POZNÁMKY K FORMOVÁNÍ TEORIE PRAVDĚPODOBNOSTI V 17. A 18. STOLETÍ

KAREL MAČÁK

1 Vymezení problematiky

V přednášce bude pojednáno o některých problémech a výsledcích, které se vyskytly v teorii pravděpodobnosti v 17. a 18. století. Výběr těchto problémů a výsledků je samozřejmě subjektivní, autor se však domnívá, že je zde shrnuto z tehdejší teorie pravděpodobnosti to nejzajímavější. Některé tyto problémy a výsledky se původně objevily v jiných souvislostech, než ve kterých jsou vykládány dnes, a proto zde bude historický výklad doplněn stručnými vsuvkami obsahujícími dnešní pojetí základních pojmů vykládané látky; z tohoto současného pojetí látky budeme také při výkladu vycházet (tj. většinou nebudeme uvádět historické důkazy nebo historické metody řešení problémů).

Pokud se literatury k tématu přednášky týče, jako základních pramenů k dějinám teorie pravděpodobnosti bylo použito knih [1, 2]; z prací pojednávajících souhrnně o dějinách matematiky bylo použito hlavně knih [3, 4].

Při vymezení problematiky této přednášky nelze přehlédnout skutečnost, že naše dnešní matematické pojetí pojmu „pravděpodobnost" je pouze jedním z několika možných pojetí. V matematické teorii pravděpodobnosti chápeme pravděpodobnost jako vlastnost jevů okolního světa (někdy se také mluví o tzv. objektivní pravděpodobnosti), je ale také možné chápat pravděpodobnost jako vlastnost našich znalostí, našeho uvažování, jako míru naší jistoty (našeho přesvědčení) o správnosti nějakého tvrzení (tzv. subjektivní pravděpodobnost). Obě tato pojetí nebyla v 17. a 18. století přesně oddělena (viz např. článek [5], kde je uvedena další literatura k této otázce), v naší přednášce se však budeme věnovat pouze matematickému pojetí pojmu pravděpodobnost. Pokud se druhého pojetí týče, stalo se postupně spíše doménou matematicky orientovaných filozofů (od Bolzana (*Wissenschaftslehre*, 1837) po Carnapa (*Logical Foundations of Probability*, 1950[1]) a v poslední době je matematicky formalizováno v teorii fuzzy množin[2]; tuto problematiku ponecháme zcela stranou.

[1]Český překlad některých kapitol lze nalézt v knize CARNAP, R.: *Problémy jazyka vědy*, Svoboda, Praha 1968.

[2]Poznamenejme k tomu, že autor již zmíněného článku [5] výrazně přispěl k formování teorie fuzzy množin svou knihou *A Mathematical Theory of Evidence*, Princeton University Press, 1976.

Přednáška je rozdělena do dvou částí. První část je věnována vzniku teorie pravděpodobnosti v polovině 17. století. Stručně jsou shrnuta fakta předcházející vznik teorie pravděpodobnosti, je podána informace o základních pracích a výsledcích Pascalových, Fermatových a Huygensových a jsou připojeny základní údaje o souvisejících pracích z oblasti kombinatoriky a pojistné matematiky[3]. Ve druhé části je pojednáno o některých aspektech vývoje teorie pravděpodobnosti v 18. století. Je zde řeč o vkladu Bernoulliů do teorie pravděpodobnosti (zákon velkých čísel, petrohradský paradox), o geometrickém přístupu k pravděpodobnostním úlohám (G. L. L. Buffon) a podmíněných pravděpodobnostech (Thomas Bayes). Přednáška je doplněna dvěma přílohami; v první je uveden základní rodokmen rodu Bernoulliů, druhá obsahuje doplňující poznámku k úloze o rozdělení sázky, která sehrála důležitou roli v počátečním formování teorie pravděpodobnosti.

I. část

17. století

2 Úvod k I. části

2.1 Vstupní úvaha

S náhodnými jevy se lidstvo setkávalo od nepaměti, k jejich matematickému zkoumání ale přikročilo až v novověku; za počátek teorie pravděpodobnosti je všeobecně považována korespondence, kterou spolu v létě a na podzim r. 1654 vedli Blaise Pascal a Pierre de Fermat. Příčin tohoto poměrně pozdního počátku matematického přístupu k jevu náhody mohlo být více; dle našeho názoru mohou být rozděleny do dvou skupin:

I. První skupinu by bylo možno nazvat příčinami epistemologickými; tyto příčiny spočívají v tom, že nikdo neviděl (nerozpoznal) žádnou souvislost mezi matematikou na straně jedné a náhodnými jevy na straně druhé. Pokud se matematiky týče, byla do ní tradičně zahrnována geometrie, aritmetika a algebra; zde se nic náhodného nevyskytovalo. Pokud se náhody týče, pak (byla-li vůbec zkoumána) k ní bylo přistupováno v podstatě dvojím způsobem:

1. Náhoda byla jistým způsobem „zbožštěna“; náhodné jevy byly považovány za projev vůle tajemného božstva a jejich zkoumání náleželo tedy do kompetence kněží, nikoli matematiků (např. v Římě zkoumali haruspikové vůli bohů z tvaru a vzhledu vnitřností obětovaných zvířat).

2. Náhoda byla považována za synonymum pro neznalost všech příčin a kauzálních vazeb, což v podstatě znamená odmítnutí objektivní existence

[3] Stranou ponecháme související práce z oblasti filozofie; tato problematika by vyžadovala samostatný referát. Zájemce o tyto otázky upozorňujeme na knihy HACKING, I.: *The emergence of probability*, Cambridge Univ. Press, 1975 a SCHNEIDER, I.: *Die Entstehung der Wahrscheinlichkeitstheorie von den Anfängen bis 1933*, Akademie Verlag Berlin und Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt, 1988.

náhody; uveďme zde v této souvislosti dva citáty ze Spinozovy *Etiky*[4] (citujeme zde dle překladu vydaného nakladatelstvím Svoboda, Praha 1977):

TVRZENÍ 29 (str. 88): *V přírodě neexistuje nic náhodného, nýbrž všechny věci jsou přirozeností Boha nutně determinovány k určitému modu existence a působení.*

POZNÁMKA 1 (str. 92 – 93): ... *Jako náhodnou však označujeme věc jen z důvodů tkvících v nedostatečnosti našeho poznání. Ta věc, o níž nevíme, zda její esence nezahrnuje protiklad, nebo o níž bezpečně víme, že žádný protiklad nezahrnuje, a přesto o její existenci nemůžeme nic s jistotou tvrdit, protože řád příčin je nám skryt, taková věc se nám nemůže jevit ani jako nutná, ani jako nemožná, a proto ji nazýváme náhodnou nebo možnou.*

II. Druhou skupinu by bylo možno nazvat příčinami utilitaristickými; tyto příčiny spočívají v tom, že matematické zkoumání náhodných jevů nebylo dříve nutné, protože ho nikdo k ničemu nepotřeboval. Nutnost přesného popisu náhodných jevů se objevila jednak v souvislosti s rozvojem mořeplavby, obchodu, (tehdy) moderního buržoazního státu a z toho plynoucího vzniku demografie a pojišťovnictví, jednak v souvislosti s rozvojem exaktních přírodních věd (hlavně astronomie a experimentální fyziky) a z toho plynoucí nutnosti zpracovávat výsledky měření zatížené náhodnými chybami[5].

Uvedené skutečnosti (a možná i další vlivy) mohly být příčinou toho, že matematická teorie pravděpodobnosti začala vznikat až v 16. století, i když její základní principy jsou velice jednoduché (třeba ve srovnání s řeckou geometrií). Při jejím vzniku sehrály roli „odrazového můstku" hazardní hry a sázky, obzvláště hra v kostky. Základním matematickým aparátem se postupně stala paralelně vznikající kombinatorika, jejíž rozvoj zde ale nebudeme sledovat (i když paralelní vývoj kombinatoriky a teorie pravděpodobnosti v počátcích obou těchto disciplín je jistě zajímavý); připomeneme si pouze některé základní práce.

2.2 Výchozí problémy

Jak už bylo řečeno, za datum vzniku teorie pravděpodobnosti je považován rok 1654. V té době už byly v jistém smyslu „ustálené" dva typy problémů z oblasti hazardních her a sázek, které sloužily formující se teorii pravděpodobnosti jako základní materiál:

I. První typ problémů bychom dnes asi označili za problémy kombinatorické a týkaly se např. toho, kolika způsoby může padnout jistý počet ok při házení dvěma, třemi, atd. kostkami; úlohy podobného typu se objevují v teorii pravděpodobnosti a jejich aplikacích i dnes[6].

---

[4] Benedikt Spinoza (1632 – 1677) dokončil svůj spis *Ethica ordine geometrico demonstrata* v r. 1675; vydán byl v r. 1677 až po Spinozově smrti. Byl tedy psán právě v době, kdy vznikala teorie pravděpodobnosti a je známo, že Spinoza se zajímal i o matematickou stránku této teorie (viz [6]).

[5] Tento faktor se ale ve vývoji teorie pravděpodobnosti výrazněji uplatnil až později (Gauss, Laplace) a v tomto příspěvku mu nebude věnována pozornost.

[6] Jako příklad uveďme článek GULDAN, F.: *Je lepšie hrať ruletu alebo blackjack?* PMFA 38 (1993), č. 1, str. 29 – 39.

II. Druhý typ problémů má dnes význam čistě historický a týkal se tzv. úlohy o rozdělení sázky, kterou lze formulovat v nejjednodušší podobě takto:

Dva hráči hrají sérii her o nějakou částku C; tuto částku získá ten hráč, který jako první vyhraje k her. Pravděpodobnost výhry v každé jednotlivé hře je pro oba hráče stejná (oba hráči jsou „stejně dobří"). Série her je předčasně ukončena ve chvíli, kdy jednomu hráči chybí do výhry m her, druhému hráči chybí do výhry n her. Jak má být spravedlivě rozdělena částka C mezi hráče?

Všimněme si toho, že oba typy problémů lze formulovat bez použití pojmu „pravděpodobnost" a původně opravdu bez použití tohoto pojmu formulovány byly; nemluvilo se o pravděpodobnostech, ale o dělení sázky, šancích na výhru a pod.

2.3 Bezprostřední předchůdci

Některé konkrétní případy úlohy o rozdělení sázky řešil již Luca Pacioli (1445(?) – 1514(?)) v knize *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* (vyšla r. 1494) a Nicolo Tartaglia (1499(?) – 1557) v knize *General trattato di numeri et misura* (vyšla r. 1556); jejich řešení jsou však chybná.

Zřejmě první prací, věnovanou speciálně problémům zahrnovaným dnes do teorie pravděpodobnosti, byla práce Hieronyma Cardana (1501 – 1576) *De ludo aleæ*, kterou Cardano napsal asi r. 1526, ale nevydal ji tiskem; byla nalezena po jeho smrti v jeho rukopisné pozůstalosti a otištěna v 1. svazku jeho sebraných spisů, který vyšel r. 1663.

Teorií pravděpodobnosti se zabýval i Galileo Galilei (1564 – 1642); jeho spis *Considerazione sopra il giuco dei dadi* vyšel až r. 1718 a datum vzniku není známo.

Rozbor všech uvedených prací lze nalézt např. v [2], str. 22 – 42; stručnější přehled byl u nás publikován v r. 1994[7].

3 Vznik teorie pravděpodobnosti

3.1 Hlavní postavy

Jak už bylo řečeno, za počátek teorie pravděpodobnosti je všeobecně považována korespondence, kterou v r. 1654 vedli Blaise Pascal a Pierre de Fermat o problémech, se kterými se na Pascala obrátil rytíř de Méré. Část těchto dopisů se nezachovala; zachovaná korespondence byla vydána tiskem v Toulouse v r. 1679[8].

[7] COUFAL, J.: *Alea iacta est aneb půl tisíciletí od vytištění úlohy rytíře de Méré*, Informační bulletin České statistické společnosti 5 (1994), č. 1 a 2.

[8] Z pedagogického hlediska by v této souvislosti neměla být přehlédnuta knížka RÉNYI, A.: *Dialogy o matematice*, MF Praha 1980, jejíž jedna část je věnována právě vzniku teorie pravděpodobnosti; z této knížky přebíráme i některé informace o aktérech celé záležitosti.

3.1.1 Blaise Pascal (1623 – 1662)

Narodil se v Clermont – Ferrand; jeho otec Etienne Pascal (1588 – 1651) byl povoláním soudce, ale rovněž se zabýval matematikou (Pascalovy závitnice). V r. 1631 se rodina přestěhovala do Paříže. Byl všestranně nadaný: ve věku 16 let publikoval pojednání o kuželosečkách, ve dvaceti sestrojil počítací strojek, v letech 1648 – 1653 opakoval a ověřil Torricelliho pokusy k výpočtu atmosférického tlaku, v letech 1653 – 1654 se zabýval teorií pravděpodobnosti, v letech 1658 –1659 se zabýval cykloidou (z hlediska výpočtu plochy, těžiště apod., čímž vlastně předjímal infinitesimální metody Newtonovy a Leibnizovy). Zabýval se rovněž filozofií a teologií; v r. 1656 uveřejnil ostře protijezuitské *Listy venkovanovi* (v r. 1657 byla tato kniha dána na index zakázaných knih) a od r. 1658 pracoval na obraně křesťanského náboženství, z níž napsal pouze fragmenty, vydané po jeho smrti pod názvem *Pensées* (1669).

3.1.2 Pierre de Fermat (1601 – 1665)

Působil jako právník v Toulouse, matematikou se zabýval jako koníčkem. Byl vynikajícím znalcem jazyků klasických (latina, řečtina) i současných (španělština, italština); ve francouzštině, španělštině a italštině psal i básně. Ke studiu matematiky ho zřejmě přivedla četba originálů řeckých matematických klasiků (Eukleida, Archimeda, Diofanta a dalších). Je považován za zakladatele teorie čísel, kde získala největší proslulost tzv. velká Fermatova věta, a spoluzakladatele teorie pravděpodobnosti.

3.1.3 Antoine Gombaud de Méré (1607 – 1685)

Byl známou postavou na dvoře Ludvíka XIV; zabýval se literaturou, filozofií a matematikou. V r. 1653 podnikl s Pascalem a dalšími přáteli cestu do Poitou, odkud pocházel[9]; přitom asi seznámil Pascala a další s některými matematickými problémy, kterými se zabýval, a tím asi dal podnět k Pascalově korespondenci s Fermatem.

Některé prameny uvádějí jako rok úmrtí r. 1684; v [7] na str. 68 je uvedeno, že de Méré zemřel při hře v karty.

3.2 VSUVKA I

Elementární teorie pravděpodobnosti

Než přikročíme k výkladu o prvních řešeních pravděpodobnostních problémů, připomeňme si stručně základní pojmy elementární teorie pravděpodobnosti v dnešním pojetí.

[9] Poitou je oblast ve střední Francii, jejímž centrem je město Poitiers; připomeňme si při této příležitosti v souvislosti s dějinami arabské matematiky, že v r. 732 porazila francouzská vojska vedená Karlem Martellem Araby v bitvě u Poitiers.

3.2.1 Klasická definice pravděpodobnosti

Uvažujme pokus, který lze libovolněkrát opakovat za stále stejných podmínek. Všechny jeho možné výsledky tvoří množinu (náhodných) elementárních jevů M, o nichž předpokládáme, že jsou všechny stejně možné (tj. – jinak řečeno – stejně pravděpodobné (v jakémsi intuitivním smyslu)) a že v každém pokusu nastane právě jeden elementární jev. (Náhodným) jevem A nazýváme každou podmnožinu množiny elementárních jevů.

Obsahuje–li množina elementárních jevů celkem m elementárních jevů a jev $A \subseteq M$ obsahuje a elementárních jevů, pak pravděpodobnost jevu A značíme $P(A)$ a je rovna

$$P(A) = \frac{a}{m}$$

(někdy se říká: $P(A)$ je rovna poměru počtu případů příznivých ku počtu případů možných)[10].

3.2.2 Vlastnosti pravděpodobnosti

Dále uvedené vlastnosti lze snadno odvodit z klasické definice pravděpodobnosti. Protože náhodné jevy chápeme jako množiny, můžeme pro operace s nimi používat množinové symboliky.

1/ $0 \leq P(A) \leq 1$.

2/ $(A \subset B) \Rightarrow (P(A) \leq P(B))$.

3/ Jsou–li jevy A, B disjunktní (tj. $A \cap B = \emptyset$), pak $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. (Této vlastnosti se někdy říká věta o sčítání pravděpodobnosti; udává pravděpodobnost toho, že ze dvou disjunktních jevů nastane aspoň jeden.)

3.1 Důsledek 1.
Označme A^c doplněk jevu A. Pak $P(A^c) = 1 - P(A)$.

3.2 Důsledek 2.
Nechť jevy A, B nejsou disjunktní. Pak $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

4/ Považujeme–li prozatím za intuitivně jasný pojem nezávislosti náhodných jevů, pak pro nezávislé náhodné jevy A, B platí $P(A \cap B) = P(A).P(B)$.

(Této vlastnosti se někdy říká věta o násobení pravděpodobnosti; udává pravděpodobnost toho, že dva nezávislé jevy nastanou současně. K pojmu nezávislosti náhodných jevů se ještě vrátíme ve poslední části tohoto referátu věnované Thomasi Bayesovi, protože tento (zatím) intuitivně chápaný pojem vyžaduje přesnější vymezení.)

3.2.3 Střední hodnota diskrétní náhodné veličiny

Intuitivně lze náhodnou veličinu chápat jako číselnou veličinu, která mění svou hodnotu působením náhodných vlivů (v závislosti na náhodě). Formálně lze definovat náhodnou veličinu jako reálnou funkci definovanou na množině elementárních jevů (a splňující navíc jisté předpoklady); pro náš výklad toto intuitivní pojetí postačí.

---

[10] Není to samozřejmě definice v matematickém smyslu, spíš jakési slovní vyjádření intuitivně chápaného pojmu.

Náhodnou veličinu ξ nazýváme diskrétní, může-li nabývat pouze hodnot z nějaké spočetné množiny $\mathcal{M}$. Takovou náhodnou veličinu lze zadat pomocí pravděpodobnostní funkce $p_\xi(x)$, která je definována pro všechna $x \in \mathcal{M}$ vztahem

$$p_\xi(x) = P(\xi = x).$$

Poznamenejme, že podle definice pravděpodobnosti musí být

$$\sum_{x \in \mathcal{M}} p_\xi(x) = 1.$$

Střední hodnota diskrétní náhodné veličiny ξ se obvykle značí $E(\xi)$ a je definována vztahem

$$E(\xi) = \sum_{x \in \mathcal{M}} x.p_\xi(x),$$

pokud je řada vpravo absolutně konvergentní.

3.3 Problémy rytíře de Méré a jejich řešení

De Méré seznámil Pascala se dvěma problémy, z nichž Pascala s Fermatem hlavně zaujala úloha o rozdělení sázky, jejíž formulaci jsme již uvedli v části 2.2. Druhá úloha byla poměrně elementární a Pascal ji zřejmě vyřešil obratem ruky (viz citace v následující části); tato úloha se dodnes objevuje v učebnicích a zde bude vyložena jako první.

Při řešení těchto problémů vycházeli Pascal s Fermatem z pojetí pravděpodobnosti odpovídajícího dnešní tzv. klasické definici pravděpodobnosti, pojem „pravděpodobnost" však vůbec nedefinovali; jejich cílem bylo řešení jistých konkrétních úloh, nikoli definování obecných pojmů a teoretické studium jejich vlastností.

3.3.1 Úloha o kostkách

De Méré tvrdil, že chce-li někdo hodit aspoň jednou šestku při opakovaném házení jednou kostkou, má nadpoloviční šanci na úspěch počínaje čtyřmi hody a poměr šancí na úspěch k šancím neúspěšným při čtyřech hodech je 671 : 625. Pokud chce někdo hodit aspoň jednou dvě šestky při házení dvěma kostkami, měl by mít dle de Mérého nadpoloviční šanci na úspěch počínaje 24 hody (neboť poměr 24 : 36 je stejný jako poměr 4 : 6), ale de Méré zjistil (asi ve své hráčské praxi), že to není pravda, což ho pobouřilo[11].

První tvrzení de Mérého je správné, druhé však nikoli. Snadno nahlédneme, že pravděpodobnost toho, že v k hodech nepadnou ani jednou dvě šestky, je rovna $(\frac{35}{36})^k$. Řešení daného problému tedy lze nalézt řešením nerovnice

$$\left(\frac{35}{36}\right)^k < \frac{1}{2},$$

[11]Pascal v dopisu Fermatovi z 29.VII.1654 o tom píše: *To tedy byl jeho veliký skandál, který ho přiměl domýšlivě říci, že poučky nejsou stálé a že se aritmetika mýlí: vy však jistě snadno uvidíte důvod podle principů, k nimž jste dospěl.*
(Voilà quel était son grand scandale qui lui faisait dire hautement que les propositions n'etaient pas constantes et que l'arithmétique se démentait: mais vous en verrez bien aisément la raison par les principes où vous êtes.) (citováno dle [8], str. 166).

ze které plyne $k \doteq 24,6$, takže dvěma kostkami je třeba hodit aspoň pětadvacetkrát, aby šance na úspěch byla nadpoloviční. Pomocí programového produktu „Mathematica“ bylo zjištěno, že poměr šancí na úspěch k šancím neúspěšným je potom

$$\frac{36^{25}-35^{25}}{35^{25}} = \frac{408611683992293747092011689842522621501}{399669593472470313551127910614013671875}.$$

3.3.2 Úloha o rozdělení sázky

Obecnou formulaci úlohy jsme už uvedli v části 2.2; Pascal s Fermatem řešili ve své korespondenci pouze některé speciální případy úlohy o rozdělení sázky pro konkrétní dané hodnoty C, k, m, n. Základní myšlenka jejich řešení spočívala v tom, že za spravedlivé považují takové rozdělení sázky, při kterém je částka C rozdělena mezi hráče ve stejném poměru, v jakém jsou v okamžiku přerušení série her pravděpodobnosti výhry celé částky v případě dohrávání celé série až do konce. Pascal se zřejmě touto úlohou zabýval dále a ve spisu *Traité du triangle arithmétique* vydaném posmrtně (1665)[12] uvádí obecné řešení, které lze stručně shrnout takto:

I. Do dokončení celé série chybí nejvýše $m+n-1$ her.

II. První hráč vyhraje celou sázku, jestliže druhý hráč vyhraje nejvýše $n-1$ her.

III. Druhý hráč vyhraje celou sázku, jestliže první hráč vyhraje nejvýše $m-1$ her.

IV. Z celkového počtu $m+n-1$ her lze vyhrát (tj. vybrat) k her celkem $\binom{m+n-1}{k}$ způsoby.

V. Poměr šancí obou hráčů na výhru celé sázky tedy je

$$\sum_{i=0}^{n-1}\binom{m+n-1}{i} : \sum_{j=0}^{m-1}\binom{m+n-1}{j}$$

a ve stejném poměru musí být rozdělena i částka C mezi oba hráče; tento poměr nezávisí ani na částce C, ani na počtu her k.

4 Christian Huygens

4.1 Základní životopisné údaje

Christian Huygens se narodil 14.IV.1629 v Haagu. Jeho otec Konstantin Huygens byl nejen významným politickým činitelem (působil jako sekretář oranžských princů) a majitelem několika panství (Zuylichem, Zeelhelm, Monnikeland), ale psal i básně a komponoval. Christian studoval práva na universitách v Leydenu a Bredě; doktorát získal v r. 1655 na universitě v Angers ve Francii

[12] V [1] na str. 16 je poněkud nejasné tvrzení: *This treatise was printed about 1654, but not published until 1665.*

a při této cestě také navštívil Paříž, což je z našeho hlediska důležité, neboť se zde dozvěděl o Pascalově korespondenci s Fermatem týkající se problémů rytíře de Méré. V r. 1666 se stal členem právě založené francouzské Akademie věd[13] a usadil se trvale v Paříži. Žil zde až do r. 1681, kdy odcestoval do Haagu na léčení; protože v r. 1685 byl ve Francii zrušen nantský edikt, který od r. 1598 zaručoval náboženské a politické svobody hugenotů, nemohl se již protestant Huygens do Francie vrátit. Zemřel v Haagu 8.VII.1695.

Huygens učinil řadu důležitých objevů ve fyzice: studoval kyvadlové hodiny[14], zdokonalil dalekohled a učinil řadu významných astronomických pozorování (objevil např. Saturnův prstenec), vypracoval vlnovou teorii světla a zabýval se mnoha dalšími problémy; jeho sebrané spisy byly vydány ve francouzštině a holandštině v Haagu v letech 1888 – 1950 a mají 22 svazků (z čehož prvních 10 svazků je věnováno Huygensově korespondenci)[15]. Z našeho hlediska je ovšem podstatné, že se zabýval i teorií pravděpodobnosti a napsal spis *De ratiociniis in ludo aleæ*[16].

4.2 Spis *De ratiociniis in ludo aleæ*

Tento Huygensův spis vyšel r. 1657 jako příloha ke spisu jeho učitele Franse (Francisca) van Schootena[17] *Exercitationum mathematicarum libri quinque* a byl prvním samostatným tištěným pojednáním o úlohách teorie pravděpodobnosti[18]. Výrazně ovlivnil počáteční fázi formování teorie pravděpdobnosti; Jacob Bernoulli ve svém spise *Ars conjectandi* [10] věnuje zhruba čtvrtinu svého spisu novému otištění a podrobnému komentování této Huygensovy práce. Po dobu přibližně půl století (až do vydání již zmíněného *Ars conjectandi* a prací Montmortových a Moivreových[19] byl Huygensův spis základní prací v oblasti teorie pravděpodobnosti. Přes všechna uvedená fakta byla tato poměrně ranná Huygensova práce zastíněna jeho pozdějšími díly a dnes stojí poněkud stranou pozornosti.

Pojednání je členěno do čtrnácti témat (zvaných *Propositio*), která lze podle obsahu rozdělit do tří skupin. V úvodu a první části (*Propositiones I – III*) dospívá Huygens (řečeno dnešní terminologií) od pojmu aritmetického průměru k pojmu střední hodnoty diskrétní náhodné veličiny, ani jeden z těchto termínů

[13][4] na str. 88 uvádí, že se stal dokonce jejím prezidentem, ale žádný jiný pramen to nepotvrzuje.

[14]Jeho hlavní matematické dílo *Horologium oscillatorium* (1673) je vlastně věnováno tomuto problému; přitom zavedl např. pojem „evolventa dané křivky“ ([3], III, str. 140).

[15]Bohužel tyto sebrané spisy nejsou dostupné v žádné knihovně v českých zemích.

[16]Jeho podrobnému rozboru je věnován článek MAČÁK, K.: *Huygensův spis De ratiociniis in ludo aleæ*. PMFA 41 (1996), str. 180 – 197.

[17]Je míněn Franciscus van Schooten mladší (1615 – 1660), který byl profesorem na universitě v Leydenu stejně jako jeho otec, který se také jmenoval Franciscus a žil v letech 1581 – 1646 ([3], II, str. 660).

[18]Zde vycházíme z textu otištěného v [9].

[19]PIERRE REMOND DE MONTMORT (1678 – 1719): *Essai d'analyse sur les jeux de hazards*, první vydání 1708; ABRAHAM DE MOIVRE (1667 – 1754): *De mensura sortis, seu, de probabilitate eventuum in ludis a casu fortuito pendentibus*, první vydání ve *Philosophical Transactions* Nr. 329, 1711.

se u něj však neobjevuje; všechny jeho úvahy se vztahují ke hře o nějakou částku (sázku) a příslušný pojem se proto nazývá buď *expectatio*[20] nebo *sors*[21].

Huygensova definice pojmu, nazývaného dnes střední hodnotou, je následující[22]:

Je-li počet případů, v nichž obdržím částku a, *roven* p, *a počet případů, v nichž obdržím částku* b, *roven* q, *a předpokládám-li, že všechny případy se mohou vyskytnout stejně snadno, pak mé očekávání bude mít hodnotu* $\frac{pa+qb}{p+q}$.

Sílu tohoto pojmu demonstruje Huygens tím, že všechny úlohy ve svém spisu řeší jeho užitím, a to i v případech, kdy bychom dnes dali přednost jednodušší úvaze kombinatorické.

Huygensovy *Propositiones I – III* jsou zajímavé i z hlediska vzniku tzv. klasické definice pravděpodobnosti (viz část 3.2.1), jejímž výchozím pojmem jsou stejně možné elementární náhodné jevy. Huygens pojem „pravděpodobnost" vůbec nezavádí, stačí mu pojem „očekávaná výhra", ale s problémem stejně možných elementárních jevů se nějak vypořádat musí, což činí formulací, že „všechny případy se mohou vyskytnout stejně snadno". O klasické definici pravděpodobnosti ještě bude zmínka v části 8.3.1.

Právě v uvedených *Propositiones I – III* a v dalším *Propositio IX* lze spatřovat podstatný rozdíl mezi spisem Huygensovým na straně jedné a korespondencí Pascala s Fermatem na straně druhé; zatímco Pascal s Fermatem pouze řešili úlohy, u Huygense je už náznak obecných pojmů a postupů.

Druhá část (*Propositiones IV – IX*) je věnována úloze o rozdělení sázky. Huygens vychází ze stejného pojetí spravedlivého rozdělení jako Pascal s Fermatem, neřeší ale úlohu kombinatoricky, nýbrž využívá *Propositiones I – III* k tomu, že postupně řeší případy $m = 1$ a $n = 2$, $m = 1$ a $n = 3$ nebo 4, $m = 2$ a $n = 3$, $m = 2$ a $n = 4$; pak úlohu zobecňuje na tři stejně dobré hráče, z nichž dvěma chybí k výhře po jedné hře a třetímu chybí dvě hry. Nakonec dává zcela obecný (i když poněkud nejasně formulovaný) rekurentní postup k řešení úlohy o rozdělení sázky pro libovolný počet stejně dobrých hráčů a tento postup ilustruje řešením příkladu hry tří hráčů, kdy prvnímu hráči chybí jedna hra, druhému a třetímu po dvou hrách; na závěr uvádí tabulku rozdělení sázky pro 17 různých situací ve hře tří hráčů.

Třetí část (*Propositiones X – XIV*) obsahuje různé úlohy s „herní" motivací; počítají se zde (řečeno dnešní terminologií) pravděpodobnosti výher jednotlivých hráčů za různých podmínek, přičemž ovšem pojem „pravděpodobnost" se v textu vůbec neobjevuje.

Poznamenejme, že většina úloh obsažených v *Propositiones IV – XII* se nalézá už v Pascalově korespondenci s Fermatem.

Celý Huygensův spis je uzavřen dodatkem obsahujícím pět neřešených úloh, z nichž u tří jsou (aspoň) uvedeny výsledky. V souvislosti s citací ze Spinozovy *Etiky* v kap. 2.1 je zajímavé, že v r. 1687 vyšel v Haagu malý

---

[20] *expectatio* nebo *exspectatio, onis*, f. = očekávání

[21] *sors, sortis*, f. = los, losovací kamének, věštba

[22] *Si numerus casuum, quibus mihi eveniet* a, *sit p, numerus autem casuum quibus mihi eveniet* b *sit* q, *sumendo omnes casus æquè in proclivi esse: expectatio mea valebit* $\frac{pa+qb}{p+q}$.

anonymní spis obsahující jednak pojednání o duze, jednak pojednání o teorii pravděpodobnosti; v tomto „pravděpodobnostním" pojednání je citováno všech pět úloh z Huygensova dodatku a první z nich je řešena (a to správně). V současné době se považuje za prokázané (viz [6]), že autorem těchto prací byl právě Spinoza, což svědčí o jeho aktivním přístupu k aktuálním problémům matematické teorie pravděpodobnosti oné doby.

5 Další související práce

5.1 Kombinatorika

Základní kombinatorické představy jsou součástí matematiky takřka od počátku její historie; [2] na str. 42 uvádí jako první příklad kombinatorických úvah pythagorejské zkoumání trojúhelníkových čísel[23]. Kombinatorickou problematiku lze pak sledovat v průběhu celé historie matematiky v rámci aritmetiky a algebry; v polovině 17. století se kombinatorika začíná vyčleňovat jako relativně samostatná část matematiky, což dle našeho názoru souviselo právě s formováním teorie pravděpodobnosti.

Za první samostatnou práci věnovanou kombinatorické problematice by dle našeho názoru bylo možno považovat již zmíněnou Pascalovu práci *Traité du triangle arithmétique* napsanou r. 1654 a vydanou r. 1665. Tato práce není příliš rozsáhlá (ve vydání [8], ze kterého zde vycházíme, je obsažena na str. 177 – 214) a lze ji rozdělit do dvou částí: na vlastní pojednání o aritmetickém (dnes: Pascalově) trojúhelníku (str. 177 – 189) a na různé příklady jeho užití (číselné řady (str. 190 – 192), kombinace (str. 192 – 198), úloha o rozdělení sázky (str. 198 – 211) a binomická věta (str. 211 – 214)). Z uvedeného je zřejmé, že Pascal sám asi kombinatoriku za samostatný okruh problémů nepovažoval a chápal ji spíš jako aplikační oblast aritmetiky, nicméně z dnešního hlediska lze obsah tohoto Pascalova pojednání hodnotit jako kombinatorický a pravděpodobnostní. Poznamenejme ještě, že na základě tohoto spisu je Pascal považován za objevitele metody úplné indukce ([3], II, str. 749).

Za první samostatné kombinatorické pojednání je obvykle považována Leibnizova[24] práce citovaná obvykle jako *Ars combinatoria*; její úplný název (citovaný dle vydání z r. 1690) zní[25]:

---

[23]O této problematice je pojednáno např. v práci BEČVÁŘ, J.: *Hrdinský věk řecké matematiky* ve sborníku *Historie matematiky I* ze semináře pro vyučující matematiky na středních školách, Jevíčko 1993.

[24]Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) po získání doktorátu práv v r. 1666 vstoupil do diplomatických služeb mohučského kurfiřta, což ho přivedlo na čtyři roky (1672 – 1676) do Paříže, kde navázal řadu vědeckých kontaktů (včetně matematických). Od r. 1676 působil v Hannoveru jako knihovník a dvorní rada (pro zajímavost poznamenejme, že v letech 1710 – 1712 zde působil i hudební skladatel G. F. Händel, který pak (ne zcela legálně) odešel do Londýna). Jeho vědecké zájmy byly neuvěřitelně široké; v dějinách matematiky je znám hlavně jako jeden ze zakladatelů infinitesimálního počtu.

[25]ARS COMBINATORIA *Gottfrieda Wilhelma Leibnize z Lipska, ve které je vybudována na základech aritmetiky nauka o spojování a přemísťování s novými pravidly, & je ukázáno použití obojího na veškerém okruhu věd; rovněž jsou obsaženy nové základy umění přemýšlet*

GOTTFREDI GUILIELMI LEIBNÜZII *Lipsiensis,* ARS COMBINATORIA, *in qua ex arithmeticæ fundamentis Complicationum ac Transpositionum Doctrina novis præceptis exstruitur, & usus ambarum per universum scientiarum orbem ostenditur; nova etiam Artis Meditandi, seu Logicæ inventionis semina sparguntur.*

Præfix est Synopsis totius Tractatus, & additamenti loco Demonstratio Existentiæ Dei ad Mathematicam certitudinem exacta.

Spis byl vydán v r. 1666, kdy bylo Leibnizovi 20 let a matematikou se ještě vůbec nezabýval; plný název spisu nasvědčuje tomu, že Leibnizovi vlastně o matematiku ani nešlo a užíval ji pouze jako nástroj k řešení problémů, které bychom dnes nejspíše označili jako logicko-filozofické (ostatně v některých vydáních Leibnizových spisů je tento spis řazen mezi spisy filozofické). Spis má zhruba 100 stran a problematice matematické je věnována (nejvýše) polovina z nich; z historického hlediska je třeba konstatovat, že se zde znovu (nezávisle na Pascalovi) objevuje aritmetický (tj. Pascalův) trojúhelník i některé další pojmy a výsledky kombinatorické.

Podle našeho názoru lze formování kombinatoriky jako relativně samostatné části matematiky považovat za završené knihou Jakoba Bernoulliho *Ars conjectandi*, o které budeme podrobněji mluvit v další části této přednášky. Vyšla sice tiskem až r. 1713, ale napsána byla už okolo r. 1685 ([3] III, str. 339) a druhá ze čtyř částí této knihy je celá věnována kombinatorice[26]. Z historického hlediska je zajímavé, že Bernoulli zde uvádí jako své předchůdce Schootena, Leibnize, Wallise a Presteta[27], avšak ne Pascala, jehož práci o aritmetickém trojúhelníku zřejmě neznal.

Pro naše účely považujeme tento stručný přehled základních historických faktů o vývoji kombinatoriky v 17. století za postačující; podrobnější výklad lze nalézt v již často citovaných knihách [1 – 4].

5.2 Pojistná matematika

O souvislosti vzniku teorie pravděpodobnosti a pojistné matematiky už byla zmínka v části 2.1; zde uvedeme stručně několik základních faktů (podrobnější výklad opět viz [1, 2, 3]).

Za první publikovanou práci z této oblasti je považována kniha Angličana Johna Graunta *Natural and political observations mentioned in a following index and made upon the bills of mortality* (1662)[28]; je zde např. poprvé číselně

---

neboli logiky vynalézání. Předeslán je přehled celého traktátu, & jako dodatek přesný důkaz existence Boží dovedený k matematické jistotě.

[26] Titul této části zní *Artis conjectandis pars secunda, continens doctrinam de permutationibus & Combinationibus.*

[27] O Schootenovi a Leibnizovi už byla řeč. John Wallis (1616 – 1703) byl kaplanem anglického krále Karla II. ([3], II, str. 765) a profesorem geometrie v Oxfordu ([3], II, str. 687). Kromě jiného vydal v r. 1685 spis *Treatise of Algebra both historical and practical with some additional treatises*, jehož část je věnována kombinatorice a je o ní řeč v [1], str. 34 – 36. Jean Prestet (? – 1690) vydal v r. 1675 učebnici *Elemens des Mathématiques*, která byla velmi ceněna ([3], III, 102); další podrobnosti se nám nepodařilo zjistit.

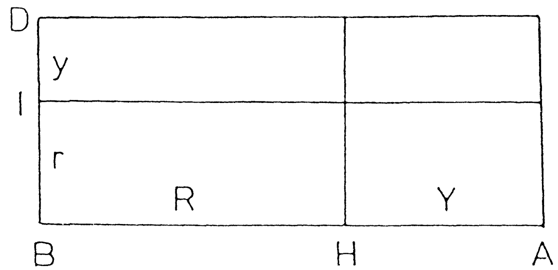
[28] John Graunt (1620 – 1674) byl obchodníkem s látkami; na základě zmíněné knihy byl

vyjádřen poměr počtu narozených chlapců ku počtu narozených dívek[29].

Další významnou postavou v této oblasti byl Johann de Witt (1625 – 1672), který byl od r. 1653 tzv. velkým penzionářem Hollandu a faktickým vládcem Spojených provincií nizozemských. Je autorem spisu *De vardye van de lyf-renten na proportie van los-renten*, což lze podle [3], III, str. 45 přeložit jako *Hodnota doživotních důchodů ve vztahu k obyčejným důchodům*; spis vyšel r. 1671 ve třiceti exemplářích a vzbudil značnou pozornost[30].

Celá tato oblast bývá někdy nazývána „politickou aritmetikou" podle knihy Williama Pettyho (1623 – 1687) *Political Arithmetic*, která vyšla v r. 1690.

Poslední jméno, které si zde připomeneme, je známý anglický astronom Edmund Halley (1656 – 1742), který v r. 1693 v časopise „Philosophical Transactions" uveřejnil zásadní článek *An estimate of the degrees of the mortality of mankind, drawn from curious tables of the births and funerals at the city of Breslaw*[31]*; with an attempt to ascertain the price of annuities upon lives* obsahující teorii doživotních důchodů. Uveďme zde jeden příklad z této knihy, neboť je zde zřejmě poprvé použito geometrického pohledu na pravděpodobnostní úlohu; k této problematice se ještě vrátíme v deváté kapitole této přednášky.



Obr. 1

Z úmrtnostních tabulek je známo, kolik lidí z 1000 narozených se dožije věku 1, 2, 3, ... let. Uvažujme dva lidi, jednoho ve věku v_1, druhého ve věku v_2, $v_1 < v_2$, a ptejme se, jaká je pravděpodobnost, že za k let budou žít oba (resp. bude žít jen mladší, bude žít jen starší, nebude žít ani jeden). Z úmrtnostních tabulek víme, že ve věku v_1 žije N lidí, ve věku $v_1 + k$ žije R lidí; označme $Y = N - R$. Pro v_2 mají analogický význam čísla n, r, y. Vynásobením rovnic

zvolen za člena Royal Society. Dle [2], str. 65 tuto Grauntovu knihu v tomtéž roce četl a velice kladně ocenil Huygens, který v r. 1669 sám napsal práci věnovanou problematice úmrtnostních tabulek.

[29]Na základě záznamů vedených 32 let ho Graunt stanovil jako 1068 : 1000 ([3], II, 761).

[30]Dle [2], str. 65 si o něm dopisovali Huygens s Johannem van Huddem (1628 – 1704), který byl řadu let starostou Amsterodamu a zabýval se matematikou ([3], II, str. 801, 919), výpočty rent ([3], III, str. 48) a dalšími problémy; dle [1], str. 40 si o něm dopisovali Leibniz s Jakobem Bernoullim.

[31]Jedná se o dnešní polskou Wrocław; podrobnější informace lze nalézt v knize PAVLÍK, Z. – RYCHTAŘÍKOVÁ, J. – ŠUBRTOVÁ, A.: *Základy demografie*, Academia, Praha 1986, str. 30.

$N = R + Y$, $n = r + y$ dostaneme rovnici $Nn = Rr + Yr + Ry + Yy$, kde každý sčítanec je roven počtu všech možných dvojic s některou shora uvedenou vlastností (např. Yr je počet všech dvojic, v nichž starší přežije mladšího). Dělíme-li tuto rovnici číslem Nn, dostaneme hledané pravděpodobnosti. Halley tyto úvahy ilustruje obrázkem (viz obr. 1), kde $|BA| = N$, $|BD| = n$, $|BH| = R$, $|BI| = r$, $|HA| = Y$, $|ID| = y$; poměr obsahů příslušných „malých" pravoúhelníků k obsahu celého obdélníku udává hledané pravděpodobnosti.

6 Závěr I. části

Jak už bylo řečeno, za počátek teorie pravděpodobnosti je všeobecně považována korespondence, kterou spolu vedli Pascal a Fermat v létě a na podzim roku 1654; Huygensův spis *De ratiociniis in ludo aleæ* vyšel sice až v r. 1657, byl však prvním a dlouho jediným tištěným pojednáním o úlohách teorie pravděpodobnosti a jeho vliv na formování této teorie v počátečním období byl značný. Mluvíme-li ovšem dnes o teorii pravděpodobnosti, pak předpokládáme, že je zde obecně (tj. teoreticky) zkoumáno cosi, co se nazývá „pravděpodobnost"; pokusme se proto na závěr posoudit situaci po vydání Huygensova spisu z tohoto hlediska.

Pokud se teorie týče, v Huygensově spisu je jí velice málo; dalo by se říci, že celý spis obsahuje jednu definici *(Propositio III)*, dva její speciální případy *(Propositiones I, II)* a jednu větu *(Propositio IX)*, která však neudává žádnou obecnou vlasnost nějakého obecného pojmu nebo souvislost mezi pojmy, ale obsahuje obecně formulovanou metodu (dnes bychom řekli: algoritmus) řešení jistého problému. Za hlavní teoretický přínos spisu lze považovat zavedení střední hodnoty diskrétní náhodné veličiny (nazývané ovšem „očekávaná výhra" nebo podobně); většina spisu je věnována využití tohoto pojmu při řešení problémů pocházejících většinou od Pascala a Fermata. To nic nemění na našem hodnocení tohoto spisu, které bylo vysloveno v části 4.2 a znovu připomenuto v předešlém odstavci, současně však považujeme za nutné vyslovit názor, že prvním skutečně teoretickým výsledkem v této oblasti byla první formulace a důkaz zákona velkých čísel ve čtvrté části spisu Jakoba Bernoulliho *Ars conjectanadi*, o kterém bude řeč ve druhé části tohoto příspěvku; soudíme, že až od tohoto spisu lze mluvit o skutečné teorii pravděpodobnosti.

Pokud se pojmu „pravděpodobnost" týče, nevyskytuje se ani u Huygense, ani v žádném jiném matematickém spisu z té doby; první pokus o matematickou definici tohoto pojmu se objevuje opět až ve čtvrté části *Ars conjectandi*. Domníváme se však, že lze předpokládat u Huygense (i u Pascala a Fermata) intuitivní chápání tohoto pojmu ve smyslu tzv. klasické definice pravděpodobnosti, čemuž nasvědčuje i Bernoulliova definice. V souvislosti s tím stojí však za povšimnutí, že prakticky současně s tímto pojetím pravděpodobnosti se objevují i jiná pojetí. Demografické výzkumy provozované v oné době (např. v části 5.3 zmíněná otázka poměru počtu narozených chlapců a dívek) vedly postupně k tzv. statistické definici pravděpodobnosti, a (rovněž již zmíněnou) Halleyovu myšlenku znázornit pravděpodobnostní úlohu geometricky lze považovat za první náznak tzv. geometrické definice pravděpodobnosti. Všechny tyto definice (dnes bychom asi spíš řekli: přístupy) jsou dodnes používány při řešení různých úloh, protože jsou jednoduché a každá z nich vystihuje některou stránku problému; obecná axiomatická definice pravděpodobnosti byla podána až v první polovině tohoto století[32].

Shrneme-li tedy vše, co zde bylo řečeno, pak lze dle našeho názoru říci, že Huygensův spis *De ratiociniis in ludo aleæ* byl posledním přípravným krokem k tomu, aby ve spisu Jakoba Bernoulliho *Ars conjectandi* začala vznikat teorie pravděpodobnosti v dnešním pojetí této matematické disciplíny.

JACOBI BERNOULLI,
Profeſſ. Baſil. & utriuſque Societ. Reg. Scientiar.
Gall. & Pruſſ. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,

ARS CONJECTANDI,

OPUS POSTHUMUM.

Accedit

TRACTATUS

DE SERIEBUS INFINITIS,

Et EPISTOLA Gallicè ſcripta

DE LUDO PILÆ

RETICULARIS.

BASILEÆ,
Impenſis THURNISIORUM, Fratrum.
cIↄ Iↄcc xiii.

[32] Za základní v tomto směru je považována práce sovětského matematika A. N. Kolmogorova publikovaná v r. 1933 německy a dostupná u nás pod názvem *Osnovnyje ponjatija teorii verojatnostej* (1. vyd. 1936, 2. vyd. Nauka, Moskva 1974).

II. část

18. století

7 Úvod ke II. části

Autor této přednášky si dovoluje vyslovit názor, že nejdůležitějším trendem v teorii pravděpodobnosti v 18. století bylo pozvolné pronikání nekonečna do pravděpodobnostních úvah. Zatímco v počátcích teorie pravděpodobnosti se všechny úvahy věnovaly řešení různých herních situací, kdy bylo pokusů (jevů, možností, variant) poměrně málo (a určitě konečně mnoho), v 18. století se začínají objevovat úvahy o chování náhodných jevů (výsledcích náhodných pokusů) při velkém počtu sledovaných jevů (pokusů). Bylo by zajímavé sledovat, nakolik byly tyto úvahy ovlivněny bouřlivým rozvojem infinitesimálního počtu v té době; jména matematiků, jejichž dílem se zde budeme zabývat, dávají důvod k domněnce, že takové ovlivnění zde bylo, nebudeme ale tuto otázku zkoumat.

Výklad v této části bude uspořádán tak, že nejprve pojednáme o vkladu významného matematického rodu Bernoulliů do teorie pravděpodobnosti (zákon velkých čísel, petrohradský paradox), pak se zmíníme o tzv. geometrické definici pravděpodobnosti (G. L. L. Buffon) a nakonec pohovoříme o podmíněných pravděpodobnostech a Thomasi Bayesovi. Protože rod Bernoulliů představoval v dějinách matematiky zcela výjimečný jev, pojednáme o nich poněkud podrobněji, i když teorie pravděpodobnosti nebyla jejich hlavním oborem působnosti.

8 Bernoulliové

8.1 Základní přehled

O Bernoulliích existuje rozsáhlá speciální literatura; zde vyjdeme (kromě již často citovaných knih [1 – 4]) z knížky [11][33]. Rod Bernoulliů pocházel z Antverp, ale v rámci různých náboženských nepokojů se v průběhu 16. století několikrát stěhovali a od r. 1620 se usadili v Basileji. Protože byli matematicky činní po několik generací, historikové je rozlišují pořadovými číslicemi (jako panovníky); v příloze I je uveden základní rodokmen, ve kterém je kromě roku narození a úmrtí uveden i obor, který příslušný Bernoulli vystudoval, a jsou vyznačeny i vztahy Bernoulliů k (pravděpodobně) nejvýznamnějšímu matematikovi 18. století Leonhardu Eulerovi.

Teorií pravděpodobnosti se zabývali tři z nich: Jakob I, Niclaus I a Daniel I; protože o jiných Bernoulliích už v dalším nebude řeč, budeme číslici I vynechávat. Pokud se pravopisu křestních jmen Bernoulliů týče, přidržujeme se způsobu používaného v [3], III.

[33] U nás byl publikován stručný přehled v článku ZICHOVÁ, J.: *Co možná nevíte o rodině Bernoulliů*, Informace MVS JČMF č. 38 (září 1992). Speciálnější problematice je věnován článek SIERKSMA, G.: *Johann Bernoulli (1667 – 1748): Deset neklidných let v Groningen*, PMFA 39 (1994), 14 – 26, kde je také uvedena další speciální literatura.

8.1.1 Jakob Bernoulli (1654 – 1705)

Narodil se a zemřel v Basileji; od r. 1687 až do smrti byl profesorem matematiky na basilejské universitě[34]. Od r. 1690 publikoval spolu se svým bratrem Johannem I. v návaznosti na Leibnize celou řadu prací z infinitesimálního počtu a lze říci, že tato trojice měla veliký podíl na rychlém rozvoji této části matematiky.

Ze všech Bernoulliů se zapsal nejvýrazněji do do dějin teorie pravděpodobnosti svým spisem *Ars conjectandi*, o kterém už byla zmínka v souvislosti s Huygensem; podrobněji o něm pojednáme dále.

8.1.2 Niclaus Bernoulli (1687 – 1759)

Narodil se a zemřel v Basileji; nejprve byl profesorem matematiky na universitě v Padově (1716 – 1731), pak logiky (1722 – 1731) a práva (1731 – 1759) na universitě v Basileji. V matematice ho vzdělával jeho strýc Jakob a z tohoto hlediska stojí za zmínku, že je autorem práce *Specimina Artis conjectandi, ad questiones Juris applicatæ*, která údajně vyšla v Basileji už v r. 1709 a znovu v lipském časopise *Acta eruditorum* v r. 1711 (dle [1], str. 194).

Jeho hlavní význam pro teorii pravděpodobnosti však spočívá ve dvou jiných činech: jednak v tom, že v r. 1713 vydal spis svého strýce Jakoba *Ars conjectandi* (o kterém ještě bude řeč), jednak v tom, že v korespondenci s již zmíněným P. Montmortem zformuloval úlohu, která se později stala známou pod názvem „petrohradský paradox“ (o kterém také ještě bude řeč)[35].

8.1.3 Daniel Bernoulli (1700 – 1782)

Narodil se v Groningenu, zemřel v Basileji; působil nejprve na Petrohradské akademii věd, pak na universitě v Basileji jako profesor fyziologie (v Petrohradě 1725 – 1730, v Basileji 1733 – 1750) a mechaniky (v Petrohradě 1730 – 1733, v Basileji 1750 – 1782). V [2], str. 142 se uvádí, že publikoval sedm prací z teorie pravděpodobnosti, z nichž se v dalším budeme věnovat první z nich, která měla název *Specimen Theoriæ Novæ de Mensura Sortis* a byla napsána okolo r. 1730, ale vyšla až v r. 1738 v časopise *Commentarii Academiæ Scientiarum Imperialis Petropolitanæ* ([1], str. 213); v této práci byla publikována a řešena výše zmíněná úloha, které se pak (podle místa publikace) začalo říkat „petrohradský paradox“.

---

[34] Toto místo obsazovali Bernoulliové nepřetržitě více než sto let: Jakob I. v letech 1687 – 1705, Johann I. v letech 1705 – 1748 a Johann II. v letech 1748 – 1790.

[35] Montmort, Pierre Remond de (1678 – 1719) byl původně kanovníkem u Nôtre-Damme v Paříži, ale toto místo opustil, aby se mohl oženit ([1], str. 78). Ke druhému vydání jeho spisu *Essai d'Analyse sur le Jeux de Hazards* (vyšlo r. 1713 nebo 1714) je připojeno více než sto stránek korespondence mezi Montmortem a Niclausem Bernoullim ([1], str. 113) a v dopisu z 9.IX.1713 ([2], str. 94) je formulace úlohy, jejíž řešení později dostalo název „petrohradský paradox“; z historického hlediska je ale třeba uvést, že úlohou se zabýval (asi jako první) už Hieronymus Cardano (1501 – 1576) ve spisu *Practica Arithmeticæ generalis* z r. 1539 ([3], II, str. 502).

8.2 VSUVKA II
Nejjednodušší limitní věty

Než přikročíme k výkladu o první formulaci zákona velkých čísel, připomeneme si ve stručnosti základní pojmy z této oblasti v současném pojetí. Vycházíme zde z knihy [12], která je (dle našeho názoru) napsána se zřetelným přihlédnutím k historickému vývoji problematiky; její první vydání z r. 1950 obsahuje jako dodatek na str. 340 – 367 krátký přehled historie teorie pravděpodobnosti.

8.2.1 Binomické rozdělení

Předpokládejme, že konáme sérii n nezávislých pokusů, z nichž v každém může jev A nastat s pravděpodobností p; takto uspořádané sérii pokusů se někdy říká Bernoulliovo schéma ([12], str. 74). Označme ξ náhodnou veličinu, jejíž hodnota je rovna počtu výskytů jevu A v prováděné sérii n nezávislých pokusů. Snadno zjistíme, že pro její pravděpodobnostní funkci platí

$$P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

kde $k = 0, 1, \ldots, n$; o této náhodné veličině říkáme, že má binomický zákon rozdělení pravděpodobnosti (nebo krátce: má binomické rozdělení).

8.2.2 Bernoulliova věta ([12], str. 204)

Nechť m je počet výskytů jevu A v sérii n nezávislých pokusů, z nichž v každém může jev A nastat s pravděpodobností p. Pak pro libovolné $\varepsilon > 0$ platí

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Této větě se někdy říká slabý zákon velkých čísel. Nelze z ní dělat závěr, že pro velký počet pokusů n se relativní četnost $\frac{m}{n}$ výskytu jevu A blíží k pravděpodobnosti tohoto jevu p; plyne z ní pouze, že pro velký počet pokusů je pravděpodobnost „velkých" odchylek relativní četnosti $\frac{m}{n}$ od pravděpodobnsti p jevu A malá. V r. 1911 (viz [12], str. 241 a násl.) dokázal francouzský matematik E. Borel tzv. silný zákon velkých čísel, který říká, že

$$P\left(\tfrac{m}{n} \to p\right) = 1 \text{ pro } n \to \infty.$$

8.2.3 Moivreova – Laplaceova lokální limitní věta ([12], str. 79)

Nechť m je počet výskytů jevu A v sérii n nezávislých pokusů, z nichž v každém může jev A nastat s pravděpodobností p. Označme $P_n(m)$ pravděpodobnost, že jev A nastal právě m-krát, $q = 1 - p$, $0 < p < 1$,

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}.$$

Pak pro $n \to \infty$

$$\sqrt{npq}\,P_n(m) : \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \to 1$$

stejnoměrně pro všechna m, pro která x leží v nějakém konečném intervalu.

8.2.4 Moivreova – Laplaceova integrální limitní věta ([12], str. 87)

Za předpokladů předešlé věty pro $n \to \infty$ stejnoměrně vzhledem k a, b platí

$$P(a \leq x < b) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{z^2}{2}} dz \to 0.$$

8.2.5 Normální rozdělení

Moivreovy – Laplaceovy věty ukazují (stručně řečeno), že diskrétní náhodná veličina s binomickým rozdělením se pro velká n chová přibližně stejně jako spojitá náhodná veličina s normálním rozdělením; připomeňme si proto ještě definici normálního rozdělení (někdy se též nazývá Gaussovým rozdělením).

Náhodnou veličinu ξ nazýváme spojitou, může-li nabývat všech hodnot z nějakého intervalu (a, b). Může-li náhodná veličina ξ nabývat všech hodnot z intervalu $(-\infty, +\infty)$ a platí-li pro všechna a (může být nevlastní)

$$P(\xi < a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{a} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx,$$

pak o této náhodné veličině říkáme, že má normální zákon rozdělení pravděpodobnosti (nebo krátce: má normální rozdělení) se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2. Je-li $\mu = 0$ a $\sigma^2 = 1$ (viz Moivreovy – Laplaceovy věty), mluvíme o normovaném normálním rozdělení.

Normální rozdělení má mimořádný význam v teorii pravděpodobnosti a jejích aplikacích a i když se jím zde nebudeme zabývat, považujeme za vhodné připomenout si ho alespoň v souvislosti s limitními větami.

8.2.6 Stirlingova formule ([12], str. 30)

V nejjednodušší podobě se Stirlingova formule zapisuje ve tvaru

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$$

pro velká n.

8.3 Ars conjectandi

8.3.1 Základní údaje

Jak už bylo řečeno, hlavním vkladem Bernoulliů do teorie pravděpodobnosti byl spis Jakoba Bernoulliho *Ars conjectandi*, napsaný mezi lety 1679 – 1685 ([3], III, str. 339) a vydaný Jakobovým synovcem Niclausem v r. 1713. Uveďme zde základní údaje o tomto spisu.

Vlastní spis [10] (bez předmluvy apod.) má 239 stran formátu (přibližně) A5 a je členěn do čtyř částí; podrobný výklad lze najít např. v [1, 2]. První část (str. 1 – 71) obsahuje plné znění Huygensova spisu *De ratiociniis in ludo aleæ* s podrobnými komentáři a obsáhlými doplňky Jakoba Bernoulliho; uveďme například, že při zobecnění Huygensova *Propositio XII* Bernoulli zavádí (v dnešní terminologii) binomický zákon rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny. Druhá část (str. 72 – 137) je v podstatě učebnicí kombinatoriky, třetí část (str. 138 – 209) lze charakterizovat jako sbírku kombinatorických úloh s herní motivací. Tyto tři části jsou dnes zajímavé pouze z historického hlediska; z dnešního hlediska byla nejdůležitější čtvrtá část knihy (str. 210 – 239) a to i přesto, že zůstala nedokončená. Její plný název je *Artis conjectandi pars quarta, tradens usum & applicationem precedentis doctrinæ in Civilibus, Moralibus & Œconomicis.* Jejím hlavním přínosem byla první formulace a důkaz zákona velkých čísel, kterému se budeme podrobněji věnovat dále; zde pouze uveďme, že v první kapitole této části se poprvé objevuje náznak toho, čemu se dnes říká klasická definice pravděpodobnosti. Bernoulli zde říká:

Pravděpodobnost totiž je stupněm jistoty a liší se od ní jako část od celku. Jestliže totiž celá a absolutní jistota, kterou označíme písmenem a *nebo jednotkou* 1, *se podle předpokladu skládá například z pěti pravděpodobností jako částí, z nichž tři jsou pro existenci nebo budoucí výskyt nějakého jevu, ostatní jsou proti: o onom jevu bude řečeno, že má* $\frac{3}{5}a$ *nebo* $\frac{3}{5}$ *jistoty.*[36]

8.3.2 Zákon velkých čísel

Čtvrtá část spisu *Ars conjectandi* je rozdělena do pěti kapitol; zákon velkých čísel je zformulován a dokázán v poslední z nich. Jeho formulace je samozřejmě jiná, než je uvedeno v části 8.2.2; s využitím současné terminologie a symboliky by bylo možno Bernoulliův výsledek zapsat takto:

Nechť m je počet výskytů jevu A v sérii n nezávislých pokusů, z nichž v každém může jev A nastat s pravděpodobností $p = \frac{r}{t}$. Pak pro jakékoli (velké) $c > 0$ lze najít n_0 takové, že pro všechna $n > n_0$ platí

$$P\left(\frac{r-1}{t} < \frac{m}{n} < \frac{r+1}{t}\right) \geq c\left[P\left(\frac{m}{n} \leq \frac{r-1}{t}\right) + P\left(\frac{m}{n} \geq \frac{r+1}{t}\right)\right].$$

Tento výsledek lze přepsat do jednoduššího tvaru

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \frac{1}{t}\right) \geq cP\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \geq \frac{1}{t}\right);$$

a protože

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \geq \frac{1}{t}\right) = 1 - P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \frac{1}{t}\right),$$

můžeme Bernoulliův výsledek nakonec zapsat ve tvaru

[36] *Probabilitas enim est gradus certitudinis, & ab hac differt ut pars à toto. Nimirum si certitudo integra & absoluta, quam litera* a *vel unitate* 1 *designamus, quinque verb.gr. probabilitatibus ceu partibus constare supponatur, quarum tres militent pro existentia aut futuritione alicujus eventus, reliquæ contra: eventus ille dicetur habere* $\frac{3}{5}a$, *seu* $\frac{3}{5}$ *certitudinis.*

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\frac{1}{t}\right)\geq\frac{c}{c+1},$$

což odpovídá současné formulaci (viz část 8.2.2).

Bernoulli svůj výsledek dokazuje pouze s využitím vlastností binomických koeficientů (dnes bychom asi řekli: středoškolskými prostředky) bez využití Stirlingovy formule (neboť ta ještě nebyla známá); je tedy dost dlouhý (10 stran) a pracný, ale i podle dnešních hledisek je považován za zcela přesný. Dokazuje rovněž, že pro daná čísla c, r a t lze odpovídající n_0 najít ze vztahu (v dnešním zápisu)

$$n_0=\max\left(\left\lceil\left\lceil\frac{\log c+\log(s-1)}{\log(r+1)-\log r}\right\rceil\left(1+\frac{s}{r+1}\right)t-\frac{st}{r+1}\right\rceil;\right.$$
$$\left.\left\lceil\left\lceil\frac{\log c+\log(r-1)}{\log(s+1)-\log s}\right\rceil\left(1+\frac{r}{s+1}\right)t-\frac{rt}{s+1}\right\rceil\right),$$

kde $s=t-r$, symbol $\lceil x\rceil$ znamená nejmenší celé číslo větší nebo rovné x. S využitím tohoto vztahu Bernoulli počítá n_0 pro $c=1000$, $r=30$, $t=50$ a zjišťuje, že

$$n_0=\max\left(\left\lceil\left\lceil\frac{4,2787536)}{0,0142405}\right\rceil\frac{51}{31}50-\frac{1000}{31}\right\rceil;\left\lceil\left\lceil\frac{4,4623980}{0,0211893}\right\rceil\frac{51}{21}50-\frac{1500}{21}\right\rceil\right)=$$
$$=\max\left(\left\lceil\frac{301.2550-1000}{31}\right\rceil;\left\lceil\frac{211.2550-1500}{21}\right\rceil\right)=\max(24728;25550)=$$
$$=25550.$$

Známe-li tedy sérii pokusů, z nichž v každém může sledovaný jev nastat s pravděpodobností $\frac{3}{5}$, pak při provedení (alespoň) 25550 pokusů máme zaručeno, že poměr počtu případů, v nichž sledovaný jev nastal, ku počtu všech pokusů bude ležet v intervalu

$$\left(\frac{29}{50},\frac{31}{50}\right)=(0.58,0.62)$$

s pravděpodobností tisíckrát větší než mimo tento interval. Kdybychom ovšem chtěli tuto pravděpodobnost stanovit, museli bychom při použití Bernoulliho metody vypočítat součet (dolní mez pro sčítání je $\frac{29}{50}25550+1$, horní mez pro sčítání je $\frac{31}{50}25550-1$)

$$\sum_{k=14820}^{15840}\binom{25550}{k}\left(\frac{3}{5}\right)^k\left(\frac{2}{5}\right)^{25550-k};$$

to je prakticky neproveditelné (a navíc by se v tomto případu výsledná pravděpodobnost jen nepatrně lišila od 1, takže z pedagogického hlediska se tento příklad nejeví jako příliš vhodný[37]). Řešení takových úloh je prakticky možné až užitím Moivreovy – Laplaceovy integrální věty (kterou jsme uvedli ve vsuvce) a tabulek normálního rozdělení; k osobě Abrahama de Moivrea se ještě krátce vrátíme.

8.3.3 První úlohy matematické statistiky

Zákon velkých čísel je považován (a to jistě právem) za hlavní Bernoulliův výsledek v oblasti teorie pravděpodobnosti. Při četbě jeho spisu však vzniká dojem, že Bernoulli mířil dále (což může souviset s tím, že spis zůstal nedokončen), čemuž nasvědčují některé úvahy a příklady ze čtvrté kapitoly poslední části spisu. Jeden z těchto příkladů lze zformulovat takto:

V urně je umístěno 3000 bílých a 2000 černých kamenů. Experimentátor tyto údaje nezná a chce stanovit poměr bílých a černých kamenů na základě pokusu, při kterém postupně vytahuje kameny z urny a sleduje, jak často vytáhnul bílý a jak často černý; přitom vytažený kámen vždy vrátí zpět dříve, než vytahuje další[38]. V dalším výkladu Bernoulli dodává, že tento poměr nechce stanovit absolutně přesně, ale pouze s jistým přiblížením[39]. Z dnešního hlediska lze o tomto příkladu říci, že počet bílých (nebo černých) kamenů vytažený v sérii n pokusů je náhodná veličina s binomickým rozdělením, jehož parametr p neznáme a chceme ho odhadnout na základě výsledku série pokusů; to je typická úloha matematické statistiky.

Domníváme se proto, že Bernoulli mířil k řešení úloh matematické statistiky a důkazem zákona velkých čísel potvrdil, že intuitivní názor na možnost řešení těchto úloh pomocí dostatečně dlouhé série pokusů je objektivně oprávněný. Nedospěl sice až k řešení statistických úloh, přesto lze však jeho spis považovat za první vykročení tímto směrem. K úlohám tohoto typu se ještě vrátíme v kapitole o Thomasi Bayesovi.

8.3.4 Abraham de Moivre

I když je tato část přednášky věnována Bernoulliům, považujeme za vhodné uvést zde alespoň stručně základní informace o dalším historickém vývoji problematiky související se zákonem velkých čísel. Na tomto vývoji (a na celém dalším vývoji teorie pravděpodobnosti) se významně podílel Abraham

[37] Pro náš příklad bylo pomocí programového produktu „Mathematica“ zjištěno, že hledaná pravděpodobnost je rovna 0,999999999932266; z toho je zřejmé, že Bernoulliův odhad čísla n_0 je příliš vysoký. Pomocí Moivreovy – Laplaceovy integrální věty a programového produktu „Mathematica“ lze postupem popsaným v [12], str. 95 zjistit, že k dosažení požadované přesnosti stačí „jen“ asi 6500 pokusů.

[38] *Ut exemplo constet quid velim, pono in urna quadam te inscio reconditos esse ter mille calculos albos & bis mille nigros, teque eorum numerum experimentis exploraturum educere calculum unum post alterum (reponendo tamen singulis vicibus illum quem eduxisti, priusquam sequentem eligas, ne numerus calculorum in urna minuatur) & observare, quoties albus & quoties alter exeat.*; v dalším se už nemluví o počtu kamenů *(numerus)*, ale o poměru *(ratio)* (viz též následující citát).

[39] *Ne autem hæc secus intelligantur quàm oportet, probè notandum est, quòd rationem inter numeros casuum, quam experimentis determinare aggredimur, non præcisè & in indivisibili acceptam velim ...*

de Moivre[40] (1667 – 1754), který se narodil ve Vitri v oblasti Champagne, ale po zrušení nantského ediktu musel jako protestant opustit Francii. V r. 1668 se usadil v Londýně a prožil tam pak celý svůj život; v r. 1697 byl zvolen členem Royal Society (viz [1], str. 135, [4], III, str. 128).

Pokud se jeho přínosu k teorii pravděpodobnosti týče, publikoval nejprve v r. 1711 v časopise *Philosophical Transactions* již v části 4.2 zmíněné pojednání *De mensura sortis, seu, de probabilitate eventuum in ludis a casu fortuito pendentibus.* Toto pojednání pak rozšířil do samostatné knihy *The Doctrine of Chances: or, a Method of Calculating the Probabilities of Events in Play*, která vyšla v několika postupně doplňovaných vydáních: 1. vydání v r. 1718 mělo 175 stran, 2. vydání v r. 1738 mělo 258 stran a posmrtné 3. vydání v r. 1756 348 stran. Z hlediska teorie pravděpodobnosti nelze opomenout ani jeho spis *Miscellanea Analytica de Seriebus et Quadraturis* vydaný v r. 1730, neboť tento spis obsahoval formuli pro přibližný výpočet faktoriálů nazývanou dnes Stirlingovou formulí[41], která představovala hlavní Moivreův nástroj při řešení problémů naznačených Bernoullim.

Nepodařilo se nám bohužel zjistit, v čem přesně spočíval Moivreův přínos při formulaci Moivreových – Laplaceových vět citovaných ve vsuvce II; původní Moivreovy práce se nám nepodařilo získat a dostupní autoři uvádějí informace dosti různorodé. Dle [1], str. 192 Moivre dokázal pouze lokální větu pro případ $p = \frac{1}{2}$, a to až ve třetím vydání spisu *The Doctrine* .... Také dle [2], str. 92 řešil Moivre poze případ $p = \frac{1}{2}$, ale už v *Miscellanea* ... a z formulace použité v [2] není jasné, jednalo-li se o větu lokální nebo integrální. Dle [4], III, str. 128 – 129 Moivre dokázal kompletně lokální i integrální větu (až na stejnoměrnou konvergenci) v r. 1733 v dodatku k *Miscellanea* ... a Laplace (který prý skoro nikdy neuváděl své předchůdce) ji dokázal znovu. Otázku o skutečném Moivreově přínosu k problematice limitních vět tedy musíme nechat nezodpovězenou[42].

[40]Dle [4], III, str. 128 byl synem lékaře a částici „de" si ke jménu přidal sám.

[41]James Stirling (1692 – 1770) působil nejprve v Oxfordu, ale z politických důvodů musel v r. 1715 emigrovat (do Benátek) a teprve v r. 1725 se směl na Newtonovu přímluvu vrátit do Anglie. Od r. 1735 do smrti byl ředitelem dolu ve Skotsku (viz [3], III, str. 387, [4], III, str. 227). Stirlingova formule vznikala v těsné korespondenční spolupráci Stirlinga a Moivra; dle [4], III, str. 129 by měla být nazývána formulí Moivreovou – Stirlingovou (podrobně je tato otázka zpracována v [4], III, str. 228 – 229).

[42]Moivreovi je věnován podrobný článek Ivo Schneidera v časopisu *Archive for History of Exact Sciences* 5 (1968–69), str. 177 – 317, ale k tomuto článku se nám bohužel nepodařilo proniknout.

8.4 Petrohradský paradox

8.4.1 Formulace problému

Připomeňme si nejprve pojem spravedlivé hry.

Hraje-li se hra o nějakou částku (sázku) a je-li výsledek hry ovlivněn náhodou (tj. hodnota výhry je náhodná veličina), pak je hra považována za spravedlivou, jsou-li střední hodnoty výher všech hráčů stejné. Funguje-li ve hře jeden hráč jako bankéř, jehož povinností je vyplácet ostatním hráčům výhry, pak ve spravedlivé hře musí každý hráč bankéřovi předem zaplatit střední hodnotu své výhry (za právo zúčastnit se hry).

Protože historické souvislosti jsme už uvedli dříve, můžeme nyní uvést pravidla hry vedoucí ke vzniku tzv. petrohradského paradoxu. Dva hráči A, B hrají tak, že hráč A hází mincí („panna" nebo „lev") až do prvního padnutí „lva". Padne-li „lev" poprvé v k-tém hodu, vyplatí hráč B hráči A 2^{k-1} korun (na použité měně samozřejmě nezáleží). Hráč B tedy funguje ve hře jako bankéř; aby hra byla spravedlivou, musí hráč A předem zaplatit hráči B střední hodnotu své výhry, ale ta je dle pravidel hry rovna

$$1.\frac{1}{2} + 2.\frac{1}{4} + 4.\frac{1}{8} + \cdots + 2^{n-1}.\frac{1}{2^n} + \cdots = \infty,$$

takže hra se vlastně nedá spravedlivě hrát. Teoreticky je hráč B v nevýhodě při jakkoli vysokém vkladu hráče A, prakticky by ale žádný hráč A nevsadil do hry ani 100,- Kč, protože by si snadno spočítal, že částku $2^7 = 128$,-Kč může vyhrát s pravděpodobností rovnou $2^{-8} \doteq 0,0039$; v tomto rozporu mezi teoreticky stanovenou střední hodnotou výhry, která je nekonečně veliká, a „prakticky" možnými výhrami, které jsou dosti malé, spočívá PARADOX této hry.

Příčina paradoxu je zřejmá: ve hře lze sice vyhrát velice vysoké částky, ale s velice malými pravděpodobnostmi. Z hlediska dnešní matematiky není nad čím bádat, protože řada definující střední hodnotu výhry není konvergentní (viz část 3.2.3) a střední hodnota výhry v dané hře tedy není definována. V 18. a 19. století ale tento paradox zaujal mnoho matematiků (viz [1 – 4]) a považujeme proto za vhodné podat alespoň stručný přehled různých přístupů k petrohradskému paradoxu.

8.4.2 Morální střední hodnota

Asi největší pozornost v souvislosti s petrohradským paradoxem vzbudila teorie související s pojmem tzv. morální střední hodnoty (morálního očekávání). Daniel Bernoulli v článku zmíněném v části 8.1.3 (a po něm i mnozí jiní (např. Laplace)) soudili, že k řešení problémů spojených s finančním ziskem nebo ztrátou není vhodná obvyklá „fyzikální" střední hodnota (kterou Laplace nazýval *fortune physique*) ([1], str. 214), ale tzv. morální střední hodnota (dle Laplace *fortune morale*) respektující tu skutečnost, že hodnota nějakého finančního zisku nebo ztráty je relativní a závisí na tom, jaký je majetek člověka, který něco získává nebo tratí. Tato základní myšlenka se objevila už v r. 1728 v Cramerově[43] dopisu Niclausovi I Bernoullimu [5][44] a v r. 1730 ji vyslovil Buffon[45]; Daniel Bernoulli ji však matematicky zpracoval a příslušná teorie se pak objevovala v učebnicích až do konce minulého století[46]; prakticky ani teoreticky nebyla snad nikdy využita a nebudeme se jí zde zabývat.

8.4.3 Odmítnutí „malých" pravděpodobností

Již zmíněný hrabě Buffon ve spisu *Essai d'Arithmétique Morale*, který byl napsán asi okolo r. 1760, ale vyšel až r. 1777 ve čtvrtém svazku *Supplément à l'Histoire Naturelle* ([1], str. 344), vyslovil názor, že „malé" pravděpodobnosti lze z praktického hlediska považovat za rovné nule, přičemž jako hranici navrhoval hodnotu 10^{-4}, což zdůvodňoval tím, že podle úmrtnostních tabulek šestapadesátiletý člověk umře během následujících 24 hodin právě s touto pravděpodobností, a přesto žádný šestapadesátiletý člověk prakticky nepočítá s tím, že by během následujících 24 hodin měl zemřít.

Pokud bychom řešili petrohradský paradox v duchu tohoto názoru, pak s přihlédnutím k faktu

$$2^{14} = 16384 > 10^4 > 2^{13} = 8192$$

dostaneme střední hodnotu výhry hráče A rovnu

$$\sum_{i=1}^{13} \frac{2^{i-1}}{2^i} = 6,5.$$

Tento Buffonův názor nebyl v teorii pravděpodobnosti nikdy obecně přijat, ale někteří matematici se k němu přikláněli (např. d'Alembert[47]).

8.4.4 Realistické řešení

Zřejmě nejrealističtější názor na petrohradský paradox se objevil v již zmíněném Cramerově dopisu N. Bernoullimu; v 19. stol. byl znovu připomenut Poissonem ve spisu *Recherches sur la Probabilité des jugements en matière*

---

[43]Gabriel Cramer (1704 – 1752) vystudoval universitu v Ženevě a později se tam stal profesorem matematiky; byl ve styku s Johannem I. Bernoullim ([3], III, str. 503, [4], III, str. 66).

[44]Tento dopis otiskl Daniel Bernoulli ve svém článku.

[45]Hrabě Georges-Louis Leclerc de Buffon (1707 – 1788) je znám hlavně svým monumentálním 44-svazkovým dílem *Histoire naturelle, gènèrale et particulière*, ze kterého 36 svazků napsal sám (dle [2], str. 139).

[46]Poslední námi nalezená citace ([3], III, str. 631) je z r. 1896.

[47]Jean Le Rond d'Alembert (1717 - 1783) (dle [3], III, str. 510) byl údajně nemanželským synem markýzy de Tencin a dělostřeleckého důstojníka Destouchese; matkou byl odložen na schody pařížského kostela Saint-Jean-le-Rond a byl vychován v rodině chudého sklenáře Alemberta. Za Destouchesovy finanční podpory vystudoval práva, ale už r. 1739 předložil pařížské Akademii věd své první matematické pojednání. V letech 1750 – 1757 se podílel na vydávání známé *Encyklopédie ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*, v r. 1754 byl za svoji literární činnost zvolen do Francouzské akademie a v r. 1772 se stal jejím sekretářem; mezitím se v r. 1756 stal i členem pařížské Akademie věd. Jeho matematická i literární činnost byla rozsáhlá; poznamenejme, že v r. 1989 vyšel v nakladatelství Svoboda výbor z jeho díla.

criminelle et en matière civille (1837). Základní myšlenka spočívá v tom, že petrohradská hra není korektní, protože podle pravidel hry by hráč B měl být schopen vyplatit hráči A libovolně velkou částku, což ale není možné, protože každý člověk má jen omezený (konečný) majetek. Z hlediska petrohradské hry to znamená, že výhra hráče A může vzrůstat jen do jisté výše dané majetkem hráče B, pak už zůstává výhra hráče A konstantní a z toho plyne i konečnost střední hodnoty jeho výhry.

Předpokládejme například, že hráč B má majetek (a je tedy schopen hráči A vyplatit) 10^9 Kč. Protože

$$2^{30} = 1073741824 > 10^9 > 2^{29} = 536870912,$$

dostáváme pro střední hodnotu výhry hráče A

$$\sum_{i=1}^{29} \frac{2^{i-1}}{2^i} + \sum_{i=30}^{\infty} \frac{10^9}{2^i} = 14,5 + \frac{10^9}{2^{29}} \doteq 16,36.$$

8.4.5 Experimentální výzkum

V literatuře lze nalézt na různých místech odkazy svědčící o tom, že v minulosti nejeden matematik zkoumal petrohradskou hru experimentálně. Uveďme zde pouze jeden z těchto údajů: v [1], str. 346 je citován Buffonův pokus, při kterém ve 2084 partiích petrohradské hry byla celková výhra 10057 korun (není ovšem uvedeno, jakých), z čehož plyne průměrná hodnota výhry cca 4,83 korun.

9 Geometrická definice pravděpodobnosti

9.1 Základní myšlenka

Uvažujme následující úlohu:

Střílíme na čtvercový terč (viz obr. 2a) bodovými náboji s úkolem zasáhnout vyšrafovaný kruh. Protože nejsme dobrými střelci, jsou naše zásahy rovnoměrně rozložené po celé ploše terče. Ptáme se, jaká je pravděpodobnost zásahu vyšrafovaného kruhu.

Z hlediska klasické definice pravděpodobnosti nelze úlohu řešit, protože jak počet všech případů příznivých, tak počet všech případů možných je nekonečný. Přesto se jeví jako zcela přirozený názor (který je také všeobecně přijatý), že hledanou pravděpodobnost lze stanovit (nebo definovat) jako poměr plošného obsahu vyšrafovaného kruhu ku plošnému obsahu celého čtvercového terče. Tomuto přístupu se někdy říká geometrická definice pravděpodobnosti a je dnes běžně používán k řešení některých pravděpodobnostních úloh.

Autorem tohoto přístupu je již několikrát zmíněný hrabě Buffon, který ho v již zmíněném spisu *Essai d'Arithmétique Morale* použil k řešení několika úloh. Nejznámější z nich se stala tzv. úloha o jehle, umožňující experimentální odhadnutí čísla π; tuto úlohu zde nyní uvedeme.

9.2 Buffonova úloha o jehle

Úloha zní takto:

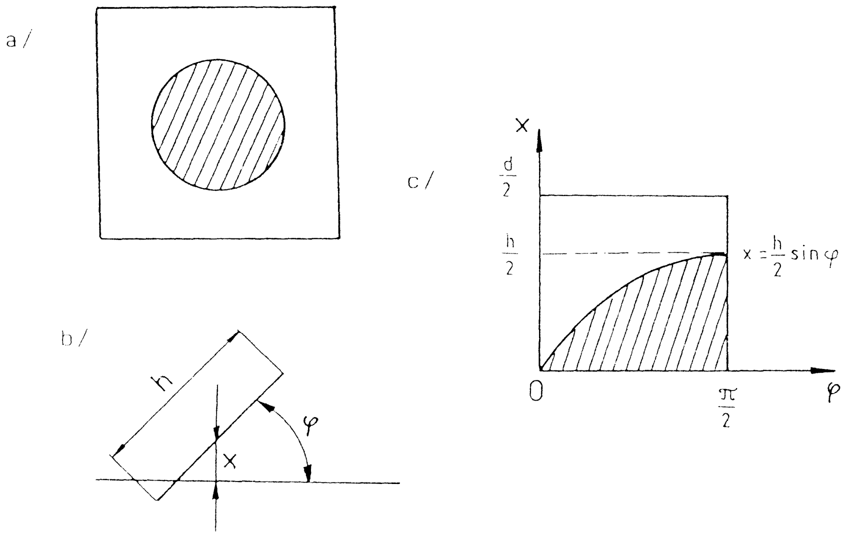
Na rovinu s narýsovanými rovnoběžkami vzdálenými od sebe d je náhodně vrhána jehla délky $h < d$. Vypočítejte pravděpodobnost toho, že jehla protne některou přímku.

Řešení:

Označme (viz obr. 2b):

x = vzdálenost středu jehly od nejbližší přímky,

φ = úhel sevřený jehlou a přímkou.



Obr. 2

K protnutí přímky jehlou dojde tehdy a jen tehdy, je-li

$$x \leq \frac{h}{2}\sin\varphi.$$

Znázorníme-li situaci v pravoúhlém souřadném systému s osami x a φ, kde $x \in \langle 0, \frac{d}{2}\rangle$, $\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ (viz obr. 2c), pak vyšrafovaný obrazec určuje množinu bodů odpovídající případům, kdy dojde k protnutí přímky jehlou, celý obdélník se stranami $\frac{d}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$ odpovídá množině všech možných případů. Dle geometrické definice pravděpodobnosti tedy hledaná pravděpodobnost bude rovna

$$\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{h}{2}\sin\varphi d\varphi}{\frac{\pi}{2}\frac{d}{2}} = \frac{2h}{\pi d}.$$

V literatuře (např. [12], str. 39) lze najít tabulky některých experimentálně dosažených výsledků při stanovení čísla π touto metodou. To je spíše historická kuriozita, ale nápad, že přibližná řešení některých numerických úloh lze získat užitím náhodných procedur, se stal základem tzv. metody Monte Carlo, které se používá na počítačích při řešení mnoha numerických úloh.

10 Nezávislé jevy a podmíněná pravděpodobnost

Už v první vsuvce jsme upozornili na to, že s intuitivním chápáním pojmu nezávislosti náhodných jevů nelze v teorii pravděpodobnosti vystačit a že bude nutné, abychom se k tomuto pojmu ještě vrátili. V této části našeho výkladu pojednáme o tomto pojmu v souvislosti se jménem anglického matematika Thomase Bayese.

10.1 Thomas Bayes (1702 – 1761)

Narodil se v Londýně; jeho otec byl duchovním a členem Royal Society. Thomas byl vychováván doma; je možné, že jedním z jeho domácích učitelů byl Moivre. Stal se rovněž duchovním a v r. 1742 byl zvolen členem Royal Society (dle [2], str. 103).

Během života skoro nic nepublikoval; jeho jediná práce o teorii pravděpodobnosti [13] vyšla až posmrtně (1763) v časopise *Philosophical Transactions*. Než přikročíme k výkladu obsahu této stati, připomeneme si základní pojmy ze současného pohledu; vycházet přitom budeme z klasické definice pravděpodobnosti.

10.2 VSUVKA III
Podmíněné pravděpodobnosti a Bayesova věta

10.2.1 Dva příklady

Příklad 1.
Házíme dvěma kostkami (červenou a modrou) a zkoumáme dva náhodné jevy:
jev A = na červené kostce padne sudý počet ok,
jev B = na modré kostce padne pětka nebo šestka.
Z intuitivního pohledu na věc jsou tyto jevy nezávislé. Dle klasické definice pravděpodobnosti snadno vypočítáme pravděpodobnost $P(A \cap B)$, protože počet všech možných výsledků při házení dvěma kostkami je 36 a počet všech příznivých výsledků (tj. na červené kostce sudý počet ok a na modré kostce pětka nebo šestka) je 6, takže

$$P(A \cap B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Všimněme si, že $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, takže $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$; tuto vlastnost bychom zjistili i rozborem jiných (intuitivně) nezávislých jevů.

Příklad 2.
Házíme opět dvěma kostkami (červenou a modrou) a zkoumáme opět dva náhodné jevy:
jev B = na modré kostce padne pětka nebo šestka (stejně jako v příkladu 1),
jev C = součet ok na obou kostkách je větší nebo roven 10.
Z intuitivního pohledu na věc jsou jevy B a C závislé; dle klasické definice pravděpodobnosti zjistíme:

$$P(B) = \frac{1}{3},\quad P(C) = \frac{1}{6},$$

$$P(B \cap C) = \frac{5}{36} \neq P(B).P(C),$$

$$P(B, \text{jestliže víme, že nastal jev} C) = \frac{5}{6} = \frac{P(B \cap C)}{P(C)},$$

$$P(C, \text{jestliže víme, že nastal jev} B) = \frac{5}{12} = \frac{P(B \cap C)}{P(B)}.$$

Takové vztahy bychom zjistili i u jiných (intuitivně) závislých jevů.

10.2.2 Podmíněné pravděpodobnosti a nezávislé jevy

Pravděpodobnost jevu A podmíněná jevem B (tj. za podmínky, že nastal jev B) se značí $P(A|B)$ a je definována za předpokladu $P(B) \neq 0$ vztahem

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \tag{1}$$

Jestliže

$$P(A|B) = P(A), \tag{2}$$

pak se jevy A, B nazývají nezávislé a po dosazení (2) do (1) dostáváme

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B); \tag{3}$$

připomínáme, že vztah (3) platí pouze pro nezávislé jevy, přičemž nezávislost je definována vztahem (2).

Lze také postupovat obráceně: nezávislost náhodných jevů lze definovat vztahem (3) a vztah (2) je pak důsledkem, který platí pouze pro nezávislé jevy.

Vztahu (3) se někdy říká věta o násobení pravděpodobnosti, někdy se ale tímto termínem označuje vztah (1) napsaný ve tvaru $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$.

Snadno zjistíme, že nezávislost jevů je vždy vzájemná, tj. platí-li $P(A|B) = P(A)$, pak současně $P(B|A) = P(B)$. Obecně platí mezi $P(A|B)$ a $P(B|A)$ vztah

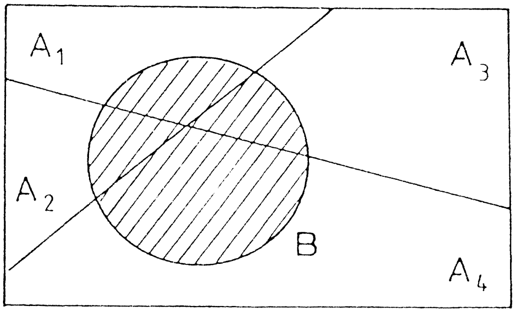
$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}. \tag{4}$$

10.2.3 Bayesova věta

Nechť $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$, kde jevy A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ jsou navzájem disjunktní. Nechť jev B může nastat jen tehdy, nastane-li některý z jevů A_i (příklad pro $n = 4$ je na obr. 3); chceme vyjádřit pravděpodobnost jevu B pomocí pravděpodobností jevů A_i. Protože jev B je sjednocením disjunktních jevů $B \cap A_i$, platí dle věty o sčítání pravděpodobnosti (viz vsuvka I) a dle (1)

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i).P(A_i). \tag{5}$$

Tento vztah se nazývá věta o úplné pravděpodobnosti.



Obr. 3

Jestliže nyní do (4) dosadíme A_k místo A a ve jmenovateli užijeme větu o úplné pravděpodobnosti, dostaneme Bayesovu větu

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k).P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i).P(A_i)}. \tag{6}$$

10.3 Bayesův článek

V první řadě musíme upozornit na to, že v Bayesově článku není obsažena Bayesova věta; tuto větu zformuloval až Laplace (a to ještě jen ve slovní podobě) (viz [4], III, str. 139). Ten se pochvalně zmiňuje o Bayesovi ve třetím vydání své *Théorie analytique des probabilités* z r. 1820, ve svém prvním článku na toto téma v r. 1774 ale o Bayesovi vůbec nemluví, takže je možné, že tehdy ještě Bayesovu práci neznal ([3], IV, str. 240, 242]).

Bayesův článek začíná formulací problému, ke kterému se vrátíme později, a je členěn do dvou částí.

10.3.1 I. část Bayesova článku

Tato část začíná sedmi definicemi; z našeho hlediska je podstatné, že je zde jako sedmá uvedena definice nezávislých jevů, která je dle našeho názoru totožná se vztahem (2):

Jevy jsou nezávislé, jestliže uskutečnění kteréhokoli z nich ani nezvýší ani nesníží pravděpodobnost ostatních.[48]

Poznamenejme pro úplnost, že Bayesova definice pojmu pravděpodobnost je nejasná[49], ale z dalšího je zřejmé, že v I. části článku se fakticky pracuje s klasickou definicí pravděpodobnosti.

Dále obsahuje první část sedm tvrzení a několik důsledků; z našeho hlediska je podstatné, že pomocí třetího tvrzení je fakticky zavedena podmíněná pravděpodobnost:

Pravděpodobnost toho, že se uskuteční dva po sobě následující jevy, je poměr utvořený násobením pravděpodobnosti prvního jevu a pravděpodobnosti, kterou má druhý jev za předpokladu, že se uskutečnil první.[50]

Toto tvrzení bychom dnes zapsali ve tvaru $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$. Dodejme ještě, že z dnešního hlediska je v šestém tvrzení vyslovena naše věta o násobení pravděpodobnosti (3), sedmé tvrzení obsahuje definici binomického zákona rozdělení náhodné veličiny.

Můžeme tedy říci, že v první části svého článku Bayes zavádí základní pojmy a vztahy týkající se podmíněných pravděpodobností a nezávislých jevů. To je dle našeho názoru velice důležité a zajímavé, ale až doposud není nijak zřejmé, jak Bayesův článek souvisí s myšlenkou (vyslovenou v úvodu ke druhé části této přednášky) o pronikání nekonečna do matematiky a odkud se vzal název Bayesovy formule. Zřejmým se to stane z problému, který Bayes zformuloval hned na začátku svého článku, ale řešil ho až ve druhé části; celá jeho první část je tedy vlastně jen přípravou na toto řešení.

10.3.2 II. část Bayesova článku

Výchozí Bayesův problém by v dnešní formulaci zněl takto:

Jev $\mathcal{M}$ má pravděpodobnost p, kterou neznáme. Provedeme sérii n nezávislých pokusů a jev $\mathcal{M}$ v nich nastane k-krát. Jaká je pravděpodobnost toho, že $a < p < b$, kde a, b jsou daná čísla?

---

[48] *Events are independent when the happening of any one of them does neither increase nor abate the probability of the rest.*

[49] Definition 5. *The probability of any event is the ratio between the value at which an expectation depending on the happening of the event ought to be computed, and the value of the thing expected upon it's happening.*

[50] *The probability that two subsequent events will both happen is a ratio compounded of the probability of the 1st, and the probability of the 2nd on supposition the 1st happens.* Že slovíčko *compound* je třeba z matematického hlediska chápat jako násobení, plyne z následujícího příkladu, který je k tvrzení připojen jako *Corollary*:
Hence if of two subsequent events the probability of the 1st be a/N, *and the probability of both together be* P/N, *then the probability of the 2nd on supposition the 1st happens is* P/a; to je vlastně náš vztah (1).

Je zřejmé, že se vlastně jedná o problém, který zkoumal už Jakob Bernoulli v *Ars conjectandi* (viz část 8.3.3). Bayes tento problém nestuduje v obecné podobě, ale na následujícím příkladu (který opět uvádíme v dnešní formulaci):

Na interval $(0, 1)$ byl náhodně vržen bod Q, jehož polohu neznáme, ale víme, že byl vržen s rovnoměrným rozdělením pravděpodobnosti; jeho souřadnici označíme x. Vykonáme sérii n nezávislých pokusů, při kterých náhodně (tj. s rovnoměrným rozdělením) vrháme body na interval $(0, 1)$ a při každém pokusu se dozvíme, zda námi vržený bod padnul vpravo nebo vlevo od bodu Q. Na konci série pokusů tedy víme, že námi vrhaný bod padnul k-krát vlevo a $(n-k)$-krát vpravo od bodu Q. Jaká je pravděpodobnost toho, že bod Q leží mezi dvěma danými body A, B, tj. jaká je pravděpodobnost toho, že $a < x < b$, kde a, b jsou daná čísla?

Je zřejmé, že k řešení této úlohy nemohl Bayes použít klasické definice pravděpodobnosti, protože možných poloh bodu na jednotkové úsečce je nekonečně mnoho; znovu se zde objevuje (nezávisle na Buffonovi) geometrické pojetí pravděpodobnosti. V tomto pojetí hraje roli neznámé pravděpodobnosti jevu $\mathcal{M}$ neznámá souřadnice bodu Q, pro kterou z předpokladu rovnoměrného rozdělení pravděpodobnosti plyne jednak

$$P(x_0 < x < x_0 + \Delta) = \Delta \tag{7}$$

pro všechna x_0 (což je u Bayese lemma 1), jednak

$$\left.\begin{aligned} P(\text{námi vržený bod padne vlevo od Q}) &= x \\ P(\text{námi vržený bod padne vpravo od Q}) &= 1 - x \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

(což je u Bayese lemma 2). Dále pokračuje Bayes komplikovanými úvahami týkajícími se obsahů jistých rovinných obrazců (úplná absence integrálního počtu v Bayesově práci je z historického hlediska zajímavá) a proto nebudeme dál Bayesův postup sledovat, pouze ho stručně shrneme.

Označme $\mathcal{K}$ jev spočívající v tom, že námi vržený bod padnul k-krát vlevo a $(n - k)$-krát vpravo od bodu Q. Pak můžeme hledanou pravděpodobnost vyjádřit (dle (1)) jako podmíněnou pravděpodobnost

$$P\{(a < x < b)|\mathcal{K}\} = \frac{P\{(a < x < b) \cap \mathcal{K}\}}{P\{\mathcal{K}\}}. \tag{9}$$

Pravděpodobnost ve jmenovateli je pouze speciálním případem pravděpodobnosti v čitateli, protože

$$P\{\mathcal{K}\} = P\{(0 < x < 1) \cap \mathcal{K}\};$$

rozhodující otázkou a jádrem druhé části Bayesovy práce je proto vyjádření pravděpodobnosti v čitateli.

Podle (1) a (7) pro $\Delta \neq 0$ platí pro všechna x_0

$$P\{\mathcal{K} \cap x \in (x_0, x_0 + \Delta)\} = P\{\mathcal{K}|x \in (x_0, x_0 + \Delta\}P\{x \in (x_0, x_0 + \Delta\}.$$

Pravděpodobnost jevu $\mathcal{K}$ jako funkce neznámé souřadnice bodu Q je dle (8) a dle binomického zákona rozdělení rovna

$$P_{\mathcal{K}}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k};$$

bude–li tedy Δ „hodně malé“, bude

$$P\{\mathcal{K}|x \in (x_0, x_0 + \Delta\} \approx \binom{n}{k} x_0^k (1-x_0)^{n-k}$$

a s přihlédnutím k (7) tedy lze psát

$$P\{\mathcal{K} \cap x \in (x_0, x_0 + \Delta)\} \approx \binom{n}{k} x_0^k (1-x_0)^{n-k} \Delta.$$

Jestliže interval (a, b) rozdělíme body $x_1 = a, x_2, \dots, x_{n+1} = b$ na „hodně malé“ intervaly šířky Δ, pak dle předešlého lze psát

$$P\{\mathcal{K} \cap x \in (x_0, x_0 + \Delta)\} \approx \binom{n}{k} \sum_{i=1}^{n} x_i^k (1-x_i)^{n-k} \Delta$$

a nikoho asi nepřekvapí, že v dnešním značení

$$P\{(a < x < b) \cap \mathcal{K}\} = \binom{n}{k} \int_a^b x^k (1-x)^{n-k} dx.$$

Hledaná pravděpodobnost (9) (představující hlavní výsledek Bayesova článku) se dnes uvádí ve tvaru ([1], str. 298; [2], str. 118; [3], IV, str. 241; [4], III, str. 137)

$$P\{(a < x < b)|\mathcal{K}\} = \frac{\int_a^b x^k (1-x)^{n-k} dx}{\int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dx};$$

je to spojitá analogie Bayesovy věty (6) a (nejspíš) odtud pochází pojmenování vzorce (6) Bayesovým jménem.

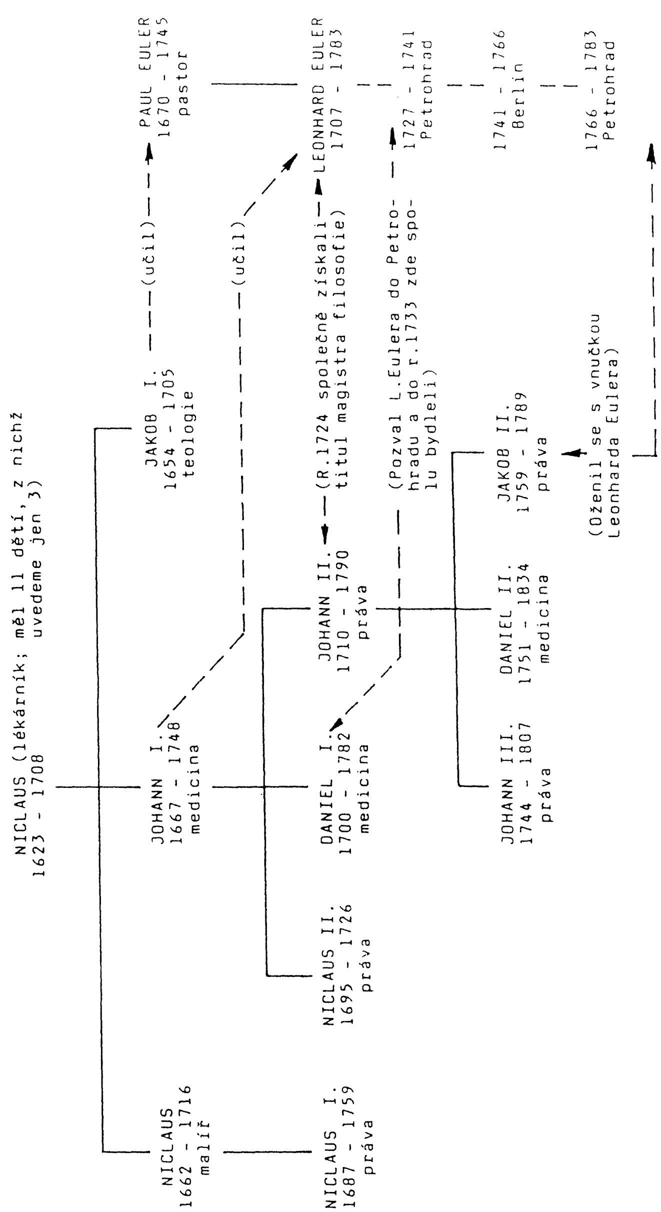
11 Závěr II. části

Cílem této přednášky bylo pojednat o některých problémech a výsledcích, které se objevily v teorii pravděpodobnosti v 17. a 18. století a které by mohly být (dle názoru přednášejícího) zajímavé i dnes pro učitele matematiky, kteří sice nejsou specialisty v oblasti teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky, ale zajímají se o historii matematiky. Jedná se pochopitelně pouze o velice stručný a subjektivní výběr z velice rozsáhlé problematiky (v knize [1] je tomuto časovému období věnováno cca 460 stránek); pro zájemce o hlubší seznámení s touto problematikou by proto mohla být zajímavá informace o tom, že obě základní knihy [1, 2] jsou dostupné v Národní knihovně v Praze (a kniha [2] asi i v jiných knihovnách).

Končíme-li tuto přednášku na konci 18. století, pak z historického hlediska nelze opomenout fakt, že už v r. 1774 publikoval svoji první práci věnovanou teorii pravděpodobnosti Pierre Simon Laplace (1749 – 1827). Laplace se zabýval teorií pravděpodobnosti řadu let a své výsledky shrnul v knize *Théorie analytique des probabilités*, která vyšla ještě za jeho života ve třech postupně upravovaných a doplňovaných vydáních; úvod k této knize vyšel také samostatně pod názvem *Essai philosophique sur les probabilités*. Význam této knihy pro teorii pravděpodobnosti byl zcela zásadní; Laplace zde nejen shrnul a prohloubil vše, čeho bylo v této oblasti do té doby dosaženo, ale přispěl k dalšímu rozvoji teorie pravděpodobnosti řadou původních výsledků. Lze říci, že tato kniha znamenala završení celého období, kterým jsme se zde zabývali, a považovali jsme proto za nezbytné se o ní v závěru této přednášky alespoň krátce zmínit, i když už patří do století devatenáctého.

Příloha I

Základní rodokmen rodu Bernoulliů



Příloha II

Poznámka k úloze o rozdělení sázky

1 Úvod

V současných učebnicích teorie pravděpodobnosti se úloha o rozdělení sázky neobjevuje[51]; zdá se, že naposledy byla tato úloha studována v polovině minulého století (viz [Př 1]). Neexistuje snad žádný matematický důvod, proč se této úloze dále věnovat, protože však v dějinách teorie pravděpodobnosti sehrála důležitou roli a protože při studiu literatury byly (náhodou) nalezeny (dle našeho názoru) zajímavé souvislosti matematické i personální, budeme se touto úlohou ještě chvíli zabývat.

2 Obecné řešení úlohy o rozdělení sázky

2.1 Historická motivace

V přednášce, ke které patří tato příloha, byla zformulována úloha o rozdělení sázky pro dva stejně dobré hráče (část 2.2) a bylo ukázáno její řešení (část 3.3.2). Další vývoj problému mířil dvěma směry. První směr se týkal formulace problému; je přirozené, že došlo ke zobecnění úlohy na libovolný počet „různě dobrých" hráčů, kdy pravděpodobnost výhry v každé jednotlivé hře není pro všechny hráče stejná. Z historického hlediska k tomu uveďme, že první řešení úlohy o rozdělení sázky pro dva hráče s nestejnými pravděpodobnostmi výhry podal zřejmě Johann Bernoulli v dopisu Montmortovi ze 17.III.1710 ([Př 3], str. 98); první publikovaný příklad zveřejnil Moivre v r. 1711 ([Př 3], str. 137, ale je zde uvedeno jen zadání; viz též [Př 2], str. 24).

Druhý směr vývoje problému se týkal metody řešení. Jak už bylo řečeno, Huygens podal rekurentní metodu řešení, která je sice formulována poměrně jednoduše, ale (jako každá rekurentní metoda) může být při řešení konkrétního příkladu velice pracná a zdlouhavá. Nepřekvapuje proto, že bylo hledáno řešení této úlohy ve tvaru nějakého vzorce bez využití rekurence.

Nebudeme sledovat celý historický vývoj problému a uvedeme pouze konečný výsledek, jehož autorem je (podle toho, co se nám podařilo zjistit) A. Meyer ([Př 1], str. 86 – 87).

---

[51] Jedinými námi zaregistrovanými výjimkami jsou cvičení č. 48 na str. 158 v knize RÉNYI, A.: *Teorie pravděpodobnosti*, Academia, Praha 1972, a cvičení č. 5.36 v knize SVEŠNIKOV, A.A. A KOL.: *Sbírka úloh z teorie pravděpodobnosti, matematické statistiky a teorie náhodných funkcí*, SNTL, Praha 1971, obsahující úlohu o rozdělení sázky pro dva stejně dobré hráče.

2.2 Meyerovo řešení

Nejprve zformulujeme problém v dnešní terminologii:

Nechť hráči $A_1, A_2, \ldots, A_n$ hrají sérii her o nějakou částku C; tuto částku získá ten hráč, který jako první vyhraje k her. Pravděpodobnost výhry hráče A_i v každé jednotlivé hře je rovna p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$; pochopitelně $\sum p_i = 1$. Série her je přerušena ve chvíli, kdy hráči A_i chybí do výhry a_i her, $i = 1, 2, \ldots, n$. Jakou pravděpodobnost výhry celé série má hráč A_1 v případě dohrávání?

Označíme-li tuto pravděpodobnost $P(1)$, pak je dle [Př 1], str. 86, rovna výrazu

$$p_1 \frac{\Gamma(a_1 + \cdots + a_n)}{\Gamma(a_1) \ldots \Gamma(a_n)} \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \frac{(x_2 + p_2)^{a_2 - 1} \cdots (x_n + p_n)^{a_n - 1}}{(1 + x_2 + \cdots + x_n)^{a_1 + \cdots + a_n}} dx_1 \ldots dx_n; \tag{1}$$

položíme-li $p_2 = p_3 = \cdots = p_n = 0$, pak je $p_1 = P(1) = 1$ a z (1) plyne

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \frac{x_2^{a_2 - 1} \ldots x_n^{a_n - 1}}{(1 + x_2 + \cdots + x_n)^{a_1 + \cdots + a_n}} dx_1 \ldots dx_n = \frac{\Gamma(a_1) \ldots \Gamma(a_n)}{\Gamma(a_1 + \cdots a_n)}. \tag{2}$$

Připomeňme, že pro $x > 0$ je $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$, pro x přirozená (o která zde jde) je $\Gamma(x) = (x - 1)!$.

Dle [Př 1], str. 87, má být výrazu (2) použito k výpočtu vícenásobného integrálu v (1); v čitateli integrovaného zlomku v (1) se provede mocnění a roznásobení a tím se tento integrál rozpadne na součet integrálů tvaru (2).

V [Př 2], str. 25, se tvrdí (ale bez výpočtu), že po provedení těchto úprav lze výraz (1) převést do tvaru

$$P(1) = \sum \frac{\Gamma(a_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n)}{\Gamma(u_2 + 1)\,\Gamma(u_3 + 1) \ldots \Gamma(u_n + 1)} p_1^{a_1} p_2^{u_2} \ldots p_n^{u_n}, \tag{3}$$

kde se sčítá přes všechny $(n-1)$-tice $(u_2, u_3, \ldots, u_n)$, pro které $0 \leq u_i \leq a_i - 1$, $i = 2, 3, \ldots, n$.

Autor této poznámky se přiznává, že mu není jasný smysl těchto velice složitých úvah a výpočtů; navíc se domnívá, že vzorec (3) (ve kterém je ostatně dle autorova názoru chyba) lze odvodit i vyjádřit daleko jednodušeji.

2.3 Elementární řešení

Hledejme pravděpodobnost P(1).

Má-li hráč A_1 vyhrát celou sérii, může být sehráno $a_1 + u_2 + \cdots + u_n$ her, kde $0 \leq u_i \leq a_i - 1$, $i = 2, 3, \ldots, n$; přitom ale poslední hru musí vyhrát hráč A_1. V předešlých $a_1 + u_2 + \cdots + u_n - 1$ hrách musí hráč A_1 vyhrát právě $(a_1 - 1)$-krát, hráč A_2 právě u_2-krát, ..., hráč A_n právě u_n-krát; pravděpodobnost této situace je podle známého vztahu pro pravděpodobnostní funkci multinomického rozdělení rovna

$$\frac{(a_1 + u_2 + \cdots + u_n - 1)!}{(a_1 - 1)!\, u_2! \ldots u_n!} p_1^{a_1 - 1} p_2^{u_2} \ldots p_n^{u_n}.$$

Uvážíme-li nyní, že hráč A_1 musí ještě vyhrát poslední hru, což je jev, který nastane s pravděpodobností p_1, pak pravděpodobnost toho, že hráč A_1 vyhraje celou sérii právě v $a_1 + u_2 + \cdots + u_n$ hrách, je rovna

$$p_1 \frac{(a_1 + u_2 + \cdots + u_n - 1)!}{(a_1 - 1)!\, u_2! \ldots u_n!} p_1^{a_1 - 1} p_2^{u_2} \ldots p_n^{u_n}.$$

Uvážíme-li nakonec, že všechny $(n-1)$-tice $(u_2, u_3, \ldots, u_n)$, pro které $0 \leq u_i \leq a_i - 1$, $i = 2, 3, \ldots, n$ vytvářejí disjunktní jevy, dostáváme

$$P(1) = \sum \frac{(a_1 + u_2 + \cdots + u_n - 1)!}{(a_1 - 1)!\, u_2! \ldots u_n!} p_1^{a_1} p_2^{u_2} \ldots p_n^{u_n}, \tag{4}$$

kde sčítáme přes všechny $(n-1)$-tice $(u_2, u_3, \ldots, u_n)$, pro které $0 \leq u_i \leq a_i - 1$, $i = 2, 3, \ldots, n$.

Toužíme-li po komplikovanějším vyjádření, stačí využít již zmíněné souvislosti mezi faktoriály a Γ-funkcí

$$n! = \Gamma(n+1);$$

použijeme-li tohoto vztahu v (4), dostaneme (3) až na to, že ve (3) chybí $\Gamma(a_1)$ ve jmenovateli, což je dle našeho názoru chyba.

Domníváme se, že užití výrazu (4) představuje asi nejjednodušší možný přístup k řešení úlohy o rozdělení sázky v obecné podobě.

2.4 Příklad

Použijeme vzorce (4) k řešení úlohy uvedené Huygensen v *Propositio VII*; v našem značení to znamená $n = 2$, $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$, $a_1 = 4$, $a_2 = 2$. Pak bude u_2 nabývat hodnot 0 nebo 1 a vzorec (4) bude obsahovat dva sčítance

$$P(1) = \frac{3!}{3!\,0!}\left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \frac{4!}{3!\,1!}\left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{16} + 4\frac{1}{32} = \frac{3}{16},$$

což je v souladu s Huygensovým výsledkem.

Poznamenejme ještě, že použití vzorce (3) vede k výsledku $P(1) = \frac{9}{8}$, což určitě není správně.

3 Závěr

Na závěr uveďme některé zajímavé personální souvislosti.

Kniha [Př 1] vznikla na základě rukopisu přednášek, které konal profesor A. Meyer (1801 – 1857)[52] v letech 1849 – 1857 na universitě v Lutychu. Její německý překlad pořídil v Praze Emanuel Czuber (1851 – 1925), pražský rodák, absolvent německé techniky v Praze, který v době práce na překladu už byl soukromým docentem, od r. 1886 byl řádným profesorem německé techniky

[52] Dle katalogu Národní knihovny v Praze se jmenoval Antoine, dle [Př 4], Bd. II, Anton.

v Brně a v letech 1891 – 1919 byl profesorem na technice ve Vídni, kde kromě jiného zavedl přednášky z pojistné matematiky (viz [Př 4, Př 5]).

Prof. Czuber měl dceru Berthu (narozenou r. 1879 v Praze), se kterou se r. 1909 v Churu (Švýcarsko) tajně oženil arcivévoda Ferdinand Karl (1868 – 1915), mladší bratr následníka trůnu Franze Ferdinanda (1863 – 1914; zastřelen v Sarajevu). Pro tento hierarchicky nerovný sňatek byl zbaven šlechtictví a žil pak jako soukromník Ferdinand Burg v jižních Tyrolích a v Mnichově, kde také zemřel (viz [Př 5, Př 6]). Bertha ho daleko přežila; zemřela r. 1979 na zámku Rottenstein u Merana a je pohřbena (stejně jako Ferdinand Karl) v kryptě pod hlavním oltářem kostela Panny Marie – Utěšitelky v Meranu – Untermais (dle [Př 6]).

LITERATURA

1. Todhunter, I., *A History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace*, 1. vyd., Cambridge, 1865, přetisk Chelsea Publ. Co. New York 1965.
2. Majstrov, L.E., *Teorija verojatnostej. Istoričeskij očerk*, Nauka, Moskva, 1967.
3. Cantor. M, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Bd. II, III Teubner, Leipzig, 1900, 1901.
4. Juškevič, A.P. (red.), *Istorija matematiki*, T. II, III., Nauka, Moskva, 1970, 1972.
5. Shafer, G., *Non–Additive Probabilities in the Work of Bernoulli and Lambert*, Archive for History of Exact Sciences **19** (1978), 4; 309 – 370.
6. Dutka, J., *Spinoza and the Theory of Probability*, Scripta mathematica **19** (1953), 1; 24 – 33.
7. Horák, P., *Svět Blaise Pascala*, Vyšehrad, Praha, 1985.
8. Pascal, B., *Œuvres complètes*, T. I. Ollendorf, Paris, (rok vydání neuveden), dle katalogu Národní knihovny v Praze r. 1923.
9. Christiani Hugenii a Zulichem, dum viveret Zelhelmi Toparchæ, *Opera varia*, Volumen secundum. Lugduni Batavorum, MDCCXXIV.
10. Bernoulli, J., *Ars conjectandi*, Basileæ, MDCCXIII.; *Wahrscheinlichkeitsrechnung*; (Německý překlad) Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 107, 108.; Leipzig; 1899.
11. Nikiforovskij, V.A., *Velikije matematiki Bernulli*, Nauka, Moskva, 1984.
12. Gnedenko, B.V., *Kurs teorii verojatnostej*, 4. vyd., Nauka, Moskva, 1965.
13. Bayes, T., *An Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chance*, Biometrika **45** (1958), 296 – 315.

LITERATURA K PŘÍLOHÁM

[Př 1] Meyer, A.:, *Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Teubner, Leipzig, 1879, Jedná se o překlad francouzského originálu vydaného v Bruselu r. 1874 (srov. [Př 2], str. 25).

[Př 2] Huygens, Ch., *Œuvres complètes*, T. XIV., Martinus Nijhoff, La Haye, 1920.

[Př 3] Todhunter, I., *A History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace*, 1. vyd., Cambridge, 1865, přetisk Chelsea, New York 1965.

[Př 4] Poggendorff, J.C., *Bibliographisch – literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exacten Wissenschaften*, Leipzig, Bd. II 1863, Bd. III 1898, Bd. IV 1904.

[Př 5] Österreichisches Biographisches Lexikon 1815 – 1950 (1957), Graz – Köln.

[Př 6] Reifenscheid, R., *Die Habsburger in Lebensbildern*, 4. Auflage, Verlag Styria (1990), Graz – Wien – Köln.

JAN MAREK MARCI

(1595 – 1667)