Jindřich Bečvář

Hrdinský věk řecké matematiky II

In: Jindřich Bečvář (editor); Eduard Fuchs (editor): Historie matematiky. II. Seminář pro vyučující na středních školách, Jevíčko, 21. 8. – 24. 8. 1995, Sborník. (Czech). Praha: Prometheus, 1997. pp. 6–28.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401035

EVCLIDIS
ELEMENTORVM
Liber primus.

Item,

HERONIS ALEXANDRINI
vocabula quædam geometrica: ante hac nunquam edita, græcè & latinè.

Per M. Cunradum Dasypodium.

Cum gratia & priuilegio Cæsareo, atque Regis Galliç, ad sexennium.

ARGENTINAE,
1571.

Dasypodiovo přepracování Eukleidových *Základů*
se slovníčkem pojmů z Hérónovy *Geometrie*
(titulní list 1. svazku)

HRDINSKÝ VĚK ŘECKÉ MATEMATIKY II

JINDŘICH BEČVÁŘ

Tato stať je přímým pokračováním textu *Hrdinský věk řecké matematiky* [Be], který byl otištěn ve sborníku HISTORIE MATEMATIKY I . Proto pokračuje číslování jednotlivých článků a bibliografické odkazy využívají označení z [Be]; další tituly, které jsou zde zařazeny v seznamu literatury, jsou pro odlišení označeny písmeny.

Budeme se věnovat třem problémům, se kterými se řecká matematika potýkala v šestém, pátém a čtvrtém století před Kristem.

21. Zénón a nekonečno

Filozof Zénón (490?–430?), žák Parmenida, byl snad nejmladším z eleatů. Byl proslulým učitelem, kritickým myslitelem, mistrem polemik, přicházeli k němu do učení z širokého okolí. Zdůrazňoval roli rozumu proti smyslové zkušenosti. Je považován za zakladatele dialektiky; v nejstarším významu byla dialektika uměním dialogu, hledáním sporů v protivníkových tezích, metodou systematického tázání. Parmenidés i Zénón vystupují v Platónově dialogu *Parmenidés* [P2].

Německý filozof Georg Wilhelm Friedrich Hegel (1770–1831) uvádí ve svých *Dějinách filosofie* o Zénónově životě mimo jiné (podle Diogena Laertia) toto:

... Zvláště slavná byla — dle nejrůznějších vyprávění — jeho smrt, díky jeho duševní síle; osvobodil prý obětováním vlastního života stát od tyrana ... . Zénón prý rozpoutal spiknutí, aby byl svržen tyran, leč vzpoura byla zrazena. Když ho tyran před tváří lidu všemi způsoby mučil, aby z něho vynutil doznání spoluúčastníků spiknutí, a když se ho tázal na nepřátele státu, Zénón tyranovi nejprve vyjmenoval všechny tyranovy přátele jako spoluúčastníky a potom jmenoval tyrana samého jako zkázu státu. Toto mocné Zénónovo nabádání a strašné mučení i smrt podnítila občany a vzbudila v nich odvahu tyrana napadnout, zabít ho a osvobodit se. Rozdílně se vypravuje zvláště o posledním výjevu, vášnivém a zběsilém. Zénón prý předstíral, jako by chtěl tyranovi ještě něco říci do ucha, zakousl se mu do ucha a tak pevně ho držel, až byl tyran přítomnými ubit. Jiní říkají, že Zénón uchopil tyrana zuby za nos; jiní, že když byl za každou odpověď nejstrašněji mučen, překousl si jazyk a vyplivl jej tyranovi do tváře, aby mu tak ukázal, že z něho nic nedostane; potom prý byl rozdrcen v moždíři. ([25], 1. díl, str. 233)

Pro matematiku jsou asi nejzajímavější následující zprávy o Zénónových úvahách a argumentacích. První z nich je zlomek ze Simplikia:

... důkaz, na který se dotazoval Zénón sofisty Prótagory: „Pověz mi, Prótagoro," řekl, „zda působí zvuk jedno prosné zrno, upadne-li, nebo jedna desetitisícina zrna?" A když on řekl, že nepůsobí, tázal se: „Upadne-li měřice

prosa, působí zvuk či ne?" Když pak on řekl, že měřice působí, pravil Zénón: „Jak pak, není jakýsi poměr měřice prosa k jednomu zrnu a k desetitisícině jednoho?" Když on uznal, že jest, pravil Zénón: „Jak pak, nebudou také tytéž vzájemné poměry zvuků? Neboť jako zvučící předměty, tak také zvuky. Ježto je tomu tak, vydává-li zvuk měřice prosa, vydá jej též jedno prosné zrno i desetitisícina zrna."[1] ([85], str. 76)

Zénónův argument využívá možnosti dělení na libovolně malé díly a je založen na důsledné aplikaci přímé úměrnosti; jde ρ situaci, kdy se nezávisle proměnná „hodně blíží k nule". Jsme dnes přesvědčeni o správnosti této Zénónovy úvahy? Neexistují např. prahové či kritické hodnoty, kdy se charakter závislosti uvažovaných veličin zásadně změní? Co se stane „upadne-li" atom, jedna desetina, tisícina, miliontina atomu? A co to znamená, že „upadne" atom? A může vůbec atom upadnout? A co to je miliontina atomu? Je možno uvažovat o zvuku (v klasickém slova smyslu) v mikrosvětě? Kdy ještě mají naše otázky smysl a kdy už smysl nemají? [2]

Vidíme, že hlubší zamyšlení nad Zénónovou úvahou vyvolává další otázky, které rozhodně není jednoduché zodpovědět.

Z výše uvedeného úryvku také vidíme, jak důležitou roli hrály v řecké matematice poměry a jejich rovnosti (úměry); zde je pomocí nich vyjádřena přímá úměrnost.

Uveďme dále zlomky z Aristotelovy *Fysiky* (kniha 6, hlava 9), které zachycují nejznámější Zénónovy aporie[3] o nemožnosti pohybu.

Čtyři jsou Zénónovy důkazy o pohybu, které působí obtíže těm, kdo je chtějí vyvracet. První je, že není pohybu, ježto to, co se pohybuje, musí dojít dříve do poloviny cesty, než dojde k cíli ... nelze projít nekonečným počtem míst nebo se dotknout nekonečného počtu míst v konečném čase.

Druhý důkaz je t.zv. Achilleus. Je to ten, že nejpomalejší tvor nemůže být v běhu nikdy dostižen nejrychlejším, neboť pronásledující musí dříve dojít tam, odkud vyběhl prchající, takže pomalejší je nutně vždy o něco napřed.

Třetí důkaz je ..., že pohybující se šíp stojí ... neboť je-li vše vždy v klidu nebo v pohybu, (a nehýbá-li se), cokoli je v stejném prostoru, a je-li konečně to, co se pohybuje, v jednom okamžiku (vždy v stejném prostoru), pak je letící šíp nepohnutý.

Čtvrtý důkaz je o tělesech, která se pohybují na závodní dráze v stejném počtu podél stejného počtu se stejnou rychlostí z opačných stran, jedna tělesa

---

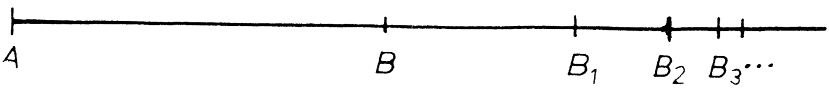
[1] Při vlastní přednášce na semináři v Jevíčku bylo experimentálně zjištěno, že upadne-li jedno zrno pšenice, vydá zvuk. Prosné zrno nebylo k disposici.

[2] Uveďme poměrně jednoduchou analogii z běžného vyučování matematice na základní škole: *Jeden montér zašroubuje 100 šroubů za 100 minut. Za jak dlouho zašroubuje 100 šroubů pět, deset, sto, tisíc, milion, ... montérů? Jedna a půl slepice snese jedno a půl vejce za jeden a půl dne. Kolik vajec snese 7 slepic za 6 dní?* Jsme vždy schopni říci, kdy má otázka (nebo zadání příkladu) smysl a kdy už ne?

[3] Slovo *aporie* pochází z řečtiny a znamená obtíž, rozpaky, nepřekonatelný rozpor, bezcestí, slepou uličku rozumu, obtížný či neřešitelný problém. Významem se mu velmi blíží kantovský termín *antinomie*.

z konce závodiště a druhá z prostředka; při tom, jak myslí Zénón, se stává, že se poloviční čas rovná dvojnásobnému … Buďtež např. stejná stojící tělesa A A, druhá pak B B, počínající od středu těles A a stejná počtem i velikostí s nimi, a třetí C C, počínající na konci, stejná s obojími počtem a velikostí a stejně rychlá jako B. Nuže stane se, že se první B dostane na konec závodiště zároveň s prvním C, když se pohybovala podél sebe. Dále se stane, že i tělesa C projdou podél všech B, ale B jen podél polovice A, takže čas je poloviční, neboť obojí je stejně dlouhý čas podél každého. Taktéž se stane, že tělesa B projdou podél všech C, neboť první C a první B bude zároveň na opačných koncích, při čemž se podle jeho slov pohybuje (první C) stejně dlouhý čas podél každého z B jako podél každého z A, ježto se obojí pohybuje stejně dlouhý čas podél A. ([85], str. 75–76; viz též [Ar], str. 182–184)

Rozeberme nejprve aporii *Achilles a želva* (viz obr. 1).[4]



Obr. 1

Předpokládejme, že Achilles běží desetkrát rychleji než želva a že na počátku má želva náskok m délkových jednotek (na obr. 1 je pro názornost použit poměr rychlostí Achillea a želvy 2 : 1). Uběhne-li Achilles vzdálenost m z bodu A do bodu B za čas t, uběhne želva vzdálenost $\frac{m}{10}$ a bude v bodě B_1; doběhne-li Achilles do bodu B_1 (za čas $\frac{t}{10}$), uběhne želva vzdálenost $\frac{m}{100}$ a bude v bodě B_2 atd. V bodě B_k bude mít želva náskok $\frac{m}{10^k}$ — dostane se tam za čas $t+\frac{t}{10}+\cdots+\frac{t}{10^{k-1}}$. Takto Zénón dokazuje, že má želva stále náskok. Sumarizaci

$$m+\frac{m}{10}+\frac{m}{100}+\cdots=\frac{10}{9}\cdot m=1,\overline{1}\cdot m\ ,$$

resp.

$$t+\frac{t}{10}+\frac{t}{100}+\cdots=\frac{10}{9}\cdot t=1,\overline{1}\cdot t\ ,$$

tj. limitní přechod od částečných součtů k celkovému součtu (přechod od potenciálního nekonečna k aktuálnímu[5]) Zénón neprovede. Tato vzdálenost

[4] Nebudeme uvažovat interpretaci B. Henryho: *rychlejší Achilles nedoběhne želvu, takže želva běžící před ním doběhne jeho.*

[5] Potenciálním nekonečnem rozumíme „nekonečno v možnosti", aktuálním nekonečnem „nekonečno uskutečněné". Hovoříme-li dnes v matematice o nekonečných množinách (např. množina přirozených, celých, racionálních, reálných čísel apod.), jde o nekonečno aktuální, kdy předpokládáme, že všechny prvky těchto množin existují, že jsou již vytvořeny. Řekne-li dítě, že „čísla začínají, ale nekončí" (má na mysli posloupnost $1, 2, 3, \cdots$), jde o nekonečno potenciální; dítě umí vyjmenovat posloupnost $1, 2, 3, \cdots, n$ a ví, že může podle libosti v čítání pokračovat. Nepředstavuje si však, že jsou všechna přirozená čísla již vyjmenována a tvoří dohromady jakýsi celek — aktuálně nekonečnou množinu. Při potenciálním přístupu uvažujeme vždy jen konečně mnoho objektů, ale spolu s možností stálého zvětšování jejich počtu.

není oběma aktéry závodu v Zénónově podání dosažitelná. Svým popisem děje Zénón nepřipustí, aby čas dosáhl hodnoty $\frac{10}{9}t$. Nepřipustí ani jiný popis děje; např. výpočet bodů, kam doběhne Achilles a kam želva za čas $\frac{10}{9}t$ (a následné zjištění, že jsou tyto body totožné). Podle Zénóna nelze v konečném čase sečíst nekonečnou řadu, uběhnout nekonečně mnoho úseků, projít nekonečně mnoha body apod. Jeho úvahy vyvolávají otázky o podstatě hmoty a času, o konečnosti a nekonečnosti, spojitosti a diskrétnosti. Je možno čas, vzdálenost, hmotu, pohyb, ... dělit do nekonečna? Kdy je možno to, co po n-tém rozdělení získáme, ještě považovat za čas, vzdálenost, hmotu, pohyb, ... ?

Uveďme pěknou analogii.

V rozvinuté kapitalistické společnosti vyrábí firma MLS & SYNOVÉ čokolády a prodává je za 1,– Kč. Jako působivá reklama je v každém balíčku čokolády přibalen kupón; deset těchto kupónů lze v prodejně vyměnit za jednu čokoládu. Kolik čokolády odpovídá jedné koruně?

Za jednu korunu zakoupíme jednu čokoládu, ve které je jeden kupón reprezentující $\frac{1}{10}$ čokolády, ve které však bude také kupón, ... Za jednu korunu tedy máme

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots = 1,111... = 1,\overline{1}$$

čokolády. Vtipným postupem ukážeme, že toto „podivné nekonečné číslo" je rovno $\frac{10}{9}$. Představme si, že jsme za 9 korun zakoupili 9 čokolád a máme tedy 9 kupónů. Požadujeme na prodavači další čokoládu. Ten říká, že dává čokoládu za 10 kupónů. Slíbíme mu, že mu desátý kupón ihned dodáme. Jakmile nám dá desátou čokoládu, rozbalíme ji a desátý kupón mu dáme. Za 9 korun jsme tedy získali 10 čokolád, za jednu máme $\frac{10}{9}$ čokolády.[6]

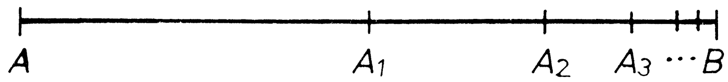
V moderní matematice můžeme aporii Achilles a želva interpretovat následujícím způsobem. Označíme-li časové okamžiky, ve kterých je Achilles v bodech $B, B_1, B_2, B_3, \cdots$, symboly $t_0, t_1, t_2, \cdots$, pak Achilles dostihne želvu v časovém okamžiku t_ω, kde ω je první nekonečné ordinální číslo.

O první Zénónově aporii se hovoří jako o *dichotomii.* Uvažujme úsečku AB délky 1 (viz obr. 2). Má-li se pohybující se bod z bodu A dostat do bodu B, musí nejprve projít středem A_1 úsečky AB, potom středem A_2 úsečky A_1B, potom středem A_3 úsečky A_2B atd. Pohybující se bod by tedy měl projít nekonečně mnoha body a urazit postupně vzdálenosti $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots$. Zénónův přístup je opět potenciální; k sečtení řady

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1$$

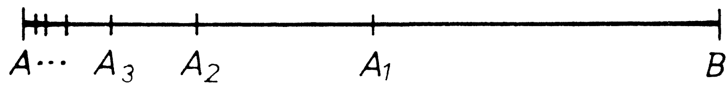
a k přechodu od potenciálního k aktuálnímu chápání problému nedojde.

[6] Prodavač Želva, který ctí zájmy své firmy, by však při uvedeném jednání neměl zákazníkovi Achilleovi vyjít vstříc. Kupónová reklama totiž využívá právě toho, že zákazníkovi vždy alespoň jeden kupón zbývá; motivuje ho tím ke koupi dalších čokolád. Zákazník Achilles by při tomto postupu prodavače Želvy nikdy za x korun nezískal $\frac{10}{9}x$ čokolády a Želvu by nedoběhl. Uvedený čokoládový příklad můžeme považovat za aplikaci teorie desetinných rozvojů v teorii reklamy.



Obr. 2

Při tomto výkladu se *dichotomie* jen nepodstatně liší od aporie *Achilles a želva*. Uveďme ještě jiný výklad. Uvažujme opět úsečku AB délky 1 (viz obr. 3).



Obr. 3

Má-li se pohybující se bod dostat z bodu A do bodu B, musí dříve projít středem A_1 úsečky AB, ještě dříve však středem A_2 úsečky AA_1, ještě dříve středem A_3 úsečky AA_2 atd. Tak získáme body $A_1, A_2, A_3, \cdots$. Do kterého bodu se však má pohybující se bod C z bodu A přesunout? Pohyb tedy nemůže vzniknout.

Třetí Zénónova aporie *Letící šíp* se matematiky příliš nedotýká. Podle Zénóna je pohybující se šíp v každém okamžiku svého letu v určitém bodě a v tomto bodě je v tom okamžiku v klidu. Pak je však v <u>každém</u> okamžiku v klidu a nepohybuje se.

Tato Zénónova argumentace je zmíněna i v jednom zlomku z Diogena:

Zénón vyvrací pohyb pravě: „Pohybující se nepohybuje se ani na tom místě, kde jest, ani na tom, kde není.“ ([85], str. 75)

O Zénónových aporiích píše řada filozofů i matematiků; např. německý matematik Hermann Weyl (1885–1955):

Nemožnost pojmout kontinuum jako strnulé bytí nemůže být formulována pregnantněji než známým Zénónovým paradoxem o závodu mezi želvou a Achilleem. Poukaz na to, že postupná sumace částí

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}$$

neroste nade všecky meze, nýbrž konverguje k 1, je zajisté důležitá, věcná a objasňující poznámka. Jestliže však úsečka délky 1 je složena skutečně z nekonečně mnohých úseček částečných o délce $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \cdots$ *jakožto „useknutých“*

celků, pak odporuje podstatě nekonečna — „neukončitelna“, že Achilleus je konečně všecky proběhl.

Připustíme-li tu možnost, pak nelze nahlédnout, proč by nějaký stroj nemohl v konečné době též pořídit nekonečný počet různých výkonů ..., a tak by bylo možné, kdyby též náš mozek fungoval podobně, docílit toho, aby byla proběhnuta všecka přirozená čísla i s příslušnými otázkami po jejich existenci a odpověďmi ano a ne.[7] ([W], str. 34; viz [Pa], str. 184–185)

Snad nejvýstižnější stanovisko k Zénónovým aporiím zaujali David Hilbert (1862–1943) a Paul J. Bernays (1888–1977) v knize *Grundlagen der Mathematik* z roku 1934.

... vždyť ve skutečnosti vůbec nemůžeme počítat, že matematická prostorově časová představa o pohybu má fyzikální smysl i v případě libovolně malých prostorových a časových intervalů. Navíc máme všechny důvody předpokládat, že snažíme-li se pracovat s dostatečně jednoduchými pojmy, pak tento matematický model extrapoluje fakta vycházející z určité oblasti zkušenosti, konkrétně z oblasti pohybu v hranicích veličin toho řádu, který je ještě dostupný našemu pozorování, podobně jako provádí určitou extrapolaci mechanika kontinua, která vychází z představy o spojitém vyplnění prostoru hmotou. Stejně jako při neomezeném prostorovém dělení přestane být voda vodou, tak při neomezeném dělení pohybu vzniká cosi, co již sotva může být nazváno pohybem. Pokud se na věc podíváme z takovéhoto hlediska, pak tento paradox zmizí. ([HB], díl I, str. 16; viz též [Ba], str. 185–186)

Čtvrtou Zénónovu aporii, tzv. *stadión*, není jednoduché rozluštit, pochopit a interpretovat (viz např. [25], díl I, str. 242–244; [Pa], str. 185–186).

Uvažujme výchozí situaci, kdy tělesa A_1, A_2, A_3 stojí, tělesa B_1, B_2, B_3 se podél nich pohybují jedním směrem a tělesa C_1, C_2, C_3 stejnou rychlostí druhým směrem.

$$\begin{array}{ccccc} & A_1 & A_2 & A_3 & \\ B_3 & B_2 & B_1 & \rightarrow & \\ & \leftarrow & C_1 & C_2 & C_3 \end{array}$$

Uvažujme dále situaci, kdy budou tělesa v následující konfiguraci:

$$\begin{array}{ccc} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_3 & B_2 & B_1 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{array}$$

Je zřejmé, že relativní rychlost těles C vůči tělesům B je dvojnásobná než rychlost těles C vůči tělesům A. Z aporie o letícím šípu vyplývá, že pohyb není

[7] Představme si, že chceme sestrojit počítací stroj, který provede první operaci za $\frac{1}{2}$ minuty, druhou za $\frac{1}{4}$ minuty, třetí za $\frac{1}{8}$ minuty atd. Takový stroj by mohl koncem první minuty projít celou množinu přirozených čísel a rozřešit např. problém Velké Fermatovy věty nebo libovolný jiný problém teorie čísel, který je svázán s otázkou existence. Je zřejmé, že práce na konstrukci takového počítacího stroje je odsouzena k nezdaru. Jak tedy vysvětlit, že pohybující se těleso dojde na konec své cesty? (volně podle [Ba], str. 185) H. Weyl se o Zénonově aporii Achilles a želva zmiňoval i ve své přednášce *Die Stufen des Unendlichen* dne 27. října 1930 (Verlag von Gustav Fischer, Jena 1931, str. 2–3).

možný v okamžiku. Proveďme dvě úvahy o jakýchsi nejmenších kvantech času a prostoru, ve kterých je pohyb možný.

Uvažujme nejmenší časový interval $\triangle t$, ve kterém je pohyb možný, ve kterém je ještě pohyb pohybem. Tělesa B se vůči tělesům A posunou o jakýsi délkový úsek $\triangle s$, tělesa C se vůči tělesům A posunou o stejný délkový úsek $\triangle s$; tělesa C se však vůči tělesům B posunou o úsek $2\triangle s$. Za jaké „kvantum času" se však tělesa C posunou vůči tělesům B o úsek $\triangle s$? Vždyť $\triangle t$ byl nejmenší, tedy nedělitelný časový interval, ve kterém je pohyb možný!

Uvažujme naopak nejmenší délkový interval $\triangle s$, ve kterém je pohyb možný. Urazí-li tělesa C vůči tělesům B úsek $\triangle s$, jaký úsek urazí tělesa B (resp. C) vůči tělesům A?

Uveďme nyní několik dalších zlomků, které se týkají Zénóna. Ve všech se setkáváme s úvahami souvisejícími s nekonečnem; s nekonečným množstvím, s nekonečně malými a nekonečně velkými veličinami, s nekonečnou posloupností. Úvahy, které jsou v těchto zlomcích obsažené, velice pěkně dokumentují myšlenkové tápání, které souviselo s uchopováním pojmu nekonečno. Povšimněme si např. toho, že tyto zlomky netvoří konsistentní celek, že si místy protiřečí. Opět se zdá, že cílem těchto myšlenkových konstrukcí bylo poukázat na problémy, ke kterým lze dospět důslednými logickými postupy.

Ve svém spise obsahujícím četné důkazy dovozuje po každé, že ten, kdo uznává mnohost, nutně mluví věci sobě odporující. Tak jeden je důkaz, kde dovozuje, že je-li jsoucen mnoho, jsou zároveň i veliká, i malá, tak veliká, že jsou nekonečně veliká, a tak malá, že nemají vůbec žádnou velikost. Při tom pak dokazuje, že nemá-li co ani velikost, ani tloušťku, ani hmotu, nemůže to vůbec být.[8] *„Neboť", říká, „kdyby to přistoupilo k jiné věci, nikterak by ji nezvětšilo, vždyť není-li žádná velikost a přistoupí-li k něčemu, nemůže toto nijak získati na velikosti a nebyl by takto žádný přírůstek. A jestliže se věc při ubírání nezmenší a při přidávání nezvětší, je patrné, že ani přidané, ani ubrané nebylo ničím". A to neříká Zénón, aby vyvrátil jedno, nýbrž tvrdí, že každá z mnohých a nesčíslných věcí má velikost, ježto pro dělitelnost do nekonečna je před tím, co bereme, vždy něco jiného. Dokazuje to, když byl před tím dovodil, že nic nemá velikost, poněvadž každá z mnohých věcí je s sebou totožná a jedna.* ([85], str. 73–74; viz též [Pa], str. 181)

V předchozím zlomku je zajímavá pasáž o zvětšování a zmenšování jsoucna. S tvrzením, že *jestliže se věc při ubírání nezmenší a při přidávání nezvětší, je patrné, že ani přidané, ani ubrané nebylo ničím*, jako matematici souhlasit nebudeme. Víme přece, že sjednocením nekonečné množiny A s jakoukoli množinou B menší mohutnosti získáme množinu $A \cup B$, která má stejnou mohutnost jako množina A. Existují však nekonečné množiny „mimo matematiku"?

Nekonečnost co do velikosti pak dokázal dříve stejným postupem. Dokázav totiž napřed, že by jsoucno nebylo, kdyby nemělo velikosti, vyvozuje: „Jestliže pak jest, musí mít každé jsoucno nějakou velikost i tloušťku a jedno jsoucno

[8] *Co by nemělo velikost, nebylo by.* Jiný překlad: *Pakliže jednotlivá věc nemá velikosti, nemá žádné existence.* ([Pa], str. 179–180)

musí být vzdáleno od druhého. A stejně se to má s tím jsoucnem, které je před oním: i to bude mít velikost a něco bude před ním. A toto lze říci jednou a říkat stále, neboť žádné takové jsoucno z toho nebude nejzazší a žádné nebude beze vztahu k jinému. Tak je-li jsoucen mnoho, je nutné, aby byla zároveň i malá i veliká, tak malá, že nemají velikosti a tak veliká, že jsou nekonečná.“ ([85], str. 74; viz též [Pa], str. 180)

Úryvky, které jsme uvedli, jsou zlomky Zénónových úvah, které jsou vytrženy ze širšího kontextu. Přečteme-li si je pozorně, vidíme, že v jednom Zénón zavrhuje nekonečně malé veličiny, ve druhém naopak ukazuje, že existují.

Zénónův důkaz ...: „Je-li prostor, bude v něčem. Vždyť vše, co je, je v něčem, a co je v něčem, je též v prostoru. Bude tedy prostor v prostoru, a to jde do nekonečna. Není tedy prostoru.“ ([85], str. 75; viz též [Pa], str. 183)

Když Zénón ukazuje, že je-li mnohé, je zároveň omezeno i neomezeno, píše doslovně toto: „ Je-li jsoucen mnoho, je nutno, aby jich bylo tolik, kolik jich jest, ani více, ani méně. A je-li jich tolik, kolik jich jest, byla by počtem omezena. — Je-li jsoucen mnoho, jsou počtem neomezena, neboť vždy jsou mezi jsoucny jiná a mezi těmi zase jiná, a tak jsou počtem neomezena.“ A tak ukázal dělením nekonečnost co do počtu. ([85], str. 74; viz též [Pa], str. 181)

Velké diskuse filozofů vyvolávalo a stále vyvolává Zénónovo chápání nekonečna. Viděli jsme, že v aporiích o pohybu uvažuje Zénón potenciálně. Často se však uvádí, že potenciální nekonečno u Zénóna do jisté míry přerůstá v nekonečno aktuální. Můžeme-li totiž prostor, čas, ... dělit do nekonečna, musí být prostor, čas, ... ve skutečnosti do nekonečna již rozdělen (viz např. [25], díl I, str. 237–238).

Zénón byl mistrem dialektiky a disputací, hojně používal postupů, kterým v matematice říkáme „důkazy sporem“. Tvrzení svých protivníků, která chtěl vyvrátit, nejprve přijal a pak ukazoval, jaké nesrovnalosti a absurdity z nich vyplývají. V Platónově dialogu *Parmenidés* hovoří o tomto postupu Sókrates i sám Zénón:

Poznávám, Parmenide, řekl Sókratés, že tuhle Zénón chce býti sblížen nejen s tvým ostatním přátelstvím, nýbrž také se spisem. Napsal totiž jistým způsobem totéž co ty, ale na druhé straně se pokouší nám namluviti, jako by říkal něco jiného. Ty totiž ve své básni tvrdíš, že vše jest jedno, a krásně i dobře pro to uvádíš důkazy; avšak Zénón zase tvrdí, že není mnohost, a také on uvádí velmi mnoho velmi vážných důkazů. Nuže, když jeden tvrdíte, že jest jedno, a druhý popíráte mnohost a když mluvíte jeden i druhý tak, aby se zdálo, že jste neřekli docela nic téhož, ačkoli mluvíte téměř totéž, je viděti, že tyhle vaše řeči přesahují rozum nás ostatních. Zénón odpovídá, že ... *pravou podstatou je ten spis jakási pomoc myšlence Parmenidově proti těm, kteří se pokoušejí na ni dělat vtipy a tvrdí, že jestliže jest jedno, vychází z toho mnoho směšných důsledků pro tu myšlenku, a to jí odporujících. Obrací se tedy tento spis proti těm, kteří tvrdí, že je mnohost, a oplácí jim stejnou měrou a ještě větší, chtěje ukázati, že ještě směšnější by to bylo s jejich předpokladem mnohosti nežli s předpokladem jednoho, kdyby se to náležitě promyslelo.* ([P2], str. 17)

22. Zkoumání iracionalit

V textu *Hrdinský věk řecké matematiky* jsme se poměrně podrobně zabývali problémem souměřitelnosti a nesouměřitelnosti úseček (strana a úhlopříčka čtverce, strana a úhlopříčka pravidelného pětiúhelníku) a objevením prvních iracionalit; snažili jsme se ukázat, jakými metodami mohla být nesouměřitelnost úseček dokazována (viz [Be], str. 57–61).

Řečtí myslitelé si jistě velmi rychle uvědomili, že iracionalit existuje více, že je jich (potenciálně) nekonečně mnoho. Svědectví o tom nalézáme již v Platónově dialogu *Theaitétos*. Dozvídáme se zde, že se problematikou iracionalit zabýval Theodóros z Kyréné (řecká osada v severní Africe — dnešní Libye), který snad vyšel z pýthagorejské školy. Jeho žákem byl Theaitétos (asi 417–369/8), který byl ve spojení s Platónovou Akademií; zemřel na následky zranění z korintské války. Věnoval iracionalitám velkou pozornost; provedl jejich klasifikaci, která byla později Eukleidem zpracována v desáté knize jeho *Základů*. Kromě toho se zabýval pravidelnými mnohostěny (tzv. platónská tělesa); tyto jeho výsledky jsou obsaženy v třinácté knize *Základů*. Uveďme však již zmíněný úryvek z dialogu *Theaitétos*.

Theait. Tuhle Theodóros nám znázorňoval obrazci cosi o mocninách, o čtverci obsahujícím tři čtverečné stopy a o čtverci obsahujícím pět čtverečných stop, že svou stranou nejsou souměřitelné se čtvercem o jedné stopě, a tak probíral jednu mocninu po druhé až po čtverec o sedmnácti čtverečných stopách; při tomto se nevím proč zastavil. A tu nás napadla taková myšlenka — když se jevilo, že těch mocnin je nekonečné množství — pokusit se je sebrat v jedno jméno, kterým bychom nazvali všechny tyto mocniny.

Sókr. A nalezli jste snad nějaké takové?

Theait. Mně se zdá, že ano; ale posuď to i ty.

Sókr. Mluv.

Theait. Všechna čísla jsme rozdělili na dva druhy; čísla vznikající násobením dvou stejných činitelů jsme přirovnali tvarem ke čtverci a proto jsme je nazvali čtvercovými a rovnostrannými.

Sókr. Dobře.

Theait. Ale čísla, která jsou mezi těmito — k nim náleží i tři i pět i každé číslo, které nevzniká násobením stejných činitelů, nýbrž buďto většího násobence menším násobitelem nebo menšího násobence větším násobitelem a které omezuje pokaždé jedna větší strana a jedna menší — ta jsme přirovnali k obdélníku a nazvali je obdélníkovými.

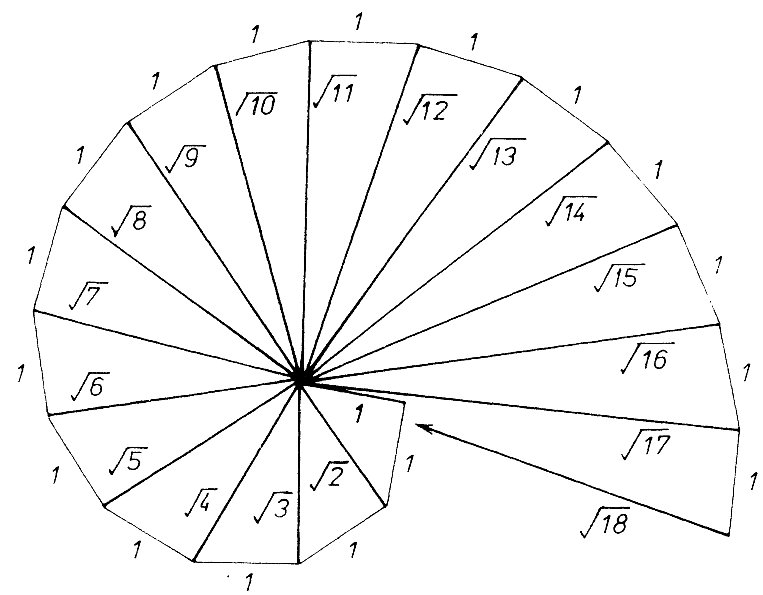
Sókr. Výborně. Ale co dále?

Theait. Všechny přímky [jde o úsečky], *jejichž čtverec tvoří číslo rovnostranné a plošné, jsme stanovili jakožto délky, které však tvoří číslo nerovnostranné, jakožto mocnosti, hledíce k tomu, že nejsou s oněmi souměřitelné délkou, nýbrž plochami, které vznikají jejich umocněním. A podobně co se týče těles.* ([Pl], str. 18–19)

V předposledním odstavci znamená slovní spojení *které omezuje pokaždé jedna větší strana a jedna menší* to, že obdélníkovými čísly jsou míněna právě ta přirozená čísla, která nejsou čísly čtvercovými (při každém rozkladu v součin dvou čísel je jeden činitel větší než druhý). Číslo čtvercové tedy pro řecké matematiky není speciálním případem čísla obdélníkového. Tomu odpovídá i zařazení dvojice čtverec–obdélník mezi deset základních pýthagorejských protikladů. Nesouvisel právě tento striktní pohled na tuto dvojici pojmů s objevem nesouměřitelnosti? Vždyť odmocnina čtvercového čísla je (v naší řeči) číslo přirozené a odmocnina obdélníkového čísla je číslo iracionální!

V posledním odstavci jsou druhé odmocniny přirozených čísel rozděleny na čísla přirozená a čísla iracionální (délky, *jejichž čtverec tvoří číslo rovnostranné a plošné*, a mocnosti, *které však tvoří číslo nerovnostranné*). Poslední věta (*A podobně co se týče těles.*) znamená, že stejné rozlišení se uvažuje u třetích odmocnin přirozených čísel. Poznamenejme, že v novém vydání Platónova dialogu *Theaitétos* je citované místo upraveno — rozlišeny jsou termíny *mocnina* a *mocnost*, pro které je v řeckém originálu užíván stejný výraz *dynamis* ([P1], 18–19, 109–110 — poznámka č. 10).

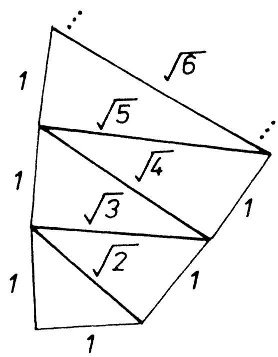
Citát z Platónova *Theaitéta*, který jsme právě uvedli, byl předmětem mnoha spekulací. Velkou pozornost poutalo číslo 17, u kterého se Theodóros *zastavil.* Jedno z efektních vysvětlení souvisí s obr. 4; při známé konstrukci odmocnin tzv. „odmocninovým šnekem" je přirozené skončit u čísla $\sqrt{17}$; konstrukce čísla $\sqrt{18}$ by už „narušila" obrázek.



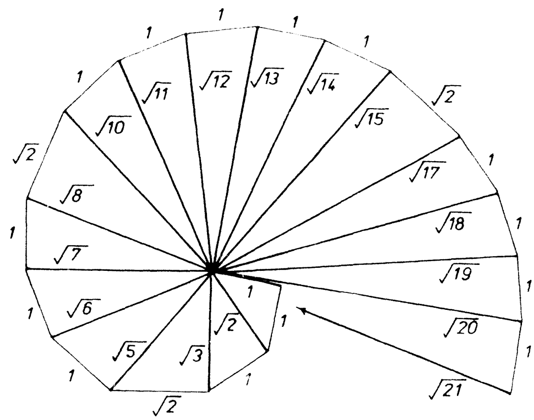
Obr. 4

Půvabnou pasáž o tomto problému je možno najít i v nedávno vydané zajímavé knížce [Da] (viz str. 50–56). Různé úvahy o této otázce lze nalézt např. v [38] a [74].

Postupnou konstrukci odmocnin můžeme snadno a elegantně provést i jinak (viz obr. 5a); v tomto případě k žádnému „narušení předchozích čar" nedochází. Laskavý čtenář tohoto článku si jistě uvědomí, že je možno vymyslet řadu dalších postupů. V odmocninovém šneku můžeme např. vynechat konstrukce čísel $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{16}$, neboť jsou zbytečné; pro sestrojení $\sqrt{5}$, resp. $\sqrt{10}$, resp. $\sqrt{17}$ se využije již sestrojená $\sqrt{3}$, resp. $\sqrt{8}$, resp. $\sqrt{15}$ a $\sqrt{2}$ — v tomto případě by obrázek „narušila" až konstrukce čísla $\sqrt{21}$ (viz obr. 5b).



Obr. 5a



Obr. 5b

Důležitějším problémem, než proč se Theodóros *zastavil* u čísla 17, je otázka, jak byla řeckými mysliteli iracionalita čísel $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \cdots$ dokazována.

Výše uvedený úryvek z Platónova dialogu *Theaitétos* naznačuje, že Theodóros dokazoval nesouměřitelnost stran čtverců o obsahu tří, pěti, šesti, ..., sedmnácti jednotek se stranou jednotkového čtverce (jednotkovou úsečkou) postupně, tj. pro každý případ zvlášť. Může to znamenat, že v té době ještě nebyl k disposici obecný důkaz. Není však vyloučeno, že Theodóros tento postup zvolil z metodických důvodů; problematiku nesouměřitelnosti veličin bylo třeba dobře osvětlit a pochopit a případně ukázat cestu k obecnému důkazu.

Pokusme se navrhnout zcela elementární postup, jak mohly být tyto důkazy prováděny.

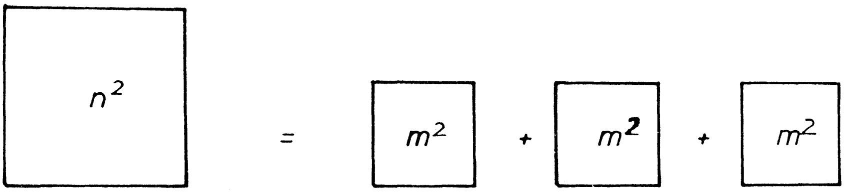
Uvažujme stranu a jednotkového čtverce (tj. $a = 1$) a stranu b čtverce o trojnásobném obsahu (tj. $b = \sqrt{3}$). Předpokládejme, že jsou souměřitelné a že jejich největší společnou mírou je úsečka c. Tedy $a = mc$, $b = nc$, kde

m, n jsou přirozená čísla; protože je úsečka c největší společnou mírou úseček a, b, jsou čísla m, n nesoudělná.

Čtverec o obsahu 1 je tedy sestaven z m^2 malých čtverečků, čtverec o obsahu 3 z n^2 malých čtverečků. Na oba čtverce se nyní můžeme dívat jako na čtvercová figurální čísla; zjevně platí vztah

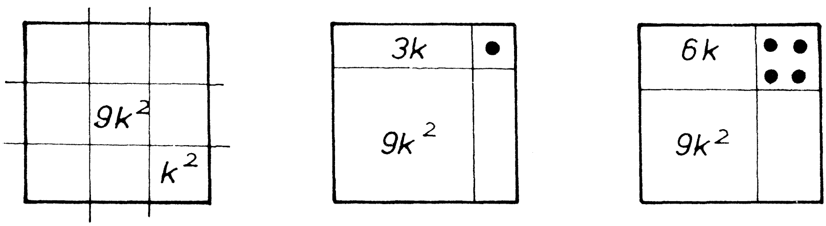
$$n^2 = 3 \cdot m^2 = m^2 + m^2 + m^2 ,$$

který můžeme snadno znázornit obrázkem (viz obr. 6).



Obr. 6

Ihned je vidět, že číslo n^2 je dělitelné třemi. Uvažujme, jak toto čtvercové číslo vypadá; jsou tři možnosti — v algebraické řeči $n = 3k$, $n = 3k + 1$, $n = 3k + 2$ (viz obr. 7).



Obr. 7

Druhá a třetí možnost zřejmě nepadá v úvahu; čtvercové číslo n^2 v těchto případech není dělitelné třemi, neboť čísla 1, resp. 4 nejsou dělitelná třemi (viz pravý horní „roh" čtvercového čísla). Ukázali jsme tedy, že číslo n musí být dělitelné třemi. Čtvercové číslo n^2 je tedy možno třemi svislými a třemi vodorovnými čarami rozdělit na devět menších čtvercových čísel k^2; odtud vyplývá, že čtvercové číslo m^2 je součtem tří čtvercových čísel k^2,

$$m^2 = 3 \cdot k^2 = k^2 + k^2 + k^2 .$$

Zopakujeme-li celou úvahu, zjistíme, že i číslo m je dělitelné třemi. Dospěli jsme ke sporu s nesoudělností čísel m, n. Strana čtverce o obsahu 3 tedy není souměřitelná se stranou jednotkového čtverce.

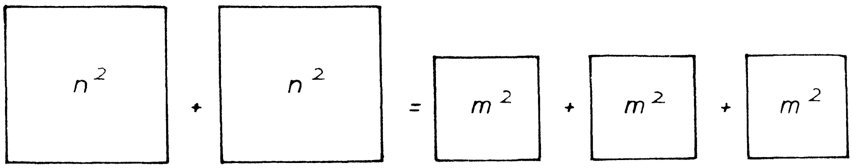
Obdobný důkaz je možno provést i pro čtverec o obsahu pěti, šesti, ..., sedmnácti, ... plošných jednotek. Uvědomme si, že na patřičném místě je v těchto důkazech třeba prověřit, že čísla 1, 4, 9, 16 nejsou dělitelná pěti, čísla 1, 4, 9, 16, 25 nejsou dělitelná šesti, ..., čísla $1^2, 2^2, \cdots, 16^2$ nejsou dělitelná sedmnácti atd.

Zdá se, že právě takovýmto mnohonásobným prověřováním faktů a „ohledáváním situace" byly postupně nalézány obecné důkazy.

Zajímavým problémem, který jistě řecké matematiky také trápil, je otázka souměřitelnosti či nesouměřitelnosti iracionalit. Výše uvedený postup je možno snadno modifikovat; dospějeme tak k dalším zajímavým výsledkům.

Dokažme např., že strany a, b dvou čtverců, které mají obsahy rovné dvěma, resp. třem plošným jednotkám (tj. $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{3}$), nejsou souměřitelné.

Předpokládejme, že souměřitelné jsou; tedy $a = mc$, $b = nc$, kde c je největší společná míra úseček a, b a m, n jsou nesoudělná přirozená čísla. Porovnáním obsahů obou čtverců získáme vztah $2n^2 = 3m^2$ (viz obr. 8).



Obr. 8

Snadno nahlédneme, že čtvercové číslo m^2 je sudé. Z předchozích úvah víme, že i m je sudé, tj. $m = 2k$. Každé ze čtvercových čísel m^2 je tedy složeno ze čtyř čtvercových čísel k^2. Číslo n^2 je proto rovno součtu šesti čtvercových čísel k^2; číslo n^2 a tedy i číslo n je sudé. Opět jsme se dostali ke sporu s předpokladem nesoudělnosti čísel m, n. Úsečky a, b jsou proto nesouměřitelné.

Podobným způsobem můžeme bez užití hlubších matematických poznatků dokázat nesouměřitelnost dalších iracionalit.

Povšimněme si, že v uvedené ukázce z dialogu *Theaitétos* je pevně zvolena jednotka (*stopa*). Neuvažuje se zde tedy obecně o souměřitelnosti či nesouměřitelnosti úseček, ale o souměřitelnosti či nesouměřitelnosti nějaké úsečky s jednotkovou úsečkou. Množina všech úseček se při tomto přístupu rozdělí na dvě podmnožiny — úsečky racionálních délek a úsečky iracionálních délek.

Na závěr tohoto odstavce poznamenejme, že se v Eukleidových *Základech* setkáváme i s dalšími dvojicemi nesouměřitelných úseček (kromě strany a úhlopříčky čtverce či pětiúhelníku). Např. ve třinácté knize je to strana pravidelného pětiúhelníku, resp. desetiúhelníku a poloměr kružnice opsané, dále hrana libovolného pravidelného mnohostěnu (platónské těleso) a poloměr opsané sféry.

23. Teorie proporcí

Objev nesouměřitelnosti úseček vedl k tzv. *první krizi matematiky*. Východiskem z této krize se stala *řecká geometrická algebra* (viz [Be], str. 63–69, 72–73) ve spojení s *Eudoxovou teorií proporcí*. Řecká geometrická algebra prostupuje celé Eukleidovy *Základy*, Eudoxova teorie proporcí (teorie poměrů a úměr geometrických veličin) je zpracována v jejich páté knize. Tato kniha začíná 18 definicemi, za nimiž následuje 25 vět. Uveďme nejprve všech 18 definic (v překladu Františka Servíta — viz [20], str. 68–69) a objasněme problematiku v nich obsaženou. Přiblížíme si tak duch Eukleidova díla i jeho český překlad. Současně si uvědomíme, že dá hodně práce porozumět matematice, která je psaná jiným stylem a téměř bez užití symboliky.

1. *Dílem veličiny větší jest veličina menší, když veličinu větší doměřuje.*
2. *Násobkem pak veličiny menší jest větší, když ji menší doměřuje.*

V prvních dvou definicích je zaveden pojem *násobku* a *dílu* veličiny; je uvažován vztah $na = b$, kde n je přirozené číslo. Znovu připomeňme, že veličinami jsou míněny veličiny geometrické, tj. délky, obsahy a objemy.

3. *Poměrem jest nějaký vztah dvou stejnorodých veličin dle jejich kolikosti.*
4. *Pravíme, že k sobě mají poměr veličiny, které násobeny jsouce mohou býti jedna druhé větší.*

Ve třetí definici je zaveden *poměr* $a : b$ dvou stejnorodých veličin a, b. Poměr veličin a, b je možno vytvořit jen tehdy, mají-li tyto veličiny stejnou dimenzi (obě jsou buď délkami, obsahy nebo objemy); jde o důsledek tzv. *principu homogenity*, který byl položen do základů řecké geometrické algebry (viz [Be], str. 63). Čtvrtá definice navíc říká, že poměr mohou tvořit jen takové veličiny a, b, ke kterým existují přirozená čísla m, n taková, že $na > b$ a $mb > a$; tato důležitá podmínka vylučuje z dalších úvah nekonečně malé veličiny.

Poznamenejme, že v Eukleidových *Základech* se až na jedinou výjimku nekonečně malé veličiny nevyskytují (ačkoliv úvodní axiomy, které jsou shrnuty v první knize, je a priori z úvah nevylučují). Tou jedinou výjimkou je „úhel“ sevřený tečnou ke kružnici a kružnicí samou, který je „menší než jakýkoli ostrý úhel“ ([20], str. 43–44 — třetí kniha, 16. věta).

Podmínka uvedená ve čtvrté definici je známa jako *axióm Archimédův* nebo *Eudoxův-Archimédův*. Archimédes tento požadavek, který připisuje Eudoxovi, zformuloval jednak ve svém spise *Kvadratura paraboly* (pro obsahy), jednak v práci *O kouli a válci* (pro délky, obsahy a objemy):

Větší ze dvou daných veličin, ať jsou to úsečky, plochy nebo tělesa, přesahuje menší o jistý rozdíl, který, když je dostatečně vynásoben, je větší než každá z obou daných veličin. (viz [66], str. 43; viz [A], str. 158)

To znamená, že např. dvě úsečky se nemohou lišit pouze o nekonečně malou veličinu. Tento axiom do jisté míry odráží dřívější úvahy o tom, co to vlastně úsečka je, z čeho se skládá, zda je do nekonečna dělitelná atd.

Vraťme se však k definicím páté knihy *Základů*.

5. *Pravíme, že jsou veličiny v témž poměru k sobě, první ke druhé, a třetí ke čtvrté, když stejné násobky veličiny první a třetí nad stejné násobky druhé a čtvrté jsou dle jakékoli násobnosti buď jeden nad druhý zároveň větší buď zároveň stejné buď zároveň menší, jsouce vzaty ve vzájemném pořádku.*
6. *Veličiny mající týž poměr nazýváme úměrou (úměrnými).*

Pátá a šestá definice zavádějí rovnost dvou poměrů, neboli *úměru*. Pomocí současné matematické řeči a symboliky vyjádříme předchozí dvě definice takto: Poměry $a : b$ a $c : d$ jsou stejné (tvoří úměru), tj. $a : b = c : d$, jestliže pro libovolně zvolená přirozená čísla m, n platí:

$$na < mb \iff nc < md \ ,$$

$$na > mb \iff nc > md \ ,$$

$$na = mb \iff nc = md \ .$$

Rozeberme nyní problematiku úměry podrobněji. Uvažujme poměr $a : b$. Množina všech dvojic přirozených čísel (m, n) se rozpadne na tři disjunktní podmnožiny:

$$X = \{(m, n)\,;\ na < mb\} \ ,$$

$$Y = \{(m, n)\,;\ na > mb\} \ ,$$

$$Z = \{(m, n)\,;\ na = mb\} \ .$$

Snadno prověříme, že pro dvojici (k, l) přirozených čísel platí následující tvrzení:

Je-li $(m, n) \in X$, tj. $na < mb$, a $\frac{k}{l} > \frac{m}{n}$, pak je $la < kb$, tj. $(k, l) \in X$.

Je-li $(m, n) \in Y$, tj. $na > mb$, a $\frac{k}{l} < \frac{m}{n}$, pak je $la > kb$, tj. $(k, l) \in Y$.

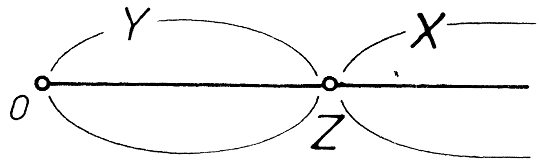
Je-li $(m, n) \in Z$, tj. $na = mb$, a $\frac{k}{l} > \frac{m}{n}$, pak je $la < kb$, tj. $(k, l) \in X$.

Je-li $(m, n) \in Z$, tj. $na = mb$, a $\frac{k}{l} < \frac{m}{n}$, pak je $la > kb$, tj. $(k, l) \in Y$.

Bez velké újmy na přesnosti můžeme považovat množiny X, Y, Z za podmnožiny množiny všech kladných racionálních čísel (všechny dvojice (m, n) reprezentující stejné racionální číslo leží totiž vždy v jediné z množin X, Y, Z). Z předchozích úvah dostáváme následující zjištění:

- každé kladné racionální číslo leží v některé z množin X, Y, Z ;
- množina X obsahuje s každým číslem x i všechna větší kladná racionální čísla;
- množina Y obsahuje s každým číslem y i všechna menší kladná racionální čísla;
- pro každé $y \in Y$ a každé $x \in X$ je $y < x$;
- množina Z je nejvýše jednoprvková;
- veličiny a, b jsou nesouměřitelné, právě když je množina Z prázdná.

Ukázali jsme, že poměr $a : b$ definuje rozklad množiny kladných racionálních čísel na disjunktní množiny X, Y, Z (viz obr. 9). Poměry $a : b$ a $c : d$ jsou tedy stejné (tvoří úměru), jestliže jim odpovídají (ve výše uvedeném smyslu) stejné rozklady.



Obr. 9

Věnujme nyní pozornost další definici.

7. *Když ze stejných násobků násobek veličiny první jest větší než násobek druhé, násobek třetí však není větší než násobek čtvrté, tehdy pravíme, že první ke druhé jest v poměru větším než třetí ke čtvrté.*

Předchozí definice dává možnost srovnání poměrů podle velikosti: existují-li přirozená čísla m, n taková, že $na > mb$ a $nc \leqq md$, pak budeme psát $a : b > c : d$.

Jsou-li a, b souměřitelné úsečky, tj. $a = mc$, $b = nc$ (úsečka c je jejich společnou mírou), je $na = mb$ a $\frac{m}{n} \in Z$; poměr $a : b$ je zřejmě rozumné reprezentovat poměrem $m : n$, tj. racionálním číslem $\frac{m}{n}$.

Jsou-li a, b nesouměřitelné úsečky, odpovídá poměru $a : b$ disjunktní rozklad množiny kladných reálných čísel na množiny X, Y. Uvažujme racionální číslo $\frac{m}{n} \in Y$. Snadno ukážeme, že pro libovolnou úsečku c je podle sedmé definice $a : b > mc : nc$ (je totiž $na > mb$ a $n \cdot mc = m \cdot nc$). Poměr $a : b$ je tedy větší než všechna racionální čísla z množiny Y; podobně ukážeme, že je menší než všechna racionální čísla z množiny X.

Uvědomme si, jak sedmá definice krásně koresponduje s definicí rovnosti poměrů. Nerovnost $a : b > c : d$ platí právě tehdy, když existuje racionální číslo $\frac{m}{n}$, pro které je

$$a : b > \frac{m}{n} \geqq c : d$$

(příslušné množiny X, Y nejsou pro poměry $a : b$, $c : d$ stejné, liší se alespoň v prvku $\frac{m}{n}$).

Objasněme celou záležitost ještě jednou, ale z trochu jiného pohledu. Předpokládejme, že veličiny a, b jsou úsečky a že $b = 1$, tj. úsečka b je jednotkou délky.

Je-li úsečka a s úsečkou $b = 1$ souměřitelná, tj. $na = m \cdot 1$, pak je zřejmě $a = \frac{m \cdot 1}{n}$, tj. racionální číslo $\frac{m}{n} \in Z$ je velikostí úsečky a.

Je-li úsečka a s úsečkou $b = 1$ nesouměřitelná, je množina Z prázdná. Jestliže je $\frac{m}{n} \in X$, tj. $m \cdot 1 > na$, potom je zřejmě $\frac{m \cdot 1}{n} > a$, tj. úsečka a má délku menší než $\frac{m}{n}$. Je-li $\frac{k}{l} \in Y$, tj. $k \cdot 1 < la$, potom je zřejmě $\frac{k \cdot 1}{l} < a$, tj. úsečka a má délku větší než $\frac{k}{l}$. Pro každé $x \in X, y \in Y$ je tedy $y < a < x$. Iracionální délka úsečky a je z obou stran „vymezena“ množinami X, Y racionálních čísel; odpovídá „rozkladu“ množiny všech kladných racionálních čísel na dvě disjunktní podmnožiny X, Y.

Veličiny $a, b = 1$ jsou tedy souměřitelné, resp. nesouměřitelné, právě když má úsečka a racionální, resp. iracionální délku.

S určitou mírou nadsázky můžeme říci, že pátá, šestá a sedmá definice zavádějí (kladná) reálná čísla. Myšlenky Eudoxovy teorie proporcí jsou velmi blízké postupu, který ke konstrukci reálných čísel použil ve druhé polovině 19. století německý matematik Richard Dedekind.

Na první pohled je podivné, jak Řekové přišli na takovou definici rovnosti poměrů (6. definice). Zamyslíme-li se nad touto otázkou důkladněji, vidíme, že to bylo patrně zcela přirozené.

Předpokládejme, že a, b jsou úsečky. Je zřejmé, že pro různé dvojice přirozených čísel m, n nastane jedna ze tří možností:

$$na > mb\,, \qquad na = mb\,, \qquad na < mb\,.$$

Pýthagorejci byli zprvu přesvědčeni, že každé dvě úsečky jsou souměřitelné, tj. že existuje dvojice přirozených čísel m, n, pro kterou je $na = mb$. Po objevu nesouměřitelnosti bylo jasné, že pro nesouměřitelné úsečky a, b jsou jen dvě možnosti, že se (v naší řeči) množina všech dvojic přirozených čísel rozpadne na dvě disjunktní podmnožiny

$$X = \{(m, n)\ ;\ na < mb\}, \qquad Y = \{(m, n)\ ;\ na > mb\}\ ,$$

které poměr $a : b$ vymezují. Již víme, že bude-li b jednotkovou úsečkou, pak délka úsečky a bude menší než každé racionální číslo $x \in X$ a větší než každé racionální číslo $y \in Y$. Připomeňme, že již pýthagorejci znali odhad

$$\frac{7}{5} < \sqrt{2} < \frac{17}{12}\,.$$

(Později např. Archimédes (287–212) v práci *O měření kruhu* užíval nerovností $\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$ při výpočtu odhadu čísla π: $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ — viz [A], str. 233–237.)

A právě odtud pramení Eudoxova myšlenka rovnosti poměrů: poměry $a : b$, $c : d$ se rovnají, právě když odpovídající množiny X, Y jsou stejné. Budeme-li např. uvažovat úměru $a : b = c : b$, kde b je jednotková úsečka, budou velikosti úseček a, c omezeny shora stejnou množinou X a zdola stejnou množinou Y racionálních čísel. Eudoxova definice úměry tak do jisté míry vyrůstá z původního pýthagorejského pojetí veličin, ale výrazně je překračuje.

Poznamenejme ještě, že pro úsečky a, b, c, d bylo možno zavést rovnost poměrů $a : b$, $c : d$ pomocí rovnosti obsahů ad, bc, tj. rovností $ad = bc$. Jsou-li však a, b, c, d obsahy, resp. objemy (tj. veličiny druhé, resp. třetí dimenze), pak součiny ad, bc nemají (ve smyslu řecké geometrické algebry) geometrický význam (mají totiž vyšší dimenze). Navíc by toto pojetí nedávalo zjevnou možnost vymezení iracionálního čísla příslušnými racionálními odhady shora a zdola.

Pokračujme dále ve výčtu definic páté knihy *Základů.*

8. *Úměra o trojím členství jest nejmenší.*
9. *Když jsou tři veličiny úměrou, pravíme, že se má první ke třetí jako dvojmoc první ke dvojmoci druhé.*
10. *Když pak jsou čtyři veličiny (spojitě) úměrou, první má se ke čtvrté jako trojmoc první k trojmoci druhé, a tak stále po řadě týmž způsobem, jakoukoli máme úměru.*

Osmá a devátá definice se týkají úměry $a : b = b : c$. Z rovnosti $a : b = b : c$ ihned vyplývá rovnost $b = \sqrt{ac}$, tj. veličina b je geometrickým průměrem veličin a, b (někdy se zaváděl termín *střední geometrická úměrná*); dále je $c = \frac{b^2}{a}$, veličiny a, b, c tvoří geometrickou posloupnost s kvocientem $\frac{b}{a}$, navíc $a : c = a^2 : b^2$.

Desátá definice zavádí úměru $a : b = b : c = c : d$. Veličina b je geometrickým průměrem veličin a, c, veličina c geometrickým průměrem veličin b, d, posloupnost a, b, c, d je geometrická s kvocientem $\frac{a}{b}$, navíc je $a : d = a^3 : b^3$. V desáté definici se uvažuje se i o úměrách, které mají více členů.

11. *Pravíme, že souhlasnými veličinami (členy) jsou přední s předními a zadní se zadními.*
12. *Střídavým poměrem je sdružení členu předního s předním a zadního se zadním.*

Nechť $a, b; c, d$ jsou dvě dvojice veličin, resp. nechť $a : b = c : d$ je úměra. Veličiny a, c, resp. b, d se nazývají *souhlasné.* Poměry $a : c$, $b : d$ se nazývají *střídavé.* O střídavém poměru se hovoří v 16. větě páté knihy *Základů* (viz dále).

13. *Zpětným poměrem je sdružení zadního na místě předním s předním na místě zadním.*
14. *Součetným poměrem je sdružení předního a spolu zadního se zadním samým.*
15. *Rozdílovým poměrem jest sdružení rozdílu, oč přední člen je větší zadního, se zadním samým.*
16. *Zvratným poměrem je sdružení členu prvního s rozdílem, oč přední člen je větší zadního.*

Nechť a, b jsou dvě veličiny, resp. nechť $a : b$ je poměr. Řekneme, že poměr $b : a$ je *zpětný*, poměr $(a + b) : b$ *součetný*, poměr $(a - b) : b$ *rozdílový*, poměr $a : (a - b)$ *zvratný.* O součetných, rozdílových a zvratných poměrech pojednává 17. – 19. věta (viz dále).

17. *Stejnořadným poměrem jest, jest-li více členův a jiné jim počtem rovné a berou-li se po dvou v témž poměru, když se má jako v prvních členech*

první k poslednímu, tak ve druhých členech první k poslednímu; nebo jinak: sdružení krajních s vypuštěním středních.

18. *Nestejnořadným poměrem jest, když jsou členy a jiné jim počtem rovné a jako v prvních členech má se přední k zadnímu, tak ve druhých členech přední k zadnímu a jako v prvních členech zadní k jinému, tak ve druhých členech jiný ku přednímu.*

Poslední dvě definice nejsou příliš srozumitelné. Zdá se, že zde došlo k mírnému zmatení pojmů *poměr* a *úměra* a k prolnutí definice a tvrzení. O stejnořadných a nestejnořadných poměrech a úměrách viz dále 22. – 23. věta.

Ve větách, které po definicích následují, jsou popsány nejrůznější vztahy mezi poměry a úměrami. Uveďme všech 25 vět z páté knihy *Základů*; zapišme je však jen stručně pomocí naší současné matematické řeči a symboliky (viz [20], str. 70–83). Písmena $a, b, c, d, \cdots$ značí *veličiny*, písmena $m, n, \cdots$ přirozená čísla. O problematice takového přepisu viz např. [Ba].

1. *Jestliže* $a_1 = na'_1, \cdots, a_k = na'_k$, *potom* $a_1 + \cdots + a_k = n \cdot (a'_1 + \cdots + a'_k)$.
2. *Jestliže* $a = mb$, $c = md$, $e = nb$, $f = nd$, *potom* $a + e = (m+n)b$, $c + f = (m+n)d$.
3. *Jestliže* $a = nb$, $c = nd$, *potom* $ma = (mn)b$, $mc = (mn)d$.
4. *Jestliže* $a : b = c : d$, *potom* $ma : nb = mc : nd$.
5. *Jestliže* $a + a' = n(b + b')$, $a' = nb'$, *potom* $a = nb$.
6. *Jestliže* $a + a' = nc$, $b + b' = nd$, $a' = mc$, $b' = md$, *potom* $a = c$, $b = d$ *nebo* $a = kc$, $b = kd$.
7. *Jestliže* $a = b$, *potom* $a : c = b : c$, $c : a = c : b$.
8. *Jestliže* $a > b$, *potom* $a : c > b : c$, $c : b > c : a$.
9. *Jestliže* $a : c = b : c$, *potom* $a = b$. *Jestliže* $c : a = c : b$, *potom* $a = b$.
10. *Jestliže* $a : c > b : c$, *potom* $a > b$. *Jestliže* $c : b > c : a$, *potom* $b < a$.
11. *Jestliže* $a : b = c : d$, $e : f = c : d$, *potom* $a : b = e : f$.
12. *Jestliže* $a : b = c : d = e : f$, *potom* $a : b = (a + c + e) : (b + d + f)$.
13. *Jestliže* $a : b = c : d$, $c : d > e : f$, *potom* $a : b > e : f$.
14. *Nechť* $a : b = c : d$. *Jestliže* $a > c$, *potom* $b > d$. *Jestliže* $a = c$, *potom* $b = d$. *Jestliže* $a < c$, *potom* $b < d$.
15. *Platí rovnost* $a : b = na : nb$.
16. *Jestliže* $a : b = c : d$, *potom* $a : c = b : d$.
17. *Jestliže* $(a + b) : b = (c + d) : d$, *potom* $a : b = c : d$.
18. *Jestliže* $(a - b) : b = (c - d) : d$, *potom* $a : b = c : d$.
19. *Jestliže* $(a + b) : (c + d) = a : c$, *potom* $b : d = a : c$.
20. *Nechť pro veličiny* a, b, c, d, e, f *je* $a : b = d : e$, $b : c = e : f$. *Jestliže* $a > c$, *pak* $d > f$. *Jestliže* $a = c$, *pak* $d = f$. *Jestliže* $a < c$, *pak* $d < f$.
21. *Nechť* $a : b = e : f$, $b : c = d : e$. *Jestliže* $a > c$, *pak* $d > f$. *Jestliže* $a < c$, *pak* $d < f$. *Jestliže* $a = c$, *pak* $d = f$.
22. *Jestliže* $a : b = d : e$, $b : c = e : f$, *pak* $a : c = d : f$.
23. *Jestliže* $a : b = e : f$, $b : c = d : e$, *pak* $a : c = d : f$.
24. *Jestliže* $a : b = c : d$, $e : b = f : d$, *pak* $(a + e) : b = (c + f) : d$.

25. *Nechť* $a : b = c : d$. *Jestliže* a *je největší a* d *nejmenší z veličin* a, b, c, d , *pak* $a + d > b + c$.

Povšimněme si, že v několika prvních tvrzeních jde jen o násobky veličin.

Uveďme ještě pro zajímavost 17., 22. a 23. větu v českém překladu F. Servíta.

17. *Když jsou veličiny součetně úměrou, budou též rozdílově úměrou.*

22. *Když jest několik veličin a jiné jim počtem rovné po dvou brány jsouce také v témž poměru, též stejnořadně budou v témž poměru.*

23. *Když jsou tři veličiny a jiné jim počtem rovně po dvou brány jsouce v témž poměru a mají úměru nestejnořadnou, také stejnořadně v témž poměru budou.*

Ukázali jsme, že Eudoxova teorie proporcí (poměrů a úměr) představovala jakousi teorii reálných čísel. Tato teorie byla nutným předpokladem pro obecné studium podobnosti geometrických útvarů; základní vlastností podobnosti je totiž rovnost poměrů odpovídajících si úseček. Po objevu nesouměřitelnosti již nebylo možno vystačit s pýthagorejskou definicí úměry aritmetických veličin (přirozených čísel). Eukleidés si byl dobře vědom významu Eudoxovy teorie pro podobnost. Vždyť partie o podobnosti je v *Základech* vyšetřována až v šesté knize, hned za knihou o teorii poměrů a úměr.

Exaktní teorie reálných čísel byla vybudována až ve druhé polovině 19. století. Už jsme se zmínili, že německý matematik Richard Dedekind (1831–1916) vytvořil tzv. *teorii řezů*, která sleduje Eudoxovu myšlenku. Dedekind studoval v Göttingen, kde byl žákem K. F. Gausse (1777–1855) a P. G. L. Dirichleta (1805–1859), výrazně byl ovlivněn B. Riemannem (1826–1866), jehož spisy vydával. V letech 1858–1862 působil na polytechnice v Curychu, potom na technice v Braunschweigu. Svou teorii řezů publikoval roku 1872 v práci *Stetigkeit und Irrationale Zahlen* [D]. V úvodu poznamenal, že sepsal své výsledky z podzimu 1858, kdy si exaktní budování teorie reálných čísel rozmýšlel v souvislosti se svými přednáškami v Curychu. Velmi významná pro rozšíření moderního pojetí analýzy a matematiky vůbec byla i jeho další práce *Was sind und was sollen die Zahlen* z roku 1882 (viz [D]).

Německý matematik Rudolf Lipschitz (1832–1903) byl jedním z prvních matematiků, kteří dobře pochopili Dedekindovu teorii řezů a navíc si uvědomili i širší souvislosti. Zajímavá je korespondence Lipschitze s Dedekindem, která se tohoto problému týká. Lipschitz se tázal, co vlastně Dedekind udělal nového ve srovnání se starými řeckými matematiky, když jeho teorie řezů se od Eudoxovy teorie proporcí liší jen formálně. Dedekind poctivě přiznal, že základní myšlenka je stejná; podotknul však, že podstatným rozdílem je to, že jeho teorie řezů zaručuje spojitost.

Řečtí matematici dospěli k pochopení nesouměřitelnosti a k existenci iracionalit; jednotlivé iracionality dokázali (v dnešní řeči) „zařadit na správné místo mezi racionální čísla“. K jasné představě o tom, že naopak každé rozdělení množiny kladných racionálních čísel ve výše uvedeném smyslu definuje iracionalitu, však řecká matematika nedospěla. Navíc představu o tom, kolik vlastně iracionalit je, přinesla až poslední třetina 19. století; teprve Georg Cantor

(1845–1918) ukázal, že reálných čísel je „více“ než přirozených a že racionálních je „stejně mnoho“ jako přirozených. Dalším podstatným rozdílem je to, že Řekové nevybudovali aritmetiku poměrů (viz výše uvedených 25 vět); Dedekind naopak pro své řezy definuje aritmetické operace a pracuje s nimi.

Poznamenejme ještě, že dalším tvůrcem exaktní teorie reálných čísel byl právě G. Cantor. Při popisu reálných čísel využil svou teorii množin; reálnými čísly jsou v jeho teorii třídy navzájem ekvivalentních *fundamentálních posloupností* racionálních čísel. Teorii reálných čísel exaktně budoval ve svých přednáškách i Karl Weierstrass (1815–1897), který se velmi podstatně angažoval v procesu zpřesňování matematické analýzy a matematiky vůbec (tzv. aritmetizace matematiky); reálná čísla reprezentoval desetinnými číselnými řadami.

Systematický výklad teorie reálných čísel nalezneme např. v klasických knihách Oskara Perrona (1880–1975) *Irrationalzahlen* (2. vydání, Berlin 1939) nebo Edmunda Landaua (1877–1938) *Grundlagen der Analysis* (Lipsko 1930). Dále zasluhuje pozornost např. pěkná knížka I. Nivena [N].

V české matematické literatuře se můžeme s Dedekindovou teorií řezů seznámit v klasické učebnici *Diferenciální počet* I od Vojtěcha Jarníka, v knize Karla Hruši *Elementární aritmetika* (Přírodovědecké vydavatelství, Praha 1953). Cantorovu teorii reálných čísel lze nalézt např. v knížce Eduarda Čecha *Čísla a početní výkony* (SNTL, Praha 1954). Z novější literatury je možno pro seznámení se s budováním teorie reálných čísel vřele doporučit druhý díl knihy *Algebra a teoretická aritmetika*, který napsal Tibor Šalát a kolektiv (ALFA + SNTL, Bratislava a Praha 1986). Z dalších titulů upozorňujeme na velmi pěknou a obsáhlou knihu autorského kolektivu H.-D. Ebbinghause (viz [E]), ve které je mnoho historických poznámek a bibliografických odkazů.

Zakončeme tento článek citáty klasiků:

Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.[9]
Leopold Kronecker

Die Zahlen sind freie Schöpfungen des menschlichen Geistes, sie dienen als ein Mittel, um die Verschiedenheit der Dinge leichter und schärfer aufzufassen.[10]
Richard Dedekind

Zerfallen alle Punkte der Geraden in zwei Klassen von der Art, daß jeder Punkt der ersten Klasse links von jedem Punkt der zweiten Klasse liegt, so existiert ein und nur ein Punkt, welcher diese Einteilung aller Punkte in zwei Klassen, diese Zerschneidung der Geraden in zwei Stücke, hervorbringt.[11]
Richard Dedekind

[9] Celá čísla vytvořil milý Bůh, všechno ostatní je lidským dílem.

[10] Čísla jsou svobodným výtvorem lidského ducha; slouží jako prostředek pro snadnější a ostřejší pochopení rozmanitosti věcí.

[11] Rozdělíme-li všechny body přímky do dvou tříd tak, aby každý bod první třídy ležel vlevo od každého bodu druhé třídy, pak existuje právě jediný bod, který toto rozdělení všech bodů do dvou tříd, resp. rozříznutí přímky na dva kusy vytváří.

LITERATURA

[A] Heath, T. L., Kliem, F. (ed.), *Archimedes' Werke*, Verlag von O. Häring, Berlin, 1914.

[Ar] Aristotelés, *Fyzika*, Petr Rezek, Praha, 1996, přeložil a poznámkami opatřil Antonín Kříž.

[Ba] Bašmakova, I. G., *O roli interpretacii v istorii matematiki*, Istoriko matematičeskie issledovanija XXX (1986), 182–194.

[Be] Bečvář, J., *Hrdinský věk řecké matematiky*, HISTORIE MATEMATIKY I, JČMF, Brno 1994, 20–107, Sborník z 1. semináře pro vyučující na středních školách (Jevíčko, 1993).

[D] Dedekind, R., *Was sind und was sollen die Zahlen? Stetigkeit und Irrationale Zahlen*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1967.

[Da] Davis, P. J., *Filosofující kočka z Pembroke*, Nakladatelství Lidové noviny, Praha, 1994, z anglického originálu Thomas Gray, Philosopher Cat přeložil Jiří Fiala.

[E] Ebbinghaus, H.-D., et. al., *Zahlen*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York London Paris Tokyo Hong Kong Barcelona Budapest, 1992, 3. vydání (předchozí vydání 1983, 1988). Anglická verze: *Numbers*, 1. vyd. 1991, 3. vyd. 1995.

[HB] Hilbert, D., Bernays P. J., *Grundlagen der Mathematik I, II*, Springer-Verlag, Berlin, 1934, 1939.

[N] Niven, I., *Numbers: Rational and Irrational*, Random House, New York, 1961, ruský překlad: Ajven Niven, *Čisla racional'nye i irracional'nye*, MIR, Moskva, 1966.

[Pa] Patočka J., *Nejstarší řecká filosofie. Přednášky z antické filosofie*, Vyšehrad, Praha, 1996.

[P1] Platón, *Theaitétos*, ISE, OIKOYMENH, Praha, 1995, z řeckého originálu přeložil František Novotný. Druhé vydání (první vydání, Praha 1933).

[P2] Platón, *Parmenidés*, OIKOYMENH, Praha, 1996, z řeckého originálu přeložil František Novotný. Druhé vydání (první vydání, Praha 1936).

[W] Weyl, H., *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*, Handbuch der Philosophie II, München-Berlin 1927.

Achilles se želvou na cestě do Jevíčka