SOUVISLOST FIBONACCIHO ČÍSEL S JINÝMI MATEMATICKÝMI POJMY

Martina Jarošová

I. Posloupnosti Fibonacciho a Lucasových čísel

Nejprve uveďme základní rekurentní vztahy a vlastnosti Fibonacciho a Lucasových čísel.

Definice 1. Rekurentní formule tvaru

$$f(n+k) = a_1 f(n+k-1) + a_2 f(n+k-2) + \cdots + a_k f(n),$$

kde $a_1, \ldots, a_k$ jsou reálná čísla, $a_k \neq 0$, se nazývá *lineární rekurentní formule k-tého řádu s konstantními koeficienty.*

Definice 2. Lineární rekurentní posloupnost 2. řádu zadanou formulí

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \qquad \text{pro } \forall n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

přičemž $F_1 = 1$ a $F_2 = 1$, nazveme *posloupnost Fibonacciho čísel* (resp. Fibonacciho posloupnost). Členy této posloupnosti se nazývají Fibonacciho čísla.

Poznámka 1. Několik prvních členů Fibonacciho posloupnosti:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, \ldots$$

Tato čísla se poprvé objevila ve druhém[1] (rozšířeném) vydání knihy *Liber Abaci* z roku 1228, italského matematika Fibonacciho a proto nesou jeho jméno. Poprvé je nazval Fibonacciho čísly francouzský matematik Édouard Lucas (1842–1891) ve druhé polovině 19. století.

Leonardo Pisánský – nejvýznamnější matematik středověké Evropy je znám spíše pod svojí přezdívkou Fibonacci, též Leonardo z Pisy (také Filius Bonacci, tj. syn Bonacciův). Narodil se v Pise kolem roku 1170 a zemřel zřejmě roku 1250.

Fibonacci je autorem následujících matematických spisů:

1. *Liber abaci* (Kniha o abaku) z roku 1202, přepracována roku 1228.

[1] První vydání je z roku 1202.

Obr. 1: Leonardo Pisánský – Fibonacci

2. *Practica geometriae* (Praxe geometrie) z roku 1221.
3. *Flos* (Květ) z roku 1225.
4. *Epistola suprascripti Leonardi ad Magistrum Theodorum phylosophum domini Imperatoris* (Dopis podepsaného Leonarda Mistru Theodorovi, císařskému filozofovi), nedatováno.
5. *Liber quadratorum* (Kniha čtverců) z roku 1225.

Nezachovala se bohužel Fibonacciho kniha o obchodní aritmetice a jeho traktát o iracionalitách.

Definice 3. Lineární rekurentní posloupnost 2. řádu zadanou formulí

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n, \qquad \text{pro } \forall n \in \mathbb{N},$$

přičemž $L_1 = 1$ a $L_2 = 3$, nazveme *posloupnost Lucasových čísel* (resp. Lucasova posloupnost). Členy této posloupnosti se nazývají Lucasova čísla.

Poznámka 2. Několik prvních členů Lucasovy posloupnosti:

$$1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 842, \ldots$$

Existuje mnoho vztahů platných pro Fibonacciho a Lucasovu posloupnost. Uveďme jen ty nejzákladnější. Začněme výpočtem součtu prvních n Fibonacciho čísel. Tedy dokažme, že platí

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1. \tag{2}$$

Důkaz. Užitím Fibonacciho rekurentní formule (1) získáváme

$$\begin{aligned} F_1 &= F_3 - F_2, \\ F_2 &= F_4 - F_3, \\ F_3 &= F_5 - F_4, \\ &\vdots \\ F_{n-1} &= F_{n+1} - F_n, \\ F_n &= F_{n+2} - F_{n+1}. \end{aligned}$$

Součtem všech těchto rovnic dostáváme

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - F_2 = F_{n+2} - 1.$$

□

Dále ukažme, že součet prvních n Fibonacciho čísel s lichými indexy je roven

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n}. \tag{3}$$

Důkaz. K důkazu této formule opět použijeme Fibonacciho rekurentní formuli (1).

$$\begin{aligned} F_1 &= F_2, \\ F_3 &= F_4 - F_2, \\ F_5 &= F_6 - F_4, \\ &\vdots \\ F_{2n-1} &= F_{2n} - F_{2n-2}. \end{aligned}$$

Požadovaný výsledek získáme opět součtem všech těchto rovností. □

Součet prvních n Fibonacciho čísel se sudými indexy je roven

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i} = F_{2n+1} - 1.$$

Důkaz. Důkaz vychází z následujícího. Z (2) a (3) platí

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} F_{2i} &= \sum_{i=1}^{2n} F_i - \sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} \\ &= (F_{2n+2} - 1) - F_{2n} \\ &= (F_{2n+2} - F_{2n}) - 1 \\ &= F_{2n+1} - 1.\end{aligned}$$

□

Poznámka 3. Další zajímavé skutečnosti:
Označme největší společný dělitel čísel a, b symbolem (a, b), kde $a, b \in \mathbb{Z}$. Pak platí

$$(F_m, F_n) = F_d, \qquad \text{kde } d = (m, n).$$

Dále pro $d = (m, n)$ platí

$$(L_m, L_n) = \begin{cases} L_d, & \text{jestliže jsou podíly } \frac{m}{d},\ \frac{n}{d} \text{ liché,} \\ 1 \text{ nebo } 2, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Též pro $d = (m, n)$ platí

$$(F_m, L_n) = \begin{cases} L_d, & \text{jestliže je podíl } \frac{m}{d} \text{ sudý a podíl } \frac{n}{d} \text{ lichý,} \\ 1 \text{ nebo } 2, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Další identity obsahující Fibonacciho a Lucasova čísla

V roce 1680 francouzský matematik a astronom italského původu Giovanni Domenico Cassini zjistil, že (viz [8])

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n, \quad \text{pro } n \geq 1.$$

Dále platí:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} F_i^2 &= F_n F_{n+1} \\
F_{n+1}^2 + F_n^2 &= F_{2n+1} \\
F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 &= F_{2n} \\
F_{2n} &= F_n L_n \\
F_{n+1} + F_{n-1} &= L_n \\
F_{n-1} - F_{n+1} &= L_n \\
F_{n+2} - F_{n-2} &= L_n \\
L_{n+1} + L_{n-1} &= 5F_n \\
F_n^2 - F_{n+k}F_{n-k} &= (-1)^{n+k} F_k^2 \\
L_n^2 - L_{n+1}L_{n-1} &= (-1)^n 5 \\
L_n^2 - 5F_n^2 &= (-1)^n 4 \\
F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n &= F_{m+n} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Některé zajímavosti a problémy Fibonacciho a Lucasových čísel

V roce 1964 nezávisle na sobě vyřešili J. H. E. Cohn [2], [3] a O. Wyler [20] dlouhou dobu neřešený problém, že jediná Fibonacciho čísla F_n tvaru $F_n = x^2$ ($x \in \mathbb{N}$) jsou čísla $F_1 = F_2 = 1$ a $F_{12} = 144$.

Cohn v článku [2] ukázal, že jediné Lucasovo číslo L_n tvaru $L_n = x^2$ ($x \in \mathbb{N}$) je číslo $L_3 = 4$. Cohn také v článku [3] dokázal, že jediná Fibonacciho čísla tvaru $F_n = 2x^2$ ($x \in \mathbb{N}$) jsou $F_3 = 2$ a $F_6 = 8$ a Lucasova čísla s touto vlastností jsou čísla $L_0 = 2$ a $L_6 = 18$.

H. London a R. Finhelstein [10] v roce 1969 ukázali, že jediná Fibonacciho čísla tvaru x^3 ($x \in \mathbb{N}$) jsou $F_1 = F_2 = 1$ a $F_6 = 8$ a jediné Lucasovo číslo s touto vlastností je číslo $L_1 = 1$.

Dosud nevyřešený je problém, zda existuje Fibonacciho nebo Lucasovo číslo tvaru x^n, kde $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 2$ a $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.

Také není známo, zda existuje nekonečně mnoho Fibonacciho nebo Lucasových čísel, která jsou prvočísly. Nicméně je známo následující tvrzení, viz. [12]:

1. Jestliže F_n je prvočíslo a $n \in \mathbb{N}, n \neq 4$, pak n je prvočíslo.

2. Jestliže L_n je prvočíslo a $n \in \mathbb{N}$, které není mocninou čísla 2, pak n je prvočíslo.

Značí-li $(\frac{5}{p})$ pro liché prvočíslo p Legendreův symbol, pak platí tvrzení, viz. [13], (symbol $m \mid n$ znamená, že m dělí n):

$$p \mid F_{p-1} \text{ a } p \mid (L_{p-1} - 2)\,, \text{ jestliže } \left(\frac{5}{p}\right) = 1, \text{ tedy } p \equiv \pm 1 \pmod{10},$$

$$p \mid F_{p+1} \text{ a } p \mid (L_{p+1} + 2)\,, \text{ jestliže } \left(\frac{5}{p}\right) = -1, \text{ tedy } p \equiv \pm 3 \pmod{10}.$$

D. D. Wall [17] položil otázku, zda existuje prvočíslo $p \neq 2, p \neq 5$ s vlastností, že

$$\frac{1}{p} F_{p-\left(\frac{5}{p}\right)} \equiv 0 \pmod{p}.$$

H. C. Williams [19] pomocí počítače ukázal, že žádné prvočíslo $p < 10^9$ nemá tuto vlastnost.
Tato hranice byla zlepšena P. L. Montgomerym [11] pro $p < 2^{32}$.

Naproti tomu platí

$$\frac{1}{p}\left[L_{p-\left(\frac{5}{p}\right)} - 2\left(\frac{5}{p}\right)\right] \equiv 0 \pmod{p},$$

pro všechna prvočísla $p \neq 2, p \neq 5$. Což je ekvivalentní s kongruencí

$$L_{p-\left(\frac{5}{p}\right)} \equiv 2\left(\frac{5}{p}\right) \pmod{p^2},$$

pro všechna prvočísla $p \neq 2, p \neq 5$, viz. Williams [18].

Nyní uveďme další pěkné vlastnosti:

Věta 1. *Každé přirozené číslo lze vyjádřit jako součet různých Lucasových čísel L_i pro $i \geq 0$.*

Důkaz je uveden např. v [5].

Věta 2. *Pro libovolná přirozená čísla m a n platí*

$$(F_m, F_n) = F_{(m,n)},$$
$$F_m \mid F_n \Longleftrightarrow m \mid n$$

a

$$L_m \mid L_n \Longleftrightarrow n = (2k-1)m, \ \textit{kde } m \geq 2 \textit{ a } k \ \geq 1.$$

Důkazy jednotlivých tvrzení lze najít např. v [5], [8].

Věta 3. *Jestliže $p \geq 5$ je prvočíslo, pak $F_{p^2} \equiv p^2 (\mathrm{mod}\ 100)$, tj. dvě poslední cifry čísel p^2 a F_{p^2} jsou stejné.*

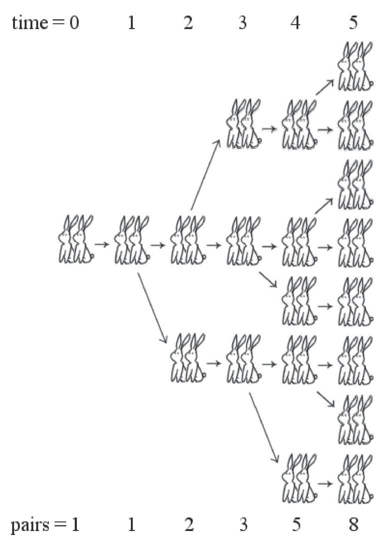
Důkaz této zajímavé věty je uveden v [8].

II. Fibonacciho čísla a králíci

Ve 12. kapitole knihy Liber Abaci [14] se řeší úloha, jak rychle se mohou množit králíci za jistých velice specifických a idealizovaných podmínek. Otázka zní: „Kolik párů králíků je stvořeno jedním párem za jeden rok?“

Předpokládejme, že jeden nově narozený pár (1 samec a 1 samice) je vložen do prázdné ohrady. Králíci se mohou pářit ve věku 1 měsíce, doba březosti je také jeden měsíc, tedy na konci 2 měsíce může samice vyprodukovat nový pár králíků.

Přitom se předpokládá, že naši králíci nikdy neumírají, a že dospělá samice produkuje každý měsíc vždy jen jednoho samce a jednu samici.



Obr. 2: Fibonacciho králíci

- na konci 1. měsíce se již mohou pářit, ale v ohradě je stále pouze 1 pár

- na konci 2. měsíce samice vyprodukuje nový pár, tedy v ohradě máme 2 páry králíků
- na konci 3. měsíce původní pár vyprodukuje druhý nový pár, v ohradě jsou nyní 3 páry králíků
- na konci 4. měsíce původní pár zplodí další nový pár, a také samice narozená druhý měsíc produkuje svůj první pár potomků, tedy v ohradě je nyní 5 párů králíků.

V rovnici (1) pak F_{n+1} značí počet králičích párů v ohradě na konci n-tého měsíce. Počty párů králíků na začátku každého měsíce jsou

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

Pokusme se nyní popsat tyto biologické skutečnosti pomocí abstraktního modelu. Následující schéma je čistě hypotetické a ukazuje, z jakých jednoduchých genetických podmínek mohou Fibonacciho čísla vyvstávat. Uvažme nyní jakýsi ideální vzorek A_0 s následujícími dvěma vlastnostmi:

i) Ve stejných časových intervalech, tedy v čase $t = t_1, t_2, \dots$, kde

$$t_{i+1} - t_i = \tau, \qquad \text{pro } i \geq 1,$$

vzorek A_0 generuje nové vzorky $A_1, A_2, \dots$ Vzorek A_1 je tedy vygenerován vzorkem A_0 v čase t_1, vzorek A_2 v čase $t_2, \dots$

ii) Každý jedinec $A_1, A_2, \dots$ se po svém vygenerování stává „dospělým“ po čase 2τ a začíná též generovat nové vzorky ve stejném časovém intervalu τ jako A_0. „Období dospívání“ jakékoliv nové generace je rovno 2τ.

Označme si nyní s_n počet jedinců, kteří jsou vygenerováni ve stejný časový okamžik t_n.
Snadno je vidět, že

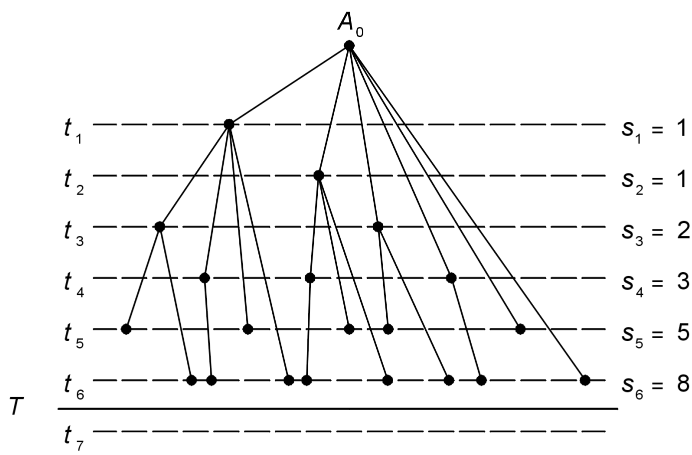
$$s_n = s_{n-2} + s_{n-1}, \qquad \text{pro } n \geq 3, \text{ kde}$$

s_{n-1} ... je počet dospělých vzorků v generačním okamžiku t_{n-1},
s_{n-2} ... je počet vzorků vygenerovaných v čase $t_{n-2} = t_n - 2\tau$, tj. počet vzorků, které se právě stávají dospělými.

Ale $s_1 = s_2 = 1$, a proto čísla $s_1, s_2, s_3, \dots$ jsou právě Fibonacciho čísla.

Abstraktní model potomstva vzorku A_0 je znázorněn na obr. 3 následujícím způsobem – vzorky vygenerované ve stejný časový okamžik

t_n jsou umístěny na stejné horizontále. Vzorek A_0 je umístěn nad první řádek.



Obr. 3: Abstraktní model

Označme nyní

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} s_i + 1, \qquad \text{pro } n \geq 1.$$

To je ekvivalentní s tím, že σ_n pro $n \geq 1$ představuje celkový počet vzorků vygenerovaných vzorkem A_0 (včetně vzorku A_0), jestliže proces generování vzorků popsaný pomocí i) a ii) bude zastaven v okamžiku T splňujícím nerovnost

$$t_n < T < t_{n+1}.$$

Čísla $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$ jsou také Fibonacciho čísly a

$$\sigma_n = s_{n+2}, \qquad \text{pro } n \geq 1.$$

Důkaz. Zřejmě platí $s_i = F_i$, pro $i \geq 1$.
Tedy

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} F_i + 1.$$

Je dobře známé, viz. (2)

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1.$$

Následkem toho získáváme

$$\sigma_n = F_{n+2} = s_{n+2}.$$

$\square$

Biologickou interpretací tohoto modelu jsou právě Fibonacciho králíci, viz obr. 2.

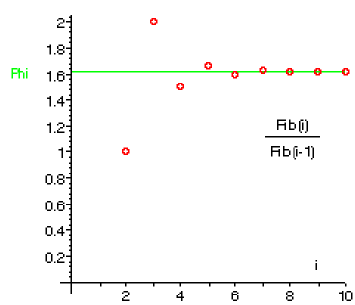
III. Fibonacciho čísla a zlatý řez

Pokud vezmeme podíly dvou po sobě jdoucích čísel Fibonacciho posloupnosti (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...), přičemž vydělíme každé číslo číslem předcházejícím, nalezneme následující posloupnost čísel:

$$\frac{1}{1} = 1; \qquad \frac{2}{1} = 2; \qquad \frac{3}{2} = 1{,}5; \qquad \frac{5}{3} = 1{,}666\ldots;$$

$$\frac{8}{5} = 1{,}6; \qquad \frac{13}{8} = 1{,}625; \qquad \frac{21}{13} = 1{,}61538; \qquad \frac{34}{21} = 1{,}619048\ldots;$$

Můžeme ji znázornit pomocí grafu:



Obr. 4: Grafické znázornění zlatého čísla

Podíl se přibližuje k hodnotě, kterou nazýváme *zlatým podílem* nebo také *zlatým číslem*, nejčastěji však *zlatým řezem*. Má hodnotu přibližně 1,618034. Toto iracionální číslo je označováno řeckým písmenem Φ.

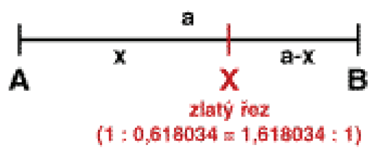
$$\Phi = \frac{(1+\sqrt{5})}{2} \doteq 1,618034\ldots$$

Označení zavedl americký matematik Mark Barr začátkem 20. století. Malým písmenem ϕ zapisujeme desetinnou část tohoto čísla

$$\phi = \frac{(1+\sqrt{5})}{2} - 1 = \frac{(\sqrt{5}-1)}{2} \doteq 0,618034\ldots$$

Již antický učenec Eukleides (kolem r. 300 př.n.l.), autor věhlasných *Základů*, knihy, podle které studovalo geometrii nejedno pokolení, se zabýval úlohou: „*Jak rozdělit danou úsečku na dvě části tak, aby poměr celé úsečky k větší části byl stejný jako poměr větší části k menší.*“ Tedy:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$$



Obr. 5: Zlatý řez úsečky AB

Ve středověku a v období renesance, která se opírala o antickou kulturu, byli matematici tak okouzleni tímto poměrem, že byl nazýván „božským poměrem“ (latinsky *divina proportio*)[2]. Jak již bylo uvedeno výše, je možno božský poměr aproximovat zlomkem tvořeným dvěma po sobě jdoucími členy Fibonacciho posloupnosti.

Zlaté číslo lze tedy zavést nejen jako poměr délek dvou částí úsečky, ale i jako následující limitu[3]

$$\Phi = \lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}}.$$

Pokud se jedná o poměr délek dvou částí úsečky, platí:

$$\Phi = \frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}, \quad \text{tedy} \quad a(a-x) = x^2.$$

Proto

[2]Názvů „zlatý řez“ a „zlatý poměr“ se začalo užívat až v 19. století.
[3]Poprvé dokázáno skotským matematikem Robertem Simsonem v roce 1753.

$$\Phi^2 = (\frac{x}{a-x})^2 = \frac{a}{a-x} = \frac{a-x}{a-x} + \frac{x}{a-x} = 1 + \Phi$$

a kvadratická rovnice

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$$

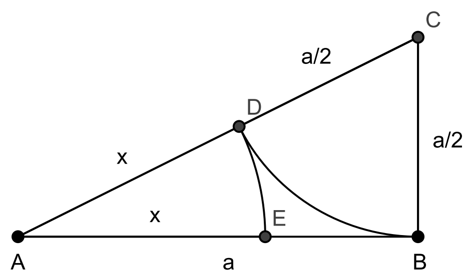
má následující kořeny

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{a} \quad \Phi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Výše uvedené Eukleidově úloze vyhovuje pouze kladný kořen Φ.

Poznámka 4. Připomeňme nyní konstrukci zlatého řezu založenou na užití Pythagorovy věty:

$$AE : BE = AB : AE$$



Obr. 6: Konstrukce zlatého řezu

Konstanty Φ a $\Phi' = -\frac{1}{\Phi}$ hrají také důležitou úlohu při analýze Fibonacciho čísel. A to díky vztahu pro přímé určení n-tého Fibonacciho čísla:

$$F_n = \frac{\Phi^n - (\Phi')^n}{\Phi - \Phi'}, \quad \text{pro všechna } n = 0, 1, 2, ...$$

Tento vztah nazýváme *Binetova formule*[4].

Pro n-té Lucasovo číslo platí následující vztah:

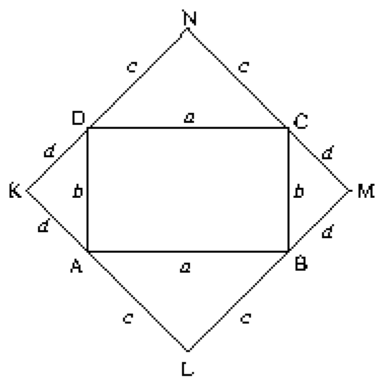
$$L_n = \Phi^n + (\Phi')^n = \Phi^n + (-1)^n \Phi^{-n}, \quad \text{pro všechna } n = 0, 1, 2, ...$$

[4]Tuto formuli publikoval již v roce 1765 Leonhard Euler (1707–1783). V roce 1843 ji znovu objevil francouzský matematik Jacques Philippe Marie Binet (1786–1856).

Fibonacciho čtyřúhelníky

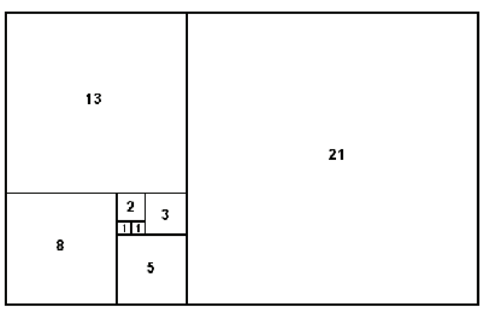
Uvažme nyní obdélník, jehož delší strana má velikost a a kratší strana velikost b. Zvolíme-li strany a, b tak, aby $\frac{a}{b} = \Phi$, nazveme tento obdélník zlatým.

Pro tento zlatý obdélník platí následující zajímavá vlastnost. Vepíšeme-li zlatý obdélník do čtverce, vrcholy obdélníku pak dělí strany čtverce zlatým řezem, viz obr. 7.



Obr. 7: Zlatý obdélník vepsaný do čtverce

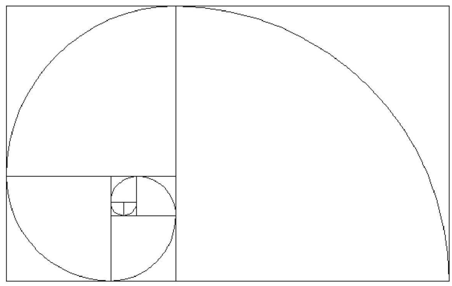
Soubor čtverců, jejichž velikosti stran získáme sečtením dvou po sobě jdoucích Fibonacciho čísel, a který se skládá ze čtverců jejichž velikosti stran jsou právě Fibonacciho čísla, nazýváme *Fibonacciho čtyřúhelníky.*



Obr. 8: Fibonacciho čtyřúhelníky

Každý nový čtverec má délku strany odpovídající součtu velikostí stran dvou předcházejících čtverců.

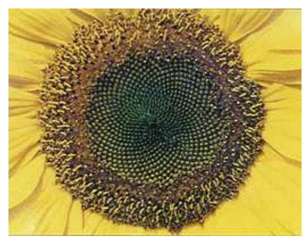
Spirálu tvořenou čtvrtinami kružnic a zakreslenou do Fibonacciho čtyřúhelníků způsobem znázorněným na obr. 9 nazýváme *zlatá spirála*. Zlatá spirála je tedy vepisována do obdélníků, jejichž poměry stran se blíží zlatému řezu. Můžeme ji nalézt na mnoha místech v přírodě – ve tvaru ulit měkkýšů, v uspořádání semen kvetoucích rostlin, ve tvaru galaxií, ...



Obr. 9: Zlatá spirála

Obr. 10: Galaxie

Obr. 11: Měkkýš



Obr. 12: Semena

Zlatý řez dále nalézá své uplatnění např. v umění, v architektuře, ..., ale o tom snad někdy příště.

Literatura

[1] Bečvář, J.: *Leonardo Pisanský – Fibonacci*, In: J. Bečvář a kol.: Matematika ve středověké Evropě (Dějiny matematiky, svazek 19), 2001, 264–339.

[2] Cohn J. H. E.: *On square Fibonacci numbers*, J. London Math. Soc. 39, 1964, 537–540.

[3] Cohn J. H. E.: *Square Fibonacci numbers etc.*, Fibonacci Quarterly 2, 1964, 109–113.

[4] Hejl J.: Zlatý řez, *Učitel matematiky*, **4**(1), 1995, 1–8.

[5] Hoggatt, V. E. Jr.: *Fibonacci and Lucas Numbers.* Houghton Mifflin Company, Boston, 1969.

[6] Jarošová, M.: *Fibonacciho čísla a příroda.* In: XXIII. mezinárodní kolokvium o řízení osvojovacího procesu, Sborník abstraktů a elektronických verzí příspěvků na CD-ROMu, Brno, 2005.

[7] Jarošová, M.: *Abstraktní modely pro biologickou interpretaci Fibonacciho čísel.* In: XXIV. mezinárodní kolokvium o řízení osvojovacího procesu, Sborník abstraktů a elektronických verzí příspěvků na CD-ROMu, Brno, 2006.

[8] Koshy, T.: *Fibonacci and Lucas numbers with applications.* John Wiley & Sons, Inc., New York, 2001.

[9] Křížek, M. – Luca, F. – Somer L.: Aritmetické vlastnosti Fibonacciových čísel. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, roč. 50, č. 2, 2005.

[10] London H., Finhelstein R.: *On Fibonacci and Lucas numbers which are perfect powers*, Fibonacci Quarterly 7, 1969, 476–481 a 487.

[11] Montgomery P. L.: *New solutions of* $a^{p-1} \equiv 1(\mathrm{mod}\ p^2)$, Math. Comp. 61, 1993, 361–363.

[12] Ribenboim P.: *The book of prime numbers records*, Springer Verlag, 1988.

[13] Ribenboim P.: *The new book of prime numbers records*, Springer Verlag, 1996, 64–65.

[14] Sigler L. E.: *Fibonacci's Liber Abaci*, Springer Verlag, 2002.

[15] Veselý J.: Zlatý řez a co vše s ním souvisí, *Učitel matematiky* **6**(3), 1998, 153–158.

[16] Vorobiev, N. N.: *Fibonacci Numbers.* Birkhäuser Verlag, Basel, 2002.

[17] Wall D. D.: *Fibonacci series modulo m*, Amer. Math. Monthly 67, 1960.

[18] Williams H. C.: *A note on the Fibonacci quotient* $F_{p-\varepsilon}/p$, Canad. Math. Bull. Vol. 25 (3), 1982, 366–370.

[19] Williams H. C.: *The influence of computers in the development of number theory*, Comp. and Maths. with Appl. 8, 1982, 75–93.

[20] Wyler O.: *Squares in the Fibonacci series*, Amer. Math. Monthly 7, 1964, 220–222.

[21] Zylinski, E.: *Numbers of Fibonacci in Biological Statistics*. Atti del Congr. internaz. matematici 4, 1928, 153–156.

[22] Knott, R.: *Fibonacci Numbers and Nature* [online]. c1996 - 2006, poslední revize 27.8.2006 [cit. 20.10.2006].
<`http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibnat.html`>.

[23] Nagyova, I.: *Zlatý řez* [online]. poslední revize únor 2005 [cit. 29.10.2006].
<`http://www.volny.cz/zlaty.rez/diplomka.html`>.

Martina Jarošová
Ústav matematiky a statistiky
Přírodovědecká fakulta MU, Brno
e-mail: mjarosov@math.muni.cz