ZO ŽIVOTA A DIELA KARLA PELZA

ZITA SKLENÁRIKOVÁ[1]

1. Životopis a profesionálna kariéra

Karel Pelz bol jedným z najvýraznejších predstaviteľov českej geometrickej školy popri bratoch Weyrovcoch, Janovi Sobotkovi, Vincencovi Jarolímkovi a ďalších. Podľa Gina Loriu[2] *„Karel Pelz zaujal čestné miesto medzi vedcami, ktorí zasvätili všetko vlastné úsilie deskriptívnej geometrii. Vedel v jej prospech zúžitkovať najrozhodujúcejšie pokroky dovŕšené v priebehu 19. storočia v geometrii polohy*[3]*, najmä v teórii kužeľosečiek. Podarilo sa mu pridať k tejto disciplíne niekoľko dôležitých strán položiac tak príklad, ktorý v záujme poznania, kiež by bol mnohými nasledovaný.“*

Karel Pelz sa narodil 2. októbra 1845 v Bělči u Křivoklátu. Vyrastal v lone křivoklátskych lesov, kde bol jeho otec kniežacím hájnikom. Otec však padol za obeť pytliakom a tak Pelz už v detstve osirel. Po absolvovaní reálky v Rakovníku študoval na českom polytechnickom ústave v Prahe (1864–1869). V tomto rozhodujúcom období formovania deskriptívnej geometrie ako vedeckej disciplíny v sústave matematických vied bol priaznivý vplyv tamojšej katedry deskriptívnej geometrie na študentov a mladých vedeckých pracovníkov umocnený príchodom dvoch významných osobností: Františka Tilšera, druhého profesora katedry deskriptívnej geometrie pre prednášky české (po nečakanej smrti Rudolfa Skuherského)[4] a hlavne Wilhelma Fiedlera, prvého profesora katedry deskriptívnej geometrie pre prednášky nemecké (Fiedlerove prednášky z *novšej geometrie* boli v tom čase prvými prednáškami z tohoto predmetu v Rakúsku).

V prvom roku pražského pobytu študoval Pelz deskriptívnu geometriu u Tilšera. V druhom roku navštevoval tie isté prednášky u Fiedlera, u ktorého absolvoval aj prácne konštrukčné cvičenia k prednáške s výsledkom tak vynikajúcim, že si tieto Fiedler vyžiadal na pamiatku.

---

[1] Práca vznikla za podpory grantu VEGA č. 1/3024/06

[2] Gino Loria (19. 5. 1862 – 30. 1. 1954), významný taliansky matematik a historik v oblasti histórie matematiky

[3] *geometria polohy, novšia/nová geometria* = projektívna geometria

[4] Záslohou Skuherského sa deskriptívna geometria na pražskej polytechnike vymanila z roly pomocnej disciplíny a stala sa samostatným odborom s dvojnásobnou hodinovou dotáciou v porovnaní s predchádzajúcim obdobím. Viac podrobností o systemizácii katedier deskriptívnej geometrie v Rakúsko-Uhorsku sa možno dozvedieť v [15].

Pelz okrem toho absolvoval s aktívnym zaujatím aj Fiedlerove nepovinné prednášky z *novšej geometrie*. Vzťah učiteľa a žiaka prerástol do vzájomnej sympatie; zo strany Fiedlera to bola pomoc (i materiálna) a prajnosť, z Pelzovej strany úcta a obdiv k svojmu učiteľovi a k jeho zaujatosti a prínosu pre projektívnu a deskriptívnu geometriu.

Karel Pelz (1845–1908)

Svedčí o tom ich vzájomná celoživotná korešpondencia.[5] Príznačnou vlastnosťou oboch mužov bola takpovediac vrodená dôkladnosť a svedomitosť vo všetkom konaní. [18]

[5]Fiedler odišiel r. 1867 na technickú vysokú školu do Zürichu, kde zaujal post profesora pre deskriptívnu geometriu. Udržiaval s Pelzom kontakt temer do posledných Pelzových dní; učiteľ prežil svojho žiaka o viac než štyri roky.

Počas štúdia sa zoznámil Pelz s oboma bratmi Emilom i Eduardom Weyrovcami; vzťah k Emilovi sa vyvinul do trvalého celoživotného priateľstva, i keď im osud nedoprial žiť blízko seba. Obaja vrúcne milovali Prahu; túžba žiť v tomto meste sa naplnila len Pelzovi na sklonku života. Karel Pelz sa podielal na vydaní prvej vedeckej práce Emila Weyra, a to vyhotovením piatich tabuliek obrázkov, ktoré boli podstatnou súčasťou spisu.[6]

Po absolvovaní techniky r. 1869 nastúpil Pelz na asistentské miesto kresliča pri c. k. ústrednom ústave pre meteorológiu a zemský magnetizmus vo Viedni. Už po roku sa vrátil do Prahy na miesto asistenta deskriptívnej geometrie u profesora Karla Küppera, ktorý prevzal katedru deskriptívnej geometrie po Fiedlerovom odchode z Prahy. Na tomto mieste Pelz pracoval až do roku 1875, keď sa stal profesorom štátnej reálky v Těšíne. V tomto období mal už uverejnených viacero vedeckých prác, čo mu vyslúžilo pozvanie na miesto profesora na vyššiu priemyslovku do Kamenice v Sasku. Než prišlo k dojednaniu podmienok profesúry, bol vymenovaný r. 1876 za profesora krajinskej reálky v sídelnom meste vysokých škôl Grazi (Štajerský Hradec) a ponuku do Kamenice neprijal.

V Grazi, už ako uznaný vedecký pracovník, nastúpil súčasne aj svoju akademickú dráhu, najprv ako súkromný docent pri tamojšej vysokej škole technickej. Jeho prednášky však vzbudili takú pozornosť, že ho zbor školy už po dvoch rokoch prijal na miesto mimoriadneho profesora pre deskriptívnu geometriu. Bol to pre Pelza predovšetkým prejav uznania, a ocenenie jeho vedeckej a učiteľskej práce, no pre najbližšiu budúcnosť to znamenalo značný nárast povinností, keď k učiteľskému úväzku na reálke pristúpila záväzne jeho akademická činnosť na technike. V tomto postavení však nezotrval dlho. Po neočakávanej smrti Emila Koutného [15] sa r. 1881 stal Karel Pelz riadnym profesorom pre deskriptívnu geometriu na technickej vysokej škole v Grazi a zotrval na tomto poste pätnásť najkrajších a najplodnejších rokov svojho života.

V roku 1891 dostal Pelz ponuku profesorského miesta pre deskriptívnu geometriu na technickú vysokú školu vo Viedni. Vinou postupu vyjednávaní z viedenskej strany ponúknuté miesto neprijal. R. 1896 opakovane ponuku do Viedne zamietol, aby už v tom istom roku, na základe verejného konkurzu, prijal profesorský post na pražskej českej vysokej škole technickej po odchode F. Tilšera do dôchodku. Blahodarné pôsobe-

[6] Autor spisu sa o nich s vďakou zmieňuje v predhovore; sám nebol totiž dobrým kresličom a Pelz bol temer jediný, od koho sa v tom čase dalo očakávať korektné a rýchle vyhotovenie tejto časti práce. (Ide o spis *„Theorie der mehr-deutigen geometrischen Elementargebilde und der algebraischen Kurven und Flächen als deren Erzeugnisse“*, 1869)

nie Karla Pelza na pražskej technike bolo však už poznačené chorobou; v Prahe napísal len jednu vedeckú prácu venovanú princípu a vlastnostiam stereografického premietania. Z jeho korešpondencie a spomienok priateľov je však zrejmé, že sa stále zaoberal hlavne konštrukčnými problémami, ktoré mu nebolo dopriate dopracovať na úroveň publikovania. V písomnom kontakte zostával hlavne s bývalými kolegami z Grazu. Úprimne bol oddaný Fr. Mertensovi, ktorý tam tiež pôsobil (neskôr Mertens získal profesorské miesto na viedenskej univerzite). Pelz nerád z Prahy odchádzal, chcel si jej užiť čo najviac. Mal viacero záľub. Jeho zbierka fotografií významných matematikov[7], o vedeckých zásluhách a životných osudoch ktorých vedel zaujímavo a fundovane rozprávať, sa rozrástla na stovky kusov. Bol vôbec milovníkom vynikajúcich memoárov, rád rozprával hlavne o Prahe. Jan Sobotka napísal: *„Je čo ľutovať, že Pelz nenapísal memoáre – predovšetkým o vedeckom dianí a pražských kultúrnych i spoločenských zaujímavostiach. Iste by bol dokázal písať ako znalec a zasvätenec povolaný nad iných“* [18]. R. 1904 bol Pelzovi udelený titul a hodnosť c. k. dvorského radcu; zaslúženého odchodu do dôchodku sa však nedožil.

Karel Pelz zomrel 16. júna 1908 v Prahe. Pochovaný je spolu s manželkou na pražskom Slavíne (Vyšehrad).[8]

2. Vedecké dielo

Meno Karla Pelza je úzko späté s vrcholným rozvojom deskriptívnej geometrie, ktorý bol zavŕšený Emilom Müllerom[9] a jeho žiakmi v prvej tretine 20. storočia. Jeho vedecké práce boli citované, ocenené a uplatnené temer vo všetkých spisoch venovaných tejto matematickej disciplíne. Praha sa nemalou mierou zaslúžila o rozvoj nových geometrických metód na prelome 19. a 20. storočia a od druhej polovice šesťdesiatych rokov devätnásteho storočia prežila celú epochu úspešného rozmachu v geometrii – začínajúc príchodom W. Fiedlera na vtedajší krajinský polytechnický ústav, cez rýchlo rastúci ohlas bratov Weyrovcov, príchod Jana Sobotku na pražskú univerzitu a mnohých ďalších, medzi ktorými zaujal Pelz rázovité a význačné miesto. Vedecké dielo K. Pelza (celkom 34 prác) sa dotýka dvoch hlavných oblastí – syntetickej teórie kužeľose-

[7] Zbierka je majetkom Českej akadémie vied. [18]

[8] S poľutovaním konštatujem, že v prameňoch mne dostupných nebola žiadna zmienka o rodinnom živote tohto významného deskriptívneho geometra. Plánujeme sa preto v rámci ďalšieho výskumu zamerať hlavne na pražský pobyt Karla Pelza (jeho pôsobenie na pražskej vysokej škole technickej, rodinný život a spoločenské aktivity).

[9] O živote a diele Emila Müllera, vrcholného predstaviteľa viedenskej geometrickej školy, sa možno dozvedieť v [16].

čiek, kriviek a plôch a vedeckej výstavby zobrazovacích metód. (Zoznam prác je v chronologickom poradí uvedený v závere tohto príspevku.)

2.1 Syntetická teória kužeľosečiek, kriviek a plôch

Jedným z prvých problémov, ktorými sa Pelz zaoberal, bolo určenie tzv. *„lesklých bodov“* kružnice a elipsy (za predpokladu, že svetelný zdroj a oko pozorovateľa ležia v rovine danej krivky). V prvom prípade previedol úlohu na konštrukciu spoločných dotyčníc kružnice a pomocnej paraboly, v druhom na určenie spoločných bodov danej elipsy a pomocnej cirkulárnej kubiky. Elegancia postupov a dosiahnutých výsledkov inšpirovali holandského geometra P. H. Schoutena (1846–1913), ktorý napríklad dokázal, že algebrická rovinná krivka stupňa m má $m \cdot (2m-1)$ lesklých bodov ležiacich na krivke stupňa $2m$ prechádzajúcej nevlastnými bodmi danej krivky.

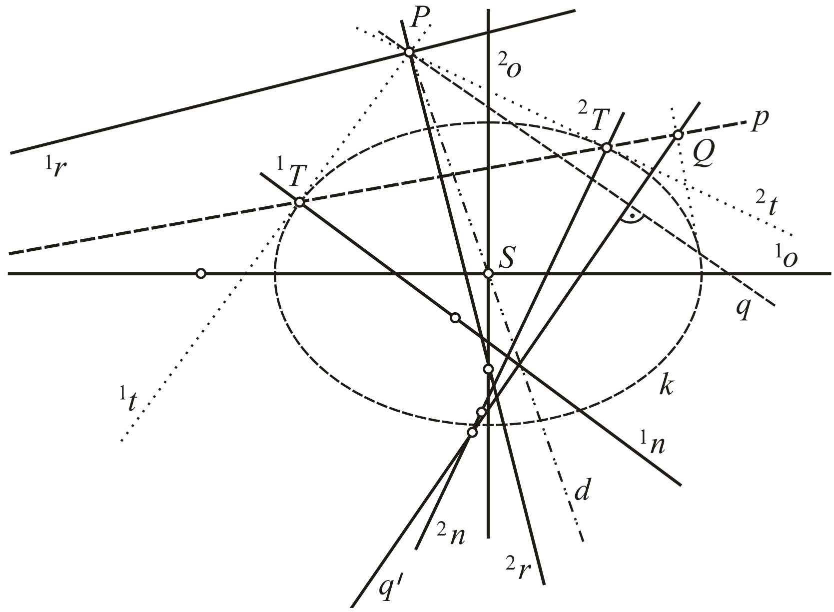
Značná časť prác K. Pelza je venovaná kvadratickým plochám (kvadrikám), ich vlastnostiam a zobrazeniu (obrysy kvadrík, obrysy ich priemetov, konštrukcie osí, osí a ohnísk obrysov priemetov, problémy súvisiace s osvetlením, t. j. konštrukcie hraníc vlastných a hodených tieňov v rovnobežnom i stredovom osvetlení, atď.). Riešenie problémov vedie napospol k úlohám o kužeľosečkách. V mnohých z nich sa môžeme stretnúť s veľmi dômyselným použitím a zovšeobecnením nasledujúcej Steinerovej[10] vety: *„Dotyčnica a normála v bode stredovej kužeľosečky sú spolu s osami kužeľosečky dotyčnicami jednej paraboly, ktorej dotykový bod s normálou je stredom krivosti danej kužeľosečky vo zvolenom bode.“* Pelz nazval túto parabolu *Steinerovou parabolou* a dokázal nasledujúcu vetu:

Veta 1. Nech k je ľubovoľná stredová kužeľosečka, P ľubovoľný bod s ňou neincidentný a p jeho polára vzhľadom na kužeľosečku k. Ak označíme Q ľubovoľný bod priamky p a q jeho poláru vzhľadom na kužeľosečku k, tak platí: pre všetky body Q priamky p je množina združených polár q' k poláre q (vzhľadom na kužeľosečku k) kolmých na priamku q obálkou jednej paraboly.[11]

Poznámka 1. Dotyčnicami paraboly z vety 1 sú aj osi ${}^io$ $(i = 1,2)$ kužeľosečky k, jej normály ${}^in$ v bodoch ${}^iT \in p \cap k$ $(i = 1,2)$, priamka p a osi ${}^ir$ uhlov dotyčníc ${}^it = \overleftrightarrow{{}^iTP}$ $(i = 1,2)$. Určujúcou priamkou paraboly je priemerová priamka PS danej kužeľosečky k. Na obr. 1 je vyznačených niekoľko dotykových bodov paraboly na spomenutých dotyčniciach.

[10] Jacob Steiner (1796–1863), profesor geometrie na berlínskej univerzite, jeden z najvýznamnejších nemeckých geometrov 19. storočia

[11] Túto parabolu nazývame *Steinerova-Pelzova parabola* prislúchajúca bodu P a danej kužeľosečke k.



Obr. 1

Jedným z najzávažnejších problémov, ktoré ponúka teória kvadrík, je určenie osí danej kvadratickej plochy. Pelz riešil tento problém v [7], a to špeciálne pre kvadratickú kužeľovú plochu (na tento prípad možno previesť konštrukciu osí ľubovoľnej kvadriky). Dve konštrukčné riešenia problému uviedol bez dôkazu M. Chasles v Aperçu historique[12]. V úvode práce Pelz dokázal správnosť oboch Chaslesových konštrukcií spôsobom jemu vlastným, jednoducho a úsporne, a následne odvodil celkom originálne nové, elegantné a hlavne jednoduchšie riešenie. Uvedieme aspoň náčrt hlavnej myšlienky Pelzovho riešenia.

Nech K je daná kužeľová plocha určená kužeľosečkou k v rovine α a vrcholom V. Takmer celé riešenie úlohy sa bude robiť v rovine α, preto vrchol V určíme jeho kolmým priemetom V' do tejto roviny a vzdialenosťou $d = |V, \alpha| = |VV'|$. Pod osami x, y, z plochy K rozumieme tri navzájom kolmé priamky, pre ktoré platí, že každá z nich je polárne združená s rovinou určenou zvyšnými dvoma vzhľadom na plochu K.[13]

[12] *Michele Chasles* (1793–1880), jeden z najväčších francúzskych matematikov 19. storočia (Aperçu historique sur l'origine et le dèveloppement des méthodes en géometrie, II. ed., Paris, 1875)

[13] Takýchto trojíc priamok môže byť nekonečne mnoho, napríklad v prípade rotačnej

Ak existuje trojica priamok x, y, z požadovanej vlastnosti, tak trojhran nimi určený je autokonjugovaný vzhľadom na plochu K, odkiaľ vyplýva, že trojuholník XYZ ($X = x \cap \alpha$, $Y = y \cap \alpha$, $Z = z \cap \alpha$) je autokonjugovaným (polárnym) trojuholníkom vzhľadom na kužeľosečku $k = \mathsf{K} \cap \alpha$ a navyše bod V' je jeho ortocentrum[14] (obr. 2b). Pelz hľadá nevyhnutné a dostačujúce podmienky existencie takého trojuholníka. Jednoduchým spôsobom dokazuje, že všetky jeho strany sa dotýkajú paraboly p, ktorej dotyčnicami sú osi ${}^io$ ($i = 1, 2$) kužeľosečky k, polára bodu V' a symetrály ${}^ih$ uhlov sprievodičov bodu V' vzhľadom na kužeľosečku k (jej ohniská sú ${}^iF$ ($i = 1, 2$)). Ohnisko P paraboly p je diagonálnym bodom štvorstranu určeného dvojicami dotyčníc ${}^io$, ${}^ih$ ($i = 1, 2$) (obr. 2a). Priamka $V'X$, resp. $V'Y$, resp. $V'Z$ je združenou polárou priamky YZ, resp. XZ, resp. XY kolmou na túto priamku. Pretože obálkou paraboly p je množina združených polár k priamkam zväzku priamok so stredom V', ktoré sú kolmé na odpovedajúce priamky zväzku, musia vrcholy polárneho trojuholníka ležať na polárnom útvare k tejto obálke. Touto bodovou množinou je rovnoosová hyperbola k_1, ktorej asymptoty sú rovnobežné s osami kužeľosečky k, prechádza jej stredom S, ako aj bodom V' (dotyčnica t hyperboly v bode V' je združenou polárou k poláre bodu V', k nej kolmou). Hyperbola k_1 je určená; označme jej stred S_1 a druhý krajný bod priemeru hyperboly prechádzajúceho bodom V' nech je Q (navyše body S, P, Q sú kolineárne).[15]

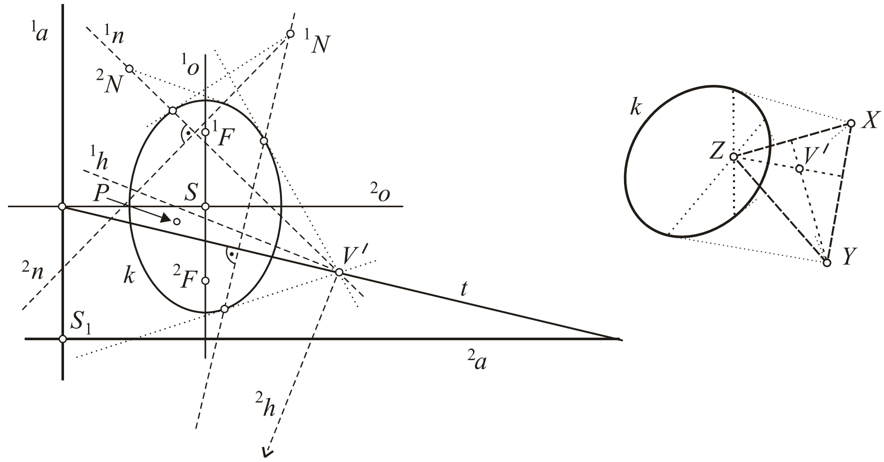
Ďalej Pelz dokazuje, že kružnica l opísaná trojuholníku XYZ prechádza pevnými bodmi P a Q. Každá kružnica zväzku kružníc incidentných s bodmi P, Q má vo všeobecnom prípade okrem bodu Q spoločné s hyperbolou k_1 ďalšie tri body, ktoré sú vrcholmi polárneho trojuholníka (vzhľadom na danú kužeľosečku k) s ortocentrom V'. Na záver treba vybrať tú z kružníc zväzku, pre ktorú sú priamky spájajúce vrchol V kužeľovej plochy K s vrcholmi polárneho trojuholníka na tejto kružnici navzájom kolmé. Táto podmienka je splnená práve vtedy, keď kružnica l prechádza antipólom O priemerovej priamky hyperboly k_1 kolmej na priamku $V'S_1$ vzhľadom na dištančnú kružnicu k^d vrcholu V kužeľovej plochy.[16] Potom $l \cap k_1 = \{Q, X, Y, Z\}$ a priamky VX, VY, VZ sú riešením úlohy ([7]).

kužeľovej plochy.

[14] *Poznámka.* Ak sa ďalej bude hovoriť o polarite, či polárnej združenosti (bez doplňujúcich údajov), budeme mať vždy na mysli polaritu / polárnu združenosť vzhľadom na určujúcu kužeľosečku k v rovine α.

[15] Bod Q zo zrejmých dôvodov na obr. 2a označený nie je; ide o bod, pre ktorý platí $(V'QS_1) = -1$.

[16] Kružnica k^d so stredom V' a polomerom d je kružnicou roviny α. Kružnica l je antiinverzná s kružnicou deviatich bodov prislúchajúcou trojuholníku XYZ; stred an-



Obr. 2a, b

Ďalším originálnym prínosom Karla Pelza pre riešenie úloh súvisiacich s konštrukciou obrysov priemetov kvadrík a analogického problému, dotýkajúceho sa konštrukcie hranice hodeného tieňa kvadriky tak v rovnobežnom, ako aj v stredovom osvetlení, je zovšeobecnenie už vtedy významnej vety *Queteletovej-Dandelinovej* (Q-D veta). Pelz stanovil nutné a dostačujúce podmienky riešenia vyššie uvedených úloh pre všetky regulárne kvadriky s výnimkou jednodielneho rotačného hyperboloidu a hyperbolického paraboloidu, pre ktoré treba na riešenie použiť iný postup. Pelzovo zovšeobecnenie znie:

Veta 2. Obrysom priemetu kvadratickej plochy v rovnobežnom i stredovom premietaní do roviny patriacej do osnovy kružnicových rezov plochy je kužeľosečka, ktorej ohniská sú priemety krajných bodov priemeru plochy združeného s osnovou rovín rovnobežných s priemetňou (vzhľadom na danú plochu).[17]

---

tiinverzie je bod V' a koeficient sa rovná $-d^2$. (Platí: $|V'O|\cdot|V'S_1| = d^2$.) Pelz uviedol v práci veľmi *podrobné dôkazy* všetkých tvrdení. Časť dôkazu venovanú vlastnostiam a konštrukcii kružnice l autor ilustroval na prípade, v ktorom je zvolená kužeľosečka k hyperbolou.

[17]Veta o obryse priemetu rotačnej kvadriky (s výnimkou jednodielneho rotačného hyperboloidu) je jednoduchým dôsledkom tejto vety. Ohniská v tomto prípade sú priemety vrcholov plochy.

Pelz sa vrátil k tejto vete aj vo svojej poslednej práci venovanej stereografickému premietaniu.[18] Práca demonštruje, ako z Q-D vety celkom spontánne vychádzajú všetky vlastnosti tohto zobrazenia. Pelz poznamenal: *„Len málo viet priestorovej geometrie zohráva vo vyučovaní deskriptívnej geometrie tak závažnú rolu ako táto veta – pre jej početné a mnohostranné použitie v disciplíne, o ktorej je reč“.*

S ohľadom na rozsah a zameranie príspevku nebudú sa tu analyzovať ďalšie Pelzove práce z tejto oblasti. Pripomenieme si už len dve vety, ktoré sa označujú ako Pelzove vety [2], [18], pomocou ktorých možno dokázať Chaslesovu vetu uvedenú bez dôkazu v poznámke XXVI v Aperçu historique.

Veta 3. Ohniská priemetov rovnobežných rovinných rezov danej kvadriky rovinami, ktoré sú rovnobežné s priemetňou, ležia na dvoch kužeľosečkách. Tieto kužeľosečky sú konfokálne s obrysom priemetu plochy.[19]

Veta 4. Ohniská dvojdielneho rotačného hyperboloidu, predĺženého rotačného elipsoidu a rotačného paraboloidu sa v pravouhlom premietaní premietajú do ohnísk obrysov priemetov týchto plôch. Obrysy pravouhlých priemetov jednodielneho rotačného hyperboloidu a splošteného rotačného elipsoidu sú konfokálne s priemetom kružnice, ktorá vznikne rotáciou ohniska meridiánu plochy.[20]

Z hľadiska dôležitosti tematiky, originality a jednoduchosti postupov v riešení problému si pozornosť zasluhujú i práce (14), (22) a (32) (z uvedeného zoznamu Pelzových prác).

2.2 Vedecká výstavba zobrazovacích metód

Hlavnou zásluhou Karla Pelza je sprecizovanie základov pravouhlej axonometrie ako autonómnej zobrazovacej metódy. Pelz sa problémom začal zaoberať s ušľachtilým cieľom *„opraviť niektoré chybné úsudky v spisoch venovaných tejto metóde“* ([5]). Ako prvý obrátil pozornosť na axonometrický trojuholník a dokázal, že týmto trojuholníkom a s ním spojeným ortogonálnym súradnicovým trojhranom (ktorý je axonometrickým trojuholníkom zadaný[21]) je pravouhlá axonometria určená. Vyriešil s úplnosťou všetky základné metrické úlohy o základných geomet-

[18] Hlavné vety stereografického premietania ako dôsledky Q-D vety. In: Věstník královské české společnosti nauk v Praze, 1898.

[19] Možno dokázať, že v prípade rovnobežného premietania veta platí pre ľubovoľnú osnovu rovín neobsahujúcu priemetňu.

[20] Analogické vety, ktoré sa dotýkajú osvetlenia plôch a sú dôsledkami viet 2-4 možno nájsť v prácach (12), (14), (15) K. Pelza alebo v [2].

[21] Poznatok, že axonometrický priemet súradnicového začiatku je ortocentrom axonometrického trojuholníka, dokázal nemecký matematik O. Schlömilch (1823–1901) r. 1856. [5]

rických útvaroch (priamky a roviny navzájom kolmé, obraz kružnice, dĺžka úsečky, vzdialenosť súradnicového začiatku od ľubovoľnej roviny určenej stopami, otáčanie roviny). V tejto metóde sa Pelz zaoberal i stredovým a rovnobežným osvetlením guľovej plochy, konštrukciou izofót na guľovej, rotačnej valcovej i kužeľovej ploche a rovnobežným osvetlením dutej polgule. Ako prvý využil na konštrukciu osí axonometrického priemetu hodeného tieňa guľovej plochy do pomocnej priemetne (v rovnobežnom osvetlení) guľovú plochu súmerne združenú s danou podľa tej istej priemetne a kosoštvorec, ktorého strany sú incidentné s obrysmi priemetov dvoch valcových plôch[22]; hľadané osi ležia na uhlopriečkach tohto kosoštvorca.[23]

Karel Pelz sa prirodzene zaoberal aj základnou vetou šikmej axonometrie. Je ňou *Pohlkeho veta*, ktorú takto nazvali matematici po jej uverejnení v prvom diele Pohlkeho učebnice deskriptívnej geometrie[24] r. 1860, kde Pohlke poznamenal, že elementárny dôkaz vety pravdepodobne neexistuje, a preto sa prekladá do druhého dielu učebnice. Prvým elementárnym, geniálne jednoduchým úplným dôkazom Pohlkeho vety bol dôkaz mladého H. Schwarza, Pohlkeho žiaka. Schwarz dokázal zovšeobecnené tvrdenie: *„Ľubovoľnú štvoricu nekolineárnych bodov priemetne možno považovať za rovnobežný priemet vrcholov štvorstena, pre ktorý sú známe pomery jeho hrán a ich vzájomné uhly“*[25] r. 1863 a jeho dôkaz Pohlke uverejnil po vzájomnej dohode v druhom vydaní prvého dielu svojej učebnice r. 1866.[26] Originálny Pohlkeho dôkaz nikdy uverejnený nebol. V priebehu ďalšieho polstoročia vyšli mnohé nové dôkazy tejto vety, syntetické i analytické. Jedným z prvých bol dôkaz Karla Pelza r. 1877 ([9]). Pelzov dôkaz je významný z historického hľadiska; Schwarz v ňom rozpoznal Pohlkeho dôkaz, s ktorým bol oboznámený, no nedokázal ho reprodukovať (v čase uverejnenia Pelzovho dôkazu Karl Pohlke už nežil). Možno zaujme niektorých čitateľov aspoň náčrt hlavnej myšlienky dôkazu Karla Pelza, ktorý dokázal základnú vetu šikmej axonometrie približne v nasledujúcom znení:

Veta 5. „Vrcholy ľubovoľného štvoruholníka $O'X'Y'Z'$ priemetne možno považovať za rovnobežný priemet vrcholov ortonormálneho súradnico-

[22]Jedna z plôch je hranicou svetelného útvaru danej guľovej plochy, druhá je s ňou súmerne združená podľa zvolenej pomocnej priemetne.

[23]Metóde pravouhlej axonometrie sú venované práce (16), (18), (24), (26).

[24]Karl Pohlke (1810–1876), profesor deskriptívnej geometrie na technickej vysokej škole v Berlíne; *Darstellende Geometrie* (Deskriptívna geometria, Berlín 1860, 1866, 1872 – prvý diel, Berlín 1876 – druhý diel)

[25]Ide o štvorsten, ktorý je podobný ľubovoľnému zvolenému štvorstenu.

[26]Podrobnejšie sa o histórii dôkazu vety a jej význame v didaktike matematiky možno dozvedieť v [17].

vého štvorstena $OXYZ$.“[27]

Náčrt dôkazu. Zvoľme si v priemetni ε ľubovoľné tri úsečky $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ tak, aby body X', Y', Z' mali požadovanú vlastnosť; navyše nech bod O leží v priemetni ($O = O'$).

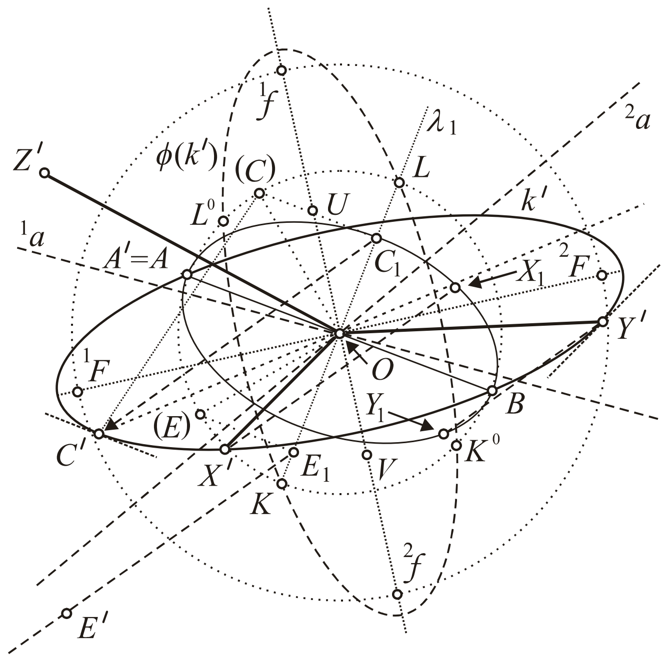
a) Uvažujme najprv o elipse k' priemetne určenej združenými polpriemermi, ktoré incidujú s ľubovoľnou dvojicou daných úsečiek (napr. OX', OY'). Elipsu k' možno považovať za šikmý priemet kružnice k, ktorá má priemer v ľubovoľne zvolenom priemere $A'B'$ elipsy k' ($k \subset \alpha, \alpha \neq \varepsilon$), t. j. $A = A'$, $B = B'$. Uhol rovín α, ε si zvoľme ľubovoľne, čo je rovnocenné s ľubovoľnou voľbou pravouhlého priemetu (do priemetne ε) krajného bodu C priemeru CD kružnice k, ktorý je kolmý na priemer AB.[28] (Obr. 3). Osnova šikmého premietania $g\colon k \mapsto k'$ je určená priamkou CC', kde $C'D'$ je priemer elipsy k' združený s priemerom $A'B'$. (Takéto šikmé premietania sú dve; druhé z nich zobrazí do bodu C' bod $D \in k$.) Zostrojme ďalej bod E tak, aby $OE \cong OA$ ($\cong OC$) a $OE \perp \alpha$ (konštrukcia bodu E_1 je zrejmá z vety o pravouhlom priemete kružnice[29]) a jeho šikmý priemet E' do roviny $\varepsilon(\triangle E'E_1(E) \sim \triangle C'C_1(C))$. Potom stačí zostrojiť body X, Y tak, aby $X = (g/\alpha)^{-1}(X'), Y = (g/\alpha)^{-1}(Y')$. Útvar $OXYE$ je ortonormálny štvorsten, ktorého vrcholy sa v premietaní g zobrazia do bodov O', X', Y', E'. Bod E' je vo všeobecnom prípade rôzny od bodu Z', preto treba ďalej zodpovedať nasledujúce dve otázky: – čo je množinou všetkých bodov E' pre všetky možné polohy roviny α pri jej otáčaní okolo priamky AB; – čo je množinou všetkých bodov E' pre všetky možnosti voľby priemeru $A'B'$?

b) Pri otáčaní roviny α okolo priamky AB bod C opisuje kružnicu k^* v rovine λ, pričom premietacia priamka CC' prebieha tvoriace priamky kružnicovej kužeľovej plochy K^* s určujúcou kružnicou k^* a vrcholom C'. Premietacia priamka bodu E súčasne prebieha množinou rovnobežiek s týmito tvoriacimi priamkami. Bod E je bodom kružnice k^*, pre ktorý je orientovaný uhol $\angle COE$ zhodný s pravým uhlom a zachováva orientáciu pri pohybe bodu C. Pelz dokázal (analyticky), že množina stopníkov premietacích priamok všetkých polôh bodu E je hyperbola h priemetne ε,

[27] Veta je uvedená v súčasnej – z hľadiska terminológie korektnej – verzii. $OXYZ$ je štvorsten, v ktorom sú všetky hrany OX, OY, OZ zhodné a po dvojiciach navzájom kolmé (=*ortonormálny súradnicový štvorsten*).

[28] Kolmé priemety do roviny ε budú mať pravý dolný index „1“. Uhol roviny α s priemetňou sa dostane pomocou sklopenia roviny $\lambda(CD \subset \lambda,\ \lambda \perp \varepsilon) : \angle\alpha\varepsilon \cong \cong \angle(C)OC_1; (O) = O_1 = O$.

[29] Z nej vyplýva: $E \in \lambda$, $OE \cong OC$, $OE \perp OC \Longrightarrow |O_1E_1| = e$, kde e je lineárna excentricita elipsy k_1. Konštrukciu možno vykonať aj pomocou sklopenia roviny λ *do priemetne* ε; E, C sú totiž krajné body kolmých polpriemerov kružnice $k^* = \lambda \cap \mathsf{G}$, kde G je guľová plocha so stredom O a polomerom OA.



Obr. 3

ktorá je koaxiálna s elipsou k'; lineárne excentricity oboch kužeľosečiek sa rovnajú (reálna os hyperboly pritom inciduje s vedľajšou osou elipsy). Kolmým priemetom premietacej priamky bodu E je dotyčnica hyperboly h v bode E', a asymptoty hyperboly h sú rovnobežné s priamkami $C'K$ a $C'L$, kde body K, L sú body kružnice k^* v priemetni ε.[30]

Pohlke pravdepodobne dokázal syntetickými úvahami, že množina bodov premietacích priamok všetkých bodov $E \in k^*$ (zodpovedajúcich bodu C pri prebiehaní bodov kružnice k^*) je kvadratická plocha. Z klasifikácie kvadrík a poznatku, že každé dve z týchto priamok sú navzájom mimobežné vyplýva, že ide o jednodielny hyperboloid a stopníky jeho tvoriacich priamok ležia na prieniku tohto hyperboloidu s priemetňou (Pelzova hyperbola h).

c) Pri voľbe iného priemeru $^1A^1B$ elipsy k' sa analogicky dospeje k sústave jednodielnych hyperboloidov, ktorých prienikom s priemetňou je sústava navzájom konfokálnych hyperbol s hyperbolou h. Je zrejmé, že každým bodom Z' priemetne (ktorý má požadovanú vlastnosť zo zada-

[30] KL je priemer hyperboly h v rovine λ a body U, V sú jej vrcholy. (Obr. 3)

nia úlohy) prechádza práve jedna hyperbola ${}^ih(i \in I)$, ktorá je určená ohniskami ${}^1f$, ${}^2f$ a bodom Z'.[31] Ku každej hyperbole ${}^ih$ prislúcha práve jedna guľová plocha ${}^i\mathsf{G}$; jej priemer ${}^iK^iL \subset \varepsilon$ je otočenou polohou priemeru ${}^iA^iB$ elipsy k' o pravý uhol, odkiaľ vyplýva konštrukcia bodov ${}^iK$, ${}^iL$ a následne priemeru ${}^iA^iB$.[32] Vo všeobecnom prípade majú dve kužeľosečky $\varphi(k')$ a ${}^ih$ spoločné krajné body dvoch priemerov: ${}^iK^iL$, ${}^iK^\circ\,{}^iL^\circ$. Existujú teda dve roviny ${}^i\lambda$, ${}^i\lambda^\circ$, z ktorých každá je kolmá na priemetňu a obsahuje práve jeden z týchto priemerov. Uvažujme o rovine ${}^i\lambda$. Kolmý priemet bodu $Z \subset {}^i\lambda$ leží na dotyčnici hyperboly ${}^ih$ v bode Z'. Konštrukcia kolmého priemetu ${}^iC_1$ bodu ${}^iC \in {}^ik^*$ $\left({}^ik^* = {}^i\mathsf{G} \cap {}^i\lambda\right)$, ako aj bodu ${}^iC' \in k'$ je zrejmá z bodov a), b). Rovnobežné premietanie ${}^ig$ dané osnovou priamky ${}^iC^iC'$ má požadovanú vlastnosť: zobrazí vrcholy O, X, Y, Z ortonormálneho súradnicového štvorstena do vrcholov O', X', Y', Z' daného štvoruholníka priemetne.[33]

Na záver možno povedať, že Karel Pelz vedel majstrovským spôsobom používať syntetické metódy projektívnej a deskriptívnej geometrie na odvodenie a doplnenie známych a na vyhľadávanie nových konštrukcií i metód. O každom probléme uvažoval z hľadiska úspornosti (v počte základných operácií) a presnosti. Najväčšiu váhu kládol na priehľadnú jasnosť a jednoduchosť. To sa odrazilo aj v jeho vlastných vzorných prednáškach, ktoré sa tešili veľkej obľube. Naozaj možno ľutovať, že nezanechal po sebe sústavný spis z deskriptívnej geometrie. Do knižného spracovania sa dostala aspoň jeho axonometria v diele jeho bývalého asistenta a neskôr nástupcu v Grazi *Rudolfa Schüsslera „Orthogonale Axonometrie. Ein Lehrbuch zum Selbststudium“* (Ortogonálna axonometria. Učebnica na samoštúdium, Lipsko a Berlín, 1905). Autor sa chcel odvďačiť veľkému deskriptívnemu geometrovi za jeho zaujatie v prospech deskriptívnej geometrie a jej vyučovania na vysokých školách technických. V diele sú nielen metodicky vysvetlené Pelzove myšlienky pre tých, ktorí sú už oboznámení so základmi tejto disciplíny, ale sú tiež aplikované na širokú škálu zaujímavých problémov tak teoretických, ako aj

[31] Konštrukcia hlavnej osi a asymptot hyperboly ${}^ih$ vyplýva z ohniskových vlastností hyperboly.

[32] Zrejme platí: ${}^iK, {}^iL \in \varphi(k') \cap {}^ih$, kde $({}^iK^iLO) = -1$ a φ je otáčanie v priemetni so stredom v bode O o pravý uhol.

[33] Na obr. 3 je zostrojený (v rámci rozboru úlohy) ortonormálny súradnicový štvorsten $OXYE$, ktorého rovnobežným priemetom do priemetne je štvoruholník $O'X'Y'E'$. Pretože bodom Z' je určená ním prechádzajúca hyperbola ${}^ih$ priemetne, ako aj jej priesečníky s elipsou $\varphi(k')$ (krajné body priemerov ${}^iK^iL$, ${}^iK^\circ\,{}^iL^\circ$), konštrukcia ortonormálneho štvorstena, ktorého vrcholy sa premietajú do danej štvorice bodov $O = O'$, X', Y', Z' priemetne je triviálnym dôsledkom rozboru úlohy a nie je na obrázku vykonaná.

praktických.[34]

3. Zoznam prác Karla Pelza

1. Stredový a rovnobežný priemet plôch druhého stupňa na rovinu kružnicových rezov. (Die Central- und Parallelprojekzion der Flächen zweiten Grades af eine Kreisschnittebene) In: *Grunert's Archiv für Mathematik und Physik*, III, 1871, s. 313–330.
2. O probléme lesklých bodov. (Über das Problem der Glanzpunkte) In: *Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien*, LXIX, 1871, II Abth., 730–740.
3. O určení osí stredového priemetu kružnice. (Über die Bestimmung der Achsen von Zentralprojekzionen des Kreises) In: *Věstník královské české společnosti nauk v Praze*, 1872.
4. O určení osí stredového priemetu plôch druhého stupňa. (Über die Achsenbestimmung von Zentral-Projekzionen der Flächen zweiten Grades) In: *Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien*, LXVI, 1872, II Abth., 481–490.
5. Určenie osí kužeľových plôch druhého stupňa. (Die Achsenbestimmung der Kegelflächen zweiten Grades) In: *Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien*, LXIX, 1874, II Abth., 215–227.
6. Príspevok ku konštrukcii kužeľosečiek z bodov a dotyčníc pomocou kolineácie. (Beiträge zur Konstrukzion der Kegelschnitte aus Punkten und Tangenten durch Kollineazion) In: *Věstník královské české společnosti nauk v Praze*, 1875.
7. O určení osí kužeľosečiek. (Über die Achsenbestimmung der Kegelschnitte) In: *Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien*, 1876, II Abht., 379–432.
8. Konštrukcia osí elipsy z dvoch združených priemerov. (Konstrukzion der Achsen einer Ellipse aus zwei konjugierten Diametern) In: *Vo výročnej správe c. k. reálky v Těšíně*, 1876.
9. O všeobecnom spôsobe určenia ohnísk obrysov plôch druhého stupňa. (Über eine allgemeine Bestimmungsart der Brennpunkte von Konturen der Flächen zweiten Grades) In: *Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien*, LXXV, 1877, II Abth. 175–217.

[34]Obsahový a metodický rozbor učebnice bude súčasťou ďalšieho plánovaného výskumu venovaného dielu Karla Pelza.

10. O novom dôkaze základnej Pohlkeho vety. (Über einen neuen Beweis des Fundamentalsatzes von Pohlke) In: *Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien*, LXXVI, 1877, 123–138.

11. Doplnok k všeobecnému spôsobu určenia ohnísk obrysov plôch druhého stupňa. (Ergänzungen zur allgemeinen Bestimmungsart der Brennpunkte von Konturen der Flächen zweiten Grades) In: *Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien*, LXXVII, 1878, II Abth., 259–288.

12. Príspevky k určeniu hranice vlastného a hodeného tieňa plôch druhého stupňa v stredovom osvetlení. (Beiträge zur Bestimmung der Selbstschatten- und Schlag- schattengrenzen der Flächen zweiten Grades bei Centralbeleuchtung) In: *Výročná správa krajinskej reálky v Grazi*, 1878.

13. Konštrukcie polomerov krivosti kužeľosečiek ako dôsledok jednej Steinerovej vety. (Die Krümmungshalbmesser-Konstrukzionen der Kegelschnitte als Korollarien eines Steiner'schen Satzes) In: *Věstník královské české společnosti nauk v Praze*, 1879.

14. K určeniu dotyčníc hraníc vlastného tieňa rotačných plôch. (Zur Tangentenbestimmung der Selbstschattengrenze von Rotazionsflächen) In: *Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien*, LXXIX, 1879, II Abth., 447–471.

15. Ku konštrukcii hraníc vlastných a hodených tieňov plôch druhého stupňa za predpokladu stredového osvetlenia. (Zur Konstrukzion der Selbst- und Schlagschattengrenzen von Flächen zweiten Grades unter Voraussetzung centraler Beleuchtung) In: *Věstník královské české společnosti nauk v Praze*, 1879/1880.

16. K vedeckému spracovaniu ortogonálnej axonometrie. Prvá správa. (Zur wissenschaftlichen Behandlung der orthogonalen Achsonometrie. Erste Mitteilung) In: *Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien*, 81, 1880, II Abth., 300–330.

17. O Queteletovej fokálnej krivke. (Über die Fokalkurven des Quetelet) In: *Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien*, LXXXII, 1880, Abth., 1207–1219.

18. K vedeckému spracovaniu ortogonálnej axonometrie. Druhá správa. (Zur wissenschaftlichen Behandlung der orthogonalen Achsonometrie. Zweite Mitteilung) In: *Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien*, 83, 1881, II abth. 375–384.

19. Ku konštrukcii priesečníkov priamok s kužeľosečkami. (Zur Konstrukzion der Schnittpunkte von Geraden mit Kegelschnitten) In: *Grunert's Archiv für Mathematik und Physik*, 1881.
20. Poznámky ku konštrukciám polomerov krivosti kužeľosečiek ako dôsledok jednej Steinerovej vety. (Bemerkungen zu den Krümmungs-Halbmesser-Konstrukzionen der Kegelschnitte als Korollarien eines Steiner'schen Satzes) In: *Věstník královské české společnosti nauk v Praze*, 1882.
21. K problému normál kužeľosečiek. (Zur Normalenproblem der Kegelschnitte) In: *Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien*, 1882.
22. K určeniu obrysu zbortených skrutkových plôch. (Zur Konturbestimmung windschiefer Schraubenflächen) In: *Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien*, LXXXVII, 1883, II Abth., 473–483.
23. O „fundamentálnej vete" pána Streisslera v konštrukčnej teórii tieňov. (Über Herrn Streissler's Fundamentalsatz der konstruktiven Schattentheorie) In: *Grunert's Archiv für Mathematik und Physik*, LXIX, 1883, 437–439.
24. K vedeckému spracovaniu ortogonálnej axonometrie. Tretia správa. (Zur wissenschaftlichen Behandlung der orthogonalen Achsonometrie. Dritte Mitteilung) In: *Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien*, 1884, II Abth., 1060–1075.
25. Poznámky k určeniu osí kužeľových plôch druhého stupňa. (Bemerkungen zur Achsenbestimmung der Kegelflächen zweiten Grades) In: *Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien*, XCII, 1885, II Abth., 410–415.
26. Príspevky k vedeckému spracovaniu ortogonálnej axonometrie. (Beiträge zur wissenschaftlichen Behandlung der orthogonalen Achsonometrie) In: *Věstník královské české společnosti nauk v Praze*, 1885, 648–666.
27. K problému normál elipsy. (Zum Normalenproblem der Ellipse) In: *Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien*, 1887.
28. O probléme normál dokonale narysovanej elipsy. (Zur Normalenproblem einer vollständig gezeichneten Ellipse) In: *Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien*, 1887.

29. Poznámka k rozprave: O Queteletovej fokálnej krivke. (Note zur Abhandlung: Über die Fokalkurven des Quetelet) In: *Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien*, XCVII, 1888, 1411–1415.
30. Ortogonálny priemet kružnice. (Die orthogonale Projekzion des Kreises) In: *Časopis pre reálne školstvo*, roč. XVI, 1891.
31. O kužeľosečkách opísaných a vpísaných do päťuholníka. (Über die Kegelschnitte um und in ein Fünfeck) In: *Schlömilch's Zeitschrift für Mathematik und Physik* (Vybrané z dopisu zaslaného Schlömilchovi), 1894.
32. Ku klinogonálnemu zobrazeniu rotačných plôch. (Zur klinogonalen Darstellung der Rotazionsflächen) In: *Věstník královské české společnosti nauk v Praze*, 1895[35].
33. K Joachimsthalovmu riešeniu problému normál. (Zur Joachimsthal'schen Lösung des Normalenproblems) In: *Věstník královské české společnosti nauk v Praze*, 1895.
34. Hlavné vety stereografického premietania ako dôsledky Queteletovej a Dandelinovej vety. (Die Hauptsätze der stereographischen Projekzion als Korollarien des Satzes von Quetelet und Dandelin) In: *Věstník královské české společnosti nauk v Praze*, 1898.

Poďakovanie. Je pre mňa potešením vyjadriť na záver úprimnú vďaku kolegom z technickej univerzity vo Viedni, predovšetkým profesorovi J. Wallnerovi, za nevšednú ochotu pri zapožičaní študijných materiálov a umožnenie prístupu do knižnice Ústavu geometrie.

It is a grate pleasure for me to express my deep gratitude to the colleagues of the Technical University in Vienna, especially to Professor J. Wallner, for his graciousness and the kind and uncommon disposition when providing me with the study materials and giving me a free admission to the library of the Institute of Geometry.

Úprimne ďakujem Martine Bečvářovej, docentke katedry aplikovanej matematiky na dopravnej fakulte ČVUT v Prahe, za poskytnutie a zapožičanie niektorých materiálov, medzi nimi i záznamu prednášok z deskriptívnej geometrie, ktoré Karel Pelz viedol na pražskej vysokej škole technickej v školskom roku 1906–07 ([13]).

[35] Podľa Gina Loriu v [5] ide o rok 1897 (Uvedený zoznam prác uverejnil Jan Sobotka v [18])

V neposlednom rade srdečne ďakujem editorovi zborníka E. Fuchsovi za publikovanie tohto článku.

Literatúra

[1] Folta, J. *Česká geometrická škola (Historická analýza)*. Praha: Nakladatelství ČSAV, Academia Praha, č. 9, 1982.

[2] Kadeřávek, F., Klíma, J., Kounovský, J. *Deskriptivní geometrie.* Díl druhý. Praha: Jednota česko-slovenských matematiků a fysiků 1932.

[3] Kadeřávek, F., Klíma, J., Kounovský, J. *Deskriptivní geometrie.* Díl I. Praha: Jednota česko-slovenských matematiků a fysiků 1932.

[4] Klapka, J. *Deskriptivní geometrie.* Praha: Vědecko-technické nakladatelství 1951.

[5] Loria, G. *Storia della geometria descrittiva.* Miláno: Ulrico Hoepli, 1921.

[6] Pelz, K. Über die Bestimmung der Axen von Zentralprojekzionen des Kreises. In: *Věstník královské české společnosti nauk v Prahe*, Praha 1872[36].

[7] Pelz, K. Die Axenbestimmung der Kegelflächen zweiten Grades. In: *Věstník královské české společnosti nauk v Prahe*, Praha 1874.

[8] Pelz, K. Construction der Axen einer Ellipse aus zwei conjugirten Diametern. In: *Výročná správa c. k. reálky v Těšíně*, 1876.

[9] Pelz, K. Über einen neuen Beweis des Fundamentalsatzes von Pohlke. In: *Sitzungsb. der kaiser. Akademie der Wissenschaften in Wien*, LXXVI, Wien 1877, 123–138.

[10] Pelz, K. Beiträge zur Bestimmung der Selbstschatten- und Schlagschattengrenzen der Flächen zweiten Grades bei Centralbeleuchtung. In: *Sitzungsb. der kaiser. Akademie der Wissen. in Wien*, Wien 1878.

[11] Pelz, K. Über die Focalkurven des Quetelet. In: *Sitzungsb. der kaiser. Akademie der Wissenschaften in Wien*, LXXXII, 1880, Abth., 1207–1219.

[36] Časopis sa v bibliografii uvádza i pod názvom: Sitzungsberichte der königl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften, Prag

[12] Pelz, K. Zur Joachimsthal'schen Lösung des Normalenproblems. In: *Věstník královské české společnosti nauk v Prahe*, 1898.

[13] Pelz, K. *Deskriptivní geometrie dle přednášek v r. 1906–7.* ČVUT Praha, 1907. 479 strán, 515 obrázkov. – Litografované prednášky. Identifikované podľa citácie v knihe V. Jarolímek – B. Procházka: Deskriptivní geometrie pro vysoké školy technické, Praha 1909.

[14] Procházka, B. *Vybrané statě z deskriptivní geometrie.* Praha: Česká matica technická 1912.

[15] Sklenáriková, Z. Z dejín deskriptívnej geometrie v Rakúsko-Uhorsku (Prvá časť dvojčlánku). In: ***G*** *– slovenský časopis pre geometriu a grafiku*, roč. 3, č. 5, STU Bratislava 2006, ISSN 1336-524X.

[16] Sklenáriková, Z. Emil Müller – vrcholný predstaviteľ viedenskej geometrickej školy. In: ***G*** *– slovenský časopis pre geometriu a grafiku*, roč. 1, č. 2, STU Bratislava 2004, ISSN 1336-524X.
Emil Müller - il più grande Rappresentante della Scuola geometrica di Vienna. In: *Quaderni di Ricerca in Didattica*, n 15, 2005. G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy).
(http://math.unipa.it/ grim/quaderno15.htm), ISSN 1592-4424.

[17] Sklenáriková, Z., Pémová, M. The Pohlke-Schwarz Theorem and its Relevancy in the Didactics of Mathematics. In: *Quaderni di Ricerca in Didattica*, n 17, 2007; G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy), ISSN 1592-5137;
(http://math.unipa.it/ grim/quaderno17.htm), ISSN 1592-4424.

[18] Sobotka, J. O životě a činnosti Karla Pelze. In: *Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, vyd. Jednota českých mathematiků, s. 433–460, Praha 1910.

Zita Sklenáriková
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave
e-mail: zita.sklenarikova@fmph.uniba.sk