

Historický vývoj pojmu křivka

4.5 Počátky diferenciální geometrie křivek

In: Lenka Lomtadze (author): Historický vývoj pojmu křivka. (Czech). Brno: Nadace Universitas v Brně, 2007. pp. 161–163.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/401111>

Terms of use:

© Lomtadze, Lenka

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

Tvrzení. Je dán pevný bod O . Jestliže tímto bodem vedeme dvě přímky a, b , které protínají křivku třetího stupně v bodech A_1, A_2, A_3 a B_1, B_2, B_3 , potom podíl součinu velikostí úseček vyřatých na přímkách a a b je konstantní a nezávislý na poloze bodu O , tj.

$$\frac{|OA_1| \cdot |OA_2| \cdot |OA_3|}{|OB_1| \cdot |OB_2| \cdot |OB_3|} = konst. \quad (4.23)$$

Poznamenejme, že od Newtona pochází i obecnější formulace:

Tvrzení. Jsou dány dva pevné body O a P . Jestliže těmito body vedeme rovnoběžné přímky r, s , které protínají křivku n -krát v bodech R_1, R_2, \dots, R_n a S_1, S_2, \dots, S_n , potom podíl součinu velikostí úseček $OR_i, i = 1, \dots, n$, vyřatých na přímce r a velikostí úseček $PS_i, i = 1, \dots, n$, vyřatých na přímce s je konstantní a nezávislý na rovnoběžkách, tj.

$$\frac{|OR_1| \cdot |OR_2| \dots |OR_n|}{|PS_1| \cdot |PS_2| \dots |PS_n|} = konst. \quad (4.24)$$

4.4.5. Alexis Clairaut

Stirling podal mimořádně cenné komentáře k práci Newtona, ale nemohl dokázat jednu z nejdůležitějších vět (viz věta 4.1) to udělal až Clairaut.⁷¹ Clairautův přínos pro geometrii byl neobyčejný. Už ve svých 12 letech překvapil pařížské akademiky prací o některých křivkách čtvrtého stupně.⁷²

Protože některé úlohy v Clairautově spise z roku 1731 *Recherches sur les courbes à double courbure* (Pojednání o křivkách s dvojitou křivostí) jsou řešeny metodami diferenciální geometrie, budeme se mu podrobněji věnovat v následujícím odstavci.

4.5. Počátky diferenciální geometrie křivek

Připomeňme Descartův názor o vztahu mezi přímkou a křivkou

[...] *poměr, který je mezi přímými a křivými není znám, a myslím si, že ani lidmi poznán být nemůže, nebylo by možno vyvodit nic, co by bylo přesné a jisté; [...]* [Des37, str. 340–341]

⁷¹Alexis Claude Clairaut (1713–1765).

⁷²V jeho autorství prý uvěřili teprve po té, co jim správně zodpověděl všechny otázky, které mu položili. Viz [Juš72, str. 160].

Těžko dnes soudit, zda Descartes svou geniální intuicí předpovídal to, co bylo dokázáno teprve roku 1882. Najít poměr mezi *mezi příkými a křivými* v podstatě znamená najít k dané křivce úsečku stejné délky, tj. rektifikovat křivku. Některé křivky rektifikovat lze, ale např. provést rektifikaci kružnice přesně nelze. Znamenalo by to najít úsečku délky 2π . Aby bylo možno takovou konstrukci provést přesně,⁷³ muselo by číslo π být číslo algebraické.⁷⁴ Roku 1882 však bylo dokázáno, že číslo π je transcendentní.⁷⁵ Každopádně ze 17. a 18. století pochází řada postupů užívajících výpočtů vedoucích k dostatečně přibližným výsledkům. Rektifikace křivek patřila spolu s konstrukcí tečen, normál apod. také k důležitým úlohám, na nichž se formovaly a ověřovaly počátky infinitezimálního počtu.

Nejstarší případ rektifikace algebraické křivky je rektifikace semikubické paraboly (viz str. 138). Wallisem uveřejněný výsledek z roku 1659 bychom v dnešní symbolice zapsali následovně: Délka oblouku semikubické paraboly v intervalu $\langle 0, x \rangle$ pro $p = 1$ je

$$\int_0^x \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{8}{27} \left[\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right].$$

Na přelomu 17. a 18. století se objevuje také snaha připojit ke každé křivce funkci, která říká, jak moc se křivka v každém bodě „ohýbá“. Stupeň ohybu udává tzv. křivost křivky. V roce 1684 Leibniz publikoval *Meditatio nove de natura anguli contactus et osculi* (*Nové zamýšlení o povaze úhlů styčných a dotykových*), kde podává první myšlenky o křivosti.

Stejně jako je přímka vhodná pro určení směru, protože její směr je všude stejný, je kružnice vhodná pro určení křivosti, protože její křivost je všude stejná. [Gra94, str. 332]

Leibniz uvažoval danou křivku jako *osculovanou* kružnicí v každém bodě.⁷⁶ Kompletní teorii osculací později rozvinul Jacob Bernoulli.

Dříve než Leibniz našel analytické vyjádření křivosti Newton, ale jeho výsledky byly publikovány mnohem později, teprve roku 1736 v *Method of fluxions* (*Metodě fluxí*).

⁷³Míněno algebraicky přesně, nikoliv použit některou z přibližných metod, které jsou dobře známy z technické praxe.

⁷⁴Algebraické číslo je takové číslo, které lze získat jako kořen nějaké algebraické rovnice s racionálními koeficienty.

⁷⁵Důkaz podal K. L. F. Lindemann (1852–1939) a lze ho najít např. v [Fuc87, str. 112–113].

⁷⁶Od Leibnize tedy pochází termín oskulační kružnice, z latinského *osculare* – líbat.

Kružnice křivosti je kružnice s vlastností, že není možné nakreslit jinou kružnici, která by byla v úhlu mezi křivkou a kružnicí. Říkáme, že křivka má v bodě dotyku stejnou křivost jako tato kružnice. [Gra94, str. 332]

Newton vypočítal její poloměr na základě vyšetřování normál křivky ve třech nekonečně blízkých bodech

$$r = \frac{(1 + z^2)^{\frac{3}{2}}}{\dot{z}},$$

kde $z = \frac{y}{x}$, přičemž symbol tečka označuje to, co dnes nazýváme derivací.

Newton uvažoval jen rovinné křivky. Prvním rozsáhlým pojednáním o křivkách prostorových byl až Clairautův spis z roku 1731 *Recherches sur les courbes à double courbure (Pojednání o křivkách s dvojitou křivostí)*,⁷⁷ který byl pařížské akademii předložen už v roce 1729. Byl jedním z prvních pokusů o diferenciální geometrii křivek a obsahuje patrně první soustavnou aplikaci analytické geometrie na prostorové útvary. Clairaut definuje prostorové křivky jako průsečnice dvou válcových ploch a analyticky je vyjádřil soustavou rovnic. Bez zábran a v plném rozsahu Clairaut kromě rovnice koule, rotačního kužele a rotačního paraboloidu odvodil rovnice některých složitějších rotačních ploch – elipsoidu, jednodílného rotačního hyperboloidu a plochy vznikající rotací paraboly kolem tečny ve vrcholu. Nalezl rovnici kužele s daným vrcholem a řídicí křivkou, ve speciálních případech uvažoval paraboly, hyperboly a elipsy vyšších řádů. Všiml si, že v případě, kdy vrchol je v počátku souřadnic, je rovnice homogenní.

Pozoruhodné pojednání o křivosti křivek a ploch je dílem L. Eulera (viz odstavec 5.2.1).

4.6. Odkaz „století křivek“ pro další vývoj

V předchozí kapitole jsme byli svědky zrodu mocného nástroje ke zkoumání křivek (a geometrických objektů obecně) – analytické geometrie. Descartova a Fermatova analytická geometrie nejen že poskytla metodu kvantitativního zvládnutí geometrických tvarů, ale umožnila vytvářet geometrické křivky do té doby neznámé a obrátila tímto směrem pozornost geometrů. Historikové matematiky se však všeobecně shodují

⁷⁷Termín „křivka s dvojitou křivostí“ pochází ze skutečnosti, kterou předpokládal už Descartes, že prostorová křivka je určena svými dvěma průměty do dvou k sobě kolmých průmětů; poprvé tento termín předložil pařížský akademik Henri Pitot (1695–1771) v *Mém. Ac. Paris* v roce 1727 (1726), aby zdůraznil podstatný rozdíl mezi šroubovicí na válci a spirálou v rovině. Viz [Juš72, str. 175].