

Matematika v proměnách věků. IV

Zuzana Voglová

Hassler Whitney a počátky teorie matroidů

In: Eduard Fuchs (editor): Matematika v proměnách věků. IV. (Czech). Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2007. pp. 162–172.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/401058>

Terms of use:

© J. Čižmár, M. Jarošová, M. Kupčáková, A. Lukášová, M. Pémová, Z. Sklenáriková, R. Smýkalová, V. Svobodová, Z. Voglová

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

HASSLER WHITNEY A POČÁTKY TEORIE MATROIDŮ

ZUZANA VOGLOVÁ

30. léta 20. století

Teorie matroidů vznikala ve třicátých letech dvacátého století. V této době docházelo k rychlému rozvoji celé řady dalších matematických disciplín – teorie grafů, algebry, teorie svazů a dalších. Ve dvacátých letech napsala *Emmy Noetherová* (1882–1935) dvě důležité práce o abstraktní algebře: *Idealtheorie in Ringbereichen* (1921) a *Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern* (1927), které se staly základním kamenem pro další rozvoj tohoto oboru. Na ni potom navázal *B. L. Van der Waerden* (190–1996) svým dílem *Moderne algebra*, které je z velké části založeno právě na práci Noetherové. Jeho kniha zahájila novou etapu moderní abstraktní algebry a významně přispěla k rozvoji této části matematiky.

Kořeny teorie grafů sice sahají až do 18. a 19. století, teprve ve dvacátém století roku 1936 však vychází v Lipsku první monografie teorie grafů. Jejím autorem je maďarský matematik *Dénes König* (1884–1944). König ve své knize popsal prakticky všechny tehdejší znalosti této nové matematické disciplíny.

Ve třicátých letech se začala formovat také teorie svazů. První zmínky vztahující se ke svazům se objevily sice už v polovině 19. století u *Boola* (1815–1864), *Pierce* (1839–1914) a *Dedekinda* (1831–1916), za otce teorie svazů je však považován až *G. Birkhoff* (1911–1996). Spolutvůrcem české terminologie v této oblasti je brněnský matematik *Otakar Borůvka* (1899–1995), který v roce 1939 poprvé použil český termín „svaz“ pro anglické slovo „lattice“.

Rozvoj všech těchto matematických disciplín připravil vhodné podmínky a inspiroval amerického matematika *Hasslera Whitneyho* k napsání článku *On the abstract properties of linear dependence*, v němž se poprvé objevil pojem matroid. Popsal matroid jako abstraktní zobecnění lineární nezávislosti v maticích (jak napovídá i samotné slovo matroid), a tudíž i jazyk celé této teorie z velké části odpovídá terminologii lineární algebry. Při definici matroidu se *Whitney* pokusil zachytit společné základní vlastnosti lineární závislosti v grafech a maticích.

Matroidy zůstaly dlouhou dobu bez větší odezvy. Koncept lineární závislosti sice použil *van der Waerden* ve své výše zmíněné knize, další práce uveřejnili také například *Birkhoff*, *MacLane* (1909-2005), *Dilworth* (1914-1993) a *Rado* (1906-1989). Teprve v padesátých letech, kdy publikoval své práce o matroidech a grafech britský matematik *W. T. Tutte* (1917-2002), však zájem o teorii matroidů a její aplikace rapidně stoupl.

Život Hasslera Whitneyho

Hassler Whitney se narodil v roce 1907 v New Yorku. Studoval na Yale University, kde získal v roce 1928 bakalářský diplom, potom pokračoval v matematickém výzkumu na Harvardově univerzitě, kde obdržel v roce 1932 doktorát. Doktorát mu byl udělen za disertaci *The Coloring of Graphs*, kterou napsal pod vedením *G. D. Birkhoffa* (1884-1944).



Obrázek 1: Hassler Whitney

V letech 1930-1935 působil jako učitel matematiky na Harvardu, v letech 1931-1933 byl členem *National Research Council*. V roce 1935 byl povýšen na asistenta profesora, v roce 1940 potom na mimořádného profesora. Harvard jej učinil řádným profesorem v roce 1946 a Whitney si udržel tuto profesuru až do roku 1952, kdy přijal nabídku na předsednictví institutu *Advanced Study* v Princetonu. V letech 1953-1956 byl předsedou *National Science Foundation mathematics panel*. V letech 1944-1949 působil jako redaktor časopisu *American Journal of Mathematics*, v letech 1949-1954 byl redaktorem časopisu *Mathematical Reviews*.

Whitneyho hlavní práce se týkaly topologie, diferenciální geometrie, diferenciální topologie, teorie grafů a teorie matroidů.

Princeton zůstal Whitneyho základnou od roku 1952 až do roku 1977, kdy odešel do důchodu. Rok před odchodem do důchodu byl oceněn národní medailí za vědu. V roce 1983 obdržel Wolfovu cenu a o dva roky později Steelevu cenu.

Whitney byl třikrát ženatý a měl pět dětí. Naposledy se ženíl až v 79 letech! Nejen v životě, ale i v práci, byl spíše samotář. Pracoval téměř vždy sám, ale dokázal držet krok s vývojem matematiky. Byl velmi pečlivý, jeho díla jsou do detailů propracována. Whitney byl po celý život také vášnivým horolezcem.

Dílo Hasslera Whitneyho

Whitney se během svého života věnoval celé řadě matematických disciplín, studoval však také hudbu a fyziku. V tomto příspěvku se budeme věnovat těm pracem, které měly bezprostřední souvislost s teorií matroidů. Ve třicátých letech Whitney intenzivně pracoval na teorii grafů. Zabýval se zejména problematikou barvení grafů, otázkami týkajícími se rovinných a duálních grafů, izomorfními grafy a významně také přispěl k řešení slavného problému čtyř barev. Už jako disertační práci předložil dílo *The Coloring of Graphs*, v níž se zabývá zejména problematikou vlastností trivalentních map a výpočtů koeficientů u chromatických polynomů.

V září roku 1934 Whitney představil Americké matematické společnosti článek *On the Abstract Properties of linear dependence*, který vyšel v časopise *American Journal of Mathematics* v roce 1935. Mohli bychom říct, že tato práce je jakýmsi završením Whitneyho studia teorie grafů. Hlavní důvod, který zřejmě přivedl Whitneyho k napsání tohoto článku, byla snaha algebraicky popsat některé geometrické vlastnosti grafů, zejména podmínku rovinnosti grafů. Dalším důvodem byla zřejmě snaha zobecnit pojem linerární závislosti a nezávislosti a popsat tímto způsobem všechny lineárně nezávislé systémy.

Článek se skládá ze tří hlavních částí, úvodu a závěru. Whitney v něm navazuje a často se odvolává na jiné své články: *Non separable and planar graphs*, *2-isomorphic graphs* a *Planar graphs*. V úvodu je definován pojem matroid pomocí lineární nezávislosti sloupců v matici takto:

Definice: Nechť C_1, C_2, \dots, C_n jsou sloupce matice M . Každá podmnožina sloupců je buď lineárně nezávislá nebo lineárně závislá, podmnožiny tedy dělíme do dvou tříd. Tyto třídy nejsou libovolné, musí být

splněny následující podmínky:

- a) Každá podmnožina nezávislé množiny je nezávislá.
- b) Jestliže N_p a N_{p+1} jsou nezávislé množiny mající po řadě p a $(p + 1)$ sloupců, potom množina N_p sjednocena s některým sloupcem z N_{p+1} tvoří nezávislou množinu o $(p + 1)$ sloupcích.

System splňující a) a b) nazýváme matroid.

Hned v úvodu upozorňuje Whitney také na to, že grafy jsou vlastně velmi úzkou skupinou matroidů a některé věty teorie grafů lze tedy aplikovat také na matroidy (za nezávislý podgraf grafu označil podgraf, který neobsahuje žádnou kružnici).

V první části článku jsou uvedeny základní definice matroidů pomocí pořádkové funkce (rank), nezávislých množin (independent sets), bází (bases) a kružnic (circuits). Je zde také dokázána ekvivalence všech těchto definic. Definice matroidu pomocí pořádkové funkce je uvedena takto:

Definice: Nechť je dána množina $M = e_1, e_2, \dots, e_n$. Každé podmnožině N množiny M přiřadíme číslo $r(N)$, které nazýváme řád množiny N . System splňující vlastnosti (R1)-(R3) nazýváme matroid.

- (R1) Řád prázdné množiny je roven nule.
- (R2) Pro každou podmnožinu N a pro libovolný prvek $e \notin N$ platí $r(N + e) = r(N) + k$, kde $k = 0$ nebo $k = 1$.
- (R3) Pro každou podmnožinu N množiny M a pro libovolné prvky $e_1, e_2 \notin N$ platí: Jestliže $r(N + e_1) = r(N + e_2) = r(N)$, potom $r(N + e_1 + e_2) = r(N)$.

Bázi matroidu nadefinoval Whitney jako maximální nezávislý podmatroid matroidu M , kružnici jako minimální závislý matroid. Dále jsou v článku uvedeny základní vlastnosti nezávislých množin a vlastnosti pořádkové funkce. Následuje odvození základních vlastností nezávislých množin a kružnic z vlastností (R1)-(R3). Základní postuláty pro nezávislé množiny, báze a kružnice jsou uvedeny takto:

Nechť M je množina prvků $e - 1, e_2, \dots, e_n$. Nechť každá podmnožina N množiny M je buď závislá nebo nezávislá a jsou splněny následující vlastnosti:

- (I1) Každá podmnožina nezávislé množiny je nezávislá.
- (I2) Jestliže $N = e_1, \dots, e_p$ a $N' = e'_1, \dots, e'_{p+1}$ jsou nezávislé množiny, potom pro nějaké i takové, že $e'_i \notin N$ je $(N + e'_i)$ nezávislá množina.

Nechť M je množina prvků a nechť každá podmnožina této množiny je nebo není bází. Platí:

(B1) Žádná vlastní podmnožina báze není báze.

(B2) Jestliže B a B' jsou báze a $e \in B$, potom pro některý prvek $e' \in B'$ platí: $B - e + e'$ je báze.

Nechť M je množina prvků a nechť každá podmnožina této množiny je nebo není kružnicí. Platí:

(C1) Žádná vlastní podmnožina kružnice není kružnice.

(C2) Jestliže P_1 a P_2 jsou kružnice, $e_1 \in P_1 \cap P_2$, $e_2 \in P_1$ a zároveň $e_2 \notin P_2$, potom existuje kružnice $P_3 \subseteq P_1 + P_2$ taková, že $e_2 \in P_1 + P_2$ a $e_1 \notin P_1 + P_2$.

V druhé části článku se Whitney věnuje speciálnímu typu matroidů - separable matroids a také duálním matroidům. Je zde uvedeno a dokázáno mnoho vlastností těchto matroidů, často se zde autor odvolává na teorii grafů. Některé věty o duálních matroidech přesně korespondují s větami o duálních grafech.

Třetí část článku nese název Matice a matroidy. Whitney zde popsal, jakým způsobem je možné znázornit matroidy do n -dimenzionálního prostoru, ukázal vztahy mezi duálními matroidy a je zde také dokázána důležitá věta, že ke každému matroidu existuje duální matroid (v případě grafů platí tato věta pouze pro rovinné grafy).

Vývoj teorie matroidů po roce 1935

Na Whitneyho článek bezprostředně navázali *Saunders MacLane* a *Garrett Birkhoff*.

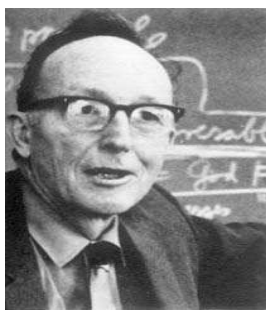
Saunders MacLane napsal v roce 1936 článek *Some interpretations of abstract linear dependence in terms of projective geometry*, v němž dává do souvislosti matroidy a projektivní geometrii (projektivní roviny). V první části článku ukazuje, jak je možné díky souvislosti matroidů a projektivních prostorů matroidy výhodně znázorňovat. V další části se vrací k Whitneyho článku a ukazuje, proč není možné některé matroidy reprezentovat maticově. Na závěr pojednává o matroidech reprezentovatelných nad algebraickým tělesem.

Garrett Birkhoff se v třicátých letech věnoval zejména teorii svazů a abstraktní algebře. Roku 1935 publikoval článek *Abstract linear dependence and lattices*, v němž se pokusil spojit teorii matroidů se svazy. Dokázal, že flaty daného matroidu tvoří svaz.

Po vydání předchozích tří článků zájem o matroidy pohasl a na Whitneyho výzkum nikdo další nenavázal. Druhá etapa vývoje teorie matroidů se začala až v padesátých letech vydáním *Tutteho* článku *A homotopy theorem for matroids*. Tutteovi se podařilo popsat grafové matroidy a matroidy rovinných grafů pomocí tzv. zakázaných podmatroidů. Jeho práce se rychle staly známými, nicméně navázat ně bylo opět velmi obtížné. Jednalo se totiž o zcela nové a náročné poznatky.

Saunders MacLane a Garrett Birkhoff

MacLane byl americký matematik, který se narodil 4. 8. 1909 v Taftville v USA. Od roku 1926 studoval na univerzitě v Yale, v roce 1930 zde odpromoval a odjel na univerzitu do Chicaga. Zde byl silně ovlivňován *E. H. Moorem* (1862–1932), který mu doporučil studia v Göttingenu – v jednom z nejlepších matematických výzkumných světových center své doby. Mac Lane tedy odjel studovat do Německa, avšak politické události té doby ho přinutily rychle dokončit doktorát a vrátit se zpátky do Spojených Států. Mac Lane napsal velmi zajímavý článek o událostech roku 1933 v Göttingenu. Po návratu do USA strávil rok na univerzitě v Yale, potom dva roky na Harvardu. V letech 1936 a 1937 učil na Cornellu, další rok před nástupem na Harvard strávil v Chicagu. Během těchto let napsal společně s *Garrettem Birkhoffem* důležitou práci *A survey of modern algebra*. Práce vyšla roku 1941. Zabýval se také matematickou logikou, aplikovanou matematikou, teorií grafů, algebrou, projektivní geometrií a studiem planárních grafů.



Obrázek 2: Saunders MacLane

Birkhoff se narodil 19. 1. 1911 v Princetonu, jeho otec byl významný matematik George David Birkhoff (1884–1944). Garrett navštěvoval nejprve státní školu, ve dvanácti letech nastoupil na soukromou školu, kde

jej vyučoval výborný matematik *Harry Gaylord*. Garrett velmi dobře prospíval a v roce 1928 začal studovat na Harvardu. Rozhodl se studovat matematickou fyziku. Navštěvoval kurzy diferenciálních rovnic, analytickou mechaniku, kvantovou mechaniku, topologii. Získal tak velmi široké matematické vzdělání. V roce 1932 ukončil studium na Harvardu a odjel studovat na Cambridge do Anglie. Zde začal vzrůstat jeho zájem o abstraktní algebru. Po návratu do USA se stal učitelem na Harvardu a pracoval na dvou důležitých knihách – *Lattice Theory* (1940) a *Survey of Modern Algebra* (1941) (kterou napsal společně s *Mac Lanem*). Během druhé světové války se zabýval studiem aplikované matematiky, hydrodynamiky a lineární algebry. V roce 1970 publikoval další důležitou knihu – *Modern Applied Algebra*. Na Harvardu zůstal až do roku 1981, kdy odešel do důchodu. Během svého života získal řadu významných ocenění a šest čestných titulů na světových univerzitách.



Obrázek 3: Garrett Birkhoff

Základní pojmy teorie matroidů

V následující kapitole jsou uvedeny základní pojmy z teorie matroidů tak, jak se s nimi můžeme v současné době setkat nejčastěji.

Definice: Matroidem rozumíme uspořádanou dvojici (E, I) , kde E je konečná množina a I je systém podmnožin množiny E , který splňuje následující vlastnosti:

$$(I1) \quad \emptyset \in I.$$

$$(I2) \quad X \in I, Y \subseteq X \implies Y \in I.$$

$$(I3) \quad U, V \in I, |U| < |V| \implies \exists x \in V - U \text{ takový, že } U \cup \{x\} \in I.$$

Množina E se nazývá *základní množina* matroidu. Prvky z E nazýváme *prvky matroidu*. Množiny, které patří do systému I , se nazývají *závislé*, v opačném případě se nazývají *nezávislé*.

Příklad: Je-li E konečný vektorový prostor a I systém lineárně nezávislých podmnožin v E , potom je (E, I) matroid.

Definice: Minimální (vzhledem k inkluzi) závislé množiny matroidu se nazývají *kružnice*. Množinu všech kružnic matroidu M značíme \mathcal{C} nebo $\mathcal{C}(M)$.

Je zřejmé, že platí:

$$(C1) \quad \emptyset \notin \mathcal{C},$$

$$(C2) \quad C_1, C_2 \in \mathcal{C}, C_1 \subseteq C_2 \implies C_1 = C_2. \text{ (Žádné dva různé prvky z } \mathcal{C} \text{ nejsou v inkluzi.)}$$

Dále platí:

$$(C3) \quad C_1, C_2 \in \mathcal{C}, C_1 \neq C_2, e \in C_1 \cap C_2 \implies \exists C_3 \in \mathcal{C} \text{ taková, že } C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - e.$$

Věta: Nechť \mathcal{C} je množina podmnožin množiny E . Potom \mathcal{C} je množina kružnic matroidu na E právě tehdy, když \mathcal{C} splňuje následující podmínky:

$$(C1) \quad \emptyset \notin \mathcal{C},$$

$$(C2) \quad C_1, C_2 \in \mathcal{C}, C_1 \subseteq C_2 \implies C_1 = C_2.$$

$$(C3) \quad C_1, C_2 \in \mathcal{C}, C_1 \neq C_2, e \in C_1 \cap C_2 \implies \exists C_3 \in \mathcal{C} \text{ taková, že } C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - e.$$

Následující tvrzení je elementární, avšak často používané.

Věta: Nechť I je nezávislá množina matroidu M a $e \in M$ takový prvek, že $I \cup e$ je závislá. Potom M má jedinou kružnici patřící do $(I \cup e)$ a tato kružnice obsahuje prvek e .

K definování matroidu není nutné vypsání všech nezávislých množin, postačí výpis maximálních nezávislých množin.

Definice: Maximální (vzhledem k inkluzi) nezávislé množiny matroidu se nazývají *báze*. Množinu všech bází matroidu M značíme \mathcal{B} nebo

$\mathcal{B}(M)$.

Báze matroidu mají mnoho společného s bázemi ve vektorových prostorech.

Lemma: Jestliže B_1 a B_2 jsou báze matroidu M , potom $|B_1| = |B_2|$. (Všechny báze matroidu M mají stejný počet prvků.)

Definition: Pořádkovou funkcí (rank function) matroidu $M = (E, I)$ nazýváme funkci $r : \mathcal{P}(E) \rightarrow N$ definovanou takto:

$$r(A) = \max(|X| : X \subseteq A, X \in I)$$

Číslo $r(E)$ nazýváme *řád matroidu*.

Pořádková funkce r matroidu $M = (E, I)$ má tyto vlastnosti:

$$(R0) \quad A \subseteq E \Rightarrow 0 \leq r(A) \leq |A|, r(\emptyset) = 0$$

$$(R1) \quad (\text{Monotónnost}) \quad A \subseteq B \subseteq E \Rightarrow r(A) \leq r(B)$$

$$(R2) \quad (\text{Semimodularita}) \quad A, B \subseteq E \Rightarrow r(A \cup B) + r(A \cap B) \leq r(A) + r(B)$$

Je zřejmé, že řád nezávislé množiny je roven počtu prvků této nezávislé množiny a řád každé báze matroidu je roven řádu daného matroidu. Prvky matroidu M , které mají řád roven nule se nazývají *smyčky* matroidu M . Jestliže $r(x, y) = 1$ a x, y nejsou smyčky, potom prvky x a y nazýváme *rovnoběžnými*. Pro mnohé problémy nejsou smyčky a rovnoběžné prvky důležité, stačí pak zkoumat tzv. *jednoduché matroidy*, což jsou matroidy bez smyček a rovnoběžných prvků.

Definition: Nechť $M = (E, I)$ je matroid, r je jeho pořádková funkce. Funkci $\sigma : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$, definovanou:

$\forall X \subseteq E$ platí $\sigma(X) = \{x \in E : r(X \cup x) = r(X)\}$, nazýváme *uzávěrovou funkcí* (a closure operator).

Uzávěrová funkce matroidu M má následující vlastnosti:

$$(U1) \quad A \subseteq E \Rightarrow A \subseteq \sigma(A)$$

$$(U2) \quad A \subseteq \sigma(B) \Rightarrow \sigma(A) \subseteq \sigma(B)$$

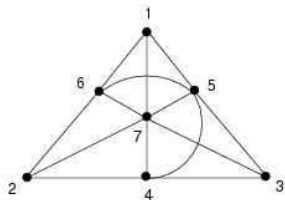
$$(U3) \quad (\text{Výměnný axiom}) \quad x \notin \sigma(A) \wedge x \in \sigma(A \cup y) \Rightarrow y \in \sigma(A \cup x)$$

Definition: Množina $A \subseteq E$ se nazývá *uzavřená* (nebo *flat* či *podprostor*) matroidu M , když pro všechny prvky $x \in E - A$ platí $r(A \cup x) = r(A) + 1$.

Jinak řečeno, množina A je uzavřená právě tehdy, jestliže k ní nelze přidat žádný prvek bez zvětšení řádu. Zřejmě $\sigma(A)$ je nejmenší uzavřená množina obsahující A .

Matroid je jednoznačně určen svými nezávislými množinami, bázemi, pořádkovou funkcí nebo uzávěrovou funkcí. Matroid lze tudíž definovat i pomocí těchto pojmů, podobně jako to udělal Whitney.

Jak již bylo uvedeno v předcházející kapitole, matroidy lze poměrně jednoduše znázorňovat v rovině. Mějme například jednoduchý matroid 3. řádu. Prvky matroidu znázorníme jako body v rovině a každou uzavřenou množinou A takovou, že $|A| \geq 3$, $r(A) = 2$, vedeme křivku. Báze matroidu jsou pak všechny trojice bodů, které neleží na jedné přímce. Na následujícím obrázku je tzv. *Fanův matroid*. Je snadné ověřit, že se jedná o projektivní rovinu 2. řádu.



Obrázek 4: Fanův matroid

Závěr

Teorie matroidů patří od padesátých let k nejrychleji se rozvíjejícím částem diskrétní matematiky. Pojem matroid je velmi mnohostranný a nachází tudíž uplatnění v celé řadě matematických disciplín a jejich aplikacích, např. grafových algoritmech, kombinatorických optimalizacích, v elektroinženýrství a statice.

Literatura

- [1] Birkhoff, G.: *Abstract linear dependence and lattices*, American Journal of Mathematics 57 (1935), 800-804
- [2] Borůvka, O.: *O jistém problému minimálním*, Práce Moravské přírodovědecké společnosti 3 (1926), 37-58.

- [3] König, D.: *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Lipsko, 1986
- [4] Kučera, L., Nešetřil, J.: *Algebraické metody diskrétní matematiky*, Nakladatelství technické literatury, Praha, 1989
- [5] Kung, J. P. S.: *A source book in matroid theory*, Birkhäuser, Boston, 1986
- [6] MacLane, S.: *Some interpretations of abstract linear dependence in terms of projective geometry*, American Journal of Mathematics 58 (1936), 236-240
- [7] Noether, E.: *Idealtheorie in Ringbereichen*, Mathematische Annalen 83 (1921), 24-66
- [8] Noether, E.: *Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern*, Mathematische Annalen 96 (1927), 26-61
- [9] Oxley, J. G.: *Matroid Theory*, Oxford University Press Inc., New York, 1992
- [10] Šišma, P.: *Teorie grafů 1736–1963*, Prometheus, Praha, 1997
- [11] Tutte, W. T.: *A homotopy theorem for matroids*, Transactions of the American Mathematical Society 88 (1958), 144–174
- [12] Tutte, W. T.: *Matroids and graphs*, Trans. Amer. Math. Soc. 90, 1959, 527-552
- [13] van der Waerden, B. L.: *Moderne Algebra Vol. 1*. Berlin, Springer-Verlag, 1937
- [14] Whitney, H.: *Non-separable and planar graphs*, Transactions of the American Mathematical Society 34 (1932), 339-362
- [15] Whitney, H.: *On the abstract properties of linear dependence*, American Journal of Mathematics 57 (1935), 509-533
- [16] <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/index.html>

Zuzana Voglová
Ústav matematiky a statistiky
Přírodovědecká fakulta MU, Brno
e-mail: zuzana.voglova@foxis.cz