XI. LINEÁRNÍ ALGEBRA

Linear Algebra, like several other mathematical topics, may be considered from two different points of view: Firstly as a branch of mathematics of independent interest with a development and with problems of its own; secondly as a tool for other mathematical disciplines and for mathematical physics. Since a great number of the problems to be dealt with in linear algebra have their origin in these applications, we shall often dwell upon the second point of view and try to illustrate the theory by means of examples of a geometrical or analytical nature. Quite apart from this fact, also in purely algebraic considerations a geometrical language sometimes turns out to be useful when it stresses the geometrical implications of an algebraic theorem.

([Schwerdtfeger, 1950], str. 7)

Ve 20. století se postupně utvořila lineární algebra jako jedna ze základních matematických disciplín, jako fundament, na němž staví algebra, geometrie, matematická analýza, funkcionální analýza, numerická matematika, lineární programování a z něhož vycházejí další směry matematického bádání. Název této disciplíny, *lineární algebra*, se v prvních čtyřech desetiletích 20. století objevoval poměrně zřídka a ještě v nepříliš ujasněném smyslu, a to jak v knihách, tak v referativních časopisech. První učebnice a monografie, které tuto disciplínu blíže vymezovaly, jsou až z přelomu čtyřicátých a padesátých let. Tehdy došlo k rozšíření samotného termínu „lineární algebra“, i když si pod ním jednotliví autoři nepředstavovali stejný soubor pojmů, poznatků a metod.

1. Vektorový prostor

Pojem vektorového, resp. lineárního prostoru, který se zrodil v pracích H. Grassmanna, G. Peana, S. Pincherleho a několika dalších matematiků, se velmi těžko ujímal. Roku 1918 přispěl k jeho uznání a rozšíření německý matematik H. Weyl. Ještě ve dvacátých letech však špičkoví matematici uváděli ve svých původních vědeckých pracích definici vektorového prostoru, neboť se tehdy zdaleka nejednalo o pojem, který by byl všeobecně známý.

Hermann Weyl

Roku 1918 vyšla slavná kniha *Raum. Zeit. Materie* německého matematika a fyzika Hermanna Weyla (1885–1955); podtitul *Vorlesungen über allgemeine Relativitätstheorie* dobře charakterizuje její hlavní cíl.[1] V úvodu autor objasnil název své knihy těmito slovy:

[1] O této Weylově knize a jejím významu viz [Scholz, 2001].

Wir pflegen Zeit und Raum als die Existenzformen der realen Welt, die Materie als ihre Substanz aufzufassen. ([Weyl, 1918], 3. vydání, str. 1)

První kapitola pojmenovaná *Der Euklidische Raum: seine mathematische Formalisierung und seine Rolle in der Physik* (str. 10–68) připravuje čtenáře ke studiu dalšího textu směřujícího k obecné teorii relativity jako hlavnímu tématu knihy. Nacházíme v ní některé partie, které dnes řadíme do lineární algebry. Druhý paragraf této kapitoly nazvaný *Grundlagen der affinen Geometrie* začíná definicí vektorového prostoru. Navíc v něm byly k vektorům „přidány body", tj. na pojmu *vektorový prostor* byl axiomatickou cestou postaven pojem *afinní prostor*. V nepříliš pozměněné podobě se tyto definice dodnes používají při zavedení pojmů vektorový (lineární) prostor a afinní prostor. Tato partie ve Weylově knize zní takto:

I. *Vektoren.*

Je zwei Vektoren $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *bestimmen eindeutig einen Vektor* $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ *als ihre ≫Summe≪; eine Zahl* λ *und ein Vektor* $\mathfrak{a}$ *bestimmen eindeutig einen Vektor* $\lambda\mathfrak{a}$, *das ≫*λ*-fache von* $\mathfrak{a}$ *≪ (Multiplikation). Diese Operationen genügen folgenden Gesetzen.*

α) *Addition.*

1. $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mathfrak{b}+\mathfrak{a}$ *(kommutatives Gesetz).*

2. $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})+\mathfrak{c}=\mathfrak{a}+(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})$ *(associatives Gesetz).*

3. Sind $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{c}$ *irgend zwei Vektoren, so gibt es einen und nur einen* $\mathfrak{x}$, *für welchen die Gleichung* $\mathfrak{a}+\mathfrak{x}=\mathfrak{c}$ *gilt. Er heißt die Differenz* $\mathfrak{c}-\mathfrak{a}$ *von* $\mathfrak{c}$ *und* $\mathfrak{a}$. *(Möglichkeit der Subtraktion).*

β) *Multiplikation.*

1. $(\lambda+\mu)\mathfrak{a}=(\lambda\mathfrak{a})+(\mu\mathfrak{a})$ *(erstes distributives Gesetz).*

2. $\lambda(\mu\mathfrak{a})=(\lambda\mu)\mathfrak{a}$ *(associatives Gesetz).*

3. $1\mathfrak{a}=\mathfrak{a}$.

4. $\lambda(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})=(\lambda\mathfrak{a})+(\lambda\mathfrak{b})$ *(zweites distributives Gesetz).*

...

γ) *Das ≫Dimensionsaxiom≪, das hier seine Stelle im System findet, werden wir erst hernach formulieren.*

II. *Punkte und Vektoren.*

1. Je zwei Punkte A *und* B *bestimmen einen Vektor* $\mathfrak{a}$*; in Zeichen* $\overrightarrow{AB}=\mathfrak{a}$. *Ist* A *irgend ein Punkt,* $\mathfrak{a}$ *irgend ein Vektor, so gibt es einen und nur einen Punkt* B, *für welchen* $\overrightarrow{AB}=\mathfrak{a}$ *ist.*

2. Ist $\overrightarrow{AB}=\mathfrak{a}$, $\overrightarrow{BC}=\mathfrak{b}$, *so ist* $\overrightarrow{AC}=\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$.

In diesen Axiomen treten zwei Grundkategorien von Gegenständen auf, die Punkte und die Vektoren; drei Grundbeziehungen, nämlich diejenigen, welche durch die Symbole

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mathfrak{c}\ ,\qquad \mathfrak{b}=\lambda\mathfrak{a}\ ,\qquad \overrightarrow{AB}=\mathfrak{a}$$

ausgedrückt werden. Alle Begriffe, die sich allein mit ihrer Hülfe rein logisch definieren lassen, gehören zur affinen Geometrie; alle Sätze, welche sich aus diesen Axiomen rein logisch folgern lassen, bilden das Lehrgebäude der affinen Geometrie, das somit auf der hier gelegten axiomatischen Basis deduktiv errichtet werden kann. ([Weyl, 1918], 3. vydání, str. 15–16)

Dále jsou velmi stručně zavedeny základní pojmy lineární algebry (lineární kombinace, lineární závislost, dimenze, báze) a ukázány jejich vlastnosti. Pak teprve následuje doplnění výše inzerované definice dimenze:

Das in der obigen Tabelle der Axiome noch ausgelassene Dimensionsaxiom kann jetzt formuliert werden:

Es gibt n linear unabhängige Vektoren, aber je $n+1$ sind voneinander linear abhängig, oder: die Vektoren bilden eine n-dimensionale lineare Mannigfaltigkeit. … ([Weyl, 1918], 3. vydání, str. 17)

Vzápětí je ukázán vztah podprostorů vektorového a afinního prostoru:

Ist O ein beliebiger Punkt, so erfüllen die sämtlichen Endpunkte P der von O aus aufgetragenen Vektoren einer h-dimensionalen linearen Vektor-Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$, … ein h-dimensionales lineares Punktgebilde; wir sagen, es werde vom Punkte O aus durch die Vektoren $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \ldots, \mathfrak{e}_h$ aufgespannt. ([Weyl, 1918], 3. vydání, str. 17–18)

Poté je zaveden souřadnicový systém sestávající z bodu a vektorů báze, naznačena je transformace souřadnic a definováno afinní zobrazení. Transformační vztah souřadnic je vyjádřen vzorcem

$$x'_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} x_k + \alpha_i \ .$$

Na konci druhého paragrafu je definován pojem lineární formy ([Weyl, 1918], 3. vydání, str. 20):

… Eine Funktion $L(\mathfrak{x})$ – deren Argument $\mathfrak{x}$ alle Vektoren durchläuft, deren Werte aber reelle Zahlen sind – heißt eine Linearform, wenn sie die Funktionaleigenschaften besitzt:

$$L(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = L(\mathfrak{a}) + L(\mathfrak{b}) \ ; \qquad L(\lambda\mathfrak{a}) = \lambda \cdot L(\mathfrak{a}) \ .$$

Třetí paragraf se nazývá *Idee der n-dimensionalen Geometrie. Lineare Algebra. Quadratische Formen.* Začíná větou, která navozuje obecný přístup předpokládající obecnou dimenzi:

Um die Raumgesetze in ihrer vollen mathematischen Harmonie zu erfassen, müssen wir von der besonderen Dimensionszahl $n = 3$ abstrahieren.
([Weyl, 1918], 3. vydání, str. 20)

V tomto paragrafu Weylovy knihy se snad poprvé objevil v matematickém textu termín *lineární algebra*, který vymezuje určitou část algebry. Poznamenejme, že v té době již existovala řada termínů, které nesly označení *lineární*, např. lineární asociativní algebra, lineární grupa, lineární rovnice, lineární forma, lineární substituce, lineární transformace, lineární deformace, lineární faktor, lineární závislost atd.

Není však příliš jasné, co H. Weyl lineární algebrou rozuměl. V první řadě do ní zařazoval teorii soustav lineárních rovnic. V několika odstavcích ukázal, jak užitečná je řeč, kterou v předchozím paragrafu zavedl. Velmi stručně zde vyjádřil důležité poznatky o soustavách lineárních rovnic.

... Der Hauptsatz über die Lösung linearer homogener Gleichungen läßt sich jetzt so aussprechen: Sind $L_1(\mathfrak{x})$, $L_2(\mathfrak{x})$, ... , $L_h(\mathfrak{x})$ h linear unabhängige Linearformen, so bilden die Lösungen $\mathfrak{x}$ der Gleichungen

$$L_1(\mathfrak{x}) = 0\ , \quad L_2(\mathfrak{x}) = 0\ , \ \ldots\ , \quad L_h(\mathfrak{x}) = 0$$

eine $(n-h)$-dimensionale lineare Vektor-Mannigfaltigkeit. ...

... Der Hauptsatz über lineare Gleichungen lautet: Diejenigen Punkte, welche h unabhängigen linearen Gleichungen genügen, bilden ein $(n-h)$-dimensionales lineares Punktgebilde. ([Weyl, 1918], 3. vydání, str. 22)

Aniž by přesněji vymezil, co rozumí lineární algebrou, napsal:

Aus dem Gebiete der linearen Algebra haben wir, um von der affinen zur vollständigen metrischen Geometrie überzuleiten, noch einige Begriffe und Tatsachen nötig, die sich auf bilineare und quadratische Formen beziehen. Eine Funktion $Q(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$ zweier willkürlicher Vektoren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ heißt, wenn sie eine lineare Form sowohl in $\mathfrak{x}$ wie in $\mathfrak{y}$ ist, eine Bilinearform. Sind bei Benutzung eines bestimmten Koordinatensystems ξ_i die Komponenten von $\mathfrak{x}$, η_i die von $\mathfrak{y}$, so gilt eine Gleichung

$$Q(\mathfrak{x}\mathfrak{y}) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\eta_k$$

mit konstanten Koeffizienten a_{ik}. ([Weyl, 1918], 3. vydání, str. 23)

Látka, kterou dnes řadíme do lineární algebry, se objevuje i ve čtvrtém paragrafu *Grundlagen der metrischen Geometrie.* Základem je zde skalární součin; na něm jsou postaveny definice délky, kolmosti, úhlu, je možno zavést kartézský souřadnicový systém atd. Další paragrafy první kapitoly jsou věnovány tenzorům, tenzorové algebře, tenzorové analýze a stacionárnímu elektromagnetickému poli. V pátém paragrafu *Tensoren* nacházíme pojem lineárního zobrazení a jeho maticového chápání:

Durch eine »lineare Vektor-Abbildung« wird jeder Verschiebung $\mathfrak{x}$ eine Verschiebung $\mathfrak{x}'$ in linearer Weise zugeordnet, d. h. so, daß der Summe $\mathfrak{x} + \mathfrak{y}$ die Summe $\mathfrak{x}' + \mathfrak{y}'$, dem Produkt $\lambda\mathfrak{x}$ das Produkt $\lambda\mathfrak{x}'$ entspricht. Solche lineare Vektor-Abbildungen wollen wir, um uns eines kurzen charakteristischen Names bedienen zu können, Matrizen nennen. ([Weyl, 1918], 3. vydání, str. 35)

Stefan Banach

Významný polský matematik S. Banach (1892–1945), jeden z tvůrců funkcionální analýzy, považoval ještě roku 1922 za nutné ve vědeckém článku *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales* podrobně vysvětlit pojem vektorového prostoru. Jeho definice vektorového prostoru vypadá takto:

Soit E une classe composée tout au moins de deux éléments, d'ailleurs arbitraires, que nous designerons p. ex. par $X, Y, Z, \ldots$

a, b, c *désignant les nombres réels quelconques, nous définissons pour E deux opérations suivantes:*

1) *l'addition des éléments de E*

$$X + Y,\ X + Z,\ \ldots$$

2) *la multiplication des éléments de E par un nombre réel*

$$aX,\ bY,\ \ldots$$

Admettons que les propriétés suivantes sont réalisées:

I$_1$ $X + Y$ *est un élément bien déterminé de la classe* E ,
I$_2$ $X + Y = Y + X$,
I$_3$ $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$,
I$_4$ $X + Y = X + Z$ *entraîne* $Y = Z$,
I$_5$ *Il existe un élément de la classe E déterminé* Θ *et tel qu'on ait toujours* $X + \Theta = X$,
I$_6$ $a \cdot X$ *est un élément bien déterminé de la classe* E ,
I$_7$ $a \cdot X = \Theta$ *équivaut à* $X = \Theta$ *ou* $a = 0$,
I$_8$ $a \neq 0$ et $a \cdot X = a \cdot Y$ *entraînent* $X = Y$,
I$_9$ $X \neq \Theta$ et $a \cdot X = b \cdot X$ *entraînent* $a = b$,
I$_{10}$ $a \cdot (X + Y) = a \cdot X + a \cdot Y$,
I$_{11}$ $(a + b) \cdot X = a \cdot X + b \cdot X$,
I$_{12}$ $1 \cdot X = X$,
I$_{13}$ $a \cdot (b \cdot X) = (a \cdot b) \cdot X$.

([Banach, 1922], Oeuvres II., str. 306–307)

S. Banach však bohužel neuvedl žádný odkaz, nevíme tedy, z jaké literatury čerpal. O deset let později, roku 1932, v knize *Théorie des opérations linéaires* již prezentoval zcela moderní definici vektorového prostoru. Druhá kapitola, která je nazvána *Espaces vectoriels généraux* (str. 26–34), začíná v prvním paragrafu pojmenovaném *Définition et propriétés élémentaires des espaces vectoriels* těmito slovy:

Etant donné un ensemble non vide E, admettons qu'à tout couple ordonné x, y *d'éléments de E vienne correspondre un élément* $x + y$ *de E (dit somme de* x *et* y*) et que pour tout nombre* t *et pour tout* $x \subset E$ *un élément* tx

de E (dit produit du nombre t par l'élément x) soit défini de façon que ces opérations, à savoir l'addition des éléments et la multiplication des nombres par les éléments remplissent les conditions suivantes (où x, y et z désignent des éléments arbitraires de E et a, b des nombres):

1) $x + y = y + x$,
2) $x + (y + z) = (x + y) + z$,
3) $x + y = x + z$ *entraîne* $y = z$,
4) $a(x + y) = ax + ay$,
5) $(a + b)x = ax + bx$,
6) $a(bx) = (ab)x$,
7) $1 \cdot x = x$.

Dans ces hypothèses, nous disons que l'ensemble E constitue un espace vectoriel ou linéaire. Il est facile de voir qu'il existe alors un et un seul élément – désignons-le par 0 – tel que l'on a toujours $x + 0 = x$ et que l'égalité $ax = bx$ où $x \neq 0$ donne $a = b$; de plus, que l'égalité $ax = ay$ où $a \neq 0$ implique $x = y$. ([Banach, 1932], str. 26–27)

Ve druhém paragrafu *Extension des fonctionnelles additives et homogènes* je mimo jiné definován homomorfismus vektorových prostorů dvěma známými identitami:

Soient E et E_1 deux espaces vectoriels et $f(x)$ une opération définié dans E et dont le contredomaine est situé dans E_1.

L'opération $f(x)$ s'appelle additive, lorsqu'on a pour tout couple d'éléments x, y:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \ ;$$

elle est dite homogène, lorsqu'on a pour tout élément x et tout nombre t:

$$f(tx) = tf(x) \ .$$

([Banach, 1932], str. 27)

2. Lineární algebra u Bartela Leenderta van der Waerdena

V letech 1930 a 1931 vyšla ve dvou dílech monografie *Moderne Algebra*, jež významným způsobem ovlivnila vývoj algebry v několika následujících desetiletích. Napsal ji B. L. van der Waerden (1903–1996), jeden z nejvýraznějších matematiků dvacátého století, který byl aktivní v několika matematických disciplínách. Svoji knihu *Moderne Algebra* sepsal zejména na základě přednášek Emila Artina (1898–1962) a Amalie Emmy Noetherové (1882–1935).[2] Waerdenova kniha se stala pojmem, vyšla v řadě vydání a v několika překladech, patří k nejznámějším matematickým monografiím vůbec. Studovali z ní snad všichni algebraici aktivní ve druhé a třetí třetině minulého století.

[2] Viz B. L. van der Waerden: *On the sources of my book Moderne Algebra*, Historia Mathematica 2(1975), 31–40.

První vydání Waerdenovy monografie

V prvním díle Waerdenovy monografie se termín *lineární algebra* objevil hned v úvodu:

... wer etwas über Elimination oder lineare Algebra nachschlagen will, darf nicht durch komplizierte idealtheoretische Begriffsbildungen abgeschreckt werden. ([Waerden, 1930], Vol. I., str. 2)

V poznámce pod čarou autor navíc uvedl dva tituly, které začátečníkům doporučoval pro podrobnější studium lineární algebry:

Für die lineare Algebra auf:

Bôcher, M.: Introduction to higher Algebra. New York 1908 (auch deutsch von H. Beck, Leipzig 1910).

Dickson, L. E.: Modern algebraic Theories, Chicago 1926 (auch deutsch von E. Bodewig, Leipzig 1929).

Ve druhém díle knihy *Moderne Algebra* se termín *lineární algebra* objevil jako název 15. kapitoly (str. 109–148). Autor zde vymezil lineární algebru těmito slovy:

Die lineare Algebra handelt von Linearformen (mit Koeffizienten aus einem Ring K), von Moduln aus solchen Linearformen und von deren Homomorphismen oder linearen Transformationen. Die Theorie zerfällt in verschiedene Abschnitte, entsprechend den verschiedenen Voraussetzungen, die man über den zugrunde gelegten Ring oder Körper K machen kann. Ein einleitender Paragraph, gültig für beliebige (auch nichtkommutative) Ringe K, geht voran.

Die hier zu gebende Darstellung der linearen Algebra beruht ganz auf der Theorie der Gruppen mit Operatoren (Kap. 6) und benutzt sonst nur die Grundlagen (Kap. 1 bis 3). ([Waerden, 1930], Vol. II., str. 109)

Kapitola *Lineare Algebra* je rozdělena do osmi paragrafů, jejichž názvy blíže naznačují její obsah i pojetí. Již z tohoto výčtu je patrné, co asi autor považoval za lineární algebru; k celé problematice přistoupil podstatně obecněji než se později ve většině učebnic a monografií stalo zvykem:

104. *Moduln. Linearformen. Vektoren. Matrizes.*
105. *Moduln in bezug auf einen Körper. Lineare Gleichungen.*
106. *Moduln in Hauptidealringen. Elementarteiler.*
107. *Der Hauptsatz über Abelsche Gruppen.*
108. *Darstellungen und Darstellungsmoduln.*
109. *Normalformen für eine Matrix in einem kommutativen Körper.*
110. *Elementarteiler und charakteristische Funktion.*
111. *Quadratische und Hermitesche Formen.*

Poznamenejme ještě, že řada poznatků prezentovaných v kapitole *Lineare Algebra* je využita v kapitolách *Theorie der hyperkomplexen Größen* (str. 149–177) a *Darstellungstheorie der Gruppen und hyperkomplexen Systeme* (177–212).

Jedním ze základních pojmů lineární algebry je pojem lineární závislosti, resp. nezávislosti. B. L. van der Waerden jej vyšetřoval již v prvním díle své monografie *Moderne Algebra*, nikoli však v partii o vektorových prostorech, resp. modulech, ale v souvislosti s rozšířením těles.

V páté kapitole nazvané *Körpertheorie* (str. 86–131) jsou nejprve uvedeny základní poznatky o podtělesech, prvotělesech, tělesové adjunkci, zavedeny jsou pojmy algebraického a transcendentního prvku (paragrafy 25. *Unterkörper. Primkörper*, 26. *Adjunktion*, 27. *Einfache Körpererweiterungen*). V dalším paragrafu *Lineare Abhängigkeit von Größen in bezug auf einen Körper* je vyšetřována lineární závislost a nezávislost prvků okruhu $\mathfrak{G}$ nad jeho podtělesem Δ (přitom $\mathfrak{G}$ a Δ nemusí být komutativní), jehož jednotkový prvek je jednotkovým prvkem okruhu $\mathfrak{G}$ (řecká písmena použil autor pro označení prvků tělesa Δ, latinská pro prvky okruhu $\mathfrak{G}$):

Ein Element v heißt von $u_1, \dots, u_n$ linear-abhängig (in bezug auf Δ), wenn

$$v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$$

ist.

Die Elemente $u_1, \dots, u_n$ heißen untereinander linear-abhängig, falls eine Relation

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = 0 \tag{1}$$

besteht, ohne daß alle α_i verschwinden. ...

Besteht keine Gleichung von der Form (1), ohne daß

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$$

ist, so heißen $u_1, \dots, u_n$ linear-unabhängig. ...
([Waerden, 1930], Vol. I., str. 95)

Následuje krátká pasáž obsahující několik elementárních tvrzení o lineární závislosti a nezávislosti, zavedeny jsou tzv. lineární ekvivalentní množiny (množiny, jejichž lineární obal je stejný), potom přichází tzv. Steinitzova věta o výměně (*Austauschsatz*).

Sind $v_1, \dots, v_s$ untereinander linear-unabhängig und alle linear-abhängig von $u_1, \dots, u_r$, so gibt es in $\{u_1, \dots, u_r\}$ ein Teilsystem $\{u_{i_1}, \dots, u_{i_s}\}$ von genau s Elementen, welches man gegen das System $\{v_1, \dots, v_s\}$ austauschen kann, so daß das durch diesen Austausch aus $\{u_1, \dots, u_r\}$ entstehende System dem ursprünglichen System $\{u_1, \dots, u_r\}$ äquivalent ist.
([Waerden, 1930], Vol. I., str. 96)

Jako důsledek Steinitzovy věty o výměně je uvedeno tvrzení o stejném počtu prvků lineárně nezávislých a lineárně ekvivalentních množin:

Sind $\{u_1, \dots, u_r\}$ und $\{v_1, \dots, v_s\}$ zwei untereinander äquivalente, einzeln linear-unabhängige Systeme, so muß $r = s$ sein.
([Waerden, 1930], Vol. I., str. 96)

Pojem báze a dimenze je zaveden v případě, že je okruh $\mathfrak{S}$ konečně generovaný nad tělesem Δ:

… Ein solches linear unabhängiges System $\{u_1, \ldots, u_r\}$, von dem alle Elemente von $\mathfrak{S}$ linear abhängen, heißt eine Basis, genauer Δ-Basis … des Systems $\mathfrak{S}$ in bezug auf Δ. Wählen wir statt $\{u_1, \ldots, u_r\}$ eine andere Basis $\{v_1, \ldots, v_s\}$, so muß … $r = s$ sein; also ist die Anzahl r der Basiselemente eindeutig bestimmt. Man nennt sie den Grad oder linearen Rang der endlichen Erweiterung $\mathfrak{S}$ in bezug auf Δ. ([Waerden, 1930], Vol. I., str. 97)

Důsledkem předchozích poznatků je např. známá věta o stupních tělesových rozšíření ([Waerden, 1930], Vol. I., str. 98):

Sind Δ, Σ und Ω Körper und ist Σ endlich in bezug auf Δ und Ω endlich in bezug auf Σ, so ist Ω endlich in bezug auf Δ, und es gilt die Gradrelation:

$$(\Omega/\Delta) = (\Omega/\Sigma) \cdot (\Sigma/\Delta) \ .$$

V prvním díle Waerdenovy monografie se objevuje problematika závislosti a nezávislosti v obecnější podobě v kapitole *Unendliche Körpererweiterungen.* V 61. paragrafu této kapitoly nazvaném *Rein transzendente Erweiterungen. Irreduzible Systeme* je rozvíjen pojem algebraické závislosti, který velmi úzce souvisí s dříve studovaným pojmem lineární závislosti.

… Ein Element a von Ω heißt (algebraisch-)abhängig von einer Menge $\mathfrak{M}$ (in bezug auf den Grundkörper P), falls es algebraisch in bezug auf den Körper $P(\mathfrak{M})$ ist, also einer Gleichung genügt, deren Koeffizienten nicht sämtlich verschwinden und rationale Funktionen der Elemente von $\mathfrak{M}$ mit Koeffizienten aus P sind. … Da in der Gleichung nur endlichviele Elemente $m_1, \ldots, m_n$ von $\mathfrak{M}$ vorkommen, so hängt a schon von einer endlichen Untermenge von $\mathfrak{M}$ ab. ([Waerden, 1930], Vol. I., str. 204)

Vlastnosti takto definované závislosti jsou shrnuty v několika jednoduchých tvrzeních, za nimiž následuje definice *ireducibilní množiny*:

Eine Menge $\mathfrak{M}$ heißt irreduzibel (in bezug auf P), wenn kein Element von $\mathfrak{M}$ algebraisch von den übrigen abhängt. Man sagt in diesem Fall auch, die Menge $\mathfrak{M}$ „bestehe aus lauter algebraisch-unabhängigen Elementen“ oder „aus lauter unabhängigen Transzendenten.“ ([Waerden, 1930], Vol. I., str. 205)

Podobně jako v případě lineární závislosti je dokázáno tvrzení o stejné mohutnosti ireducibilních množin.

Zwei äquivalente irreduzible Systeme $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ sind gleichmächtig.
([Waerden, 1930], Vol. I., str. 206)

Pro konečný případ se autor odkázal na Steinitzovu větu, pro obecný případ na Steinitzův článek otištěný v časopisu Journal für die reine und angewandte Mathematik z roku 1910, případně na druhý díl učebnice Otty Haupta (1887–1988) nazvané *Einführung in die Algebra.*

Další vydání Waerdenovy monografie

Do sedmého vydání prvního dílu své monografie z roku 1966 přidal B. L. van der Waerden kapitolu *Vektorräume und Tensorräume*, tím vzrostl počet kapitol prvního dílu na jedenáct.[3] V úvodu napsal:

Als die erste Auflage geschrieben wurde, war sie als Einführung in die neuere abstrakte Algebra gedacht. Teile der klassischen Algebra, insbesondere die Determinantentheorie, wurden als bekannt vorausgesetzt. Heute aber wird das Buch vielfach von Studenten als erste Einführung in die Algebra benutzt. Daher wurde es notwendig, ein Kapitel über „Vektorräume und Tensorräume" einzufügen, in dem die Grundbegriffe der linearen Algebra, insbesondere der Determinantenbegriff erörtert werden.
([Waerden, 1930], Vol. I., 7. vydání: 1966, str. vi)

Páté vydání druhého dílu z roku 1967 navazuje na sedmé vydání dílu prvního z roku 1966. Začíná kapitolou *Lineare Algebra* (str. 1–33), která je dvanáctou kapitolou celého díla.[4] Lineární algebru zde charakterizoval B. L. van der Waerden takto:

Die lineare Algebra handelt von Moduln und ihren Homomorphismen, insbesondere von Vektorräumen und deren linearen Transformationen. Als Anwendung der Modultheorie wird in § 86 der Hauptsatz über abelsche Gruppen bewiesen. § 90 handelt von quadratischen Formen, § 91 von antisymmetrischen Bilinearformen.

Das zwölfte Kapitel beruht ganz auf der Theorie der Gruppen mit Operatoren (Kap. 7). ([Waerden, 1930], Vol. II., 5. vydání: 1967, str. 1)

Je velmi zajímavé srovnat výše uvedená Waerdenova vymezení lineární algebry z let 1931 a 1967.

3. Lineární algebra v referativních časopisech

V následujících odstavcích se pokusíme ukázat, jak se vyvíjelo chápání matematické disciplíny nazývané dnes *lineární algebra* ve dvou významných referativních časopisech. Vymezení této oblasti i její členění se během třicátých a čtyřicátých let 20. století vyvíjelo a měnilo; tento proces úzce souvisel s postupným utvářením této matematické disciplíny, které bylo do jisté míry ukončeno na přelomu čtyřicátých a padesátých let v souvislosti s vydáním prvních učebnic.

---

[3] Jedná se o čtvrtou kapitolu, která je členěna na paragrafy takto: 19. *Vektorräume*, 20. *Die Invarianz der Dimension, 21. Der duale Vektorraum, 22. Lineare Gleichungen in einem Schiefkörper, 23. Lineare Transformationen, 24. Tensoren, 25. Antisymmetrische Multilinearformen und Determinanten, 26. Tensorprodukte, Verjüngung und Spur.*

[4] Je členěna na tyto paragrafy: 84. *Moduln über einem Ring*, 85. *Moduln über euklidische Ringe. Elementarteiler*, 86. *Der Hauptsatz über abelsche Gruppen*, 87. *Darstellungen und Darstellungsmoduln*, 88. *Normalformen für eine Matrix in einem kommutativen Körper*, 89. *Elementarteiler und charakteristische Funktion*, 90. *Quadratische und Hermitesche Formen*, 91. *Antisymmetrische Bilinearformen.*

Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete

Roku 1931 začal vycházet referativní časopis *Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete*.[5] Posuzované práce byly zařazovány podle svého tématického zaměření – celá matematika byla rozdělena na několik hlavních disciplín, které byly dále podrobněji členěny.

V prvních dvou svazcích (1931–1932) bylo toto členění zachyceno v obsahu časopisu; jednou z hlavních disciplín byla *Algebra, Zahlentheorie*, která obsahovala podobor *Lineare Algebra, Determinanten, bilineare und quadratische Formen*. Od třetího svazku (1932) bylo tématické třídění dáno věcným rejstříkem; ve třetím až pátém svazku (1932–1933) bylo jedno ze základních témat vystiženo heslem *Matrizen und Determinanten*, pod které spadala témata *Eigenwerte, Elementarteiler, Funktionaldeterminanten, Infinitesimalkalül der Matrizen, Matrizenkalkül, Spezielle Determinanten und Matrizen, Unendliche Matrizen*.

Od svazku 6(1933) do svazku 25(1941) bylo základním heslem *Lineare Algebra, Matrizen und Determinaten*, jehož náplň naznačovalo v letech 1933 až 1941 toto podrobnější členění:

Bilineare, quadratische Formen und Verwandtes – od svazku 16(1937), *Eigenwerte*, *Elementarteiler*, *Funktionaldeterminanten*, *Infinitesimalkalkül der Matrizen*, *Lineare Gleichungen und Ungleichungen*, *Matrizenkalkül*, *Spezielle Determinanten und Matrizen*, *Unendliche Matrizen* – naposled ve svazku 10(1934).

Lineární algebra byla v rejstříku odkazována ještě na hesla *Analytische und projektive Geometrie*, *Gruppentheorie, lineare Gruppen*, *Körpertheorie, Ringe*, *Riemannsche Matrizen*, *Numerische und graphische Methoden*, *Numerische Auflösung von Gleichungen und Gleichungssystemen*, *Differentialgleichungen, gewöhnliche*, *Differentialgleichungen im Komplexen*, *Funktionalanalysis*, *Integralgleichungen*, *Unendlich viele Variablen*. Heslo *Lineare Räume* bylo odkazováno na *Funktionalanalysis, lineare und Fuktionenräume*.

Od svazku 26(1942) do svazku 140(1968) bylo základní heslo *Lineare Algebra, Matrizen und Determinanten*[6] členěno takto:

Determinanten, *Formen und Invarianten*, *Infinitesimalkalkül der Matrizen*, *Lineare Gleichungen und Ungleichungen*, *Matrizen*, *Substitutionen* (naposled ve svazku 54(1956)).

Od svazku 141(1968) do svazku 214(1971) bylo základním heslem *Lineare Algebra. Formen. Invariantentheorie* s následujícím členěním – viz svazek 150(1969–70):

---

[5] V redakční radě tohoto časopisu byl v té době B. L. van der Waerden, který roku 1931 užil termín lineární algebra ve své monografii *Moderne Algebra*.

[6] Ve svazku 102(1963) *Lineare Algebra. Polynome. Formen. Invarianten*, od svazku 110(1965–66) pouze *Lineare Algebra*. Poznamenejme ještě, že od 42. svazku přestal vycházet věcný rejstřík v jednotlivých svazcích. Vycházel vždy hromadně, například ve svazku 54(1956).

Äquivalenz von Matrizen, kanonische Formen, Determinanten, Permanenten, Eigenwertprobleme, Formen höheren Grades, Invariantentheorie, Lineare Gleichungen und Ungleichungen, Matrizenfunktionen, Matrizengleichungen und -ungleichungen, Matrizeninversion, Multilineare Algebra, Quadratische Formen, Vektorräume, Moduln.

Od svazku 215(1971) začala být využívána AMS (MOS) Subject Classification Scheme (1970) – viz dále.

Mathematical Reviews

Roku 1940 začal vycházet referativní časopis *Mathematical Reviews*. Posuzované práce byly řazeny tématicky již od prvního čísla tohoto časopisu. V prvním ročníku se část nazvaná *Linear algebra* objevila pětkrát, ve druhém ročníku jen jednou. Ve věcném rejstříku byla v následujících letech lineární algebra rozdělena většinou do sedmi tématických okruhů:

1. *Matrices, determinants; general theory*,
2. *Special matrices, determinants*,
3. *Hypercomplex systems* (od roku 1946 *Special algebras*),
4. *Linear forms and equations*,
5. *Quadratic and bilinear forms*,
6. *Forms of higher degree* (naposled roku 1952),
7. *Characteristic values, elementary divisors.*

Od ročníku 17(1956) se členění věcného rejstříku vyvíjelo směrem ke klasifikaci s desetinným tříděním, která byla poprvé zavedena roku 1959. V roce 1957 byla lineární algebra rozdělena takto (roku 1956 byla členěna velmi podobně):

1. *Linear, bilinear and quadratic forms*,
2. *Matrices*,
3. *Linear transformations*,
4. *Eigenvalues, eigenvectors*,
5. *Multilinear algebra, tensors*,
6. *Alternating forms, determinants*,
7. *Linear equations, matrix inversion.*

Roku 1958 se poprvé objevila *Subject classification*, ale ještě bez desetinného třídění, o rok později již s desetinným tříděním:

15. *Linear algebra*
    10. *Forms, linear transformations, matrices*,
    20. *Inequalities for matrices*,
    30. *Eigenvalues and eigenvectors*,

40. *Multilinear algebra*,
50. *Linear equations, matrix inversion, determinants.*

Od roku 1962 do roku 1967 byla užívána podrobnější klasifikace (v letech 1960 a 1961 byla obdobná, chyběly však např. položky 39 a 49):

15. *Linear algebra*

    05. *Vector spaces*,
    10. *Forms, linear transformations, matrices*,
    15. *Linear inequalities*,
    20. *Inequalities involving eigenvalues and eigenvectors*,
    25. *Miscellaneous inequalities involving matrices*,
    30. *Eigenvalues and eigenvectors*,
    33. *Canonical forms, reductions*,
    36. *Linear sets of linear transformations*,
    38. *Matrix equations and identities*,
    39. *Invariants*,
    40. *Multilinear algebra*,
    48. *Determinants*,
    49. *Permanents*,
    50. *Linear equations, matrix inversion.*

Od roku 1968 bylo hlavní téma mírně přejmenováno a členění hesla podstatně rozšířeno:

15. *Linear and multilinear algebra, matrix theory*

    05. *Vector spaces, linear dependence, rank*,
    10. *Linear equations*,
    15. *Matrix inversion, generalized inverses*,
    20. *Determinants, permanents, other special matrix functions*,
    25. *Eigenvalues and eigenvectors*,
    30. *Canonical forms, reductions, classification*,
    35. *Matrix equations and identities*,
    38. *Commutativity*,
    40. *Algebraic system of matrices*,
    45. *Matrices over specialrings*,
    48. *Matrices of integers*,
    50. *Linear inequalities*,
    55. *Inequalities involving eigenvalues and eigenvectors*,
    58. *Miscellaneous inequalities involving matrices*,
    60. *Positive matrices*,

65. *Stochastic matrices*,
70. *Quadratic and bilinear forms, inner products*,
75. *Clifford algebras*,
80. *Multilinear algebra, tensor products*,
85. *Vector and tensor algebra, theory of invariants*,
90. *Exterior algebra, Grassmann algebras.*

V ročníku 39(1970) přibylo za hlavním názvem *Linear and multilinear algebra; matrix theory* v závorce *finite and infinite*, tématické členění se zcela změnilo, přibylo mnoho nových položek. V dalších letech se však využívalo členění, které bylo užíváno koncem šedesátých let.

4. Lineární algebra v polovině 20. století

The American Mathematical Monthly

Roku 1950 vyšel index časopisu *The American Mathematical Monthly*, který soustřeďuje informace o svazcích 1(1894) až 56(1949). Ve věcném rejstříku jsou publikované články řazeny tématicky, heslo *lineární algebra* se zde však nevyskytuje. Této disciplíny se týkají zejména hesla *Elimination and Resultants*, *Simultaneous Linear Equations*, *Determinants*, *Matrices*, *Quadratic Forms* a *Vectors.*

Hesla věcného rejstříku byla jistě volena tak, aby dobře odpovídala výše uvedenému časovému období, úseku delšímu než padesát let. Termín *lineární algebra* nebyl tedy ještě roku 1950 běžně užívaný.

Roku 1956 vyšel v tomto časopisu zajímavý článek *Methods of proofs in linear algebra*, jehož autorem je Harley Flanders. Je to jeden z prvních časopiseckých článků, v jehož názvu je termín *lineární algebra* v dnešním smyslu.[7]

Monografie a učebnice

Termín lineární algebra se v učebnicích matematiky objevil již ve třicátých letech 20. století. V té době ještě zdaleka nebyl vymezen obsah této disciplíny.

Roku 1934 vyšla ruská verze knihy *Einführung in die analytische Geometrie und Algebra I.* od O. Schreiera (1901–1929) a E. Spernera (1905–1980), která byla publikována v originále roku 1931. Autorem překladu je G. Ol'šanskij, zajímavé je, že má odlišný název – *Vvedenie v linejnuju algebru v geometričeskom izloženii.* Překlad však nemá žádnou předmluvu ani úvod, takže není jasné, čím byla změna názvu motivována.

Kniha má tři části; první je věnována afinnímu prostoru a lineárním rovnicím, druhá eukleidovskému prostoru a teorii determinantů, třetí teorii

[7] Termín *lineární algebra* se objevoval již dříve, ale ve smyslu *lineární asociativní algebra.*

těles a základní větě algebry. Z dnešního pohledu je lineární algebra náplní této knihy jen z menší části.

V letech 1935 a 1937 byl ve dvou svazcích vydán učební text *Leçons d'algèbre et de géométrie: à l'usage des étudiants des facultés des sciences*, který sepsal René Garnier (1887–1984). První díl se nazývá *Algèbre linéaire. Homographie. Équations tangentielles* (1935), druhý díl *Élimination éléments de géométrie réglée. Transformation de Lie. Applications à la géométrie conforme* (1937).

Roku 1938 vyšel první díl čtyřsvazkového kompendia Haralda Augusta Bohra (mladší bratr fyzika Nielse Bohra, 1887–1951) a Johannesa Mollerupa (1872–1937) *Lehrbuch der mathematischen Analysis, I. Lineare Algebra*; jednalo se o druhé, přepracované vydání (vydali je A. F. Andersen a R. Petersen).[8]

Výuka partií, které dnes řadíme do lineární algebry, probíhala dosti dlouho v rámci přednášek z algebry, geometrie nebo matematiky. Až do čtyřicátých let byly ke studiu této rodící se disciplíny užívány různé učebnice algebry (resp. matematiky) obsahující příslušná témata. Připomeňme ještě několik významných učebnic ze čtyřicátých let, které připěly k rozšíření a všeobecnému uznání pojmu vektorový prostor, k rozšíření axiomatického vyjádření základních pojmů algebry a lineární algebry a k jejich moderní prezentaci. Podle těchto učebnic se řadu let přednášelo, studovalo se z nich na mnoha univerzitách západního i východního světa. Jejich autory jsou Garrett Birkhoff (1911–1996), Saunders Mac Lane (1909–2005), Paul Richard Halmos (1916–2006) a Aleksander Gennadievič Kuroš (1903–1985).

G. Birkhoff, S. Mac Lane: *A survey of modern algebra* (1941, 2. vydání: 1953, 3. vydání: 1965, slovensky: 1979),

P. R. Halmos: *Finite-dimensional vector spaces* (1942, četná další vydání a dotisky, rusky: 1963),

A. G. Kuroš: *Kurs vyssej algebry* (1946, 9. vydání: 1968, anglicky: 1972, 5. vydání: 1988, německy: 1972, francouzsky: 1971, 1973, italsky: 1977, 1988, španělsky: 1981, 4. vydání: 1987, arabsky: 1977, rumunsky: 1955).

Koncem čtyřicátých let a v první polovině padesátých let 20. století se objevilo několik učebnic, které měly termín *lineární algebra* přímo v názvu, resp. v názvu své podstatné části. Tyto učebnice významným způsobem ovlivnily konstituování lineární algebry jako jednoho ze základů vysokoškolské matematiky. Připomeňme některé tituly, které hrály – podle našeho názoru – v jednotlivých (politicky či jazykově vymezených) oblastech světa důležitou roli. Jejich autory byli významní matematici: André Lichnerowicz (1915–1998), Israil Moiseevič Gel'fand (nar. 1913), Anatolij Ivanovič Mal'cev (1909–1967), Dmitrij Konstantinovič Faddejev (1907–1989), Vera Nikolaevna Faddejeva (1906–1983), Hans Wilhelm Eduard Schwerdtfeger (1902–1990), Reinhold Baer (1902–1979), Robert Roth Stoll (?–1990), Nathan Jacobson (1910–1999), Leon Mirsky (1918–1983) a skupina bourbakistů.

[8] První vyšlo v letech 1920–1923 v Kodani pod názvem *Laerebog i matematisk.*

A. Lichnerowicz: *Algèbre et analyse linéaires*[9] (1947, 2. vydání 1956, německy: 1956),

N. Bourbaki: *Éléments de mathématique. I. Les structures fondamentales de l'analyse. Livre II. Algèbre, Chapitre II. Algèbre linéaire* (1947),

N. Bourbaki: *Éléments de mathématique. I. Les structures fondamentales de l'analyse. Livre II. Algèbre, Chapitre III. Algèbre multilinéaire* (1948),

I. M. Gel'fand: *Lekcii po linejnoj algebre* (1948, 2. vydání: 1951, 3. vydání 1966, 4. vydání: 1971, česky: 1953, anglicky 1961, 1963, 1965, 1967, 1978, 1989),

A. I. Mal'cev: *Osnovy linejnoj algebry* (1948, další vydání: 1956, 1970, 1975, anglicky: 1963, italsky: 1980),

V. N. Faddejeva: *Vyčislitel'nye metody linejnoj algebry* (1950, přepracovaná vydání (D. K. Faddejev, V. N. Faddejeva): 1960, 1963, anglicky: 1959, 1963, česky: 1964),

H. Schwerdtfeger: *Introduction to linear algebra and the theory of matrices* (1950, 2. vydání: 1962),

R. Baer: *Linear algebra and projective geometry* (1952, 2. vydání: 1966, rusky: 1955),

R. R. Stoll: *Linear algebra and matrix theory* (1952, 1969),

N. Jacobson: *Lectures in abstract algebra. II. Linear algebra* (1953),

L. Mirsky: *An introduction to linear algebra* (1955, reprint: 1982, 1990).

Poznamenejme, že termín *lineární algebra* nebyl ještě v první polovině padesátých let běžně užíván jako název matematické disciplíny. Snadno se o tom můžeme přesvědčit pomocí vyhledávání v elektronických databázích referativních časopisů.

Koncem padesátých let a v letech šedesátých vyšla řada důležitých učebnic lineární algebry. Uvedeme jen některé, aniž bychom je vyvyšovali nad ostatní. Poznamenejme, že obliba konkrétní učebnice, její úspěšnost, resp. role ve výuce příslušné disciplíny je do určité míry naznačena počtem vydání a překladů:

W. Greub: *Lineare Algebra* (1958, další vydání: 1976, anglicky: 1963, 1967, 1975, 1981),

G. Hadley: *Linear algebra* (1961),

K. Hoffman, R. Kunze: *Linear algebra* (1961, další vydání: 1965, 1971),

C. W. Curtis: *Linear algebra. An introductory approach* (1963, další vydání: 1968, 1974, 1984, 1986, 1993),

H.-J. Kowalsky: *Lineare Algebra* (1963, další vydání: 1965, 1967, 1969, 1970, 1972, 1975, 1977, 1979, 1995, 1998, 2003),

---

[9] První část se jmenuje *Algèbre linéaire*, druhá *Analyse linéaire*.

J. Dieudonné: *Algèbre linéaire et géometrie élémentaire* (1964, 2. vydání: 1964, 1965, 3. vydání: 1968, 4. vydání 1978, 5. vydání: 1981, rusky: 1972, anglicky: 1969, 1983, španělsky: 1964),

E. D. Nering: *Linear algebra and matrix theory* (1964, 2. vydání: 1970),

S. Lang: *Linear algebra* (1966, 1967, 1968, 2. vydání: 1970, 1971, 1973, 3. vydání: 1987, 1989, 1993, 1996, 1999, 2003, 2004, italsky: 1970, 1972, 1974, 1977, 1980, 1984, 1988, 1992, 1993),

W. Nef: *Lehrbuch der linearen Algebra* (1966),

W. Greub: *Multilinear algebra* (1967, 2. vydání: 1978),

P. J. Kahn: *Introduction to linear algebra* (1967),

R. R. Stoll, E. T. Wong: *Linear algebra* (1968),

B. Noble: *Applied linear algebra*[10] (1969, 2. vydání: 1977, 3. vydání: 1988),

S. Lang: *Introduction to linear algebra* (1970, 2. vydání: 1986, 1988, 1991, 1993, 1995, 1997, 2000),

H.-J. Kowalsky: *Einführung in die lineare Algebra* (1971, další vydání: 1974, 1977),

M. O'Nan: *Linear algebra*[11] (1971, 2. vydání: 1976, 3. vydání: 1990).

Některé učebnice se sice v plném rozsahu týkaly lineární algebry, ale jejich název zdůrazňoval jiný aspekt této disciplíny, zejména význam pojmu vektorový (lineární) prostor. Jako příklady uveďme knihy, které vydali Georgij Jevgen'evič Šilov (1917–1975) a Helmut Boseck (nar. 1931).

G. E. Šilov: *Vvedenie v teoriju linejnych prostranstv* (1952, 1969, anglicky: 1961, 1971, 1974, 1977),

H. Boseck: *Einführung in die Theorie der linearen Vektorräume* (1965, 1967, 1973, 1981, 1984).

Sbírky úloh

Univerzitní výuka je podstatně ovlivňována materiály, jež slouží k širšímu pochopení teorie a k jejímu procvičování na příkladech praktického i teoretického charakteru. Připomeneme proto několik titulů, které tento význam měly pro výuku lineární algebry.

Úlohy z lineární i obecné algebry soustředila sbírka úloh, kterou sestavili D. K. Faddejev a Ilja Samoilovič Sominskij. Vyšla v řadě vydání a v několika překladech, po několik desetiletí byla užívána zejména v Sovětském svazu a východní Evropě.

---

[10] Spoluautorem druhého a třetího vydání je J. W. Daniel.
[11] Spoluautorem třetího vydání je H. Enderson.

D. K. Faddejev, I. S. Sominskij: *Sbornik zadač po vysšej algebre* (1949, 11. vydání: 1977, 13. vydání z roku 1999 je dostupné on line; slovensky: 1968, anglicky: 1965, 1970, 1980, italsky: 1977, francouzsky: 1977, maďarsky: 2006).

Bohatou a poměrně náročnou kolekci příkladů z lineární algebry představuje Proskurjakovova sbírka, která byla vydána několikrát. Řadu let ovlivňovala výuku lineární algebry na mnoha univerzitách východní Evropy.

I. V. Proskurjakov: *Sbornik zadač po linejnoj algebre* (1957, další vydání: 1961, 1966, 1970, 1974, anglicky: 1978).[12]

Velmi rozšířenou sbírkou úloh z lineární algebry je studijní text Seymoura Lipschutze, který byl mnohokrát vydáván v několika jazycích po celém světě:

S. Lipschutz: *Schaum's outline of theory and problems of linear algebra* (1968).[13]

Velmi zajímavou, ale mimořádně náročnou sbírkou problémů pro aktivní studium matematiky je rozsáhlá učebnice Izrail'a Markoviče Glazmana (1916–1968) a Jurije Il'iče Ljubiče zaměřená na procvičení poměrně rozsáhlých partií lineární algebry a funkcionální analýzy. Obsahuje bohatý soupis literatury, jmenný a věcný rejstřík.

I. M. Glazman, Ju. I. Ljubič: *Konečnomernyj linejnyj analiz v zadačach* (1969, anglicky: 1974, 2006, francouzsky: 1974).

Popularizace lineární algebry

Začátkem padesátých let dvacátého století se již projevila výrazná snaha seznámit širší matematickou komunitu se základy lineární algebry, s jejími výsledky a problémy, popularizovat ji, zdůraznit její význam a rozšířit znalost jejích základů mezi studenty i učiteli. S těmito cíli byly publikovány přehledové, informativní a popularizační články. Uvedeme jen několik příkladů.

Roku 1953 vyšly v jednom ze sešitů nového vydání německé matematické encyklopedie (Enzyclopädie der mathematischen Wissenschaften) dva přehledové články Günthera Pickerta (nar. 1917) nazvané *Lineare algebra* a *Normalformen von Matrizen.* Zasvěceně informují o tehdejším stavu lineární algebry.

Ve stejném roce vyšla v sovětském časopise *Matematika v škole* krátká stať Sergeje Vasil'jeviče Fomina (1917–1975) věnovaná objasnění klíčových pojmů z nejdůležitějších oblastí lineární algebry.[14] S nepatrnou časovou ztrátou vyšlo Fominovo pojednání v českém překladu ve třetím ročníku časopisu *Sovětská věda. Matematika-Fyzika-Astronomie* pod názvem *Základní pojmy lineární algebry* (13 stran). Autorem českého překladu je Josef Veselka (1909–1987).

[12] Proskurjakovovu sbírku úloh ve východní Evropě do jisté míry nahradila až sbírka, kterou sestavil Chakim Dadadžanovič Ikramov (nar. 1943) – viz [Ikramov, 1975].

[13] Na novějších vydáních je jako spoluautor uveden Marc Lars Lipson.

[14] Připomeňme, že S. V. Fomin podstatně přispěl ke vzniku Gel'fandovy knihy *Lekcii po linejnoj algebre* (1948), jak její autor poznamenal v předmluvě.

Fominův článek má krátký úvod, z něhož vyjímáme zajímavou pasáž zdůvodňující mimo jiné význam lineární algebry pro středoškolské učitele.

… Methody „geometrie n-rozměrného prostoru“, nebo, jak dnes říkáme, lineární algebry, se používají v analytické geometrii, v mechanice, v theorii diferenciálních rovnic a jinde.

Koncem minulého a začátkem tohoto století došlo k dalšímu skvělému rozvoji myšlenek lineární algebry. Přitom se zobecnil sám pojem „prostoru“ zavedením t. zv. nekonečně rozměrného prostoru. Theorie, která tu vznikla, je úzce spjata s nejdůležitějšími odvětvími současné matematiky, s diferenciálními a integrálními rovnicemi, s trigonometrií, s řadami atd., a také se současnou theoretickou fysikou, především s kvantovou mechanikou.

V lineární algebře je s druhé strany zvlášť výrazná souvislost mezi geometrickými představami a algebraickými methodami. Tato souvislost, charakteristická pro t. zv. vyšší matematiku, hlouběji a hlouběji proniká i do školní výuky. Je proto znalost základních pojmů lineární algebry pro učitele užitečná jak s hlediska rozšíření jeho matematických znalostí, tak pro jeho přímou pedagogickou činnost – i když lineární algebra sama není pojata do školních osnov škol nižších typů, než je škola vysoká. (str. 478–479)

Fominův text je rozdělen do tří paragrafů, které se dále dělí na články. Je pozoruhodné, kolik informací se podařilo autorovi shrnout na necelých třinácti stranách. Stručný obsah jeho pojednání tuto skutečnost dokumentuje:

1. *LINEÁRNÍ PROSTOR.*

1. Definice lineárního prostoru a příklady. 2. Lineární závislost. 3. Dimense lineárního prostoru. 4. Base, souřadnice. 5. Isomorfismus lineárních prostorů. 6. Podprostor lineárního prostoru. 7. Geometrická interpretace soustavy lineárních rovnic.

2. *EUKLIDOVSKÝ PROSTOR.*

8. Definice euklidovského prostoru. 9. Délka vektoru a úhel dvou vektorů. Nerovnost Cauchyho-Bunjakovského. 10. Orthonormální base. 11. Isomorfismus euklidovských prostorů.

3. *LINEÁRNÍ TRANSFORMACE V EUKLIDOVSKÉM PROSTORU.*

12. Definice a příklady lineárních transformací. 13. Sčítání a násobení lineárních transformací. 14. Matice lineární transformace. 15. Invariantní podprostory. Charakteristické vektory a charakteristické hodnoty. 16. Symetrické lineární transformace. 17. Bilineární a kvadratické formy. [Fomin, 1953]

Roku 1956 vyšlo v Moskvě v Nakladatelství Akademie věd SSSR třísvazkové přehledové dílo *Matematika, jeje soderžanie, metody i značenie*, které redigovali Aleksandr Danilovič Aleksandrov (1912–1999), Andrej Nikolajevič Kolmogorov (1903–1987) a Michail Aleksejevič Lavrent'jev (1900–1980). Šestnáctou kapitolu *Linejnaja algebra* sepsal D. K. Faddejev. Jeho pojednání o lineární algebře je podstatně obsažnější než výše uvedená Fominova stať, zaujímá totiž 56 stran. Rozděleno je do šesti paragrafů:

1. Predmet linejnoj algebry i jeje apparat. 2. Linejnoe prostranstvo. 3. Sistemy linejnych uravnenij. 4. Linejnye preobrazovanija. 5. Kvadratičnye formy. 6. Funkcii ot matric i nekotorye ich priloženija.

Poznamenejme, že dílo *Matematika, jeje soderžanie, metody i značenie* bylo v letech 1962 až 1963 vydáno v anglické verzi v šesti svazcích pod názvem *Mathematics: its content, methods and meaning.*

5. Současnost

Učebnice a monografie

V poslední třetině 20. století vyšla velká řada učebnic lineární algebry. Připomeňme ve stručnosti jen některé, aniž bychom je označovali za ty nejdůležitější: [Noble, 1969], [Campbell, 1971], [Jacob, Bailey, 1971], [Fletcher, 1972], [Anton, Rorres, 1973], [Marcus, 1973], [Satake, 1973], [Strang, 1976], [Rorres, 1977], [Kostrikin, Manin, 1980], [Brieskorn, 1983], [Klingenberg, 1984], [Brown, 1988], [Huppert, 1990], [Strang, 1993], [Bultheel, van Barel, 1997], [Kwak, Hong, 1997], [Strang, Borre, 1997], [Blyth, Robertson, 1998], [Szabo, 2000].

Některé z výše uvedených učebnic lineární algebry jsou výrazněji zaměřeny na užití této disciplíny, např. [Noble, 1969], [Campbell, 1971], [Fletcher, 1972], [Strang, 1976], [Rorres, 1977], [Huppert, 1990], [Strang, Barre, 1997]. Jiné zdůrazňují sepětí lineární algebry s geometrií, např. [Kostrikin, Manin, 1980], [Brieskorn, 1983], [Klingenberg, 1984], [Bultheel, van Barel, 1997]. Lineární algebra je v některých učebnicích spojována s pokročilejší teorií matic, s vektorovým počtem, s počátky funkcionální analýzy apod.

Učebnice lineární algebry, které mají nejrůznější zaměření a rozsah, vycházejí v současné době poměrně často. Kromě elementárních textů určených k výuce úvodních vysokoškolských matematických kurzů a standardních učebnic jsou vydávány i rozsáhlé monografie věnované velmi často nejrůznějším aplikacím, případně obsáhlá kompendia. Připomeňme jen několik nejnovějších titulů:

K. N. Srinivasa Rao: *Linear algebra and group theory for physicists* (1996, 2006),

B. Huppert, W. Willems: *Lineare Algebra* (2006),

H. Muthsam: *Lineare Algebra und ihre Anwendungen* (2006),

P. J. Olver, Ch. Shakiban: *Applied linear algebra* (2006),

H. Dym: *Linear algebra in action* (2007),

L. Hogben, R. Brualdi, A. Greenbaum, R. Mathias (ed.): *Handbook of linear algebra* (2007).

Odborné časopisy

Ve druhé polovině 20. století vzniklo několik časopisů věnovaných nejrůznějším otázkám lineární algebry. Odborné práce tohoto zaměření jsou dnes proto většinou publikovány právě v některém z nich.[15]

Časopis *Linear Algebra and its Applications* založili roku 1968 A. J. Hoffman, A. S. Householder, A. M. Ostrowski, O. Taussky-Todd. V letech 1968 až 1972 jej redigoval A. J. Hoffman, v letech 1972 až 1978 H. Schneider, v letech 1979 až 1999 A. Brualdi a H. Schneider, od roku 1999 jej redigují A. Brualdi, V. Mehrmann a H. Schneider.

Časopis *Linear and Multilinear Algebra* založili roku 1972 Marvin Marcus a Robert C. Thompson, kteří jej redigovali v letech 1972 až 1992. V letech 1992 až 2006 byl redaktorem William Watkins, od roku 2006 s ním časopis redigují Steve Kirkland a Chi-Kwong Li. V současné době vychází osm čísel ročně, kromě prací z lineární a multilineární algebry jsou publikovány i články z nelineární, resp. numerické algebry, ale i z obecné algebry, matematické a numerické analýzy apod.

Roku 1996 byl založen elektronický časopis zaměřený na lineární algebru. Jmenuje se *ELA – The Electronic Journal of Linear Algebra*, vydává jej The International Linear Algebra Society, jeho redaktory jsou Ludwig Elsner a Daniel Hershkowitz. Časopis věnuje největší pozornost maticové analýze a různým aspektům lineární algebry a jejích aplikací.

Časopis *Numerical Linear Algebra with Applications* vznikl roku 1994. Redaktory jsou Owe Axelsson a Panayot S. Vassilevski.

Odborné práce, které můžeme řadit k lineární algebře, jsou publikovány i v dalších časopisech, z nichž je třeba uvést zejména

Mathematics of Control, Signals, and Systems,

Numerical Mathematics,

Operators and Matrices,

SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications.

Výuka lineární algebry

V posledních letech vyšlo několik velmi zajímavých publikací věnovaných výuce lineární algebry. Některé texty předkládají jednoduché důkazy a postupy, které usnadňují pochopení pojmů, výsledků i metod, prezentují základní myšlenky ve srozumitelné podobě, další využívají historii této disciplíny k motivaci a vzbuzení zájmu, jiné propagují nové pojetí výkladu fundamentálních poznatků apod.[16] Přednášejícím obsažnějších kurzů lineární algebry a vážnějším

[15] Snadnou orientaci v publikovaných pracích a rychlé vyhledávání informací umožňují pravidelně publikované indexy, webovské stránky těchto časopisů a elektronické databáze referativních časopisů.

[16] Viz též články *Výuka lineární algebry* [Bečvář, 1995] a *Snění na bezesných přednáškách* [Bečvář, 1997].

zájemcům o tento obor mohou tyto knihy poskytnout cennou inspiraci k obohacení jejich přednášek, podněty k dalšímu bádání nebo motivaci k obecnějším úvahám o stavu matematiky a o jejím vývoji. Jedná se zejména o následující tituly:

S. Axler: *Linear algebra done right* (1996, 2. vydání: 1997),

D. Carlson, C. R. Johnson, D. C. Lay, A. D. Porter, A. E. Watkins, W. Watkins (eds.): *Resources for teaching linear algebra*[17] (1997),

J.-L. Dorier: *On the teaching of linear algebra* (2000),

D. Carlson, C. R. Johnson, D. C. Lay, A. D. Porter (eds.): *Linear algebra gems. Assets for undergraduate mathematics*[18] (2002).

Historie lineární algebry

Vzniku a vývoji lineární algebry nebyla dosti dlouho věnována větší pozornost. Určitou výjimkou byla teorie determinantů, o jejíž historii bylo sepsáno několik zasvěcených prací již v 19. století. Teprve v poslední třetině 20. století se objevily v několika knihách o historii matematiky podrobnější partie o vývoji této disciplíny (např. [Kline, 1972], [Dieudonné, 1978], [Kolmogorov, Juškevič, 1978], [Grat], [Alten a kol., 2003]). V sedmdesátých letech vyšlo několik podrobných článků Thomase Hawkinse o vzniku a vývoji teorie matic, v devadesátých letech byl v několika pracích výrazně upřesněn pohled na vznik pojmu determinant a na vývoj teorie determinatů (E. Knobloch). Ve stejné době se Jean-Luc Dorier a Gregory H. Moore soustředili na historii lineární algebry ve dvacátém století; jejich obsáhlé práce byly publikovány roku 1995 v časopise Historia Mathematica:

J.-L. Dorier: *A general outline of the genesis of vector space theory*,

G. H. Moore: *The axiomatization of linear algebra.*

Možnosti výpočetní techniky

Nelze nepřipomenout sílu nástrojů, které dnes poskytuje moderní výpočetní technika (Mathematica, Maple, MATLAB apod.). I o těchto záležitostech již existuje rozsáhlá literatura přivádějící poměrně rychle začátečníky i pokročilé k efektivnímu využití mohutných balíků programů na řešení nejrůznějších úloh. Uveďme jen několik titulů týkajících se lineární algebry:

E. W. Johnson: *Linear algebra with MAPLE V.* (1993),

---

[17] Kniha má pět částí: *I. The role of linear algebra. II. Linear algebra as seen from client disciplines. III. The teaching of linear algebra. IV. Linear algebra exposition. V. Applications of linear algebra.*

[18] Kniha má deset částí: *1. Partitioned matrix multiplication. 2. Determinants. 3. Eigenanalysis. 4. Geometry. 5. Matrix forms. 6. Polynomials and matrices. 7. Linear systems, inverses, and rank. 8. Applications. 9. Other topics. 10. Problems.*

D. R. Hill, D. E. Zitarelli: *Linear algebra LABS with MATLAB* (1994),

W. Strampp: *Höhere Mathematik mit Mathematica. Band 1: Grundlagen, Lineare Algebra* (1997),

E. Deeba, A. Gunawardena: *Interactive linear algebra with MAPLE V.* (1998),

B. F. Torrence, E. A. Torrence: *The student's introduction to Mathematica. A handbook for precalculus, calculus, and linear algebra* (1999),

F. Szabo: *Linear algebra. An introduction using Mathematica* (2000),

L. Jolivet, R. Labbas: *Applications mathématiques avec MATLAB. Tome 1: Algèbre linéaire et géométrie. Rappel de cours et exercices corrigés* (2005),

D. Bahns, Ch. Schweigert: *Softwarepraktikum – Analysis und lineare Algebra. Ein MAPLE-Arbeitsbuch mit vielen Beispielen und Lösungen* (2008).

International Linear Algebra Society

Připomeňme ještě existenci mezinárodní společnosti ILAS – *International Linear Algebra Society*, která vznikla roku 1989 ze společnosti *International Matrix Group* založené roku 1987. V současné době je prezidentem ILAS Stephen Kirkland a viceprezidentem Chi-Kwong Li. Webová stránka společnosti ILAS má adresu

http://www.ilasic.math.uregina.ca/iic/.

Lze na ní najít mnoho aktuálních informací týkajících se odborných výsledků i výuky lineární algebry (časopisy, konference, projekty podporující výuku lineární algebry s pomocí moderních software, odkazy na osobní stránky matematiků, kteří v lineární algebře pracují, apod.).

ILAS vydává od roku 1988 zpravodaj IMAGE – *The Bulletin of the International Linear Algebra Society*, který je dostupný na webových stránkách společnosti.[19] Prvním editorem byl Robert C. Thompson (1988), po něm působili v této funkci Jane M. Day a R. C. Thompson (1989), Steven J. Leon a R. C. Thompson (1989–1993), S. J. Leon (1993–1994), S. J. Leon a George P. H. Styan (1994–1997), G. P. H. Styan (1997–2000), G. P. H. Styan a Hans Joachim Werner (2000–2003), Bryan Shader a H. J. Werner (2003–2006), nyní jsou editory J. M. Day a H. J. Werner. V tomto zpravodaji jsou publikovány články o aktivitách souvisejících s lineární algebrou, recenze nových knih, oznámení o konání konferencí, krátké zprávy o jejich průběhu, úlohy a jejich řešení apod.

Od roku 1996 vydává ILAS elektronický časopis ELA – *The Electronic Journal of Linear Algebra*, který již byl zmíněn.

[19] Zpravodaj se původně jmenoval IMAGE – *The Bulletin of the International Matrix Group.*

6. Závěr

Linear algebra is at the same time one of the oldest branches of mathematics and one of the newest. On the one hand, problems are found in the origins of mathematics which are solved by a single multiplication or division, that is to say by the calculation of a value of a function $f(x) = ax$, or by the solution of an equation $ax = b$: those are typical problems of linear algebra, and it is not possible to deal with them, nor even to state them correctly, without "thinking linearly".

([Bourbaki, 1960], angl. verze, str. 57)

Lineární algebra je dnes základní matematickou disciplínou zahrnující zejména poznatky o vektorových (lineárních) prostorech a jejich homomorfismech, o lineárních, bilineárních a kvadratických formách na vektorových prostorech, o maticích, determinantech a soustavách lineárních rovnic. Zatímco dříve byl hlavní zájem matematiků soustředěn na teorii determinantů, na otázky eliminace a soustavy lineárních rovnic, na bilineární a kvadratické formy a jejich převody na kanonické tvary pomocí lineárních transformací, ve dvacátém století se situace výrazně změnila. Do centra pozornosti se dostaly vektorové prostory a lineární zobrazení (homomorfismy, endomorfismy, operátory), teorie matic, maticová reprezentace homomorfismů, bilineárních a kvadratických forem. Změnil se pohled na lineární formy (funkcionály), nabyl na významu pojem duálního prostoru. Velká pozornost začala být věnována prostorům nekonečné dimenze v souvislosti se vznikem a rozvojem funkcionální analýzy.

Výsledky, které byly získány v osmnáctém a v devatenáctém století v řeči determinantů, bilineárních a kvadratických forem a lineárních transformací, byly na přelomu devatenáctého a dvacátého století přeloženy do řeči matic a vzápětí do řeči vektorových prostorů a jejich homomorfismů. Matematická podstata řady problémů se tak stala viditelnější, stručnější a srozumitelnější. Velmi podstatné bylo pochopení důležitosti pojmů vektorový prostor a lineární zobrazení, které jsou v současné době základními pojmy lineární algebry. K jejich všeobecnému rozšíření a uznání však došlo poměrně pozdě, až ve třicátých a čtyřicátých letech, a to přesto, že se tyto pojmy objevily již u H. Grassmanna koncem první poloviny devatenáctého století.

Lineární algebra jako jakýsi základ vyšší matematiky, se konstituovala ve třicátých a čtyřicátých letech dvacátého století, mimo jiné pod vlivem Waerdenovy knihy *Moderne Algebra*, dalších učebnic algebry ([Birkhoff, Mac Lane, 1941], [Halmos, 1942], [Kuroš, 1946] atd.), referativních časopisů (Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete, Mathematical Reviews) a prvních učebnic, které měly termín *lineární algebra* ve svém názvu ([Lichnerowicz, 1947], [Bourbaki, 1947], [Bourbaki, 1948], [Gel'fand, 1948], [Mal'cev, 1948], [Faddejeva, 1950], [Schwerdtfeger, 1950] atd.). Vznik lineární algebry jako jistého logického souboru pojmů, výsledků a metod lze tedy vymezit přelomem čtyřicátých a padesátých let dvacátého století, přestože její základní myšlenka, lineární vztah, je alespoň o čtyři tisíciletí starší (viz výše uvedený citát). Začátkem padesátých let byly publikovány některé články, které měly s touto disciplínou seznámit širokou matematickou komunitu a popularizovat ji mezi studenty a učiteli.

V padesátých a šedesátých letech vyšla nejen celá řada učebnic lineární algebry, ale i několik kvalitních sbírek úloh. Jednotlivé učebnice se sice mnohdy liší co do obsahu, rozsahu i zaměření, přesto však do značné míry ve své době vymezily lineární algebru jako jistý soubor pojmů, poznatků a metod, jako určitý fundament, na němž stojí další matematické disciplíny. V dalších desetiletích vyšel velký počet učebnic a monografií lineární algebry, která se stala přirozenou a nepostradatelnou součástí základních kurzů vysokoškolské matematiky.

V šedesátých a sedmdesátých letech začaly vycházet odborné časopisy, které daly velký prostor téměř výhradně vědeckým pracím týkajícím se různých oblastí lineární algebry (Linear Algebra and its Applications, Linear and Multilinear Algebra); obsah i rozsah těchto časopisů za celé období jejich existence je důležitým svědectvím o šíři i hloubce problematiky, která je dnes do lineární algebry řazena. Totéž lze říci o časopise The Electronic Journal of Linear Algebra, který byl založen na konci dvacátého století.

Závratný vývoj výpočetní techniky umožnil v posledních letech řešení i takových úloh, které byly ještě nedávno považovány za numericky nezvládnutelné. Dostupnost nejrůznějšího software obrovským způsobem rozšířila možnosti jednotlivých badatelů při řešení teoretických i praktických úloh nejrůznějšího typu.

Mnoho vědeckých, odborných i pedagogických aktivit koordinuje v několika posledních letech International Linear Algebra Society.