Moninovy matematické práce

In: Martina Bečvářová (author): České kořeny bulharské matematiky. (Czech). Praha: Matfyzpress, 2009. pp. 41–80.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/400948

MONINOVY MATEMATICKÉ PRÁCE[52]

1. PRÁCE ZE SYNTETICKÉ GEOMETRIE

V roce 1887 uveřejnil Teodor Monin v Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky tři krátké příspěvky, které se věnovaly známým a již zpracovaným problémům syntetické geometrie.

V první, jednostránkové poznámce *Geometrickým místem středů ploch kuželových 2-ho stupně, které procházejí danými šesti body v prostoru, jest plocha stupně 4-ho* [M1][53] se T. Monin zaměřil na studium jedné věty vztahující se ke kuželovým plochám druhého stupně. Plocha druhého stupně má obecnou rovnici o deseti koeficientech

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ + 2a_{10}x + 2a_{20}y + 2a_{30}z + a_{00} = 0,$$

a je tedy určena devíti body.

Podmínkou, aby výše uvedená plocha byla kuželová (resp. aby dále degenerovala), je nulovost diskriminantu $|a_{ij}|$. Je-li pro kuželovou plochu kvadratickou dáno šest bodů, zbývají tedy $9 - (6 + 1) = 2$ parametry. Proto Teodor Monin – ve shodě s mnoha pracemi z algebraické geometrie druhé poloviny 19. století – mluví o ploše „oněch ∞^2 kuželů“.[54] Úplně přehlíží, že by plocha mohla degenerovat v čáru nebo i bod.[55] Podobné situace T. Monin nepřipouští, jako ostatně mnoho jeho současníků.

T. Monin píše, že *Geometrickým místem středů ploch kuželových 2-ho stupně, které procházejí danými šesti body v prostoru, jest plocha stupně 4-ho*, což se v první části zcela shoduje s Chaslesovým tvrzením uvedeným v *Aperçu historique*.[56] Ve druhé části se obě tvrzení naprosto liší, neboť T. Monin píše o ploše 4. stupně a M. Chasles o křivce 3. stupně.

---

[52] Tato kapitola byla sepsána s výrazným odborným přispěním a neobvyklou kolegiální pomocí pana profesora Zbyňka Nádeníka.

[53] ČPMF 16(1887), str. 241–242.

[54] *Všecky plochy 2-ho st., danými šesti body a, b, c, d, e, f procházející, vytvořují zvláštní geometrický útvar o třech rozměrech, ve kterém jest nekonečné množství ploch kuželových.* Viz [M1], str. 241. Poznamenejme, že staré označení ∞^2 běžně užívané v syntetické geometrii v 19. století značí dvouparametrický systém. To znamená, že T. Monin píše o dvouparametrickém systému kuželů jako o ploše.

[55] Například evoluty (geometrická místa středů křivosti plochy) jsou obecně plochy, ale mohou u ploch (obálek jednoparametrového systému koulí, nejjednodušší případ je torus) degenerovat v křivky nebo dokonce v bod jako u kulové plochy. O evolutách ploch podrobněji viz V. Hlavatý: *Diferenciální geometrie křivek a ploch a tensorový počet*, JČMF, Praha, 1937, str. 374–380, 428–429.

[56] *Le lieu géométrique des sommets des cônes de second degré, qui passent tous par six points donnés dans l'espace, est la courbe à double courbure, du troisième degré, déterminée par ces six points.* Viz M. Chasles: *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, 2. vydání, Paris, 1875, str. 405.

S odvoláním na J. Steinera (bez přesné citace práce) a L. Cremonu (s uvedenou neúplnou citací)[57] dává základní charakteristiku této plochy:[58]

Tato plocha obsahuje vedle 15 přímek, spojujících daných šest bodů mezi sebou, i oněch 10 přímek, ve kterých se protínají roviny, protilehlými trojinami bodů procházející; takovou přímkou jest na př. průsečnice rovin abc a def. ...

T. Monin se odvolává na práci T. Reye *Die Geometrie der Lage*,[59] která obšírněji pojednala o ploše čtvrtého stupně a která pro něho byla inspirující. T. Moninovi poskytla námět k opravě druhé a patnácté věty vyslovené M. Chaslesem v *Aperçu historique*[60] a k opravě obdobných vět v Cremonově práci *Sulle linee del terz'ordine a doppia curvatura*,[61] který je převzal od M. Chaslesa (viz Cremonův text na str. 168, 173).[62]

T. Monin bez velkého vysvětlování píše:

Používám té příležitosti, bych poukázal ještě k jiné mýlce, která se do uvedené práce prof. Cremony vloudila. Jest tam totiž mezi jinými vyslovena věta

---

[57] L. Cremona: *Preliminari di una teoria geometrica delle superficie*, Parte II., str. 58.

[58] ČPMF 16(1887), str. 241–242.

[59] *Die Geometrie der Lage*, Zweite Abtheilung, Zweite Vermehrte Auflage, Carl Rümpler, Hannover, 1880. T. Monin se odvolává na stranu 250. T. Reye problematiku podrobně rozpracoval v kapitole *Das Strahlensystem zweiter Ordnung zweiter Classe und die Kummer'sche Fläche vierter Ordnung mit sechzehn Knotenpunkten* na stranách 250 až 259. V úvodu kapitoly napsal: *Auf Grund der Ergebnisse der letzten beiden Vorträge wollen wir jetzt das specielle F^2-Gebüsch untersuchen, dessen Flächen einem räumlichen Sechseck* 123456 *oder* hiklmn *umschrieben sind. Weil durch drei beliebige Punkte im Allgemeinen eine Fläche des Gebüsches, und anderseits durch neun beliebige Punkte im Allgemeinen eine einzige Fläche zweiter Ordnung hindurchgeht, so ergiebt sich:*
„Jede durch die sechs Eckpunkte i gehende Fläche zweiter Ordnung gehört zu dem F^2-Gebüsche."
Die Kernfläche K^4 enthält die Mittelpunkte aller durch die sechs Eckpunkte gehenden Kegelfächen zweiter Ordnung; woraus folgt: „Die Kernfläche K^4 des Gebüsches geht durch die fünfzehn Kanten $\overline{ik}$ des Sechsecks und durch die zehn Doppellinien seiner 10 *Paar Gegenebenen $\overline{hik}$, $\overline{lmn}$; sie geht ausserdem durch die Raumcurve dritter Ordnung k^3, welche dem Sechseck umschrieben werden kann.*" (Viz str. 250–251.)

[60] M. Chasles: *Aperçu historique sur l'origine et le dévéloppement des méthodes en géométrie*, Note XXXIII, 2. vydání, 1875, str. 403. Poznamenejme, že M. Chasles končí prostorovou křivkou třetího stupně. Jeho řádky na straně 405 dole jsou však jen jakýmisi náznaky. O. Staude v článku *Flächen 2. Ordnung und ihre Systeme und Durchdringungskurven* uveřejněném v Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften der Geometrie II–1 (str. 167–257) v poznámce 411 na straně 228 o Chaslesově práci píše: *einige Andeutungen*.

[61] Annali di matematica pura ed applicata 1(1858), str. 164–174, 278–295. Viz též *Opere matematiche di Luigi Cremona*, Pubblicate sotto gli auspici della R. Accademia dei Lincei, Tomo primo, Ulrico Hoepli, Editore-Libraio della Real Casa, Milano, 1914, str. 39–69.

[62] Viz *Opere matematiche di Luigi Cremona*, Pubblicate sotto gli auspici della R. Accademia dei Lincei, Tomo primo, Ulrico Hoepli, Editore-Libraio della Real Casa, Milano, 1914, str. 44 a 49. Poznamenejme, že L. Cremona se této problematice věnoval ještě v článku *Teoremi sulle linee del terz'ordine a doppia curvatura*, Annali di matematica pura ed applicata 2(1858), str. 19–29. Viz též *Opere matematiche di Luigi Cremona*, Pubblicate sotto gli auspici della R. Accademia dei Lincei, Tomo primo, Ulrico Hoepli, Editore-Libraio della Real Casa, Milano, 1914, str. 70–81. T. Monin tuto Cremonovu práci pravděpodobně neznal, neboť ji necitoval.

následující: Šest bodů, ve kterých nějaká plocha kuželová 2-ho st. protíná křivku prostorovou st. 3-ho jest v involuci (str. 294).

Jak ze svrchupsané věty patrno, nemůže tento theorem býti platným z té příčiny, že zcela libovolnými šesti body křivky prochází nekonečné množství ploch kuželových st. 2-ho. Mýlka, která se tu stala, má původ svůj v nepravém čtení rovnice (19), citovaného pojednání, která vlastně dokazuje následující vlastnost: Všecky soustředné plochy kuželové 2-ho st. mající s nějakou křivkou prostorovou st. 3-ho čtyři pevné body společné, protínají tuto v dalších dvou bodech, tvořících involuci quadratickou. Podotknouti nutno, že ony čtyři pevné body křivky této involuci obecně náležeti nebudou.[63]

Bez hlubšího studia Chaslesových, Cremonových a Reyeových prací je tato Moninova krátká práce dnešnímu čtenáři téměř nesrozumitelná. Rozhodnout o vlivu Chaslesových, Cremonových a Steinerových prací na Moninovy úvahy by si vyžádalo delší analýzu přesahující rámec této studie a především význam Moninova článku.

Podívejme se na Moninovu poznámku očima dnešního geometra. Moninovo vyjadřování zůstává zcela v rámci zvyklostí, které panovaly v syntetické geometrii i v jejím vrcholném období ve druhé polovině 19. století. Často se věnovala pozornost jen tzv. „obecným" případům, aniž by se výslovně řeklo, co se oním adjektivem rozumí. Zpravidla se ponechávaly stranou speciální případy. T. Monin píše o kuželových plochách, aniž by výslovně připustil jejich degeneraci. Ale pokud ji nepřipustí, není už jeho citát pravdivý, jak dále uvidíme. Též nahlédneme, že Moninovo tvrzení o ploše vrcholů oněch kuželových ploch v sobě skrývá úskalí. Výslovně uveďme, že za vrcholy kuželové plochy zvrhlé ve dvě různé roviny (resp. v dvojnásob vzatou rovinu) je třeba považovat každý bod na jejich průsečnici (resp. každý její bod).

Prostorové řešení úlohy lze popsat krátce. Promítneme na libovolnou rovinu π z libovolného bodu $V \notin \pi$ daných šest bodů B_i do průmětů B_i' a právě jen tehdy, když těchto šest průmětů B_i' leží na kuželosečce (i degenerované) v π, bude V vrcholem kvadratické kuželové plochy (i degenerované) procházející šesti body B_i. Hned si připomeňme, že v rovině šest bodů s projektivními souřadnicemi $[x_i, y_i, z_i]$ leží na kuželosečce (třeba i degenerované) tehdy a jen tehdy, když

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & x_1y_1 & y_1z_1 & z_1x_1 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ x_6^2 & y_6^2 & z_6^2 & x_6y_6 & y_6z_6 & z_6x_6 \end{vmatrix} = 0.$$

Bez nároků na soustavnost či úplnost si všimneme několika jednoduchých speciálních případů, které nepotřebují odůvodnění.

1) Jestliže šest bodů B_i je v rovině ϱ a nikoliv na kuželosečce, neexistuje pravá kuželová plocha jdoucí body B_i, ale každý bod roviny ϱ je vrcholem

[63] ČPMF 16(1887), str. 242.

zvrhlé kuželové plochy jdoucí šesti body B_i (tj. roviny ϱ a libovolné další roviny).

2) Jestliže šest bodů B_i je v rovině ϱ a leží na kuželosečce, je každý bod V vrcholem kuželové plochy jdoucí body B_i; jestliže $V \notin \pi$, resp. $V \in \pi$, je kuželová plocha pravá, resp. zvrhlá v dvakrát vzatou rovinu ϱ.

3) Jestliže šest bodů B_i je na přímce p, je každý její bod V vrcholem pravé kuželové plochy jdoucí body B_i a každý bod V je vrcholem kuželové plochy zvrhlé ve dvě roviny.

4) Je zcela evidentní, že každý bod všech 15 přímek B_iB_j je vrcholem kuželové plochy (ať pravé, či zvrhlé) jdoucí body $B_1, \ldots, B_6$.

5) Rovněž je evidentní, že každý bod deseti průsečnic rovin $B_iB_jB_k$ a $B_lB_mB_n$ je vrcholem kuželové plochy jdoucí body $B_1, \ldots, B_6$, totiž degenerované v roviny $B_iB_jB_k$ a $B_lB_mB_n$.

Z těchto případů vidíme, že množina vrcholů pravých kuželových ploch může být prázdná a naopak množina vrcholů kuželových ploch pravých i zvrhlých může být celý prostor. O ploše těchto vrcholů se nedá mluvit. Rovněž uvidíme, že přímky z 4) a 5) – i když patří k množině $\mathfrak{M}$ vrcholů našich kuželových ploch – se k ní mohou chovat různě.

Přejdeme k analytickému řešení. Stále budeme pracovat v soustavě projektivních souřadnic, které označíme x, y, z, t nebo ξ, η, ζ, τ.

Zvolíme šest bodů $B_i[x_i, y_i, y_i, t_i]$ a z bodu $V[\xi, \eta, \zeta, \tau]$ je promítneme do bodů B_i' v souřadnicové rovině $t = 0$:

$$B_i'[\tau x_i - t_i\xi, \tau y_i - t_i\eta, \tau z_i - t_i\zeta, 0].$$

Tyto body B_i leží na kuželosečce – a tedy promítají se z bodu V kvadratickým kuželem – právě když vymizí determinant šestého stupně Δ

$$\left| \begin{array}{ccc} (\tau x_1 - t_1\xi)^2 & (\tau y_1 - t_1\eta)^2 & (\tau z_1 - t_1\zeta)^2 \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ (\tau x_6 - t_6\xi)^2 & (\tau y_6 - t_6\eta)^2 & (\tau z_6 - t_6\zeta)^2 \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{ccc} (\tau x_1 - t_1\xi)(\tau y_1 - t_1\eta) & (\tau y_1 - t_1\eta)(\tau z_1 - t_1\zeta) & (\tau z_1 - t_1\zeta)(\tau x_1 - t_1\xi) \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ (\tau x_6 - t_6\xi)(\tau y_6 - t_6\eta) & (\tau y_6 - t_6\eta)(\tau z_6 - t_6\zeta) & (\tau z_6 - t_6\zeta)(\tau x_6 - t_6\xi) \end{array} \right| .$$

Volba souřadnicových vrcholů je zcela v naší moci – ovšem s tím, že nesmějí být v rovině. Tak předně položíme

$$B_1 \equiv [1, 0, 0, 0],$$
$$B_2 \equiv [0, 1, 0, 0],$$
$$B_3 \equiv [0, 0, 1, 0];$$

volnost volby čtvrtého souřadnicového vrcholu $[0, 0, 0, 1]$ si zatím ponecháme. V determinantu Δ zůstanou řádky 4., 5. a 6. beze změny a řádky 1., 2., a 3. se zredukují na

$$\begin{matrix} \tau^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau^2 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}.$$

Determinant Δ se pak zjednoduší na

$$\Delta = \tau^6 \cdot \delta,$$

kde δ je determinant 3. stupně

$$\begin{vmatrix} (\tau x_4 - t_4\xi)(\tau y_4 - t_4\eta) & (\tau y_4 - t_4\eta)(\tau z_4 - t_4\zeta) & (\tau z_4 - t_4\zeta)(\tau x_4 - t_4\xi) \\ (\tau x_5 - t_5\xi)(\tau y_5 - t_5\eta) & (\tau y_5 - t_5\eta)(\tau z_5 - t_5\zeta) & (\tau z_5 - t_5\zeta)(\tau x_5 - t_5\xi) \\ (\tau x_6 - t_6\xi)(\tau y_6 - t_6\eta) & (\tau y_6 - t_6\eta)(\tau z_6 - t_6\zeta) & (\tau z_6 - t_6\zeta)(\tau x_6 - t_6\xi) \end{vmatrix}.$$

Položíme-li v něm $\delta = 0$, dostaneme

$$\delta(\tau)\Big|_{\tau=0} = \begin{vmatrix} t_4^2\xi\eta & t_4^2\eta\zeta & t_4^2\zeta\xi \\ t_5^2\xi\eta & t_5^2\eta\zeta & t_5^2\zeta\xi \\ t_6^2\xi\eta & t_6^2\eta\zeta & t_6^2\zeta\xi \end{vmatrix} = t_4^2 t_5^2 t_6^2 \cdot \xi\eta \cdot \eta\zeta \cdot \zeta\xi \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

To znamená, že z našeho determinantu δ lze vytknout τ.

Vypočítáme derivaci determinantu δ podle τ a pak v ní položíme $\tau = 0$:

$$\frac{\partial\delta(\tau)}{\partial\tau}\Big|_{\tau=0} = \begin{vmatrix} -t_4(x_4\eta + y_4\xi) & t_4^2\eta\zeta & t_4^2\zeta\xi \\ -t_5(x_5\eta + y_5\xi) & t_5^2\eta\zeta & t_5^2\zeta\xi \\ -t_6(x_6\eta + y_6\xi) & t_6^2\eta\zeta & t_6^2\zeta\xi \end{vmatrix} +$$

$$+ \Big\{\text{dva analogické determinanty}\Big\} = -t_4 t_5 t_6 \cdot \eta\zeta \cdot \zeta\xi \begin{vmatrix} x_4\eta + y_4\xi & t_4 & t_4 \\ x_5\eta + y_5\xi & t_5 & t_5 \\ x_6\eta + y_6\xi & t_6 & t_6 \end{vmatrix} +$$

$$+ \Big\{\text{dva analogické součiny}\Big\}.$$

Tedy též

$$\left.\frac{\partial\delta(\tau)}{\partial\tau}\right|_{\tau=0} = 0,$$

takže z našeho determinantu δ lze vytknout τ^2 a můžeme psát

$$\Delta = \tau^8 \cdot F_4(\xi, \eta, \zeta, \tau),$$

kde F_4 je forma 4. stupně ve vypsaných proměnných.

Vzhledem ke zdlouhavosti upustíme od výpočtu

$$\left.\frac{\partial^2\delta(\tau)}{\partial^2\tau}\right|_{\tau=0},$$

který by ukázal, kdy – a zda vůbec – je

$$\Delta = \tau^9 \cdot F_3(\xi, \eta, \zeta, \tau),$$

kde F_3 je forma 3. stupně.

K množině $\mathfrak{M}$ patří ovšem body určené rovnicí $F_4(\xi, \eta, \zeta, \tau) = 0$. Ta znamená plochu 4. stupně, která se však může rozpadnout anebo degenerovat v křivku.[64] Uvedeme k tomu příklady.

Jako příklad probereme situaci, v níž dvě čtveřice bodů $B_1, \ldots, B_6$ jsou v rovinách.

Zvolíme body B_i takto (viz obrázek):

---

[64] Instruktivní situace na degeneraci plochy v křivku poskytuje torus, který vznikne, když v soustavě pravoúhlých souřadnic x, y, z se kolem osy z otáčí kružnice $(x - v)^2 + z^2 = r^2$, $y = 0$ při $v > r$. Rovnice toru je 4. stupně (viz G. Loria: *Vorlesungen über darstellende Geometrie*, 2. díl, Leipzig-Berlin, 1913, rovnice (7) na straně 253)

$$[(x^2 + y^2 + z^2) + (v^2 - r^2)]^2 - 4v^2(x^2 + y^2) = 0,$$

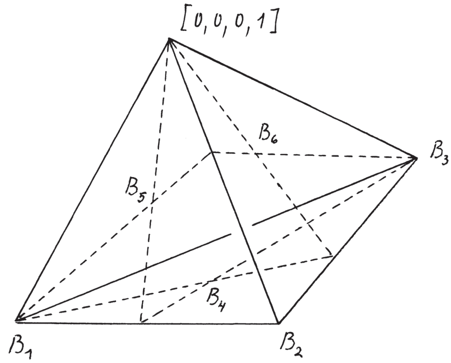
čili při $r = 0$

$$(x^2 + y^2 - v^2)^2 + 2(x^2 + y^2 + v^2)z^2 + z^4 = 0.$$

Tuto rovnici lze splnit (v reálném oboru) jedině při

$$x^2 + y^2 - v^2 = 0, \quad z = 0,$$

což znamená kružnici o poloměru v v rovině (x, y).



$$\begin{array}{ll} B_1 \equiv [1,0,0,0] & B_4 \equiv [1,1,1,0] \\ B_2 \equiv [0,1,0,0] & B_5 \equiv [1,1,0,1] \\ B_3 \equiv [0,0,1,0] & B_6 \equiv [0,1,1,1] \end{array}$$

Body B_1, B_2, B_3 jsou souřadnicové vrcholy a body B_4, B_5, B_6 jednotkové body v souřadnicových rovinách $\tau = 0$, $\zeta = 0$, $\xi = 0$. Čtveřice bodů B_1, B_2, B_3, B_4 a B_1, B_3, B_5, B_6 leží v rovinách $\tau = 0$ a $\eta - \tau = 0$ protínajících se v přímce B_1B_3, která tedy patří do množiny $\mathfrak{M}$ (každý bod přímky B_1B_3 je vrcholem kvadratického kužele degenerovaného v ony roviny).

Body B_5 a B_6 promítneme z bodu $V[\xi, \eta, \zeta, \tau]$ do roviny $\tau = 0$ v body

$$B'_5[\xi - \tau, \eta - \tau, \zeta, 0] \qquad \text{a} \qquad B'_6[\xi, \eta - \tau, \zeta - \tau, 0].$$

Podmínkou, aby body B_1, B_2, B_3, B_4, B'_5, B'_6 v rovině $\tau = 0$ ležely na kuželosečce, je anulování determinantu

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ (\xi-\eta)^2 & (\eta-\tau)^2 & \zeta^2 & (\xi-\tau)(\eta-\tau) & (\eta-\tau)\zeta & \zeta(\xi-\tau) \\ \xi^2 & (\eta-\tau)^2 & (\zeta-\tau)^2 & \xi(\eta-\tau) & (\eta-\tau)(\zeta-\tau) & (\zeta-\tau)\xi \end{vmatrix}.$$

Tedy

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ (\xi-\tau)(\eta-\tau) & (\eta-\tau)\zeta & \zeta(\xi-\tau) \\ \xi(\eta-\tau) & (\eta-\tau)(\zeta-\tau) & (\zeta-\tau)\xi \end{vmatrix} = 0.$$

Ihned je vidět, že tento determinant obsahuje jako faktory τ a $\eta - \tau$; celkem dostaneme

$$\tau(\eta - \tau)\Big[\xi^2 + \zeta^2 - \tau^2 - \eta(\xi + \zeta - \tau)\Big] = 0.$$

Anulování prvního faktoru znamená rovinu $B_1B_2B_3B_4$, v níž každý bod C je vrcholem kvadratického kužele degenerujícího ve dvě různé roviny $B_1B_2B_3B_4C$ a CB_5B_6. Anulování druhého faktoru znamená rovinu $B_1B_3B_5B_6$, v níž každý bod D je vrcholem kvadratického kužele degenerujícího ve dvě různé roviny $B_1B_3B_5B_6D$ a DB_2B_4 (viz výše uvedený obrázek). Konečně anulování třetího faktoru znamená kvadriku Q, o níž se snadno zjistí, že je pravá.

Ze šesti bodů $B_1, \ldots, B_6$ jsou na kvadrice Q jen body B_2, B_4, B_5, B_6.

Z 15 přímek B_iB_j $(i, j = 1, 2, \ldots, 6;\ i \neq j)$ jsou na kvadrice Q právě čtyři spojnice

$$\begin{array}{ll} B_2B_5, & B_4B_5, \\ B_2B_6, & B_4B_6. \end{array}$$

V rovině $B_1B_2B_3B_4$ čili $\tau = 0$ a stejně tak v rovině $B_1B_3B_5B_6$ čili $\eta - \tau = 0$ je vždy šest přímek B_iB_j (oběma rovinám je společná přímka B_1B_3).

Příklad dostatečně ukazuje, že Moninův popis množiny $\mathfrak{M}$ měl být opatrnější.

Druhá, půlstránková poznámka nazvaná *Harmonické středy 2-ho stupně vzhledem k soustavám trojbodovým* [M2][65] řeší klasickou úlohu syntetické geometrie:

Předpokládejme na kuželosečce K tři body a, b, c jako základní a bod p jako pol; stanovme harmonikálu tohoto bodu vzhledem k trojúhelníku abc, kterážto protne K v obou hledaných středech harmonických.[66]

T. Monin uvádí pouze řešení, nepřidává žádné zdůvodnění ani nepřipojuje vysvětlující obrázek. Přesto je z jeho popisu patrné, jak hluboko pronikl do projektivní a syntetické geometrie. Jedinou chybou je jeho méně srozumitelná terminologie.[67] Ocitujme pro zajímavost Moninovo řešení:

Považujeme-li trojstran abc za křivku st. 3-ho, jest K quadratickou polárou onoho bodu o, ve kterém se protínají přímky spojující body a, b, c s protilehlými vrcholy trojúhelníka, v těchto bodech křivce K opsaného. Poněvadž pak p leží

[65] ČPMF 16(1887), str. 242–243.

[66] Tamtéž, str. 242.

[67] Ve slovníku F. Müller: *Mathematisches Vokabularium – Vocabulaire mathématique* (Leipzig – Paris, 1900, 314 stran) je na straně 212 napsáno *Harmonikale eines Punktes, Polare desselben i. B. auf ein Dreieck (Steiner, Hain, 1875) – polaire harmonique ou trilinéaire (Mathieu), droite harmoniquement associée (de Longchamps).* Ve jmenném rejstříku Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften – Geometrie jsou tři výše zmínění autoři uvedeni (viz Geometrie III–I–2, str. 1196). Vysvětlení pojmu harmonikála není nejjednodušší, je založeno na trojúhelníkových souřadnicích, jichž jsou barycentrické souřadnice speciálním případem.

na quadratické poláře bodu o, prochází linearná polára nebo harmonikála bodu, p bodem o. Tyto harmonikály tedy protínají K v involuci bodové projektivné k řadě polů p. Takovouto involuci tvoří také harmonické středy 2-ho st., náležející řadě polů p na křivce K. Projektivné tyto involuce se však ztotožňují majíce tři samodružné skupiny, jež náleží polům a, b, c, aneb lépe řečeno polům k a, b, c nekonečně blízkým.[68]

Třetí, kratičká poznámka nazvaná *Rovinná křivka n-tého st. je určena* $p_n = \frac{1}{2}n(n+3)$ *body* [M3][69] obsahuje odvození výše uvedeného vzorce. T. Monin napsal:

Libovolná přímka protíná geometrické místo n-tého st. v n bodech. Má-li tomuto místu celá náležeti, jest nutno, však též stačí dokázati, že má s ním $n+1$ *společný bod. Bude tedy přímka, jako část místa n-tého st., představovati* $n+1$ *určovací podmínky a zbývajícími, na počet* $p_n - (n+1)$*, musí býti druhá část st.* $(n-1)$*ho úplně ustanovena. Dle toho jest:*

$$p_n - p_{n-1} = n + 1,$$

$$p_{n-1} - p_{n-2} = n,$$

$$\dots$$

$$p_1 = 2,$$

z kterýchžto rovnic sečtením plyne vzorec nadepsaný. Ku výpočtu mohli bychom na místě přímky též kuželosečky použíti; křivek stupňů vyšších však již nikoliv.[70]

Nedostatek Moninova postupu a zdůvodnění vysvítá z textu B. Bydžovského uvedeného v monografii *Úvod do algebraické geometrie.*[71]

---

[68] ČPMF 16(1887), str. 242–243.

[69] ČPMF 16(1887), str. 243.

[70] Tamtéž, str. 243.

[71] Více viz B. Bydžovský: *Úvod do algebraické geometrie*, Knihovna spisů matematických a fysikálních, svazek č. 8, JČMF, Praha, 1948. Problematika je zpracována v kapitole *Základní vlastnosti algebraických křivek rovinných* v paragrafu *129. Určenost křivky* (str. 308–311). Přestože je Bydžovského kniha běžně dostupná v našich odborných knihovnách, uvedeme rozsáhlejší část z výše citovaného paragrafu, neboť většina dnešních studentů, ale i geometrů, jeho práce pro jejich důkladnost a rozsáhlost již nečte. B. Bydžovský zde píše: *a) Křivka je určena jednoznačně, jsou-li známy poměry koeficientů v její rovnici. K jednoznačnému určení poměrů* $N+1$ *neznámých je třeba* N *homogenních lineárních rovnic, jichž soustava má hodnost* N*. V našem případě je*

$$N = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = \frac{n(n+3)}{2}.$$

To dává základní větu o určenosti algebraické křivky:
b) Křivka n-ho stupně je určena jednoznačně, je-li dána pro koeficienty v její rovnici soustava $N = \frac{n(n+3)}{2}$ *lineárních homogenních rovnic o hodnosti* N*.*
K lineární homogenní rovnici pro koeficienty vede na př. požadavek, aby křivka procházela daným bodem. Neboť je-li (y) *daný bod, je vyslovený požadavek vyjádřen rovnicí* $f(y) = 0$*. Je-li dáno* N *bodů* $y^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, N$*, jimiž má křivka procházeti, dostáváme soustavu* N *homogenních lineárních rovnic*

V roce 1882 byl v Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky otištěn jako 12. soutěžní úloha následující problém:

V rovinné čáře zvolme dva body A a B; v bodu A sestrojme normálu a protněme ji v bodu C přímkou BC kolmou k tětivě AB. Blíží-li se bod B bodu A, jaké mezi se blíží průsečík C?

Buďte dále A a B dva body na čáře prostorové a buď C průsečík hlavní normály bodu A s rovinou vedenou bodem B kolmo ku tětivě AB, kde jest limita bodu C pro případ, že B se blíží bodu A?

Buď dána libovolná plocha a na ní body A a B. Nechť opět C značí průsečík normály v bodu A s rovinou vedenou bodem B kolmo ku AB. Blíží-li se B opět bodu A, v jakých mezích jest limita průsečíku C?[72]

Úloha rozhodně nepatřila mezi jednoduché, uvážíme-li, že soutěž byla vypsána pro talentované středoškolské a vysokoškolské studenty, středoškolské učitele a všechny další zájemce o matematiku. Moninovo řešení bylo publikováno ve výše uvedeném časopisu roku 1888 pod názvem *Řešení úlohy 12. v XI. ročníku tohoto časopisu* [M5].[73]

Na první a druhou část úlohy T. Monin odpověděl takto:

Křivka kruhová K', opsaná trojúhelníku ABC, dotýká se v bodu A původní křivky K, při čemž jsou body A a C v křivce K' diametrálně protilehlými. ... Když jest K křivkou prostorovou, platí výsledek tentýž.[74]

Pracoval typickými syntetickými postupy, které byly později příčinou oprávněných kritických výtek syntetické geometrii. Neuvedl ani žádný obrázek, ani výpočet. U řešení první, resp. druhé části úlohy užil tyto charakteristické formulace:

... Tento vztah potrvá i tehdy, když bod B bude ku A nekonečně blízký, to jest, když K' bude v bodu A oskulovati křivku K. Dle toho bude vzdálenost bodu C', který je limitou bodu C, od bodu A rovna dvěma příslušným poloměrům křivosti křivky K. ...

... K důkazu použijeme však plochy kulové L, jejížto střed se nalézá na hlavní normále a která obsahuje body A a B, dotýkajíc se v bodu A křivky K. Tu jest zřejmo, že na této ploše bude se také nalezati bod C, jsa diametrálně protilehlý ku bodu A.

To bude platiti ovšem i pro mezní polohu bodu B ...[75]

Třetí část zadané úlohy je složitější. V jejím znění se totiž nijak nepředepisuje, jak se má bod B plochy po ní přibližovat k jejímu pevnému bodu A. T. Monin úlohu řešil jen pro případ – a to správně – že bod B se pohybuje

---

$$f(y^{(i)}) = 0, \quad i = 1, \ldots, N,$$

které určují křivku jednoznačně, jestliže hodnost této soustavy je N. Viz str. 309.

[72] ČPMF 11(1882), str. 236. Úloha je podepsána W., jejím autorem byl pravděpodobně Eduard Weyr.

[73] ČPMF 17(1888), str. 231–232.

[74] Tamtéž, str. 232.

[75] Tamtéž, str. 232.

k bodu A po normálním řezu v bodě A (tj. po průsečné křivce plochy s rovinou, která obsahuje normálu plochy v jejím pevném bodě A a prochází bodem B); výsledek pak okamžitě plyne z řešení první části úlohy. T. Monin své řešení popsal:

Abychom konečně ustanovili mezní polohy bodu C v případu posledním, mysleme si bodem A zcela libovolný normálný pronik. Bod C', který je limitou bodu C pro tento pronik, bude se nalezati na normále ve vzdálenosti AC', rovnající se dvojnásobnému poloměru křivosti, který v bodu A tomuto proniku přisluší. Poněvadž se pak středy křivosti všech normálných proniků nalezají na úsečce, omezené oběma hlavními středy křivosti plochy v bodu A, budou se mezní polohy bodu C nalezati na normále ve dvakrát tak velkých vzdálenostech od bodu A, jako jsou hlavní poloměry křivosti.[76]

V obecném případě pohybu bodu B se však jedná o limitu funkce dvou proměnných a při ní – jak je známo – to nemusí být jednoduché. Tento případ však T. Monin neřešil.

Poznamenejme, že dnes, kdy je syntetická geometrie téměř zapomenuta, bychom úlohu řešili patrně užitím analytické geometrie. Například řešení první části úlohy by mohlo vypadat takto:

Tečnu a normálu čáry Γ v bodě A zvolíme za osy x a y. Rovnice čáry Γ při oblouku s jako parametru braném od $s = 0$ v bodě A jsou

$$\begin{array}{ccccccccc} x(s) & = & s & + & & + & a_3 s^3 & + & \dots \\ y(s) & = & & & b_2 s^2 & + & b_3 s^3 & + & \dots \end{array}$$

Kolmice na AB v bodě B je $Y - y(s) = -\frac{x(s)}{y(s)}\big(X - x(s)\big)$, tudíž při $X = 0$ je

$$\overline{AC} = \frac{x^2(s) + y^2(s)}{y(s)} = \frac{1}{b_2} + (1),$$

takže

$$\lim_{B \to A} \overline{AC} = \frac{1}{b_2}.$$

Protože $x''(s) = (1)$, $y''(s) = 2b_2 + (1)$, je křivost k čáry Γ

$$k = \sqrt{x''^2(s) + y''^2(s)} = 2b_2 + (1),$$

tedy poloměr křivosti v bodě A (tj. při $s = 0$) je

$$R = \frac{1}{2b_2}.$$

Odtud již snadno plyne:

$$\lim_{B \to A} \overline{AC} = \frac{1}{b_2} = 2R.$$

[76] Tamtéž, str. 232.

V roce 1888 T. Monin publikoval v Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky článek *O konturách průmětů ploch stupně druhého* [M4],[77] v němž rozvedl výsledky článku V. Jeřábka *O geometrickém místu bodu, z něhož se promítá daná kuželosečka na danou rovinu co kružnice*, který byl uveřejněn v časopise *Archiv mathematiky a fysiky*[78] a v němž se autor věnoval jen centrálnímu promítání kuželosečky. T. Monin o své inspiraci napsal:

… ustanovil prof. Jeřábek geometrické místo bodů, z nichž se promítá nějaká křivka stupně 2*-ho na určitou průmětnu v křivku kruhovou. Tato úloha zavdává původ mnoha jiným, které vztahují se netoliko ku průmětům křivek, ale i ku konturám průmětů ploch stupně* 2*-ho.*[79]

Z hlediska vývoje syntetické geometrie se jedná o naprosto typický případ, který ukazuje, jak pracovalo mnoho geometrů v 19. století a na začátku 20. století, kdy reálné situace v syntetických úvahách beze všeho převáděli na imaginární.[80] Je však třeba připomenout, že autoři potřebovali velkou intuici a důmyslnost, aby obdrželi správné výsledky.

T. Monin si v úvodu článku položil následující úkol:

Mysleme si nějakou plochu stupně 2*-ho* P *a rovinu průmětnou* R*, a položme si za úlohu ustanoviti střed promítání tak, aby kontura průmětu plochy* P *vyhovovala určitým podmínkám.*[81]

V první části stanovil počet pevných a volitelných podmínek (parametrů), které ovlivní řešení:

Tu se ovšem namítá otázka, kolik takových podmínek může býti libovolně zvoleno. Rovina R *proniká plochu* P *v křivce stupně* 2*-ho* Q*, která opět proniká křivku konturní vzhledem k některému středu* s *ve dvou bodech; z toho plyne, že se průmět každé konturní křivky bude dvojnásob dotýkati křivky* Q*. To platí jak známo za dvě podmínky, takže další tři můžeme libovolně zvoliti.*[82]

Následně popsal řešení tří problémů – při dané kvadrice a dané průmětně s 2 danými body, resp. s 2 danými tečnami, resp. s danou přímkou jako polárou a daným k ní pólem určit střed projekce pro konturní čáru. Ocitujme na ukázku třetí případ:

V průmětně jest určen bod a *a přímka* A*; hleďme ustanoviti střed promítání tak, aby* a *byl polem přímky* A *vzhledem ku kontuře průmětu plochy* P*. To jest patrně s dvěma jednoduchými podmínkami equivalentní.*

---

[77] ČPMF 17(1888), str. 229–231.

[78] Archiv mathematiky a fysiky 2(1876), str. 104–108.

[79] ČPMF 17(1888), str. 229.

[80] Například T. Monin v článku píše: *Když jest* K *křivkou kruhovou, jsou* m, n *imaginárnými body kruhovými roviny* R*. Kdybychom chtěli pro tento případ ustanoviti geometrické místo středů promítání, tu si sestrojíme proniky plochy* P *s osnovou rovin stejnoměrných s průmětnou a určíme jejich ohniska. Podotknouti nutno, že při plochách s elliptickou indikatrix musíme stanoviti ohniska i pro imaginárné proniky. …*
Sem náleží případ zvláštní, kde přímky A *a* B*, protínající se v realném bodu* f*, jsou sdružené imaginárné, směřujíce k imaginárným bodům kruhovým roviny* R*.* Viz ČPMF 17(1888), str. 230.

[81] ČPMF 17(1888), str. 229.

[82] Tamtéž, str. 229.

Svazku rovin, jehož osou jest přímka A, odpovídá vzhledem ku ploše P projektivně řada polů, jejížto místem budiž přímka A'. Svazek přímek, který z bodu a promítá řadu A', jest ku svazku A projektivný a protíná jej v křivce stupně 2-ho, která jest hledaným místem geometrickým.

Kdyby byla dána podmínka, aby nějaký trojúhelník abc v průmětně byl polárným vzhledem ku kontuře průmětu plochy P, což jak známo třem prostým podmínkám odpovídá, tu bychom opakujíce předešlou konstrukci dvakrát, obdrželi dva body jako středy promítání.

Na tomto základě bychom ustanovili střed promítání, kdyby byly v průmětně určeny sdružené průměry neb osy kontury, ovšem jen co do polohy.[83]

Na závěr článku T. Monin připojil stručnou poznámku:

Kombinováním těchto tří případů obdržíme celou řadu úkolů, které spůsoby svrchu uvedenými dají se snadno řešiti. Nutno arci přihlížeti k tomu, aby počet podmínek nebyl překročen, aneb je-li překročen, aby řešení bylo možné, což se v každém případu zvlášť musí vyšetřiti.[84]

Moninův postup ve velmi specializovaném případu vypadá takto: Myslím si kulovou plochu K nad rovinou ϱ; střed a poloměr této kulové plochy označím S a r. Střed promítání O zvolím na kolmici v bodu S k promítací rovině ϱ tak, že je nad kulovou plochou K. Moninova konturní čára je pak kružnice k, jež je stopou na promítací rovině ϱ rotačního kužele, který má vrchol v bodu O a obaluje kulovou plochu K. Moninovu čáru Q z $\varrho \cap K$ není vidět, je to imaginární kružnice κ soustředná s kružnicí k. Podle T. Monina se kružnice k a κ dotýkají ve 2 bodech, neboť dvě soustředné kružnice – ať reálné, či imaginární – se dotýkají ve 2 nevlastních imaginárních bodech, jimž se pro jejich význačnost říká kruhové či absolutní.

Analyticky je věc velmi jednoduchá a zahrnuje jak reálnou, tak imaginární situaci.[85] Ke kvadrice F o rovnici (x_i je homogenní souřadnice)

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv \sum_{i,j=1}^{4} a_{ij} x_i x_j = 0$$

se opíše tečný kužel s vrcholem $O[x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0]$; jeho rovnice je

---

[83] Tamtéž, str. 230–231.

[84] Tamtéž, str. 231.

[85] Viz např. B. Bydžovský: *Úvod do analytické geometrie*, Nakladatelství Československé akademie věd, Praha, 1956. O kvadrikách, jejich klasifikaci a vlastnostech pojednávají kapitoly *Základní vlastnosti ploch druhého stupně* a *Středové a průměrové vlastnosti kvadriky* [paragrafy *117. Rovnice plochy; rovnice křivky*, *118. Rovnice plochy kvadratické*, *119. Kvadrika a přímka*, *120. Diskriminant kvadriky je roven nule*, *121. Rovina tečná*, *122. Rovina polární*, *123. Polárně sdružené body, roviny, přímky*, *124. Tečny z bodu ku ploše*, *125. Nevlastní body kvadriky*, *126. Střed kvadriky*, *127. Průměrové roviny kvadriky*, *128. Průměry kvadriky*, *129. Asymptotický kužel*, *130. Rovnice kvadriky v souřadnicích obyčejných*, *131. Rovnice kvadriky při transformaci souřadnic*, *132. Diskriminant orthogonálním invariantem*], str. 270–292, 296–313. Zájemce o výše uvedenou problematiku zde nalezne srozumitelný a podrobný výklad příslušné teorie.

$$F(x_i^0)\cdot F(x_i)-\frac{1}{4}\Big[x_1^0\cdot\frac{\partial F(x_i)}{\partial x_1}+x_2^0\cdot\frac{\partial F(x_i)}{\partial x_2}+x_3^0\cdot\frac{\partial F(x_i)}{\partial x_3}+x_4^0\cdot\frac{\partial F(x_i)}{\partial x_4}\Big]^2=0.$$

Za promítací rovinu ϱ zvolíme třeba $x_3 = 0$ a budeme vše řešit v ní. Řez kvadriky F s rovinou $x_3 = 0$ je kuželosečka $F(x_1, x_2, 0, x_4) = 0$. Stopa kužele

$$F(x_i^0)\cdot F(x_i)-\frac{1}{4}\Big[x_1^0\cdot\frac{\partial F(x_i)}{\partial x_1}+x_2^0\cdot\frac{\partial F(x_i)}{\partial x_2}+x_3^0\cdot\frac{\partial F(x_i)}{\partial x_3}+x_4^0\cdot\frac{\partial F(x_i)}{\partial x_4}\Big]^2=0$$

na rovině $x_3 = 0$ patří do svazku určeného touto kuželosečkou a dvakrát počítanou přímkou

$$x_1^0\cdot\frac{\partial F(x_i)}{\partial x_1}\Big|_{x_3=0}+x_2^0\cdot\frac{\partial F(x_i)}{\partial x_2}\Big|_{x_3=0}+x_3^0\cdot\frac{\partial F(x_i)}{\partial x_3}\Big|_{x_3=0}+x_4^0\cdot\frac{\partial F(x_i)}{\partial x_4}\Big|_{x_3=0}=0,$$

tedy se dvakrát dotýká řezu $F(x_1, x_2, 0, x_4) = 0$.

Dne 27. dubna 1888 T. Monin prostřednictvím F. Tilšera, profesora české techniky v Praze, předložil na zasedání mathematicko-přírodovědecké sekce Královské české společnosti nauk práci nazvanou *Příspěvky ku stanovení rovin tečných k plochám mimosměrek* [M6], která vyšla v témže roce ve *Věstníku* výše uvedené společnosti.[86]

Stručně a krátce řečeno, T. Monin svůj příspěvek věnoval konstrukci tečných rovin k přímkovým zborceným plochám.[87] Zborcená plocha je určena třemi řídicími křivkami A, B, C, jak vyplývá z Moninova připojeného názorného obrázku (viz str. 210). Z bodu $\alpha \in A$ se čára B, resp. C promítá kuželovou plochou. Průsečné přímky těchto dvou kuželů se společným vrcholem jsou přímky zborcené plochy určené řídicími čarami A, B, C. Nejjednodušší je případ, kdy tyto křivky jsou přímky; pak je zborcená plocha jednodílný hyperboloid (tedy kvadrika).

V 19. století byla výše uvedená problematika důležitou úlohou i v technické praxi, kdy se často sestrojovaly tečné roviny zborcené plochy S podle její přímky p, která seče řídicí čáry A, B, C v bodech a, b, c. Obvykle se to dělalo tak, že se v bodech a, b, c sestrojily tečny T_a, T_b, T_c k řídicím čarám A, B, C; spolu s přímkou p určovaly tyto tečny požadované tečné roviny (ovšem jen

---

[86] Věstník Královské české společnosti náuk, třída mathematicko-přírodovědecká, Praha, 1888, str. 210–222.

[87] Plochy, které jsou vytvořeny přímkami, rozdělujeme na rozvinutelné a zborcené. Velmi zhruba řečeno, dvě nekonečně blízké přímky rozvinutelné plochy se protínají (plocha tečen prostorové čáry s průsečíky infinitezimálně blízkých přímek na hraně vratu – tj. na té čáře). U rozvinutelných ploch se jedná o kuželovou nebo válcovou plochu či rovinu. Na zborcené ploše tento jev nenastává, zde jsou přímky mimoběžné. Z toho patrně vyplývá i Moninův termín *plocha mimosměrek*.

v bodech a, b, c). Zmíněné tři tečny stanovují tečný hyperboloid (který může přejít v hyperbolický paraboloid), jehož tečné roviny jsou i tečnými rovinami – aspoň přibližně – původní zborcené plochy.

Pro T. Monina nebyla tato problematika zcela nová, neboť se jí věnoval od počátku 80. let 19. století pod vlivem F. Tilšera, svého učitele deskriptivní geometrie. T. Monin o svém zájmu napsal:

Opíraje se o jednu přednášku prof. Tilšera, která týkala se stanovení rovin tečných ku ploše helikoidu kosoúhlého, odvodil jsem tytéž výsledky, ku kterým prof. Machovec … dospěl. Tyto sestavil jsem v článek nadepsaný „O dotýčných plochách zborcení největších a stejných odchylek“, který jsem již v roce 1881 redakci „Časopisu pro pěst. math. a fys.“ zadal, jenž však uveřejněn nebyl.[88]

Poznamenejme, že se v Moninově zdůvodnění postupů, jak bylo ve druhé polovině 19. století obvyklé u mnoha geometrů, prolínají reálné a imaginární útvary a vlastnosti prvních se při syntetických úvahách často přenášejí bez zdůvodnění na druhé. Obdobný problém s přesností lze najít i při práci s „infinitezimálně blízkými elementy“. Vytýkat T. Moninovi tento přístup však znamená vytýkat to celé generaci jeho současníků.

V úvodu práce T. Monin charakterizoval obsah svého článku těmito slovy:

Mysleme si nějakou plochu mimosměrek čili zbrocení $\tilde{S}$ stanovenou křivkami řídícími $\breve{A}$, $\breve{B}$, $\breve{C}$ a libovolnou přímku její $\overline{P}$, která protíná křivky řídící v bodech resp. a, b, c. Majíli se sestrojiti roviny tečné, které by se dotýkaly plochy $\tilde{S}$ v bodech přímky $\overline{P}$, užívá se k tomu cíli plochy hyperboloidu nebo hyperbolického paraboloidu $\tilde{H}$, která se podél přímky $\overline{P}$ plochy $\tilde{S}$ dotýká, určena jsouc bezprostředně tečnami $\overline{T}_{a',a}$, $\overline{T}_{b',b}$, $\overline{T}_{c',c}$ v bodech a, b, c ku křivkám řídícím, a ku ploše této se pak rovina tečná sestrojí; to děje se jak známo pomocí dvou jiných přímek soustavy $\overline{P}$ a vede tudíž ku konstrukci dosti složité. Oněmi $\overline{T}_{a',a}$, $\overline{T}_{b',b}$, $\overline{T}_{c',c}$ a přímkou $\overline{P}$ určeny jsou roviny tečné $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ ku ploše $\tilde{S}$ v oněch bodech přímky $\overline{P}$; jestliže si v každé z nich příslušným bodem dotýčným stanovíme libovolnou přímku resp. $\overline{Q}_a$, $\overline{Q}_b$, $\overline{Q}_c$, bude těmito přímkami jako útvary řídícími též dotýčná plocha libovolného hyperboloidu ${}^{\mu}\tilde{H}$ určena. Záležíť pak při sestrojování rovin tečných pod různými podmínkami ku plochám mimosměrek v příčině zjednodušení konstrukcí hlavně na volbě nových útvarů řídících.[89]

Pro popsanou konstrukci je ovšem nejlepší, když jsou řídicí čáry pro ni co nejvýhodnější. Pokud ne, pak je účelné přejít k jiným řídicím čarám. A to je právě jádro Moninovy práce, v níž se snaží řídicí křivky nahradit rovinnou stopou a obrysem čar, a to tak, aby to byly kružnice nebo dvojice přímek. O svém přístupu napsal:

[88] Věstník Královské české společnosti náuk, třída mathematicko-přírodovědecká, Praha, 1888, str. 217. T. Monin zmiňuje článek F. Machovce *Příspěvek k vlastnostem ploch mimosměrek*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 13(1884), str. 32–34.

[89] Věstník Královské české společnosti náuk, třída mathematicko-přírodovědecká, Praha, 1888, str. 210–211.

Netřeba snad ani obzvláště podotýkati, že zmíněné útvary pomocné, za které zvolíme křivky stopní a konturní, musejí se dáti snadno zobraziti, aby vedly k jednoduché konstrukci. Tomu lze vyhověti dvojím spůsobem: buď musí býti křivka stopní kruhovou aneb nahrazena dvěma přímkami; křivka konturní pak musí býti buď toho druhu, že průmětem jejím je křivka kruhová aneb sestávati ze dvou přímek, jež se ve dva body promítají. Kombinováním těchto případů obdržíme čtyři druhy dotýčných ploch, z nich některé k velmi jednoduchým a zajímavým výsledkům vedou.[90]

T. Monin se na závěr obecnějšího úvodu zmiňuje také o možnostech použití a o modifikaci svého postupu:

Jakkoli konstrukce v následujících odstavcích uvedené toliko na promítání orthogonálném jsou založeny, bude patrno, že se jich dá použíti i při promítání klinogonálném a centrálném s přiměřenou modifikací jejich významu prostorového.[91]

Moninova práce má úvod a čtyři nestejně dlouhé části. V první určuje tečné roviny zborcené plochy pomocí hyberboloidu, který se dotýká průmětny (tj. stopa se rozpadá na dvě přímky) a leží na něm dvě přímky kolmé k průmětně. Ty jsou vždy na hyperboloidu, protože jeho přímky obou osnov jsou rovnoběžné s jeho asymptotickým kuželem, kterým – poněvadž je kvadratický – se požadované přímky určí elegantně a jednoznačně. Teodor Monin úlohu popsal takto:

Mysleme si ve třech bodech a, b, c … libovolné přímky $\overline{P}$ *plochy zborcení* $\tilde{S}$ *stanoveny roviny tečné* $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, *čímž je též vzájemná poloha obou soumezných přímek* $\overline{P}$, ${}^1\overline{P}$ *určena. Při tom předpokládejme k vůli jednoduchosti výkladu, že průmětna* $\overline{\overline{M}}$ *obsahuje bod a. Přímky stopní* $\overline{M}_{\overline{A}}$, $\overline{M}_{\overline{B}}$, $\overline{M}_{\overline{C}}$ *oněch rovin tečných, jež ze známé příčiny náleží ku snovu přímek (svazku rovinnému) o středu a, zobrazeny buďtež stopnicemi* $\overline{M}_1^{A}$, $\overline{M}_1^{B}$, $\overline{M}_1^{C}$.[92]

Své řešení vyložil následujícím způsobem:

Pojímámeli přímku stopní $\overline{M}_{\overline{A}}$ *za jednu z přímek řídících soustavy druhé* $\overline{Q}_{\overline{a}} \equiv \overline{M}_{\overline{A}}$, *bude přímkami* $\overline{P}$, ${}^1\overline{P}$ *určeno nekonečné množství ploch hyperboloidů, které se průmětny dotýkají, poněvadž obsahují přímku* $\overline{Q}_a$. *Máli jedna taková plocha hyperboloidu* ${}^{\mu}\tilde{H}$ *obsahovati přímku* ${}^{\mu}\overline{P}$ *kolmou k průmětně, musí obraz její* ${}^{\mu}\overline{P}_1$ *nalezati se v krese* $\overline{Q}_1^a$ *a může býti jinak zcela libovolně zvolen, poněvadž jiná další podmínka vyslovena nebyla. Takto je přímkami* $\overline{P}$, ${}^1\overline{P}$, ${}^{\mu}\overline{P}$ *jako útvary řídícími určena plocha hyperboloidu, která dotýkajíc se průmětny, proniká ji mimo v* $\overline{Q}_a$ *ještě v jiné přímce* ${}^{\nu}\overline{P}$. *Tato přímka dá se velmi snadno zobraziti na základě následující úvahy. Obraz přímky soustavy druhé* $\overline{Q}_b$ *spojuje* ${}^{\mu}\overline{P}_1$ *s* b_1 *a poněvadž se* $\overline{Q}_b$ *nalézá v tečné rovině* $\overline{B}$, *bude stopník přímky*

[90] Tamtéž, str. 211.
[91] Tamtéž, str. 211.
[92] Tamtéž, str. 211.

$m_1^{\overline{Q}_b}$ *nalezati ve stopnici* $\overline{M}_1^{\overline{B}}$*; týmž spůsobem sestrojíme též stopník přímky* $\overline{Q}_c$*, načež spojením obou stopníků obdržíme obraz* ${}^{\nu}\overline{P}_1$ *přímky* ${}^{\nu}\overline{P}$*.*

Jakmile je tato přímka zobrazena, dá se stanoviti rovina tečná $\overline{D}$ *v libovolném bodu d přímky* $\overline{P}$ *zcela snadno tím, že si bodem d určíme přímku* $\overline{Q}_d$*, sestrojíme její stopník, jenž nalezá se v* ${}^{\nu}\overline{P}_1$ *a tímto pak vedeme stopnici* $\overline{M}_1^{\overline{D}}$ *příslušné roviny tečné.*[93]

Na závěr ještě připojil úvahu o použití jím navržené metody:

Mám za to, že spůsob tuto vyložený je ten nejjednodušší, kterým stanoviti lze roviny tečné ku plochám zborcení, zvláště v případu obecném, kde poloha $\tilde{S}$ *je zcela libovolnými třemi křivkami určena; ba i při ploše hyperboloidu v obecné poloze k průmětně dá se ho užíti s výhodou.*[94]

Pak ukázal využití navržené konstrukce při řešení úloh z technické praxe. Podrobněji zpracoval problém plochy šikmého průchodu a plochy helikoidu kosoúhelného (str. 213–214).[95]

Ve druhé části nazvané *Stanovení rovin tečných pomocí dotýčné plochy hyperboloidu orthogonálného* užil T. Monin k řešení problému tečného hyperboloidu, jehož dvě povrchové přímky jsou kolmé k průmětně a jehož stopa na ní je kružnice. Připomeňme, že hyperboloid má dva systémy reálných kružnic. Po výkladu základní metody ukázal její použití na problému plochy šikmého průchodu a helikoidu kosoúhlého (viz str. 214–220). Právě v této části můžeme narazit na prolínání reálných a imaginárních útvarů a jejich vlastností (viz str. 219–220).

Ve třetí části *Stanovení rovin tečných pomocí plochy hyperboloidu, která dotýká se průmětny a má kruhovou konturu* a ve čtvrté části *Stanovení rovin tečných pomocí dotýčné plochy hyperboloidu rotačního*, jak je ze samotných názvů patrné, řešil dosti speciální případy, o nichž napsal:

Tento spůsob stanovení rovin tečných nevyrovná se ovšem co do jednoduchosti a přesnosti prvým dvěma a nedá se ho také ani při zvláštních polohách mimosměrek použíti s výhodou; z té příčiny se o něm dále šířiti nebudu.[96]

Poznamenejme, že Moninova terminologie je někdy hodně vzdálena dnešku, proto se jeho článek nečte příliš dobře. Například pro plochu zborcenou užívá v souladu s českou terminologií druhé poloviny 19. století termín plocha mimosměrek, pro plochu šroubovou termín helikoid, pro nevlastní přímku či rovinu termín přímka či rovina smíru a připojuje také označení úběžná. V posledním případě, vzhledem k tomu, jak se chovají větve hyperboly a její asymptoty, je Moninovo pojmenování přímo básnické.

Z celého článku je patrné, že T. Monin měl široké znalosti světové literatury a na rozdíl od většiny svých současníků (nejenom českých) dokázal využité

---

[93] Tamtéž, str. 211–212.

[94] Tamtéž, str. 212–213.

[95] Helikoid je plocha šroubová, kosoúhelný značí kosoúhlý.

[96] Tamtéž, str. 221.

zdroje citovat. Z pohledu dnešní doby je překvapivé, jak byl třicetiletý, začínající matematik sečtělý, jaký měl rozhled v odborné literatuře a to nejenom v oblasti, která ho zajímala. Čtenáře svých článků odkazoval na monografie doplňující a rozšiřující studovanou látku.[97] Mohl by být vzorem pro dnešní studenty, doktorandy a začínající odborné pracovníky.

2. PRÁCE Z ANALYTICKÉ GEOMETRIE

Roku 1889 vydal Teodor Monin na vlastní náklady svoji jedinou monografii nazvanou *O některých druzích souřadnic projektivických. Příspěvky ku theorii křivky kruhové* [M7], která se skládala ze dvou odlišných částí. Z předmluvy vyplývá, že první část byla hotova v roce 1886 a druhá již v roce 1883, ale že měl T. Monin problémy s jejich vydáním. O okolnostech vzniku spisu napsal:

V pojednání tomto, které jsem již před třemi lety z velké části měl připraveno k tisku … Chtěje uveřejniti je, prosil jsem pana prof. Eduarda Weyra za laskavé dobrozdání, jenž mne upozornil na jedno pojednání Hesseovo, jednající o geometrické korrespondenci mezi body roviny a páry bodovými na přímce. …

Druhé pojednání … podal jsem již asi před 6 lety do redakce časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky se žádostí, aby mi byl rukopis vrácen, nebude-li článek uveřejněn. Na to dostalo se mi ujištění, že článek bude vytisknut, že jest však nutno obrazce upraviti pro dřevoryt. Když jsem tak učinil a připojil úvod, zůstalo vše při starém. Tak jsem konečně shledal, poučen také jednáním o publikaci pojednání předešlého, že bych na uveřejnění marně čekal, z kteréžto příčiny jsem si vzal rukopis zpět a odhodlal se vydati jej vlastním nákladem.[98]

---

[97] T. Monin se ve výše uvedeném článku odvolával na nejrůznější starší i nejnovější učebnice a monografie, ale i na starší časopisecké články. Jako hlavní inspirační zdroje uvedl: W. Fiedler: *Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage*, Dritte erweiterte Auflage, II. Teil. *Die darstellende Geometrie der krummen Linien und Flächen*, Teubner, Leipzig, 1883, 1888; J. de la Gournerie: *Traité de géométrie descriptive*, Gauthier-Villars, Paris, 1875; A. Mannheim: *Cours de géométrie descriptive de l'École polytechnique, comprenant les éléments de la géométrie cinématique*, Gauthier-Villars, Paris, 1880; G. Salmon: *Analytische Geometrie des Raumes. Deutsch bearbeitet von W. Fiedler. I. Die Elemente und die Theorie der Flächen zweiten Grades*, 3te Auflage, Teubner, Leipzig, 1879; A. Schönflies: *Syntetisch geometrische Untersuchungen über Flächen zweiten Grades*, Inaugural-Dissertation, Berlin, 1877; J. Steiner: *Gesammelte Werke*, Herausgegeben von K. Weierstrass. Band I., G. Reimer, Berlin, 1881; Em. Weyr: *Geometrie der räumlichen Erzeugnisse ein- zwei-deutiger Gebilde, insbesondere der Regelflächen dritter Ordnung*, Teubner, Leipzig, 1870; A. Schönflies: *Ueber ein specielles Hyperboloid und andere mit ihm zusammenhängende Regelflächen*, Zeitschrift für Mathematik und Physik 23(1878), str. 269–285; H. Schröter: *Ueber ein einfaches Hyperboloid von besonderer Art*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 85(1878), str. 26–79. Dále odkazoval na práce J. P. M. Bineta, A. Cayleyho, L. Cremony, M. Chaslesa, W. Fiedlera, F. Machovce, A. Olivera, E. D'Ovidia, H. Schrötera, F. Tilšera aj.

[98] Předmluva, str. III., V.

Proto je dosti překvapivé, že jeden exemplář knihy T. Monin věnoval Jednotě českých mathematiků.[99]

První část *O některých druzích souřadnic projektivických* (108 stran) se skládá z pěti částí, které jsou dále podrobněji členěny:

I. Určení prvku v základním útvaru prvořadém (str. 1–4),
II. Určení prvků v základním útvaru řádu druhého (str. 4–22),
III. Určení prvků v základním útvaru řádu třetího (str. 22–48),
IV. Určení prvku v základním útvaru řádu čtvrtého (str. 49–88),
V. Poznámky (str. 89–108).

Teodor Monin se pokusil popsat zvláštní projektivní souřadnicový systém, který by se dal dobře využít ke studiu a popisu vzájemné polohy prostorových křivek 3. stupně a ploch 2. stupně. Na základě výsledků Emila Weyra (1848–1894),[100] Ludwiga Otty Hesseho (1811–1874)[101] a Williama Rowana Hamiltona (1805–1865)[102] pojednal o stanovení polohy bodu a přímky v rovině pomocí kuželosečky, resp. prostorové křivky, resp. jednodílného hyperboloidu. Velkou pozornost věnoval také transformacím souřadnic.

Zamýšlel sepsat delší pojednání, ale od svého záměru po prostudování dostupné zahraniční literatury ustoupil a ukončil první část spisu šesti delšími poznámkami:

Původně měl jsem též připraveno krátké pojednání o binárních formách na křivce prostorové st. 3., od jehož uveřejnění jsem však upustil, když seznal jsem obšírné práce o tomto předmětu, jež napsali pánové Sturm, Pittarelli, d'Ovidio, Appell. Toliko o involutorných vlastnostech svazku komplexů řádu 3., který je základní křivkou určen, zmiňuji se v poznámce 4., poněvadž jsem je nikde nenašel. K poznámce 5. podotýkám, že stanovení bodu na ploše hyperboloidu nalezl jsem též v nejnovějším 3. vydání spisu Fiedlerova „Die darstellende Geometrie". … K poznámce 6. mi zavdala původ geometrická korrespondence, o které jedná Reye ve své knize „Geometrie der Lage" …

Druhá část monografie nazvaná *Příspěvky ku theorii křivky kruhové* (35 stran) se skládá z úvodu a čtyř paragrafů:

I. Věty o odchylkách křivek kruhových (str. 111–118),
II. Potence přímky (str. 118–128),
III. Věty o délkách společných tečen křivek kruhových (str. 129–133),
IV. Věta Caseyho a její analogon (str. 134–143).

---

[99] Tento exemplář je uložen v knihovně Matematického ústavu AV ČR v Praze. Titulní list s věnováním je otištěn v obrazové příloze této publikace.

[100] Emil Weyr: *Über rationale Curven*, Sitzungsberichte der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften, 2. Abth., 1872, str. 9–43, 77, 81.

[101] Ludwig Otto Hesse: *Ein Uebertragungsprincip*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 66(1866), str. 15–21.

[102] William Rowan Hamilton: *Elemente der Quaternionen*, německý překlad Paul Glan, 1. a 2. díl, Johann Ambrosius Barth, Leipzig, 1882, 1884, 746 + 436 stran. T. Monin čerpal inspiraci zejména v 1. díle (viz str. 29 a 69).

Text je doplněn „tabulí“ obsahující sedm pečlivě vypracovaných názorných obrázků.

Ve druhé části monografie se zabýval úlohami, v nichž se hledaly kružnice nebo kulové plochy splňující jisté předem stanovené podmínky. Inspiraci čerpal v pracích G. Monge (1746–1818), J. V. Ponceleta (1788–1867), J. D. Gergonnea (1771–1859), P. Ch. F. Dupina (1784–1873), J. Steinera (1796–1863), J. Plückera (1801–1868), G. F. Frobenia (1849–1917), J. G. Darbouxa (1842–1917), W. Fiedlera (1832–1912) aj.

Již dříve bylo naznačeno, že T. Monin ve svých čtyřech pracích uveřejněných v Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky a ve Věstníku Královské české společnosti náuk ukázal, že dobře ovládá syntetické metody; v této knize předvedl totéž o analytických postupech v geometrii. Byl velmi dobře obeznámen s literaturou. Dokládá to množství (bohužel mnohdy neúplných) citací. Na stranách 109 až 110, v předmluvě ke druhému pojednání, připomíná, co napsal J. Steiner v úvodu své práce *Einige geometrische Betrachtungen*:[103]

... že se mu podařilo mimo úlohu Apollonickou řešiti celou řadu úloh obecnějších, týkajících se odchylek křivek kruhových; při tom podotýká, že má již po dvě léta k tisku připravený spis 25–30 archů silný, který o těchto úlohách jedná.[104]

T. Monin dále pokračuje:

Dílo to však netoliko že nevyšlo, ale ani rukopis jeho se nenašel, když působením pruské akademie věd byly v r. 1880 spisy jeho souborně vydány (Jakob Steiner's gesammelte Werke).[105]

Množství úloh zobecňující nebo modifikující Apolloniův problém o kružnici, která se dotýká tří daných kružnic, řeší jak T. Monin, tak J. Steiner. Ačkoliv každý, kdo se zabývá geometrií kružnic, by neměl přes Moninovo pojednání přejít, je znám jen jeden český autor, který T. Monina citoval – totiž Jan Sobotka (1862–1931).[106] T. Monin byl vůbec první, kdo v české literatuře psal o větě spojené s jejím autorem – tj. o Caseyově větě (viz J. Casey: *Equations and properties: 1. of the system of circles touching 3 circles in plane; 2. of spheres touchnig 4 spheres in space; 3. of circles touching 3 cirles*

[103] Journal für die reine und angewandte Mathematik 1(1826), str. 161–184, 254–288. Poznamenejme, že Steinerovu práci znovu vydal R. Sturm se svými poznámkami v edici Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, svazek 123, Leipzig, 1901, 125 stran.

[104] [M7], str. 109–110.

[105] [M7], str. 110. Rukopis byl nalezen až o mnoho let později; vydali jej R. Fueter a F. Gonseth s titulem *J. Steiner: Allgemeine Theorie über das Berühren und Schneiden der Kreise und der Kugel*, Zürich-Leipzig, 1931, XVIII + 345 stran. Stručné hodnocení tohoto spisu viz Zentralblatt für Mathematik 1(1931), str. 288–289; Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 57(1939), str. 1305–1306.

[106] J. Sobotka: *O některých relacích metrických a jejich užití k analytickému řešení problému Apollonickému*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 41(1912), str. 487–500; Moninova monografie je citována na straně 493.

on a sphere; 4. of conics touching 3 conics in plane).[107] Z českých autorů následoval T. Monina ve studiu Caseyovy věty[108] jedině J. Sobotka. Přitom je Caseyova věta velmi významným zobecněním Ptolemaiova teorému, který je vůbec základní pro celou geometrii kružnic. Je třeba vyslovit politování, že Moninovo pojednání úplně zapadlo a dnes je i jeho autor zapomenut.

V následujících odstavcích se podíváme na několik inspirativních míst Moninovy monografie. Zaujmeme také stanovisko ke kritice otištěné ve dvou zajímavých recenzích.

Roku 1890 byla v časopise Athenaeum[109] uveřejněna stručná, ale výstižná recenze Moninovy monografie, jež byla podepsána šifrou *K-r*. Jejím autorem musel být geometr, který obsahu studie dobře rozuměl.[110]

Celý spis, jak podle názvu patrno, obsahuje dvě pojednání. V prvním vykládá p. spisovatel způsob, jakým lze stanoviti polohu prvku v útvaru geometrickém jedno až čtyřřadém – za útvar čtyřřadý pokládá p. sp. souhrn všech přímek v prostoru. – Jak složitě se stanovení toto děje, patrno již z toho, jak určují se prvky rovinné. Na pevné kuželosečce K volí tři body z, z', z'' za útvary základní. Každý jiný bod této kuželosečky x' jest určen dvojpoměrem $(zz'z''x')$, který nazývá p. sp. parametrem bodu x' a označuje písmenem x'. Dva takové parametry x' a x'' stačí, aby definovaly souřadnice přímky $\overline{x'x''}$ a to takto

$$\frac{\xi_1}{\xi_0} = \frac{x' + x''}{2}, \qquad \frac{\xi_2}{\xi_0} = x' \cdot x'', \quad \textit{kde} \quad \xi_0, \xi_1 \ \textit{a} \ \xi_2$$

jako právě souřadnice přímky $\overline{x'x''}$. Podobně jsou vyvozeny souřadnice bodu. Jaké výhody poskytuje takto zavedený systém souřadnic, o tom nečiní p. sp. zmínky. Vyloživ podrobně obdobné systémy souřadnic též pro ostatní útvary prostorové, přičiňuje sice p. sp. některé poznámky a věty v oddílu V., kteréžto však výsledky jsou v nepoměru k umělým a namáhavým prostředkům.

Druhé pojednání v tomto ohledu jest lepší prvého. Sestaveno tu několik vět o křivce kruhové, které většinou již dříve byly uveřejněny, celkem však málo jsou známy. Tak sluší zmínit se především o větách Caseyově a Darbouxově, jimiž řeší p. spis. problém Apolloniův.

Chvalitebnou jest snaha, která byla věnována na vnitřní i vnější uspořádání celé knihy.

---

[107] Proceedings of the Royal Irish Academy 9(1864–1866, vydáno roku 1867), str. 396–423. Poznamenejme, že autorem věty byl irský matematik John Casey (1820–1891), který sepsal šest oblíbených učebnic geometrie, jimž se dostalo značného rozšíření díky řadě vydání.

[108] Podrobněji viz dále.

[109] K-r.: *Theodor Monin: O některých druzích souřadnic projektivických. Příspěvky ku theorii křivky kruhové. V Praze, nákladem vlastním*, Athenaeum. Listy pro literaturu a kritiku vědeckou 7(1889/90), č. 6 z 15. 3. 1890, str. 172.

[110] Je pravděpodobné, že autorem recenze byl Karl Josef Küpper (1828–1900), deskriptivní geometr na německé technice v Praze, který mluvil a psal německy i česky, s českými matematiky se přátelil a o problematiku projektivních souřadnicových systémů se zajímal.

Roku 1891 otiskl Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky rozsáhlou a velmi podrobnou recenzi Moninovy monografie, kterou sepsal František Machovec.[111] Pro hlubší porozumění Moninově práci je tato recenze velmi podnětná, a proto ji otiskujeme v plném znění.[112]

Pan spisovatel, dosud známý jen několika málo krátkými pojednáními, podává tímto českým mathematikům větší spis, vynikající bohatostí obsahu, původností myšlének a důležitostí předmětu, o němž pojednává. Spis složen jest ze dvou částí na sobě nezávislých: první pojednává na 108 str. o souřadnicích projektivických, druhá na 35 str. podává příspěvky ku theorii křivky kruhové. Vylíčím v krátkosti obsah obou dílů a přičiním některé poznámky.

V první části p. spisovatel ukazuje, jak lze určiti polohu bodu na přímce, polohu bodu a přímky v rovině a polohu bodu, přímky a roviny v prostoru. Bod na přímce určuje obvyklým způsobem jeho dvojpoměrem vzhledem ke třem bodům základním. K určení polohy bodu a přímky v rovině myslí si v této rovině kuželosečku K_2 *a na ní tři základní body a tečny v těchto bodech. Každá přímka v rovině má s* K_2 *dva realné různé, nebo splývající, nebo imag. průsečíky, které určeny jsou svými dvojpoměry* x' *a* x'' *vzhledem k bodům základním. Podobně jest určen každý bod dvojpoměry* ξ' *a* ξ'' *tečen z něho ku* K_2 *sestrojených vzhledem k tečnám základním. Kdybychom pokládali za souřadnice přímky nebo bodu dvojpoměry* x' *a* x'' *resp.* ξ' *a* ξ''*, jak to Dr. Emil Weyr v pojednání „Ueber rationale Curven“ uveřejněném král. spol. nauk r. 1872 učinil, obdrželi bychom symetrický system souřadnic, který by měl dvě vady: reálné přímce nebo bodu mohly by náležeti imag. souřadnice a stupeň křivky neshodoval by se se stupněm její rovnice. Proto pokládá pan spisovatel za souř. přímky čísla* ξ_0, ξ_1, ξ_2 *určené rovnicemi*

$$\frac{\xi_1}{\xi_0} = \frac{x' + x''}{2} \quad a \quad \frac{\xi_2}{\xi_0} = x'x''$$

a podobně vytvořená čísla x_0, x_1, x_2 *za souřadnice bodu. Tím dospívá k určení bodu v rovině, které velmi úzce souvisí se stanovením bodů roviny dvojinami bodů na přímce, které podal Hesse ve článku „Ein Übertragungsprincip“ (Crelle J. sv. 66.). Podmínka, aby* x_k *byl na přímce* ξ_k*, vyjadřuje se potom rovnicí*

$$\xi_0 x_2 - 2\xi_1 x_1 + \xi_2 x_0 = 0,$$

[111] František Machovec (1855–1892) působil na různých českých středních školách jako profesor matematiky a deskriptivní geometrie. Od roku 1892 suploval přednášky z deskriptivní geometrie na české technice v Praze. Napsal několik geometrických prací, které uveřejnil v Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky, Zprávách Královské české společnosti nauk, Rozpravách České akademie pro vědy, slovesnost a umění a časopise Archiv für Mathematik und Physik. Samostatně vyšla jeho monografie *Zobrazování tečen a středů křivosti křivek* (JČM, Praha, 1883, 139 stran) a učebnice *Algebra pro vyšší třídy škol středních* (F. Tempsky, Praha, 1886, 423 stran; vydání pro gymnázia – 1. vydání, Praha, 1886, XII + 411 stran; 2. vydání, Praha, 1888, X + 301 stran). V osmdesátých letech 19. století patřil mezi přední české znalce moderní geometrie.

[112] F. Machovec: *O některých druzích souřadnic projektivických. Příspěvky ku theorii křivky kruhové. Napsal Theodor Monin, assistent při c. k. českých vys. šk. techn. V Praze. Nákladem vlastním. V komissi knihkupectví Ed. Valečky. Cena 1 zl. 50 kr. r. m.*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 20(1891), str. 220–226.

která tedy v této soustavě souřadnicové značí přímku nebo bod dle toho, pokládáme-li souřadnice x_k nebo ξ_k za proměnlivé.

Od těchto souřadnic přechází p. spisovatel k souřadnicím trojbodovým a trojpřímkovým způsobem i jinde užívaným, ukazuje totiž, že rovnici každé přímky roviny lze psáti ve tvaru

$$\eta_1\alpha + \eta_2\beta + \eta_3\gamma = 0,$$

značí-li $\alpha = 0$, $\beta = 0$ a $\gamma = 0$ rovnice tří libovolných přímek v soustavě K_2, načež vyšetřuje význam čísel η_k. Tím dospívá ku geometrickému významu jejich, od něhož se v souřadnicích trimetrických obyčejně vycházívá.

Vyšetřiv ještě podmínku $\sum_{i=1}^{i=3} \eta_i y_i = 0$, aby bod y_i byl na přímce η_i, provádí transformaci souřadnic K_2 na trimetrické a naopak, jakož i souřadnic K_2 na K_2'.

Pro stanovení bodu a roviny v prostoru myslí si p. spisovatel prostorovou křivku třetího řádu K_3 a na ní tři body základní s oskulačními rovinami této křivky. Každý bod a každá rovina oskulační křivky K_3 určena jest jednoznačně svým dvojpoměrem vzhledem ke třem bodům, resp. rovinám základním.

Libovolná rovina nebo bod prostoru určeny jsou potom dvojpoměry – $x^{(k)}$ nebo $\xi^{(k)}$ tří bodů resp. rovin oskulačních křivky K_3 v té rovině ležících nebo bodem procházejících. Za souřadnice roviny pokládá p. spisovatel čísla ξ_0, ξ_1, ξ_2 vyhovující rovnicím

$$\frac{\xi_1}{\xi_0} = \frac{x' + x'' + x'''}{3}, \quad \frac{\xi_2}{\xi_0} = \frac{x'x'' + x''x''' + x'''x'}{3}, \quad \frac{\xi_3}{\xi_0} = x'x''x'''$$

a podobně vytvořená čísla x_0, x_1 a x_2 za souřadnice bodu. Pro body křivky K_3 platí potom známé relace

$$x_k = x^k$$

a podobně pro roviny oskulační

$$\xi_k = \xi^k,$$

jichž užil již Cremona (Annali di mathematica T. I.) a současně s ním Joachimsthal v poznámce připojené k pojednání Schröterovu „Ueber Raumcurven 3. Ordn. und 3. Cl." v 56. svazku Crellova žurnálu; v tomto pojednání jest též užito k určení roviny parametrů tří bodů, jež tato rovina stanoví na K_3.

Podmínka, aby bod x_k byl v rovině ξ_k má pro souřadnice K_3 tvar

$$x_0\xi_3 - 3x_1\xi_2 + 3x_2\xi_1 - x_2\xi_0 = 0,$$

kteráž jest rovnicí bodu nebo roviny v této soustavě dle toho, pokládáme-li za proměnlivé ξ_k nebo x_k. K odvození této rovnice užito jest vlastností involuce třetího stupně a druhé třídy, kterou roviny procházející bodem stanoví na K_3. Podotýkám, že podobným způsobem bylo lze pokračovati při odvozování příslušné relace v souřadnicích K_2. Po výkladu zvláštních poloh bodů a rovin ku K_3 následuje určení polohy bodu a roviny pomocí hyperboloidu jednodílného H.

Vytkneme-li v každé soustavě přímek této plochy tři přímky P_k a Q_k, jest každá čtvrtá přímky P resp. Q stanovena jednoznačně svým dvojpoměrem p resp. q vzhledem k základním přímkám téže soustavy. Parametry p a q dvou projektivných soustav $p = q$ spojeny jsou rovnicí

$$\xi_o pq + \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_3 = 0$$

a výtvorem těchto soustav jest křivka 2. řádu, která jest čísly ξ_k úplně určena. Těmito veličinami jest tedy určena i její rovina, jakož i vrchol v plochy kuželové, která se v této křivce dotýká zákl. hyperboloidu. Z té příčiny lze čísla ξ_k pokládati za souřadnice roviny této křivky i za souřadnice bodu v. Podmínka, aby bod x_k byl na přímce ξ_k má i tu tvar bilineárný

$$\xi_o x_3 - \xi_1 x_2 - \xi_2 x_1 + \xi_3 x_0 = 0.$$

Následuje přechod od souřadnic K_3 a H k tetrametrickým a transformace soustavy tetrametrické na soustavy K_3 a H, jakož i na soustavy K_3 na K_3' a K_3 na H.

Souřadnice K_2 hodí se dobře pro geometrii na kuželosečce, souřadnice K_3 pro geometrii na prostorových křivkách 3. řádu a konečně souřadnice H pro geometrii na hyperboloidu a na plochách 2. stupně vůbec.

Ve čtvrtém dílu jest pojednáno o určení přímky v prostoru. Její souřadnice odvozeny jsou nejprvé ze souřadnic rovin a bodů vzhledem ku K_3 a H, potom ze souřadnic tetrametrických, při čemž přihlíženo jest zajímavým způsobem ke zvláštním polohám přímky K_3 a H. Nelze zde vypočísti všecky zajímavé úvahy této pro theorii paprskových komplexů velmi důležité části, budiž jen ještě poukázáno na odstavec jednající o rovnici přímky a o příslušných transformacích, kde p. spisovatel vhodně zvolenými symboly elegantně přemahá značné obtíže tu se vyskytující. V šesti připojených poznámkách jsou jednak dodatky k odst. předcházejícím, jednak podáno jest v nich praktické užití souřadnic z předu vyložených. K druhému druhu náleží zejména poznámka 4. o dvojpoměru čtyř tečen křivky třetího řádu, které určitou přímku protínají,[113] *poznámka 5., v níž mimo jiné odvozeny jsou dvě věty o křivkách 3. řádu na hyperboloidu poprvé Cremonou dokázané, jež také referent ve své práci „O jisté*

[113] *K této poznámce připojuje p. spisovatel, že dvojpoměr těchto čtyř tečen vyšetřoval Voss ve XIII. svazku „Math. Annalen“, což se nám zdá spočívati na omylu. Voss v této práci dokazuje, že čtyři tečny křivky K_3 nejsou na sobě nezávislé; přímky, které s danými třemi přímkami mohou býti tečnami křivek třetího řádu tvoří komplex 4. stupně.*

kubické transformaci", jednoduchým způsobem odvodil, a konečně poznámka 6. o geometrické korrespondenci mezi soustavou prostorovou a řadou 2. stupně, resp. svazkem 2. třídy. —

Že tento bohatý obsah bylo možno vtěsnati jen na 108 stran, vysvětluje se tím, že p. spisovatel při vší jasnosti dbal stručnosti co možná největší a že užíval v hojné míře symbolických označení. V některých místech zdá se nám, že by nebylo na úkor spisu připojiti vedle důvodů ryze počtářských i důvody geometrické; referent nemohl by si toho odepříti na př. při některých vlastnostech nullového systemu, ale uznává, že jest to věcí vkusu a záliby.

Z celého spisu jest zřejmo, že p. spisovateli nešlo o odvození jednotlivostí a vět, nýbrž o methodu zkoumání, která jest v první řadě podmíněna vhodnou volbou souřadnic. A tím právě pluje p. spisovatel proudem nejmodernějším. Komu by se zdálo, že spis obsahuje málo výsledků, nebo že ukázáno jest použití theorie jen na málo příkladech, tomu uvádíme na mysl pěkná slova záhy zesnulého Dr. Herm. Hankela v přednášce „o vývinu mathematiky v posledních stoletích" konané v Tübingách r. 1869: Einzelne sogenannte „hübsche Sätze" haben an und für sich in den Augen eines modernen Mathematikers noch weniger Wert, als für den wissenschaftlichen Botaniker die Entdeckung einer neuen „hübschen Blume", obgleich dem Laien gerade hierin der Hauptreiz der betreffenden Wissenschaft zu liegen pflegt. –

Druhé pojednání skládá se ze čtyř dílů. První pojednává o odchylkách kružnic, druhý o potenci přímky ke kružnici, třetí o délkách společných tečen kružnic a čtvrtý o větě Caseyově a větě, již vyslovil Darboux.

V prvním díle odvozeno jest nejprve způsobem Plückerovým (Analytisch geom. Entwickelungen) několik vět o kružnici potenční dvou kružnic a o síti kružnic, z nich každá protíná dvě kružnice pod stejnými úhly. K těmto větám připojeny jsou věty o soustavě kružnic, které protínají každou kružnici jistého svazku pod stejnými úhly; soustavu těchto kružnic jmenuje p. spisovatel soustavou konickou. Ukázáno jest dále, jak lze užiti těchto výsledků k řešení úlohy Apolloniovy a obecnější úlohy: sestrojiti kružnici, která s každou z daných tří kružnic tvoří daný úhel. Při řešení této úlohy nebylo užito inverse kruhové, jak to činí na př. Fiedler ve svém spise „Cyklographie". Ve druhé části zavádí p. spisovatel nový pojem „potenci přímky ke kružnici". Touto potencí jmenuje výraz

$$\frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}}=1-\frac{\varrho^2}{d^2}=-\tan^2\varphi,$$

v němž α a β značí úhly sevřené tečnami A a B ze kteréhokoli bodu přímky P ke kružnici vedené, ϱ pol. kružnice, d vzdálenosť středu kružnice od přímky a φ reálný nebo imag. úhel sevřený přímkou a kružnicí. O tomto výrazu, jejž symbolicky označuje (PAB), ukazuje p. spisovatel, že jej lze z přímkové rovnice kružnice podobným způsobem odvoditi, jako potenci bodu ke kružnici z její rovnice bodové.

Pro každé dvě inversně homologické tečny A a B dvou kružnic a pro jejich chordálu P má výraz (PAB) touž hodnotu, z čehož jde, že každé dva páry inversně homologických tečen dvou kružnic dotýkají se jisté kružnice.

Všecky kružnice, které tímto způsobem z jednoho páru inversně homologických tečen obdržíme, stanoví s danými dvěma kružnicemi tečny (na př. zevnější) stejné délky a naopak, stanoví-li nějaká kružnice s dvěma danými kružnicemi na př. zevnější tečny stejné délky, jsou tyto tečny inversně homologické vzhledem k vnějšímu středu podobnosti. Vět těchto užívá potom p. spisovatel ve třetí části k řešení úloh, které vyplývají z úloh první části, vyměníme-li v nich požadavek rovnosti úhlů požadavkem rovnosti tečen, tedy na př. k řešení úlohy: Jsou dány čtyři kružnice; sestrojiti kružnici, která se všemi stanoví tečny (na př. vnější) stejné délky a sestrojiti kružnici, která se třemi danými kružnicemi stanoví společné tečny určitých délek.

V oddílu čtvrtém dokázána jest jednoduchým způsobem věta Caseyho o závislosti délek spol. tečen dvou a dvou ze čtyř kružnic, které se dotýkají kružnice páté a věta Darboux-ova o závislosti odchylek dvou a dvou těchto kružnic. Vět těchto použito jest k řešení úlohy Apolloniovy podobným způsobem jako v Salmon-Fiedlerově „Anal. Geom. der Kegelschnitte“ (str. 152, 4. vyd.).

K tomu připojeny jsou ještě některé výsledky plynoucí ze vzájemné polohy čtyř kružnic a pojednání ukončeno jest úlohou:

Sestrojiti jest kružnici dané lineárné řady, která s danou kružnicí stanoví společné tečny určité délky.

I při tomto pojednání bylo lze bohatý obsah vpraviti na několik stran jen největší stručností. Vysvitne to již srovnáním této 35stránkové s 263 stránkovým spisem Fiedlerovým „Cyklographie“, jehož značná část věnována jest témuž předmětu. Někde spisovatel pro krátkosť potlačil i důkazy tvrzení, jejichž pravdivosť není snadno patrna. Jmenujeme v té příčině jmenovitě tvrzení v odst. 2. o potenčních kružnicích tří kružnic po dvou vzatých a některé výroky o sítích, souřadích a řadách kružnic.

Poznamenávám pro čtenáře této práce, že mnohé výsledky v ní uvedené lze snadno dokázati, zavedeme-li podle souřadnic kulových, jichž Reye ve svém krátkém, ale obsažném spise o synthetické geometrii plochy kulové a v pojednání o kulových komplexech uveřejněných v r. 1886 v Crellově žurnálu užil, za souřadnice kružnice

$$x^2 + y^2 - 2px - 2qy + \Pi = 0$$

čísla ξ_0, ξ_1, ξ_2 a ξ_3 vyhovují rovnicím

$$\frac{\xi_1}{\xi_0} = p, \quad \frac{\xi_2}{\xi_0} = q \quad a \quad \frac{\xi_3}{\xi_0} = \Pi.$$

Rovnice lineárné sítě kružnic jest potom $\sum_{k=0}^{k=3} a_k\xi_k = 0$, kvadratické sítě $\sum_{i,k=0}^{i,k=3} a_{ik}\xi_i\xi_k = 0$ atd. Dvě rovnice 1. druhu stanoví svazek kružnic, soustavu *konickou lze určiti rovnicí linearnou a kvadratickou atd. Rovnice soustavy kružnic, z nichž každá dvě dané kružnice pod úhly stejných cosinů protíná, jest*

$$(\Pi''r')\xi_0 + 2(p'r'')\xi_1 + 2(q'r'')\xi_2 + (r' - r'')\xi_3 = 0,$$

rovnice soustavy kružnic protínajících danou kružnici pod úhly, jejichž cosinus $= k$, *má tvar*

$$k^2(\xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_0\xi_3) = (a_0\xi_0 + a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + a_3\xi_3)^2,$$

jemuž podobná jest rovnice soustavy kružnic určujících s danou kružnicí tečny stejné délky.

Končím referát svůj o výborné této práci poznámkou, že p. spisovatel vydal ji nákladem vlastním a že zajísté nebude z ní míti hmotného prospěchu. Přeji mu, aby zasloužený mravní úspěch byl mu odměnou i za práci i za hmotnou oběť.

Stručná informace o vydání Moninovy monografie byla roku 1891 otištěna v referativním časopisu Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik; sepsal ji F. J. Studnička, který v tomto časopisu zastával funkci oficiálního českého referenta.[114]

Oznámení o existenci Moninovy studie bylo uveřejněno také ve *Výroční zprávě Jednoty českých mathematiků za správní rok 1892–3.*[115]

Oba recenzenti se správně shodují, že druhé Moninovo pojednání je zřetelně významnější než první. Platí to i nyní po skoro 130 letech. Koho zajímá Apolloniova úloha, může mít i v současné době z Moninova pojednání o kružnicích prospěch; něco podobného nelze říci o prvním pojednání. V něm jako kdyby T. Monin přehlédl, že smyslem různých souřadnicových systémů je přizpůsobení problémům a volba těch nejvhodnějších a nejjednodušších. Z hlediska

[114] F. J. Studnička napsal: *Monin, Th.: Ueber einige Arten von projectivischen Coordinaten. Beiträge zur Theorie der Kreislinie. [x], Prag. (Böhmisch.)*
Diese kurz gefassten, aber inhaltsreichen preisgekrönten methodischen Studien haben nicht so sehr den Zweck, zu gewissen hübschen Sätzen zu gelangen, als vielmehr das Wesen der Wege aufzudecken und zu vergleichen, wie man dieselben erhält, wobei die Vorzüge der beweglichen Hülfsgebilde der modernen Geometrie gegenüber dem starren Cartesianischen Coordinatengerüst klar hervortreten. (Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 23(1891), str. 641)
Poznamenejme, že F. J. Studnička v letech 1877 až 1895 referoval v časopise *Jahrbuch* o 260 českých pracích, z nichž větší část byla publikována v Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky (6. až 24. ročník), menší část se týkala českých monografií, učebnic a učebních osnov. Studničkovy referáty většinou obsahovaly jen název článku (přeložený do němčiny) a velmi stručnou charakteristiku (obvykle jedna až dvě věty). Zcela výjimečně byla publikována podrobnější a obsáhlejší kritická zpráva. Roku 1891 F. J. Studnička referoval o 19 pracích; je pravděpodobné, že Moninovu monografii podrobněji nestudoval, neboť nebyl geometr a problému projektivních souřadnic se nevěnoval. Je nutno konstatovat, že jeho nic neříkající hodnocení Moninově monografii příliš neprospělo, neboť nevyvolalo o tuto jeho práci žádný zájem.

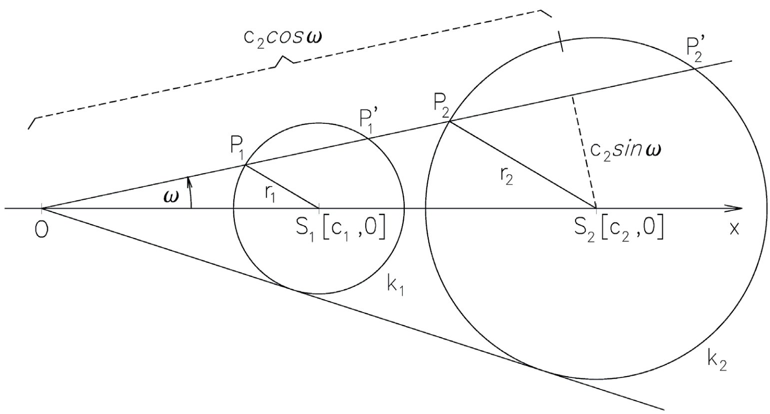
[115] Praha, 1893, str. 5.

těchto požadavků nemohly Moninovy souřadnice konkurovat tehdy už velmi osvědčeným a rozšířeným jiným souřadnicovým systémům. V tomto smyslu se F. Machovec zmiňuje o souřadnicích tetracyklických.[116]

Machovcova připomínka, že autor místy potlačil důkazy i těch tvrzení, která nejsou ihned zřejmá, je oprávněná; ale právě k místu, které jako příklad uvádí, je doplnění důkazem snadné, ovšem nikoliv pro začínajícího studenta.

T. Monin se dopustil i vážnějšího nedopatření, které mu recenzenti nevyčítají. Při odvození rovnice kružnice, která se dotýká tří kružnic daných rovnicemi – tedy při analytickém řešení Apolloniovy úlohy – užil Caseyovy věty místo jejího obrácení. Na Moninovu částečnou omluvu je třeba uvést, že toto obrácení dokázal v úplnosti až M. Zacharias.[117]

Machovcova poznámka se týká strany 114, a sice začátku druhého odstavce, a je zcela oprávněná. Dnes jsou dokonce Moninovy řádky nesrozumitelné, protože už z povědomí dávno vymizelo, co J. Steiner nazval potenční kružnicí k dvou kružnic k_1 a k_2 vzhledem k jejich středu podobnosti O. Pro krátkost se omezíme jen na situaci s vnějším středem podobnosti znázorněnou na obrázku 1.



Obrázek 1

Zvolme počátek ve středu podobnosti O a osu x ve středné S_1S_2 kružnic k_1 a k_2 s rovnicemi

$$(x-c_1)^2+y^2-r_1^2=0, \qquad (x-c_2)^2+y^2-r_2^2=0.$$

[116] Velký význam jejich prostorové analogie – souřadnic pentasférických – prokázal až G. Darboux: *Pricipes de Géométrie analytique*, Paris, 1917. V české literatuře využil pentasférických souřadnic jedině Zdeněk Vančura (1920–2004) v několika svých pracích o kulové a přímkové geometrii.

[117] M. Zacharias: *Der Caseysche Satz*, Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung 52(1942), str. 79–89.

Polopřímka p jdoucí středem O

$$x = t\cos\omega, \quad y = t\sin\omega \quad (t \geq 0)$$

(parametr t znamená ovšem vzdálenost počátku O od bodu $[t\cos\omega, t\sin\omega]$) protíná kružnice k_1 a k_2 v bodech P_1, P_1' a P_2, P_2', jejichž parametry jsou určeny rovnicemi

$$t^2 - 2(c_1\cos\omega)t + c_1^2 - r_1^2 = 0, \qquad t^2 - 2(c_2\cos\omega)t + c_2^2 - r_2^2 = 0.$$

Tudíž

$$\overline{OP_1} = c_1\cos\omega - \sqrt{r_1^2 - c_1^2\sin^2\omega}, \qquad \overline{OP_1'} = c_1\cos\omega + \sqrt{r_1^2 - c_1^2\sin^2\omega},$$

$$\overline{OP_2} = c_2\cos\omega - \sqrt{r_2^2 - c_2^2\sin^2\omega}, \qquad \overline{OP_2'} = c_2\cos\omega + \sqrt{r_2^2 - c_2^2\sin^2\omega}.$$

Poněvadž

$$r_1 : c_1 = r_2 : c_2 \quad \text{čili} \quad r_2 = \lambda r_1,\ c_2 = \lambda c_1, \tag{1}$$

tak snadno dostaneme

$$\overline{OP_1} \cdot \overline{OP_2'} = \overline{OP_1'} \cdot \overline{OP_2} = c_1c_2 - r_1r_2. \tag{2}$$

Výsledek je nezávislý na ω. Kružnice o středu O a čtverci poloměru $c_1c_2 - r_1r_2$ je už zmíněnou Steinerovou potenční kružnicí dvojice kružnic k_1, k_2; rozdíl napravo v (2) je Steinerova potence dvojice kružnic k_1, k_2. Poznamenejme, že splynou-li kružnice k_1 a k_2, přejde jejich potence v mocnost bodu O vůči kružnici $k_1 \equiv k_2$.

Nyní pomocí kosinové věty vyjádříme, že kružnice k se středem $S[a, b]$ a poloměrem r protíná kružnice k_1 a k_2 ve stejných úhlech (viz obr. 2):

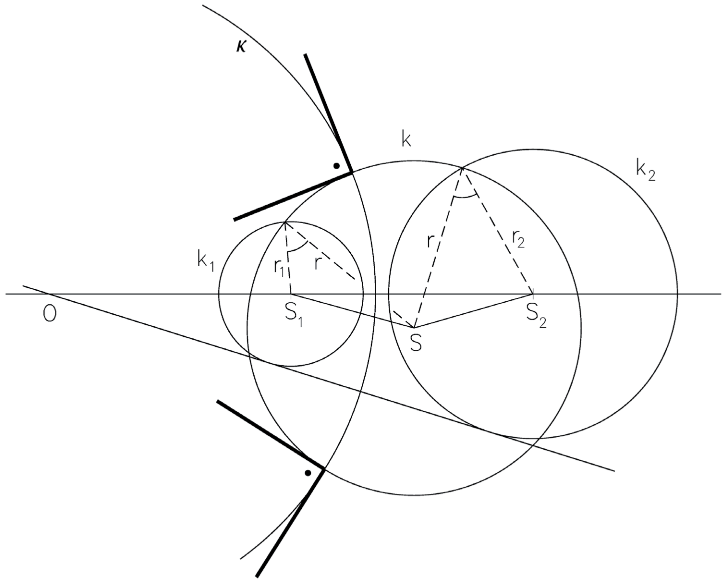
$$\frac{r_1^2 + r^2 - [(a - c_1)^2 + b^2]}{2r_1r} = \frac{r_2^2 + r^2 - [(a - c_2)^2 + b^2]}{2r_2r}.$$

Tedy vzhledem k (1)

$$r^2 = a^2 + b^2 + r_1r_2 + \frac{r_2c_1^2 - r_1c_2^2}{r_2 - r_1} = a^2 + b^2 - (c_1c_2 - r_1r_2).$$

Víme už, že Steinerova potenční kružnice κ kružnic k_1, k_2 má střed O a čtverec poloměru napravo v (2).

Poslední vztah tak vyjadřuje, že středná $\overline{OS} = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$ a poloměry kružnic k a κ jsou přepona a odvěsny pravoúhlého trojúhelníka – jinými slovy: kružnice k (protínající kružnice k_1, k_2 v týchž úhlech) a kružnice κ (potenční kružnice kružnic k_1, k_2) se protínají ortogonálně.



Obrázek 2

Tím je dokázáno, co T. Monin jen vyslovil. F. Machovec měl pravdu, že věc není bezprostředně patrná. Ale vidíme, že důkaz by si mohl doplnit i jen trochu zkušenější čtenář seznámený se základy geometrie kružnic.

Východiskem pro studium kružnic a jejich soustav je Ptolemaiova věta:[118] *V konvexním tětivovém čtyřúhelníku o stranách postupně a, b, c, d a úhlopříčkách e, f je*

$$ac + bd = ef. \tag{3}$$

Častěji než tato věta bylo používáno – bez důkazu – její obrácení: *Konvexní čtyřúhelník, pro který platí (3), je tětivový.* Teprve ve 30. letech 19. století na to upozornil A. W. Förstemann.[119] Vzápětí se objevilo několik odůvodnění. Velmi významně do studia Ptolemaiovy věty zasáhl A. Möbius.

[118] O jejím původu viz J. Tropfke (1866–1939): *Geschichte der Elementar-Mathematik*, 2. díl, Leipzig, 1903, str. 90–91. Poznamenejme, že Tropfkeho dvoudílné dějiny matematiky vyšly poprvé v letech 1902 až 1903 (VIII + 332, VIII + 496 stran), v letech 1921 až 1923 vyšlo druhé pětidílné vydání (VII + 177, IV + 221, IV + 151, III + 238, IV + 185 stran), v letech 1930 až 1940 třetí šestidílné přepracované vydání (222, 266, 239, 316, 169, 128 stran; po autorově smrti některé díly přepracoval K. Vogel), roku 1980 vyšlo čtvrté, podstatně přepracované vydání prvního dílu (742 stran), které uspořádali K. Vogel, K. Beich a H. Gericke. Knihu lze doporučit všem zájemcům o historii elementární matematiky; naleznou v ní mnoho inspirativních myšlenek.

[119] A. W. Förstemann: *24. Aufgaben zur Auflösung*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 8(1832), str. 320. Zde je uvedeno: *Es seien a, c das eine, b und d das andre Paar gegenüberliegender Seiten, und p, q die Diagonalen eines Vierecks, welches einem Kreise eingeschrieben ist, so ist nach dem Ptolemäischen Satze bekanntlich* $pq = ac + bd$. *Man soll nun zeigen, dass umgekehrt, wenn für jene sechs Linien eines Vierecks diese Gleichung Statt findet, um dasselbe ein Kreis beschrieben werden kann.*

Požadavek konvexnosti je nepodstatný. Mysleme si v rovině čtyři body B_1, B_2, B_3, B_4 a položme $t_{ij} = t_{ji} = \overline{B_i B_j}$, $i, j = 1, 2, 3, 4$ a $i \neq j$. Pak platí právě jedna z těchto relací:

$$
\begin{aligned}
-t_{12}t_{34} + t_{13}t_{24} + t_{14}t_{23} &= 0, \\
t_{12}t_{34} - t_{13}t_{24} + t_{14}t_{23} &= 0, \\
t_{12}t_{34} + t_{13}t_{24} - t_{14}t_{23} &= 0.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Jestliže je znásobíme a připojíme ještě pozitivní faktor $t_{12}t_{34} + t_{13}t_{24} + t_{14}t_{23}$, tak výsledný součin se zapíše ve tvaru

$$
\begin{vmatrix}
0 & t_{12}^2 & t_{13}^2 & t_{14}^2 \\
t_{21}^2 & 0 & t_{23}^2 & t_{24}^2 \\
t_{31}^2 & t_{32}^2 & 0 & t_{34}^2 \\
t_{41}^2 & t_{42}^2 & t_{43}^2 & 0
\end{vmatrix} = 0. \tag{5}
$$

Ptolemaiovu větu i s jejím obrácením lze vyslovit takto: *Nutná a postačující podmínka, aby čtyři body B_i ležely na kružnici, je vyjádřena rovnicí (5).*

Z ní lze odvodit rovnici kružnice, která prochází třemi body $B_i[x_i, y_j]$. Čtvrtý bod $B_4[x, y]$ má od bodů B_1, B_2, B_3 čtverce vzdáleností

$$
t_{i4}^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2,
$$

a podle (5) leží na kružnici určené body B_1, B_2, B_3 právě jen při

$$
\begin{vmatrix}
0 & t_{12}^2 & t_{13}^2 & (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 \\
t_{21}^2 & 0 & t_{23}^2 & (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 \\
t_{31}^2 & t_{32}^2 & 0 & (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 \\
(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 & (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 & (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 & 0
\end{vmatrix} = 0. \tag{6}
$$

To je rovnice 4. stupně, která udává dvojnásobně vzatou kružnici jdoucí body B_1, B_2, B_3; její rovnici ovšem známe:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{7}$$

Důvod, proč vyjde bikvadratická rovnice, vyložíme dále. Totéž učiníme s námitkou, proč uvádíme složitější výsledek (6), když víme o jednodušším a elementárním (7).

Ověříme to zatím jen příkladem. Zvolme body

$$B_1[0,0], \quad B_2[3,0], \quad B_3[0,4],$$

takže $t_{12} = 3$, $t_{23} = 5$, $t_{31} = 4$.

Rovnice (6) přejde v

$$\begin{vmatrix} 0 & 9 & 16 & x^2+y^2 \\ 9 & 0 & 25 & (x-3)^2+y^2 \\ 16 & 25 & 0 & x^2+(y-4)^2 \\ x^2+y^2 & (x-3)^2+y^2 & x^2+(y-4)^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Determinant vypočítáme buďto rozvojem podle prvků některého řádku nebo jako jednoduše vroubený; dostaneme až na faktor -576

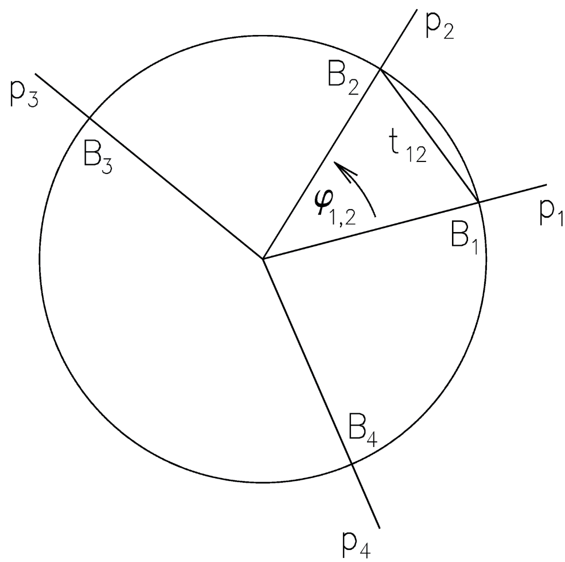
$$(x^2+y^2)^2 - (6x+8y)(x^2+y^2) + 9x^2 + 24xy + 16y^2 = 0 \tag{8}$$

čili

$$\Big[\big(x-\frac{3}{2}\big)^2 + (y-2)^2 - \frac{25}{4}\Big]^2 = 0,$$

tj. dvojnásob vzatou kružnici o středu $[\frac{3}{2}, 2]$ a poloměru $\frac{5}{2}$, jak jsme čekali.

Z podmínky (5) lze odvodit relaci mezi úhly čtyř polopřímek p_i se společným počátečním bodem O (viz obr. 3).



Obrázek 3

Označme $\varphi_{ij} = \varphi_{ji}$ úhel (vzatý v pozitivním smyslu), o který je třeba otočit polopřímku p_i, aby přešla v polopřímku p_j. Průsečík jednotkové kružnice o středu O s přímkou p_i označme B_i. Ovšem

$$t_{ij} = \overline{B_i B_j} = 2\left|\sin \frac{\varphi_{ij}}{2}\right|.$$

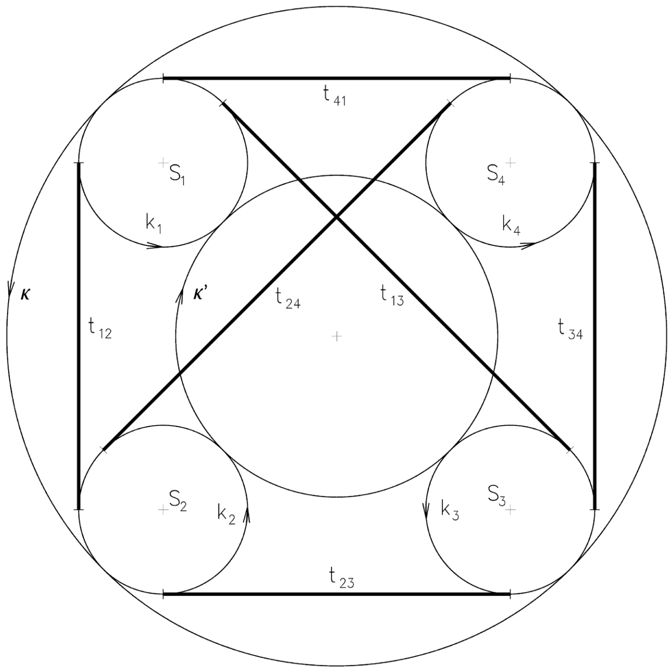
Z Ptolemaiovy podmínky (5) pak ihned dostáváme

$$\begin{vmatrix} 0 & \sin^2 \frac{\varphi_{12}}{2} & \sin^2 \frac{\varphi_{13}}{2} & \sin^2 \frac{\varphi_{14}}{2} \\ \sin^2 \frac{\varphi_{21}}{2} & 0 & \sin^2 \frac{\varphi_{23}}{2} & \sin^2 \frac{\varphi_{24}}{2} \\ \sin^2 \frac{\varphi_{31}}{2} & \sin^2 \frac{\varphi_{32}}{2} & 0 & \sin^2 \frac{\varphi_{34}}{2} \\ \sin^2 \frac{\varphi_{41}}{2} & \sin^2 \frac{\varphi_{42}}{2} & \sin^2 \frac{\varphi_{43}}{2} & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{9}$$

Teprve nyní přistoupíme ke Caseyově větě. Přidržíme se Moninova postupu, jen se jej pokusíme učinit zřetelnějším.

Mysleme si čtyři souhlasně orientované a vzájemně vně ležící cykly k_i se středy S_i a poloměry r_i; střednou, resp. společnou tečnu[120] cyklů k_i a k_j označíme c_{ij}, resp. t_{ij} (viz obr. 4).

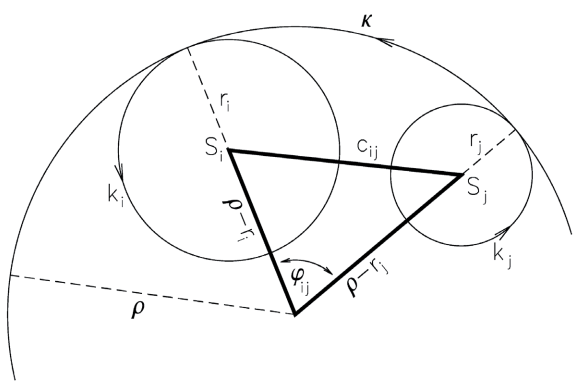
[120] Pro kratší vyjadřování nebudeme slovně rozlišovat mezi tečnou jako přímkou, jako úsečkou omezenou dotykovými body a jako délkou této úsečky.



Obrázek 4

Dejme tomu, že čtyři cykly k_i se dotýkají dalšího cyklu κ s poloměrem ϱ a středem Σ. Označme úhel φ_{ij} polopřímky ΣS_i s polopřímkou ΣS_j (viz obr. 5). Víme, že pro tyto úhly platí (9). Podle kosinové věty aplikované na trojúhelník $S_i \Sigma S_j$ je

$$c_{ij}^2 = (\varrho - r_i)^2 + (\varrho - r_j)^2 - 2(\varrho - r_i)(\varrho - r_j)\cos\varphi_{ij}.$$



Obrázek 5

Současně platí (viz obr. 6)

$$c_{ij}^2 = t_{ij}^2 + (r_i - r_j)^2.$$

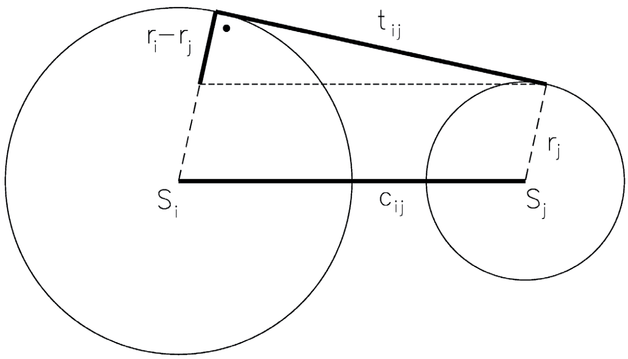
Z rovnosti levých stran v posledních dvou rovnicích pak po zcela elementárních úpravách dostaneme

$$t_{ij}^2 = 2(\varrho - r_i)(\varrho - r_j)\big[1 - \cos\varphi_{ij}\big] = 4(\varrho - r_i)(\varrho - r_j)\sin^2\frac{\varphi_{ij}}{2}.$$

Poněvadž ovšem $\varrho \neq r_i$ a $\varrho \neq r_j$, tak

$$\sin^2\frac{\varphi_{ij}}{2} = \frac{1}{4(\varrho - r_i)(\varrho - r_j)}t_{ij}^2.$$

Nyní stačí, abychom tyto čtverce sinů dosadili do (9) a dostaneme ihned (5), ovšem s tím, že t_{ij}^2 znamená nyní čtverec tečny souhlasně orientovaných cyklů k_i a k_j.



Obrázek 6

Došli jsme tak ke Caseyově větě: *Jestliže se čtyři souhlasně orientované cykly k_i – z nichž každý je vně zbývajících tří – dotýkají pátého cyklu, pak pro čtverce jejich společných tečen t_{ij} platí (5).* Výslovně poznamenejme, že když cykly k_i degenerují ve své středy $S_i \equiv B_i$, přejde Caseyova věta v Ptolemaiovu.

Pokud čtyři dané cykly k_i nejsou všechny orientovány souhlasně, je třeba jistých malých modifikací, abychom opět došli k (5). T. Monin nechává rovněž úplně stranou situaci, kdy čtverec délky t_{ij}^2 společné tečny cyklů k_i a k_j je záporný (tedy tečna sama imaginární).

T. Moninovi se s Caseyovou větou přihodilo, co se tak dlouho dělo s větou Ptolemaiovou: Aplikoval nikoliv Caseyovu větu, ale její obrácení.

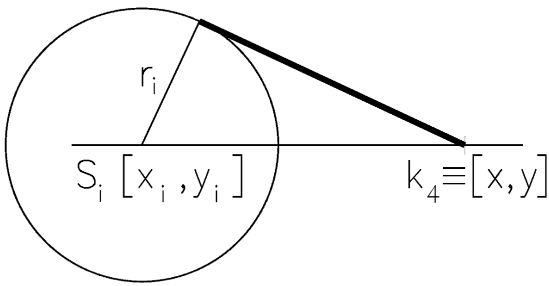
Z obrácené věty Caseyovy lze totiž odvodit rovnici cyklů, které se dotýkají tří daných cyklů – tedy řešit starou Apolloniovu úlohu. T. Monin po vzoru svých předchůdců postupoval tímto způsobem:[121]

Dané tři cykly nechť mají nositelky v kružnicích o rovnicích

$$k_i(x, y) \equiv (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 - r_i^2 = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Za čtvrtý cykl k_4 zvolme bod $k_4 \equiv [x, y]$. Délky tečen cyklů k_1, k_2, k_3 jsou opět $t_{12} = t_{21}$, $t_{13} = t_{31}$, $t_{23} = t_{32}$; čtverec délky společné tečny nulového cyklu k_4 a cyklu k_i je (viz obr. 7)

$$t_{i4}^2 = t_{4i}^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 - r_i^2 = k_i(x, y). \tag{10}$$



Obrázek 7

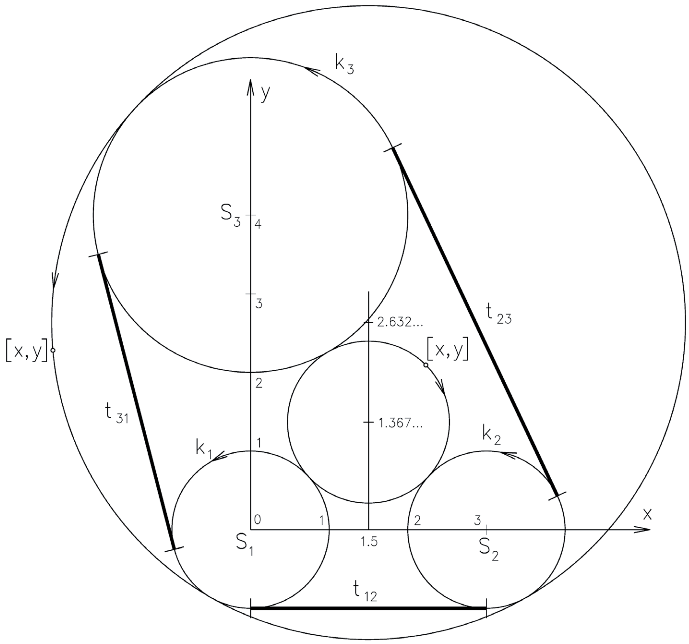
Podle obrácené Caseyovy věty při (5) existuje cykl, který se dotýká cyklů k_1, k_2, k_3 a $k_4 \equiv [x, y]$. Nastává to tedy při

$$\begin{vmatrix} 0 & t_{12}^2 & t_{13}^2 & k_1(x,y) \\ t_{21}^2 & 0 & t_{23}^2 & k_2(x,y) \\ t_{31}^2 & t_{32}^2 & 0 & k_3(x,y) \\ k_1(x,y) & k_2(x,y) & k_3(x,y) & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{11}$$

Tím je vyjádřeno, že bod $[x, y]$ leží na cyklech dotýkajících se cyklů k_1, k_2, k_3; jedná se tedy o rovnici kružnic, které jsou nositelkami cyklů dotýkajících se tří cyklů k_1, k_2, k_3.

Položme $r = r_1 = r_2 = r_3$ a pak v (11) přejděme podle (10) k limitě při $r \to 0$. Dostaneme okamžitě (6). Tím je vysvětleno, proč z obrácení věty Ptolemaiovy vychází jako dvojnásobná rovnice kružnice jdoucí třemi body.

[121] V následujícím se omezíme opět jen na souhlasně orientované cykly vzájemně vně ležící.



Obrázek 8

Jako ilustraci obecného výsledku (11) propočítáme příklad: Jsou dány tři souhlasně orientované cykly k_1, k_2 a k_3, jejichž nositelky mají rovnice (viz obr. 8)

$$k_1(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0,$$

$$k_2(x,y) = (x-3)^2 + y^2 - 1 = 0,$$

$$k_3(x,y) = x^2 + (y-4)^2 - 4 = 0.$$

Čtverce společných tečen daných cyklů jsou

$$t_{12}^2 = 9, \quad t_{13}^2 = 15, \quad t_{23}^2 = 24,$$

takže podle (11) zapíšeme ihned rovnice hledaných cyklů:

$$\begin{vmatrix} 0 & 9 & 15 & x^2+y^2-1 \\ 9 & 0 & 24 & (x-3)^2+y^2-1 \\ 15 & 24 & 0 & x^2+(y-4)^2-4 \\ x^2+y^2-1 & (x-3)^2+y^2-1 & x^2+(y-4)^2-4 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Po delším, ale celkem mechanickém výpočtu dostaneme – po krácení 540 – tento výsledek:

$$(x^2+y^2)^2-(6x+8y)(x^2+y^2)+5x^2+24xy+10,4y^2+$$
$$+12x+3,2y-21,6=0.$$

O bikvadratickém polynomu vlevo víme, že se musí dát rozložit v součin dvou kvadratických mnohočlenů. Vskutku je roven součinu polynomů

$$x^2+y^2-3x-(4-\sqrt{1,6})y+(-2+\sqrt{25,6}),$$

$$x^2+y^2-3x-(4+\sqrt{1,6})y+(-2-\sqrt{25,6}).$$

Takže rovnice kružnic, které jsou nositelkami hledaných cyklů, jsou (viz opět obr. 8)

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{4-\sqrt{1,6}}{2}\right)^2=8,65-3\sqrt{6,4}\,,$$

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{4+\sqrt{1,6}}{2}\right)^2=8,65+3\sqrt{6,4}\,.$$

První dotyková kružnice má tedy střed a poloměr

$$S[1,5;1,367...],\quad \varrho=1,029...$$

a druhá

$$S'[1,5;2,632...],\quad \varrho'=4,029...$$

3. LITOGRAFIE SKRIPT

V rozsáhlé pozůstalosti Antonína Šourka[122] se dochovala skripta, která jsou v archivním popisu označena jako položka č. 42 a charakterizována takto:

Учебник Геометрия, Хектографско копия, Рѫкопис, преди 1891 [Učebnice geometrie, Litografické vydání, před rokem 1891].

Na jejich hřbetu je zlatým písmen napsáno *Монин: Геометрия* [Monin: Geometrie]; chybí jim však titulní list se jménem přednášejícího, názvem přednášky, označením školního roku, místa a roku vydání.[123] Svazek obsahuje

[122] Pozůstalost je uložena ve fondu Šourek Antonín Václav (1857–1926) – matematik v Ústředním státním archivu v Sofii [*Шоурек Антонин Вацлав (1857–1926) – математик*, Централен държавен архив София].

[123] Vzhledem k tomu, že Moninovo autorství není úplně jednoznačně prokazatelné, nebyla tato publikace zařazena do seznamu jeho prací.

čtyři samostatně číslované části, které jsou oddělené několika prázdnými stránkami; jejich názvy jsou následující:

– *За основните изображения от 2-ра ст. и от 2-й кл.* [O základech zobrazení 2. stupně a 2. třídy] (92 stran),

– *Аналитическа геометрия* [Analytická geometrie] (72 stran),

– *Задачи и упражнения по аналитическа геометрия* [Úlohy a cvičení z analytické geometrie] (20 stran se 30 úlohami),

– *Конфокални криви и площи от 2-ра степен* [Konfokální křivky a plochy 2. stupně] (57 stran).

Na první stránce druhé části je připsáno *10. 2. 1890, M. Микачев*; z tohoto údaje s velkou pravděpodobností vyplývá, že se jedná o litografické záznamy přednášek, které T. Monin proslovil v zimním semestru 1889/1890 na sofijské vyšší škole, neboť žádný jiný profesor se výše uvedenou tématikou v té době v Sofii nezabýval. Ukazuje se, že T. Monin tehdy vykládal studentům prvního ročníku pokročilejší a náročnější patrie geometrie než A. Šourek na konci devadesátých let 19. století a na počátku 20. století. Moninovy hodiny byly bezesporu náročné, neboť předpokládal, že jeho studenti ovládají analytickou a deskriptivní geometrii alespoň v rozsahu reálky a že si před nástupem na vysokou školu rozšiřovali znalosti samostatným studiem zahraniční, zejména francouzské a německé literatury.

První část skript obsahuje definici a klasifikaci křivek druhého stupně s důrazem na křivky druhého řádu, popisuje jejich vlastnosti, zobrazení a transformace z hlediska syntetické geometrie, tj. bez využití analytické geometrie a metriky. Obsah druhé a třetí části neodpovídá uvedenému názvu, neboť se nejedná o analytickou geometrii, ale o úvod do projektivní geometrie křivek a ploch, který využívá základní metrické vztahy (homogenní a projektivní souřadnice, geometrický význam rovnic, kvadratické a bikvadratické rovnice, obecný úvod do teorie křivek druhého stupně, křivky druhého stupně a druhé třídy, syntetické, projektivní a metrické vlastnosti kuželoseček, obecný úvod do teorie ploch druhého stupně, degenerované a nedegenerované plochy druhého stupně a jejich vlastnosti, rotační plochy a jejich vlastnosti). Čtvrtá část se věnuje projektivní geometrii ploch druhého a třetího stupně (základní prvky roviny a prostoru, křivky druhého stupně a rotační plochy, lineární substituce a jejich geometrický význam, transformace souřadnic, vlastnosti projektivních zobrazení, reciprocita, involuce, kolinearita a inverze rotačních ploch a ploch druhého stupně). Poslední, čtvrtá část je doplněna mnoha vzorově řešenými a komentovanými úlohami a řadou neřešených příkladů na procvičení.

Litografie nejsou dobře zachovány, jejich tisk je velmi nekvalitní. Jednotlivé části jsou psány různými rukopisy, písmo je někdy dosti neúhledné, jindy je špatně čitelné. Obrázky nejsou číslovány, mnohé nejsou ani popsány a většina má charakter nepěkných náčrtků. Texty v první a poslední části jsou navíc špatně oříznuté.

Není jasné, jak se výše uvedené litografie dostaly do Šourkovy pozůstalosti, kdo je nechal svázat do jednoho svazku a kdo s nimi pracoval. Je zajímavé, že v první části nazvané *За основните изображения от 2-ра ст. и от 2-й кл.* [O základech zobrazení 2. stupně a 2. třídy] je text často podtrhán červenou pastelkou, na volných okrajích jsou vepsány opravy, poznámky a komentáře. Z torza dochovaných přednášek není možno zodpovědně určit, do jaké míry je Antonín Šourek využil, přepracoval a rozvinul ve svých litografických skriptech [Š13], [Š14], [Š16], [Š33] a [Š35], která obsahují podobnou látku.

Závěr

Teodor Monin zemřel mlád, ve věku pouhých 35 roků; v několika posledních letech byl vážně nemocen. Existenčních starostí nebyl zdaleka ušetřen. Téměř 120 let po jeho smrti je třeba říci: Ač nyní českou matematickou obcí neprávem zapomenut, kdysi ji pomáhal tvořit a za příznivějších okolností by byl pro ni jistě ještě více vykonal.

LITERATURA:

[Be1] Bečvářová M., *Česká matematická komunita v letech 1848–1918*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 34, Ústav aplikované matematiky FD ČVUT, Matfyzpress, Praha, 2008.

[Be3] Bečvářová M., *Kořeny bulharské matematiky*, in 27. mezinárodní konference Historie matematiky, Velké Meziříčí, 25. 8. – 29. 8. 2006, sborník sylabů, Praha, 2006, 14–16.

[Be4] Bečvářová M., *Teodor Monin (1858–1893), první vysokoškolský profesor matematiky v Bulharsku*, in Девет под 40тиридесет [Devět pod čtyřicet], Homo Bohemicus – София Бохемия клуб, 2008, č. 1, 5–14.

[ČR] Чобанов И., Русев П., *Български математици*, Държавно издателство „Народна просвета“, София [Čobanov I., Rusev P., Bulharští matematici, Státní nakladatelství „Národní osvěta“, Sofie], 1987.