Staroegyptská matematika. Hieratické matematické texty

Výpočet obsahu plochy

In: Hana Vymazalová (author): Staroegyptská matematika. Hieratické matematické texty. (Czech). Praha: Český egyptologický ústav FF UK, 2006. pp. 41–45.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401075

Terms of use:

© Vymazalová, Hana

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

I.6 Výpočet obsahu plochy

Úlohy počítající obsah plochy různých obrazců jsou známy z Rhindova a moskevského papyru. Jsou zadány zpravidla jako úlohy vztahující se k vyměřování polí.[6] Výraz pro pole, egyptsky *aḥet*, který se v těchto úlohách objevuje, však můžeme chápat také jako pojem označující obecně plochu.

Jednotky, ve kterých se počítá, nejsou v úlohách vždy zmíněny. Písaři nicméně museli být schopni se v jednotkách dobře orientovat, což je pochopitelné vzhledem k důležitosti zeměměřičských výpočtů pro tehdejší život v nilském údolí.

Čtyřúhelník

Obdélník se v textech označuje výrazem *ifed*, v moskevském papyru také výrazem *pet*, a jeho obsah se počítá vynásobením délek jeho stran. Delší strana se nazývá *aw*, kratší strana *wesech*.

R49: $a = 10,\ b = 2$

$$1\,000 \cdot 100 = 100\,000$$
$$\tfrac{1}{10} \cdot 100\,000 = 10\,000$$
$$\tfrac{1}{10} \cdot 10\,000 = 1\,000 = S$$

Výpočet odpovídá rozměrům 10×1, přestože zadání uvádí 10×2. Zajímavé je převádění jednotek během výpočtu, které mohlo být jedním z úkolů k procvičení v této jednoduché úloze.

M6: $S = 12,\ a \cdot (\frac{1}{2} + \frac{1}{4}) = b$

$$1 \div (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}) = 1 + \tfrac{1}{3}$$
$$12 \cdot (1 + \tfrac{1}{3}) = 16$$
$$\sqrt{16} = 4 = a$$
$$(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}) \cdot 4 = 3 = b$$

Zadán je obsah pravoúhelníku a vztah mezi oběma jeho rozměry. Výpočet obsahuje několik písařských chyb. Zajímavé je, že na konci úlohy je zapsána i část písemného výpočtu, který se v moskevském papyru obvykle vynechává.

M18: $a =$5 loktů 5 dlaní, $b =$3 dlaní

5 loktů = 35 dlaní

[6] Vyměřování polí tvořilo významnou součást egyptského hospodářství. Hranice polí se vytyčovaly opakovaně každý rok poté, co se rozvodněná řeka navrátila do svého koryta a zemědělské práce mohly začít.

$5 \cdot 2 = 10$

$(31 + 10) \cdot 80$

V tomto případě úloha není zadána na příkladu pole, ale kusu látky. Metoda počítání obsahu plochy se tedy procvičovala v různém kontextu. Písař se však dopustil chyby již na začátku počítání a úloha zůstala nedokončená.

Káhúnský papyrus obsahuje úlohu, jež snad řeší také obsahy plochy.[7] Její zadání a začátek výpočtu se nedochovaly, nicméně se zdá, že problém se zabývá rozdělením plochy o rozměrech 40×3 na deset stejných obdélníků, jejichž poměr stran je stanoven vztahem $b = (\frac{1}{2} + \frac{1}{4}) \cdot a$.

K5: $40 \cdot 3 = 120$

$\frac{1}{10} \cdot 120 = 12$

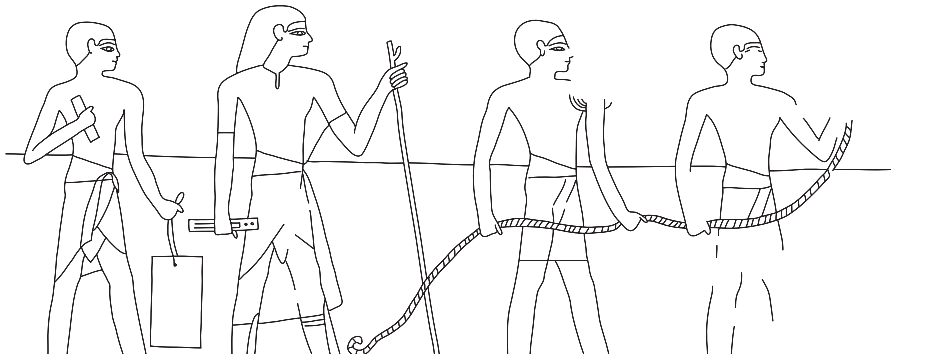
$1 \div (\frac{1}{2} + \frac{1}{4}) = 1 + \frac{1}{3}$

$12 \cdot (1 + \frac{1}{3}) = 16$

$\sqrt{16} = 4 = a$

$(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}) \cdot 4 = 3 = b$

Obsah zadané plochy je rozdělen na deset částí. Rozměry deseti shodných čtverců se potom spočítají pomocí zadaného vztahu mezi jejich rozměry. Tyto kroky výpočtu se zcela shodují s úlohou M6.



Vyměřování pole. Písař opírající se o hodnostářskou hůl, doprovázený mladým učedníkem, dohlíží na dva asistenty, kteří provádějí potřebná měření za pomoci silného lana. Džeserkaresenebova hrobka v západních Thébách, 18. dynastie

[7] Přepis a překlad papyru publikované F. L. Griffithem (*Hieratic Papyri from Kahun and Gurob*, London 1898) naznačují, že se mohlo jednat o výpočet objemů, avšak S. Couchoud se pokusila prokázat, že se jedná o rozdělování plochy (*Mathématiques égyptiennes*, Paris 1993, s. 136–138). Intepretace úlohy tedy není zcela jednoznačná.

Trojúhelník

Trojúhelník se v textech označuje výrazem *sepdet* a vždy se jedná o trojúhelník rovnoramenný. Jeho základna se nazývá *tep-r*, zatímco *merejet* označuje zřejmě výšku.[8] Obsah se počítá převedením trojúhelníku na obdélník se stejným obsahem, což vyjadřuje fráze „spočítej polovinu x (délka základny), abys udal jeho obdélník“. Písaři se tedy nejen učili tento typ problému vypočítat, ale rovněž měli pochopit postup řešení a některá obecně platná pravidla geometrie.

R51: $v = 10$ *chet*, $a = 4$ *chet*

$\frac{1}{2} \cdot 4 = 2$

$10 \cdot 2 = 20 = S$

Postup řešení je jasný, polovina délky základny rovnoramenného trojúhelníku se vynásobí jeho výškou. V závěru úlohy se výsledných 20 *chet*^{2} přepočítá na 2 000 loktů^2 a poté na jednotky *cha-ta*.

M4: $v = 10$, $a = 4$

$\frac{1}{2} \cdot 4 = 2$

$10 \cdot 2 = 20 = S$

Tato úloha se shoduje s příkladem R51. Rozměry zadaného trojúhelníku i postup řešení jsou totožné, v moskevském papyru však nejsou uvedeny jednotky ani převody. Shoda úloh ve dvou různých textech může naznačovat, že při výuce matematiky se používaly vzorové příklady z jakéhosi jednotného zdroje.

M7: $S = 2$, $a : b = 2 + \frac{1}{2}$

$S \cdot 2 = 40$

$40 \cdot (2 + \frac{1}{2}) = 100$

$\sqrt{100} = 10$

$1 \div (2 + \frac{1}{2}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$

$10 \cdot (\frac{1}{3} + \frac{1}{15}) = 4$

$a = 10$, $b = 4$

V tomto případě je zadán obsah a je třeba najít rozměry. Zadán je obsah 2, avšak počítá se s obsahem 20. Jedná se tedy opět o tentýž obrazec jako v úlohách R51 a M4. Zdvojnásobením obsahu trojúhelníku se získá obsah odbělníku se shodnými rozměry, poté se spočítá obsah čtverce o délce strany rovné delšímu rozměru trojúhelníku. Odmocněním se získá první

[8]Někteří odborníci soudí, že výraz *merejet* označuje délku strany trojúhelníku. Viz např. W. B. Chace, *The Rhind Mathematical Papyrus*, Oberlin 1979, s. 36.

rozměr, což je výška. Délka základny se již snadno vypočítá ze zadaného vztahu mezi oběma rozměry.

M17: $S = 20,\ b = (\frac{1}{3} + \frac{1}{15}) \cdot a$

$$20 \cdot 2 = 40$$
$$1 \div (\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{15}) = 2 + \tfrac{1}{2}$$
$$40 \cdot (2 + \tfrac{1}{2}) = 100$$
$$\sqrt{100} = 10 = a$$
$$(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{15}) \cdot 10 = 4 = b$$

Úloha je totožná s M7, avšak vztah mezi oběma rozměry trojúhelníku je zadán jiným způsobem. Moskevský papyrus tedy pravděpodobně zkouší, nakolik se počtář orientuje v problémech, které se liší v maličkostech.

Rhindův matematický papyrus obsahuje ještě tři další výpočty zabývající se obsahem trojúhelníku, a to R53–R55. Tyto úlohy sestávají z písemných výpočtů, které doprovází náčrtek. Vysvětlující komentáře však chybějí a je značně obtížné úlohy interpretovat. Je docela dobře možné, že všechny tři úlohy spolu souvisejí, a že se tedy nejedná o tři různé nezávislé příklady.[9]

R53: $(1 + \frac{1}{4}) \cdot (4 + \frac{1}{2}\ secat) = 5 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\ secat$

$$\tfrac{1}{10} \cdot (13 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}) = 1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8}\ secat$$
$$5 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{8} + 1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} = 7\ secat$$
$$7 \cdot (3 + \tfrac{1}{4}) = 15 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\ secat$$
$$\tfrac{1}{2} \cdot (15 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}) = 7 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8}\ secat$$

R54: rozdělení plochy 7 *secat* na 10 polí:

$$7 \div 10 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5}$$
$$10 \cdot (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{8}\ secat + 7 + \tfrac{1}{2}\ me\d{h}\text{-}ta) = 7\ secat$$

R55: rozdělení plochy 3 *secat* na 5 polí:

$$3 \div 5 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{10}$$
$$5 \cdot (\tfrac{1}{2}\ secat + 10\ me\d{h}\text{-}ta) = 3\ secat$$

Co se skrývá za výpočty v úloze R53, není příliš jasné, a je pravděpodobné, že část výpočtů chybí. Úlohy R54 a R55 rozdělují určitou plochu na několik částí. Výsledek se v obou případech spočítá v prvním kroku výpočtu a ve druhém kroku potom následuje zkouška. Přitom se výsledek z jednotek *secat* převede na *secat* + *meḥ-ta*.

[9] Viz např. presentace A. Gennara s titulem „A consistent solution of the problem 53 in the Rhind mathematical papyrus“ na *The Eighth International Congress of Egyptologists, Cairo 28 March – 3 April 2000.*

Lichoběžník

Obsah lichoběžníku *ḥaket* se počítal převedením na rovnoramenný trojúhelník, jehož délka základny je rovna součtu obou základen lichoběžníku, tedy podle vztahu $S = \frac{(a+c)\cdot v}{2}$. Termíny označující delší základnu a výšku jsou tytéž jako u trojúhelníku, kratší základna se nazývá *pa-ḥaket*, tedy to, co charakterizuje lichoběžník *ḥaket*.

R52: $v = 20$, $a = 6$, $c = 4$

$a + c = 6 + 4 = 10$

$\frac{1}{2} \cdot 10 = 5$

$20 \cdot 5 = 10 = S$

Rozměry lichoběžníku jsou zadány v jednotkách *chet*, zatímco písemné výpočty jsou v loktech. Na místě výsledku je chybně zapsáno 10 místo správné hodnoty 100.

Kruh

Kruh, egyptsky *deben*, byl určován délkou poloměru. Staroegyptská matematika nepracovala s hodnotou π, ani tuto veličinu nijak nepopisovala. Obsah kruhu se počítal převedením na čtverec o přibližně stejném obsahu. Strana čtverce přitom byla rovna $\frac{8}{9}$ poloměru zadaného kruhu.[10] Výsledky těchto výpočtů odpovídají $\pi = 3{,}16$, chyba vzniklá touto metodou je tedy vcelku zanedbatelná.

R48: $8 \cdot 8 = 64$

$9 \cdot 9 = 81$

Úloha sestává ze dvou písemných výpočtů, které postrádají slovní vysvětlení. Doprovodný obrázek naznačuje, že výpočty porovnávají obsah kruhu a čtverce, jejichž průměr a délka strany jsou stejné: $d = a = 9$. První výpočet se týká kruhu a vychází ze vztahu $S = (d - \frac{1}{9} \cdot d)^2 = (9-1)^2 = 8^2$. Druhý výpočet počítá obsah čtverce.

R50: $d = 9$

$9 - \frac{1}{9} \cdot 9 = 9 - 1 = 8$

$8 \cdot 8 = 64$

Tato úloha vzorově předvádí počítání obsahu kruhu. Slovní popis řešení doprovází písemný výpočet.

[10] O možném způsobu odvození metody používané k počítání obsahu kruhu pojednává článek H. Engelse „Quadrature of the Circle in Ancient Egypt“, *Historia Mathematica* 4 (1977), s. 137–140.