Jan Vilém Pexider (1874–1914)

Ivan Netuka
Pexiderova rovnice

In: Jindřich Bečvář (editor): Jan Vilém Pexider (1874–1914). (Czech). Praha: Prometheus, 1997. pp. 51–60.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401019

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

PEXIDEROVA ROVNICE

Ivan Netuka

1. Atmosférický tlak

Tento odstavec má motivační charakter. Naším cílem je odvodit rovnici pro závislost atmosférického tlaku na výšce od povrchu Země.

Závislost studujeme od výšky $h_0 = 0$, v níž hodnota tlaku je rovna p_0. Pro $h \geqq 0$ znamená $p(h)$ hodnotu tlaku ve výšce h. Z fyzikálních důvodů je rozumné předpokládat, že p je kladná nerostoucí funkce na $\langle 0, \infty)$ a že (pro $h \geqq 0$, $k \geqq 0$) je tlak ve výšce $h + k$ úměrný tlaku ve výšce h. Z těchto předpokladů plyne, že existuje funkce $q : \langle 0, \infty) \to (0, 1\rangle$ taková, že pro každé $h \geqq 0$ a každé $k \geqq 0$ platí

$$p(h + k) = q(k) \cdot p(h) \,. \tag{1}$$

Získali jsme tedy *jednu* rovnici, v níž vystupují *dvě* neznámé funkce p, q. V odstavci 4 uvidíme, že odtud plyne (*aniž bychom* a priori *předpokládali např. spojitost či diferencovatelnost*) tento výsledek: existuje $\gamma \geqq 0$ tak, že $p(h) = p_0 e^{-\gamma h}$ pro každé $h \geqq 0$; viz [KS], [S].

S ohledem na další výklad definujme $f = \log p$, $h = \log q$ (takže $h \geqq 0$; přitom log znamená přirozený logaritmus). Podle (1) tedy funkce f, h splňují rovnici

$$f(x + y) = f(x) + h(y) \,, \quad x \geqq 0 \,, y \geqq 0 \,.$$

Toto je speciální případ rovnice typu

$$f(x + y) = g(x) + h(y) \,, \tag{2}$$

funkcionální rovnice pro *tři* neznámé funkce. Rovnice (2) se nazývá *Pexiderova rovnice*. Je pozoruhodné, že tato *jedna* rovnice skutečně *tři* neznámé funkce určuje.

Rovnici (2), a také příbuzné funkcionální rovnice

$$\begin{aligned} f(x + y) &= g(x) \cdot h(y) \,, \\ f(x \cdot y) &= g(x) + h(y) \,, \\ f(x \cdot y) &= g(x) \cdot h(y) \,, \quad x, y \in \mathbb{R} \,, \end{aligned}$$

vyšetřoval Pexider v práci [P12]. Termín Pexiderova rovnice, příp. rovnice Pexiderova typu, se vžil; viz např. [K], [AD]. Za zmínku stojí, že se Pexiderovo jméno vyskytuje i v nedávno publikovaných matematických pracích. Např. v databázi MathSci (referativního časopisu Mathematical Reviews) se pod heslem *Pexider* najde 60 citací, z nichž 23 je z období po r. 1990.

Poznamenejme ještě, že funkcionálním rovnicím věnoval J. V. Pexider práce [P4], [P5], [P6], [P10] a [P12].

2. Řešení Pexiderovy rovnice

Hledáme všechny reálné funkce f, g, h definované na reálné ose $\mathbb{R}$ takové, že

$$f(x+y) = g(x) + h(y)\,,$$

kdykoli $x, y \in \mathbb{R}$. Ukážeme, že obecné řešení lze snadno vyjádřit, známe-li všechna řešení rovnice (2) pro speciální případ $f = g = h$. Připomeňme, že funkce $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se nazývá *aditivní*, jestliže

$$F(x+y) = F(x) + F(y) \tag{3}$$

platí pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$. Rovnici (3), která se nazývá *Cauchyova funkcionální rovnice*, se budeme věnovat ve 3. části tohoto článku. Zde jen poznamenáme, že se vyskytuje už u A. M. Legendrea v r. 1791 a u C. F. Gausse v r. 1809. A. L. Cauchy však v r. 1821 popsal všechna spojitá řešení; příslušné citace jsou uvedeny např. v [K].

Úzký vztah mezi Pexiderovou rovnicí a aditivními funkcemi je zřejmý: Je-li F aditivní funkce a b, c jsou libovolná čísla, pak funkce $f = F + b + c$, $g = F + b$, $h = F + c$ splňují rovnici (2). O tom se přesvědčíme přímým dosazením.

Nás ovšem zajímají *všechna* řešení rovnice (2). Nechť tedy f, g, h jsou funkce splňující (2) pro každé $x, y \in \mathbb{R}$. Označme $b = g(0)$, $c = h(0)$ a definujme funkci $F : z \mapsto f(z) - b - c$, $z \in \mathbb{R}$. Položíme-li v (2) $y = 0$, dostaneme pro každé $x \in \mathbb{R}$ rovnost $f(x) = g(x) + c$. Podobně pro $x = 0$ obdržíme pro každé $y \in \mathbb{R}$ rovnost $f(y) = b + h(y)$. Dosazením $g(x) = f(x) - c$, $h(y) = f(y) - b$ do (2) dospějeme k rovnosti

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - b - c\,,$$

neboli

$$f(x+y) - b - c = (f(x) - b - c) + (f(y) - b - c)\,.$$

Vidíme, že pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí (pro funkci $F = f - b - c$)

$$F(x+y) = F(x) + F(y)\,,$$

takže F je aditivní funkce. Dokázali jsme tak tento výsledek:

Věta 1. *Nechť f, g, h jsou reálné funkce definované na reálné ose, pro něž*

$$f(x+y) = g(x) + h(y)\,, \quad x, y \in \mathbb{R}\,.$$

Potom existuje aditivní funkce F a čísla b, c tak, že

$$f = F + b + c\,, \quad g = F + b\,, \quad h = F + c\,. \tag{4}$$

Obráceně: Pro libovolnou aditivní funkci F a libovolnou dvojici čísel b, c splňují funkce f, g, h ze (4) *rovnici* (2).

Uvedená věta se stává zajímavá v případě, že známe množinu aditivních funkcí. Okamžitě je ovšem zřejmé, že pro každé $a \in \mathbb{R}$ je funkce $F_a : x \mapsto ax$, $x \in \mathbb{R}$, aditivní. (To jsou očekávaná „přirozená“ řešení rovnice (3).) Ve 3. části podáme informaci o *všech* aditivních funkcích; ukazuje se, že funkce tvaru F_a systém všech aditivních funkcí nevyčerpávají.

Ve výše uvedeném odvození se využívalo pouze nejjednodušších algebraických vlastností reálných čísel. Nepřekvapí proto, že větě 1 lze dát ryze algebraický tvar; srv. s [AD], [S].

Věta 2. *Nechť* $(D,+,0)$ *je grupoid (s operací sčítání a neutrálním prvkem* 0) *a* $(R,+)$ *je grupa (s operací sčítání, ne nutně abelovská). Nechť* f, g, h *jsou zobrazení* D *do* R. *Potom* f, g, h *splňují rovnici*

$$f(x+y)=g(x)+h(y)\,, \quad x,y\in D\,,$$

právě když existuje homomorfismus $A: D\to R$ *a prvky* $b,c\in R$ *tak, že pro všechna* $x\in D$ *platí*

$$f(x)=b+A(x)+c\,, \quad g(x)=b+A(x)\,, \quad h(x)=A(x)+c\,.$$

(Poznamenejme, že tedy $A: D\to R$ splňuje $A(x+y)=A(x)+A(y)$, $x,y\in D$.)

Na závěr uveďme *příklad*: D je aditivní grupa reálných čísel, R je *multiplikativní* grupa kladných reálných čísel. Podmínka, že A je homomorfismus, znamená, že

$$A(x+y)=A(x)\cdot A(y)\,, \quad x,y\in\mathbb{R}\,.$$

Položíme-li $F=\log A$, vidíme, že F je aditivní funkce. Odtud vyplývá obecný tvar homomorfismů v tomto případě.

Z *didaktického* hlediska není bez zajímavosti uvést jeden z možných elementárních přístupů k exponenciální funkci jako jedinému spojitému řešení rovnice

$$A(x+y)=A(x)\cdot A(y)\,, \quad x,y\in\mathbb{R}\,. \tag{5}$$

splňujícímu $A(1)=e$. Zde ovšem, jako obvykle, $e=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ (existenci limity dokážeme).

Postup je elementární v tom, že se nepředpokládá znalost logaritmické ani exponenciální funkce, a elegantní v pěkném opakovaném využití nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem (viz [W]).

Snadno je vidět, že pro *každé* řešení rovnice (5) platí $A(rx)=[A(x)]^r$, kdykoli $x\in\mathbb{R}$ a r je racionální číslo (píšeme $r\in\mathbb{Q}$). Speciálně pro řešení splňující $A(1)=e$ platí $A(r)=e^r$, kdykoli $r\in\mathbb{Q}$.

Dokážeme tato tři tvrzení:

T1. *Pro každé* $x\in\mathbb{R}$ *existuje vlastní* $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n$.

T2. *Položme* $A(x)=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n$, $x\in\mathbb{R}$. *Pak platí* (5).

T3. *Pro každé přirozené* m *a každá* $r,s\in\mathbb{Q}$, *pro která* $r<s\leqq m$, *je*

$$e^s-e^r\leqq e^{m+1}(s-r)\,.$$

Protože je funkce A neklesající (to plyne z definice funkce A) a $A(r)=e^r$ pro každé $r\in\mathbb{Q}$ (podle T2), vidíme z T3, že A je jediné spojité řešení rovnice (5).

Připomeňme nyní vztah mezi geometrickým a aritmetickým průměrem: *Je-li* k *přirozené a* $x_1,\dots,x_k$ *jsou nezáporná čísla, pak*

$$(x_1\cdot\ldots\cdot x_k)^{\frac{1}{k}}\leqq\frac{1}{k}(x_1+\cdots+x_k)\,. \tag{6}$$

Odtud plyne tento *důsledek*: mezi všemi k-ticemi nezáporných čísel se stejným součtem má největší součin k-tice sestávající ze stejných čísel.

Nechť nyní $x \in \mathbb{R}$ a n je přirozené, $-n \leqq x$. Uvažujme dvě $(n+1)$-tice:

$$1\,,1+\frac{x}{n}\,,1+\frac{x}{n}\,,\dots\,,1+\frac{x}{n}\,,$$
$$1+\frac{x}{n+1}\,,1+\frac{x}{n+1}\,,\dots\,,1+\frac{x}{n+1}\,.$$

Obě mají součet $n+1+x$. Podle výše zmíněného důsledku platí

$$(1+\frac{x}{n})^n \leqq (1+\frac{x}{n+1})^{n+1}\,.$$

Speciálně jsou posloupnosti s n-tým členem $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$, $b_n = (1-\frac{1}{n})^n$ neklesající, takže posloupnost s n-tým členem $c_n = b_{n+1}^{-1} = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ je nerostoucí. Protože $a_n < c_n \leqq c_1$, existuje vlastní $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$; označíme ji e. Zřejmé je také $\lim_{n\to\infty} c_n = e$. Je-li p přirozené číslo a $-n \leqq x \leqq p$, je $1+\frac{p}{n} \leqq (1+\frac{1}{n})^p$ (např. z binomické věty), takže

$$(1+\frac{x}{n})^n \leqq (1+\frac{p}{n})^n \leqq ((1+\frac{1}{n})^n)^p\,.$$

Odtud snadno plyne existence vlastní

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n\,,$$

neboť

$$\lim_{n\to\infty}((1+\frac{1}{n})^n)^p = e^p\,.$$

Tím je dokázáno T1. Dokážeme nyní T2.

Nechť n je přirozené, $k=2$, $x,y \in \langle -n,\infty)$, $x_1 = 1+\frac{x}{n}$, $x_2 = 1+\frac{y}{n}$. Podle (6) je

$$(1+\frac{x}{n})(1+\frac{y}{n}) \leqq (1+\frac{x+y}{2n})^2\,.$$

Odtud (po umocnění) plyne nerovnost $A(x)\cdot A(y) \leqq A(x+y)$ pro všechna $x,y \in \mathbb{R}$.

Nechť opět n je přirozené, $k=n$, $x,y \in \langle -\frac{1}{2}(\sqrt{n}-1), \frac{1}{2}(\sqrt{n}-1)\rangle$, $x_1 = \dots = x_{n-1} = 1+\frac{x+y}{n-1}$, $x_n = 1+\frac{xy}{n}$. Podle (6) pro nezáporná čísla $x_1,\dots,x_n$ platí

$$(1+\frac{x+y}{n-1})^{n-1}(1+\frac{xy}{n}) \leqq (1+\frac{x}{n}+\frac{y}{n}+\frac{xy}{n^2})^n = (1+\frac{x}{n})^n(1+\frac{y}{n})^n\,.$$

Odtud dostáváme, že $A(x+y) \leqq A(x)\cdot A(y)$ pro všechna $x,y \in \mathbb{R}$, a T2 je dokázáno.

Zbývá dokázat T3. Nechť $r,s \in \mathbb{Q}$, $r<s$ a $t=s-r$. Pro $t \geqq 1$ je nerovnost

$$e^t - 1 < te^{t+1}$$

zřejmá, neboť $e > 1$.

Je-li $t < 1$, zvolíme p, k přirozené tak, aby $t = \frac{p}{k}$. Položíme $x_1 = \dots = x_p = e$, $x_{p+1} = \dots = x_k = 1$ a užijeme (6):

$$e^t = \sqrt[k]{e^p} = \sqrt[k]{e^p \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1} \leqq \frac{pe + k - p}{k} = 1 + \frac{p}{k}(e - 1)\,.$$

Odtud $e^t - 1 \leqq \frac{p}{k}(e-1) \leqq te^{t+1}$. Dostáváme tudíž

$$e^s - e^r \leqq (s - r)e^{s+1}\,;$$

tím je dokázáno T3.

3. Cauchyova funkcionální rovnice

V této části nás zajímají aditivní funkce, tedy řešení Cauchyovy funkcionální rovnice (3). (Učeně řečeno, studujeme endomorfismy aditivní grupy reálných čísel.)

Snadno se odvodí, že pro každé řešení F rovnice (3) a každé $r \in \mathbb{Q}$ platí $F(r) = F(1) \cdot r$. Odtud je okamžitě vidět, že každé *spojité* řešení rovnice (3) má nutně tvar F_a pro vhodné $a \in \mathbb{R}$. Mezi klasické výsledky patří, že F má uvedený tvar, pokud je F spojitá aspoň v jednom bodě, nebo pokud je F shora omezená, nebo zdola omezená na (nedegenerovaném) intervalu; viz např. [J], kap. 5, §13.

V r. 1905 upozornil G. Hamel v práci [H] na existenci *nespojitých* řešení rovnice (3).

Z lineární algebry známe obecnou větu zaručující existenci báze v každém vektorovém prostoru. Speciálně vektorový prostor $\mathbb{R}$ uvažovaný nad tělesem $\mathbb{Q}$ má bázi (říká se jí obvykle *Hamelova báze*). Je užitečné uvědomit si toto: Je-li B Hamelova báze a $f : B \to \mathbb{R}$ *libovolná* funkce, pak existuje právě jedno řešení F rovnice (3), které na B splývá s f. Nyní stačí mít různé prvky $b_1, b_2 \in B$ a čísla y_1, y_2 tak, aby $y_1 b_2 \neq y_2 b_1$. Řešení F rovnice (3), pro něž $F(b_j) = y_j$ $(j = 1, 2)$, není tvaru F_a pro žádné $a \in \mathbb{R}$, tedy nutně je nespojité.

G. Hamel dokázal, že každé řešení rovnice (3), které není tvaru F_a, má graf hustý v rovině $\mathbb{R}^2$, je to tedy funkce v jistém smyslu dosti „divoká".

Připomeňme, že graf funkce F je množina

$$\mathcal{G}(F) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = F(x)\}$$

a že množina $P \subset \mathbb{R}^2$ se nazývá *hustá*, jestliže pro každý bod $q \in \mathbb{R}^2$ existují body $p_n \in P$ tak, že $p_n \to q$.

Věta 3. *Nechť F je řešení rovnice (3) a nechť pro žádné $a \in \mathbb{R}$ neplatí $F = F_a$. Potom je $\mathcal{G}(F)$ hustá podmnožina $\mathbb{R}^2$.*

Místo standardního důkazu (viz např. [AD] nebo [B]) nabízíme důkaz založený na myšlence z [R]; srv. [S]. Budeme užívat obvyklé označení: pro $x \in \mathbb{R}$ znamená $[x]$ největší celé číslo menší nebo rovné x a $\{x\} = x - [x]$.

Nechť F je řešení rovnice (3) takové, že pro žádné $a \in \mathbb{R}$ neplatí $F = F_a$. Potom existuje $s \in \mathbb{R}$ tak, že $F(s) \neq sF(1)$ (číslo s je ovšem nutně iracionální). Pro každé přirozené n je

$$F(\{ns\}) = n(F(s) - sF(1)) + \{ns\}F(1)\,.$$

Uvažujme $q = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ a zvolme posloupnosti racionálních čísel (r_n), (s_n) tak, aby

$$r_n \to x_0\,, \quad s_n \to (y_0 - x_0F(1))/(F(s) - sF(1))\,.$$

Položíme-li $x_n = r_n + s_n\{ns\}/n$, platí $x_n \to x_0$ a

$$\begin{aligned} F(x_n) =& r_nF(1) + (s_n/n)F(\{ns\}) = r_nF(1) + \\ &+ s_n(F(s) - sF(1)) + (s_n/n)\{ns\}F(1)\,. \end{aligned}$$

Odtud vidíme, že

$$F(x_n) \to x_0F(1) + (F(s) - sF(1)) \cdot (y_0 - x_0F(1))/(F(s) - sF(1)) = y_0\,.$$

Dokázali jsme, že $\mathcal{G}(F)$ je hustá podmnožina $\mathbb{R}^2$.

Z věty 3 ihned plynou zmíněné klasické výsledky zachovávající předpoklad spojitosti v bodě či jednostrannou omezenost na intervalu. Ve skutečnosti lze tyto výsledky podstatně zesílit.

Věta 4. *Nechť $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je aditivní, $M \subset \mathbb{R}$ a nechť F je na M zdola nebo shora omezená. Jestliže M má kladnou Lebesgueovu míru, potom existuje $a \in \mathbb{R}$ tak, že $F = F_a$.*

Tento výsledek, jehož důkaz níže naznačíme, pochází od A. Ostrowskiho [O]. Plyne z něj např. následující tvrzení, které poprvé dokázal v r. 1913 M. Fréchet (viz [F1], [F2]): Každá *měřitelná* aditivní funkce má tvar F_a pro vhodné a. Je-li totiž pro k celé $M_k = F^{-1}((k, k+1\rangle)$, je M_k měřitelná a sjednocení všech M_k dává $\mathbb{R}$. Proto alespoň jedna z množin M_k má kladnou míru a aditivní funkce F je na ní omezená.

Důkaz věty 4 lze založit na tomto pozoruhodném výsledku H. Steinhause; viz [K], s. 69:

Je-li $M \subset \mathbb{R}$ množina kladné Lebesgueovy míry, potom množina $M + M = \{x + y; x, y \in M\}$ obsahuje (nedegenerovaný) interval.

Předpokládejme, že F je aditivní funkce, $m \in \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$ má kladnou Lebesgueovu míru a $F \leqq m$ na M. Je-li $z \in M + M$, existují $x, y \in M$ tak, že $z = x + y$. Potom

$$F(z) = F(x + y) = F(x) + F(y) \leqq 2m\,.$$

Vidíme, že F je shora omezená na jistém intervalu, tedy $\mathcal{G}(F)$ není hustá podmnožina $\mathbb{R}^2$. Tvrzení plyne nyní z věty 3 (nebo z [J], kap. 5, §13).

Výše uvedené výsledky nás opravňují k tomuto konstatování: řešení Cauchyovy funkcionální rovnice je buďto lineární funkce tvaru F_a, nebo funkce značně „patologická“. (Další matematické argumenty pro slovo „patologická“ lze nalézt např. v [K], kap. 12.)

Pro úplnost poznamenejme, že H. Abel v r. 1827 upozornil, že funkcionální rovnice lze řešit pomocí diferenciálních rovnic (hladkost řešení se ovšem musí *a priori* předpokládat). Zde je jednoduchá ilustrace: Je-li F *diferencovatelná* aditivní funkce, $y \in \mathbb{R}$, pak z (3) derivováním podle x dostáváme

$$F'(x+y) = F'(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Jelikož F' je konstantní, existují $a, b \in \mathbb{R}$ tak, že $F(x) = ax + b$. Protože pro každou aditivní funkci je $F(0) = 0$, je $b = 0$. Vidíme, že $F = F_a$.

Jako cvičení uveďme ještě řešení rovnice (3) za předpokladu, že F je lebesgueovsky integrovatelná. Integrací vzhledem k y přes $(0,1)$ dostáváme pro každé $x \in \mathbb{R}$

$$\int_0^1 F(x+y)\,dy = F(x) + \int_0^1 F(y)\,dy\,.$$

Substituce $x + y = t$ dává

$$F(x) = \int_x^{x+1} F(t)\,dt - \int_0^1 F(y)\,dy\,.$$

Funkce vpravo je spojitá, tudíž F je spojitá aditivní funkce a má tedy tvar F_a.

To lze také nahlédnout přímo pěkným obratem, který pochází z [Schm], takto:

Definujme

$$P(x) = \int_0^x F(t)\,dt\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Integrací (3) dostaneme

$$\int_0^x F(t+y)\,dt = \int_0^x F(t)\,dt + x \cdot F(y)\,, \quad y \in \mathbb{R}\,,$$

přičemž první integrál je roven $\int_y^{x+y} F(t)\,dt$. Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ tedy platí:

$$P(x+y) - P(y) - P(x) = x \cdot F(y)\,.$$

Levá strana rovnosti je symetrická vzhledem k x, y. Platí tedy

$$x \cdot F(y) = y \cdot F(x)\,, \quad x, y \in \mathbb{R}\,.$$

Pro $y = 1$ speciálně máme $F(x) = x \cdot F(1)$, $x \in \mathbb{R}$.

Na závěr této části připojíme jednu aplikaci aditivních funkcí na úlohu z elementární analýzy; srv. [PP], [B].

Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a nechť

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R} \int_{x-R}^{x+R} f(t)\,dt$$

existuje pro každé $x \in \mathbb{R}$. Označme ji $G(x)$.

Poznamenejme, že funkce G je limitou posloupnosti spojitých funkcí a tudíž nemůže být nespojitá ve všech bodech. (Toto je známé, ale netriviální, tvrzení o tzv. funkcích 1. Baireovy třídy.)

Tvrdíme, že pak G je lineární funkce. Především pro každé $R \in \mathbb{R}$ je

$$\int_{(x-h)-R}^{(x-h)+R} f + \int_{(x+h)-R}^{(x+h)+R} f = \int_{x-(R+h)}^{x+(R+h)} f + \int_{x-(R-h)}^{x+(R-h)} f\,,$$

tudíž $G(x-h) + G(x+h) = 2G(x)$, $x, h \in \mathbb{R}$. Odtud se snadno pro funkci $F = G - G(0)$ odvodí

$$F(x) + F(y) = 2F(\frac{1}{2}(x+y))\,, \quad x, y \in \mathbb{R}\,.$$

Speciálně $F(0) = 0$, $F(x) = 2F(\frac{1}{2}x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ a tudíž (pišme $x + y$ místo x) platí

$$F(x) + F(y) = F(x+y)\,, \quad x, y \in \mathbb{R}\,.$$

Odtud již vyplývá, že $F(x) = xF(1)$ a funkce G je skutečně lineární.

4. Jedna klasická aplikace a návrat k atmosférickému tlaku

Klasická aplikace se bude týkat elementární geometrie, totiž axiomatického přístupu k obsahu obdélníku.

Začněme tímto jednoduchým tvrzením.

Věta 5. *Nechť $I = (0, \infty)$ nebo $I = \langle 0, \infty)$ a $H : I \to I$ je funkce taková, že*

$$H(x+y) = H(x) + H(y)\,, \quad x, y \in I\,.$$

Potom existuje $a \geqq 0$ tak, že $H(x) = ax$, $x \in I$.

Důkaz je snadný: Jestliže x_1, x_1', x_2, x_2' jsou čísla z I taková, že $x_1 - x_1' = x_2 - x_2'$, pak

$$H(x_1) + H(x_2') = H(x_1 + x_2') = H(x_2 + x_1') = H(x_2) + H(x_1')\,,$$

takže

$$H(x_1) - H(x_1') = H(x_2) - H(x_2')\,.$$

Odtud snadno plyne, že pro $x \in \mathbb{R}$ je vztahem

$$F(x) = H(x_1) - H(x_1')\,,$$

kde x_1, x_1' jsou *libovolná* čísla z I splňující $x = x_1 - x_1'$, definována aditivní funkce, pro niž $F = H$ na I a $F \geqq 0$ na I. Odtud již tvrzení plyne.

Vraťme se k elementární geometrii. Obdélníku v rovině o délce stran s, t přiřadíme číslo $P(s,t)$ (v naší představě by to měl být „obsah“ obdélníku).

Na funkci $P : (0,\infty) \times (0,\infty) \to (0,\infty)$ klademe tyto (přirozené) požadavky: $P(s,t) = P(t,s)$ pro všechna $s, t \in (0,\infty)$ a

$$P(s_1 + s_2, t) = P(s_1, t) + P(s_2, t)\,, \quad s_1, s_2, t \in (0,\infty)\,.$$

(Čtenář si geometrickou interpretaci snadno doplní sám.)

Pro $t > 0$ splňuje kladná funkce $H : x \to P(x,t)$ rovnici $H(x+y) = H(x) + H(y)$, $x > 0$, $y > 0$. Podle věty 5 existuje $a = a(t) > 0$ tak, že $H(x) = a(t) \cdot x$, $x > 0$, neboli

$$P(s,t) = s \cdot a(t)\,, \quad s > 0\,.$$

Protože

$$P(1, t_1 + t_2) = P(t_1 + t_2, 1) = P(t_1, 1) + P(t_2, 1) = P(1, t_1) + P(1, t_2)\,,$$

kdykoli $t_1, t_2 \in (0,\infty)$, platí pro tato t_1, t_2

$$a(t_1 + t_2) = a(t_1) + a(t_2)\,.$$

Podle věty 5 existuje tedy $k > 0$ tak, že $a(t) = kt$, $t > 0$. Dokázali jsme, že

$$P(s,t) = k \cdot st\,, \quad s > 0\,, t > 0\,.$$

Domluvíme-li se, že $P(1,1) = 1$ („obsah“ jednotkového čtverce má být 1), je $k = 1$ a dostáváme (naprosto nepřekvapivý) výsledek $P(s,t) = st$.

Nakonec se vraťme k motivační úloze z části 1 o vyjádření atmosférického tlaku: Hledali jsme funkci $f : \langle 0,\infty) \to \mathbb{R}$ a funkci $h : \langle 0,\infty) \to (-\infty, 0\rangle$ splňující

$$f(x+y) = f(x) + h(y)\,, \quad x \geqq 0\,, y \geqq 0\,.$$

Jestliže ve větě 2 uvažujeme $D = \langle 0,\infty)$ a $R = \mathbb{R}$, dostáváme existenci funkce $A : \langle 0,\infty) \to \mathbb{R}$, pro niž $A(x+y) = A(x) + A(y)$, $x, y \in \langle 0,\infty)$, a čísel $b, c \in \mathbb{R}$ tak, že $f(x) = b + A(x) + c$, $f(x) = b + A(x)$, $h(x) = A(x) + c$, kdykoli $x \geqq 0$. Odtud $c = 0$, $b = f(0)$, neboť zřejmě $A(0) = 0$. Aplikujme větu 5 na $I = \langle 0,\infty)$, $H = -A$ $(= -h)$. Vidíme, že existuje $\gamma \geqq 0$ tak, že $A(x) = -\gamma x$, $x \geqq 0$. Připomeneme-li, že $f = \log p$, $h = \log q$ (označení z části 1), dostáváme $q(x) = e^{-\gamma x}$, $p(x) = e^{f(x)} = e^b \cdot e^{-\gamma x}$, $x \geqq 0$, přičemž $e^b = p(0) = p_0$. Výsledkem tedy skutečně je závislost

$$p(h) = p_0 e^{-\gamma h}\,, \quad h \geqq 0\,.$$

LITERATURA

[AD] J. Aczél, J. Dhombres, *Functional equations in several variables*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989.

[B] R. P. Boas, *A primer of real functions*, MAA, Washington, 1981.

[F1] M. Fréchet, *Pri la funkcia equacio* $f(x+y) = f(x) + f(y)$, Enseignement Math. **15**(1913), 390–393.

[F2] M. Fréchet, *A propos d'un article sur l'équation fonctionnelle* $f(x+y) = f(x)+f(y)$, Enseignement Math. **16**(1914), 136.

[H] G. Hamel, *Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung* $f(x+y) = f(x) + f(y)$, Math. Ann. **60**(1905), 459–462.

[J] V. Jarník, *Diferenciální počet* II, NČSAV, Praha, 1956.

[KS] P. Kahlig, J. Schwaiger, *Logarithmic wind profile and Pexider's functional equation*, Beitr. Phys. Atmosph. **64**(1991), 153–155.

[K] M. Kuczma, *An introduction to the theory of functional equations and inequalities*, Państwowe wydawnictwo naukowe, Kraków, 1985.

[O] A. Ostrowski, *Über die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion und verwandte Funktionalgleichungen*, Jber. Deutsch. Math.-Verein. **38**(1929), 54–62.

[PP] M. Plancherel, G. Pólya, *Sur les valeurs moyennes des fonctions réelles définies pour toutes les valeurs de la variable*, Comment. Math. Helv. **3**(1931), 114–121.

[R] L. Reich, *Über Approximation durch Werte additiver Funktionen*, Sitz. Ber. Öster. Akad. d. Wiss. **201**(1992), 169–181.

[Schm] R. Schimmack, *Axiomatische Untersuchungen über die Vektoraddition*, Abh. Leopoldina (Halle) **90**(1908), 1–104.

[S] J. Schwaiger, *Funktionalgleichungen: Grundlegende Gleichungen mit Anwendungen – ein kleiner Überblick*, Jahrbuch Überblicke Mathematik 1994 (Eds. S. D. Chatterji et al.), Braunschweig, Vieweg, 1994.

[W] W. Walter, *Analysis* 1, Springer-Verlag, Berlin, 1992.