto tématu věnoval v několika článcích Š. Schwabik – viz např. [Sch00] nebo [Fuc96a, str. 7–17].

[14] Joseph-Louis Lagrange (1736–1813).



Obrázek 5.2: Příklad funkce, která není analytická

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t^2}} & \text{pro } t \neq 0 \\ 0 & \text{pro } t = 0, \ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$



Obrázek 5.3: První tři členy řady spojitých funkcí pomocí nichž je definovaná Weierstrassova spojitá funkce, která nemá nikde derivaci.

analytickým výrazem (viz obr. 5.2), jednak se takové neanalytické výrazy objevují v souvislosti s některými fyzikálními jevy.[15]

Pojem souvislosti na přelomu 18. a 19. století souvisel spíš s představou spojitosti grafu a veškeré funkce, které se vyšetřovaly, byly v nejhorším případě po částech hladké a s nejvýše konečným počtem bodů nespojitosti v každém konečném intervalu. Představu o tom, že funkce, které lze vyšetřovat, musí být spojité, narušil Fourier v roce 1822.[16] Další představa vžitá na počátku 19. století, která měla být brzy „rozbita“, s pojmem křivka také bezprostředně souvisí. Předpokládalo se, že spojitá funkce, kterou si mnozí představovali jako geometrický objekt namalovaný rukou bez zvednutí tužky z papíru, musí mít derivaci všude až na několik izolovaných bodů. Do povědomí matematiků se nesprávnost tohoto tvrzení dostala plně až po roce 1872, kdy o takovém protipříkladu referoval K. Weierstrass[17] v berlínské akademii. Weierstrassův příklad

[15] Např. při vyšetřování kmitů se objevují výrazy typu $\alpha \sin \frac{\pi x}{a} + \beta \sin \frac{2\pi x}{a} + \gamma \sin \frac{3\pi x}{a} + \cdots$. Viz [Beč01, str. 7].

[16] Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830), *Théorie analytique de la chaleur (Analytická teorie tepla)*, 1822.

[17] Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897).

spojité funkce, která nemá derivaci v žádném bodě publikoval P. du Bois Reymond v roce 1895.[18] Jde o funkci definovanou předpisem

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a^i \cos(b^i \pi x), \tag{5.1}$$

kde $b > 1$ je liché číslo, $0 < a < 1$ a platí $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$ (viz obr. 5.3). Podobných příkladů bylo následně sestrojeno více.[19] Jak uvidíme v kapitole šesté, tyto poznatky matematické analýzy se staly stěžejními podněty k tomu, že se na křivku přestalo pohlížet jako na graf funkce.

Na závěr poznamenejme, že v roce 1922 byl v rukopisech B. Bolzana[20] objeven příklad spojité funkce, která dle něj neměla derivaci v „husté množině“. V. Jarník následně ukázal, že funkce, která je v rukopise uvedena, nemá derivaci nikde.[21] Vzhledem k tomu, že rukopis byl dokončen roku 1834, Bolzano tím předběhl vývoj světové matematiky o několik desetiletí, ale práce nikdy nevyšla, takže tím vývoj matematiky nebyl nijak ovlivněn. Dalším Bolzanovým myšlenkám, které se bezprostředně týkají křivek, se věnujeme v sekci 5.5.

5.2. Diferenciální geometrie křivek do roku 1854

5.2.1. Leonhard Euler

V knize L. Eulera[22] *Introductio in Analysin Infinitorum* z roku 1748 je poprvé k pojmu funkce přistupováno jako k ústřednímu pojmu matematické analýzy. Euler uvádí, že

funkce proměnné veličiny je analytický výraz sestavený jakýmkoliv způsobem z této proměnné veličiny a čísel nebo konstantních veličin. [Beč01, str. 8]

[18]P. du Bois Reymond: *Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen reeler Argumente nach ihren Aenderungen in den kleinsten Intervallen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 79, 1875, str. 21–37.

[19]Např. Jean Gaston Darboux (1842–1917) sestrojil takovou funkci danou předpisem

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} = \frac{\sin((n+1)! \cdot x)}{n!}.$$

[20]Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781–1848).

[21]V. Jarník, *O funkci Bolzanově*, Časopis pro pěstování matematiky a fyziky, 51 (1922), str. 248–264. Přehledná konstrukce Bolzanovy funkce včetně dalších zajímavých komentářů viz [Sch00, str. 75-76].

[22]Leonhard Euler (1707–1783).