VIII. GRASSMANNOVA LINEÁRNÍ ALGEBRA

Hermann Grassmann was a brilliant mathematician, whose creations in vectorial analysis can only be compared to those of Hamilton.

([Crowe, 1967], str. 54)

Řadu významných myšlenek lineární algebry prezentoval ve svém díle německý matematik Hermann Günther Grassmann, středoškolský učitel, který nikdy nepůsobil na vysoké škole. Byl to všestranný učenec a myslitel, jehož rozsáhlé dílo vzbuzuje dnes obrovský respekt. Jeho matematické myšlenky však výrazně předběhly dobu, proto nedosáhl během života v matematice téměř žádného uznání. I další Grassmannovy aktivity jsou pozoruhodné.

1. Hermann Günther Grassmann

Hermann Günther Grassmann se narodil 15. dubna 1809 ve Štětíně v tehdejším Prusku (dnes Polsko) jako třetí z dvanácti dětí. Jeho otcem byl Justus Günther Grassmann (1779–1852), gymnaziální profesor a místní vzdělanec, matkou Johanne Friederike Luise Medenwaldt (1785–1841), dcera duchovního z Klein-Schönfeldu. Rodina měla hluboký vztah ke vzdělanosti, vědám, umění a teologii. Hermanna spojovalo po celý život silné pouto s mladším bratrem Robertem (1815–1901).

Hermanna nejprve vzdělávala matka, potom navštěvoval soukromou školu a nakonec gymnázium ve Štětíně. V letech 1827 až 1830 studoval na univerzitě v Berlíně teologii, klasické jazyky, filozofii a literaturu, nenavštěvoval však žádné přednášky z matematiky a fyziky. Výrazně ho svými přednáškami ovlivnil filozof Friedrich Ernst Daniel Schleiermacher (1768–1834), tehdejší významný představitel protestantské liberální teologie. Po ukončení studií se H. Grassmann vrátil do Štětína, začal se zajímat o matematiku, fyziku, mineralogii a botaniku, pod vlivem otce usiloval o učitelskou dráhu. Studoval proto zejména matematiku a připravoval se na zkoušku učitelské způsobilosti.

Roku 1831 se této zkoušce podrobil v Berlíně, ale uspěl jen částečně, neboť zejména jeho domácí práce neměly dobrou úroveň. Získal proto pouze oprávnění k výuce na nižší střední škole. V té době působil jako učitelský asistent na gymnáziu ve Štětíně. Roku 1833 složil zkoušku z teologie, měl se stát členem luteránského sboru ve Štětíně a pastorem. V letech 1834 až 1835 byl učitelem matematiky na tzv. Gewerbeschule v Berlíně.[1] Během svého učitelského působení v Berlíně docházel na některé univerzitní přednášky z matematiky.

---

[1] Toto místo převzal po matematiku Jakobu Steinerovi (1796–1863), který se stal roku 1834 profesorem berlínské univerzity.

Roku 1836 se stal učitelem matematiky na nově založené škole ve Štětíně (Otto-Schule), učil na jejím nižším stupni matematiku, fyziku, němčinu, latinu a náboženství. O tři roky později složil druhou zkoušku z teologie a stal se členem štětínského luteránského sboru. S bratrem Robertem intenzivně studoval Schleiermacherovu *Dialektiku*, která vyšla roku 1839.[2]

Roku 1840 vykonal v Berlíně druhou zkoušku učitelské způsobilosti a získal oprávnění učit matematiku, fyziku, chemii a mineralogii na vyšší střední škole. K této zkoušce předložil domácí práci o teorii přílivu a odlivu nazvanou *Theorie der Ebbe und Flut*. Při její přípravě vyšel z klasických děl – z Lagrangeovy monografie *Mécanique analytique* (2 díly, 1788, 2. vydání: 1811–1815) a z Laplaceova díla *Traité de Mécanique céleste* (5 dílů, 1799–1825). Při sepisování domácí práce si dobře uvědomil, že je schopen úspěšně aplikovat metody vektorového počtu, které postupně rozvíjel od roku 1832. Jednalo se o sčítání a odčítání úseček, a dokonce o jejich násobení.[3]

V letech 1842 až 1843 vydal učebnice pro středoškolské studenty (některé měly více vydání) – *Grundriss der deutschen Sprachlehre* (1842), *Leitfaden für den ersten Unterricht in der lateinischen Sprache* (1843) a s bratrem Robertem učebnici *Leitfaden für den ersten Unterricht in der deutschen Sprache* (1843).

Roku 1844 vydal H. Grassmann monografii *Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik dargestellt und durch Anwendungen auf die übrigen Zweige der Mathematik, wie auch auf die Statik, Mechanik, die Lehre vom Magnetismus und die Krystallonomie erläutert*, knihu plnou nových a závažných matematických myšlenek, která však nevzbudila téměř žádnou pozornost, neboť byla napsána příliš abstraktně a filozoficky. Uvádí se, že asi šest set exemplářů této knihy šlo do stoupy. H. Grassmann v ní rozvinul myšlenky, jež začal podrobně promýšlet již počátkem třicátých let. Jednalo se zejména o ideje vektorové algebry a vektorové analýzy, které využil i v článku *Neue Theorie der Elektrodynamik* publikovaném o rok později. H. Grassmann se marně snažil přesvědčit A. F. Möbia, aby napsal na jeho knihu recenzi, nakonec ji napsal sám.

Roku 1846 vydal spolu s W. Langbeinem čítanku *Deutsches Lesebuch für Schüler von acht bis zwölf Jahren* (L. Oehmigke, Berlin, 394 stran), která byla velmi úspěšná. Její sedmé vydání vyšlo v nakladatelství bratra Roberta ve Štětíně roku 1877 (xii+420 stran).

---

[2] Viz A. C. Lewis: *H. Grassmann's 1844 Ausdehnungslehre and Schleiermacher's Dialektik*, Annals of Science 34(1977), 103–162.

[3] H. Grassmann nebyl v první polovině 19. století jediný, kdo rozvíjel myšlenky vektorového počtu. V této souvislosti je třeba připomenout následující jména: August Ferdinand Möbius (1790–1868), Giusto Bellavitis (1803–1880), Comte de Saint-Venant (1797–1886), Augustin-Louis Cauchy (1789–1857), Matthew O'Brien (1814–1855); některé ideje lze však nalézt i dříve. Například Isaac Newton (1643–1727) užil myšlenku vektorového rovnoběžníka již roku 1687 ve svém slavném díle *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Viz [Crowe, 1967].
H. Grassmann uváděl, že počátky jeho idejí sahají až k úvahám o kladných a záporných číslech; myšlenka násobení geometrických veličin se objevila již v učebnicích jeho otce Justa Günthera Grassmanna – geometrický součin dvou vektorů byl orientovanou plochou těmito vektory určenou a lineální součin v podstatě skalárním součinem.

Na Möbiův podnět H. Grassmann sepsal práci *Geometrische Analyse geknüpft an die von Leibniz erfundene Geometrische Charakteristik*, v níž vyřešil, a to bez použití geometrických postupů, geometrický problém, který předložil Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716). Za tuto práci získal 1. července 1846 cenu Fürstliche Jablonowki'schen Gesellschaft. Návrh na Grassmannovo ocenění podal právě A. F. Möbius; kritizoval však způsob, jakým H. Grassmann vyložil své abstraktní ideje. Požadoval jakési „intuitivní háčky“, na nichž by se čtenář mohl „zachytit, porozumět a pokračovat v dalším studiu“.

Roku 1847 se H. Grassmann stal učitelem reformované školy Friedricha Wilhelma ve Štětíně. Získal sice lepší postavení (*Oberlehrer*), ale cítil se nedoceněn. Byl si vědom, že vytváří „novou“ matematiku, ale přitom učí na nižší střední škole. Požádal proto ministra školství pruské vlády, aby byl zahrnut do seznamu kandidátů na uvolněná univerzitní místa. Ministr se dotázal Ernsta Eduarda Kummera (1810–1893) na Grassmannovu vědeckou produkci a na jeho odbornost.[4] Ten však Grassmannovy práce charakterizoval jako *mimořádně dobrý materiál vyjádřený v nedostatečné formě*, což pro H. Grassmanna znamenalo konec nadějí na univerzitní kariéru.

V revolučních letech 1848 až 1849 vydávali Hermann a Robert Grassmannovi politický časopis *Deutsche Wochenschrift für Staat, Kirche und Volksleben, Norddeutsche Zeitung*. Podporovali sjednocení Německa, vytvoření konstituční monarchie a publikovali články o konstitučním zákonu. Později své myšlenky opustili a časopis zanikl.

V dubnu roku 1849 se H. Grassmann oženil, jeho ženou se stala Marie Therese Knappe (1824–1889), dcera statkáře. Měli jedenáct dětí, z nichž sedm dosáhlo dospělého věku. Nejstarší syn Karl Justus (1851–1909) studoval matematiku a přírodní vědy v Göttingen, v Lipsku, v Königsbergu a v Berlíně. Stal se středoškolským profesorem, později ředitelem gymnázia. Syn Hermann Ernst (1857–1922) získal roku 1893 doktorát na univerzitě v Halle-Wittenbergu za práci *Anwendung der Ausdehnungslehre auf die allgemeine Theorie*, roku 1904 se stal mimořádným profesorem matematiky v Giessenu. Je autorem obsáhlé učebnice *Projektive Geometrie der Ebene unter Benutzung der Punktrechnung dargestellt* (1909, 1913, 1927).[5]

Roku 1852 zemřel Justus Günther Grassmann a syn Hermann získal jeho místo na gymnáziu a titul řádného středoškolského profesora.

V padesátých letech se H. Grassmann intenzivně věnoval starým jazykům. Měl pocit, že ztratil možnost získat slávu v matematice, a obrátil se proto ke svým dalším zájmům. Zahájil detailní studium starých jazyků a stal se uznávaným odborníkem na sanskrt.

Roku 1853 publikoval práci *Zur Theorie der Farbenmischung*; barvy reprezentoval hmotnými body umístěnými na kulové ploše (jejich poloha odpovídala barevnému odstínu a váha intenzitě), smíšená barva pak odpovídala těžišti.

---

[4] E. E. Kummer byl jedním z recenzentů Grassmannovy oceněné práce.

[5] Viz G. Wolff: *Hermann Grassmann* †, Zeitschrift für mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht 54(1923), 51–53.

Jeho teorie byla ve sporu s představami Hermanna Ludwiga Ferdinanda von Helmholtze (1821–1894), který se rovněž otázce skládání barev věnoval. H. von Helmholtz po určitém váhání Grassmannův přístup pochopil.

O rok později H. Grassmann vydal *Übersicht der Akustik und der niederen Optik*. Experimentoval s generátorem nahrazujícím lidský hlas, využil svého perfektního sluchu a rozpoznal, že každý samohláskový zvuk vzniká z přesně definovaných tónů. Studoval rovněž problémy kvality generátoru zvuků.

Roku 1854 se H. Grassmann vrátil k matematice. Rozhodl se lépe propracovat svoji „teorii“. Domníval se, že její nepochopení je dáno tím, že je napsána moderním jazykem a stylem.

Grassmannovy aktivity byly všestranné. Roku 1856 se stal pokladníkem štětínské lóže svobodných zednářů (zednářem byl již od studií), o rok později členem vedení spolku *Pomersche Hauptverein für die Evangelisierung Chinas*, který vydával časopis a příležitostně vysílal misionáře do Číny. Pod Grassmannovým vedením se spolek roku 1873 spojil se společností *Rheinische Missions-Gesellschaft in Barmen*.

Roku 1862 H. Grassmann vydal zcela přepracovanou verzi své monografie z roku 1844 pod názvem *Die Ausdehnungslehre. Vollständig und in strenger Form bearbeitet*. Tato kniha je již napsána matematickým jazykem a symbolikou, výklad je podstatně lepší a srozumitelnější, než v knize z roku 1844. Přesto nevzbudila větší pozornost.

Kromě toho napsal učebnice *Lehrbuch der Arithmetik für höhere Lehranstalten* (Berlin, 1861, viii+221 stran) a *Lehrbuch der Trigonometrie für höhere Lehranstalten* (Berlin, 1865, vii+115 stran).

V následujícím období se H. Grassmann opět od matematiky odvrátil a věnoval se starým jazykům. Studoval hlavně sanskrt, staroindické hymny *Rig-Veda* a tvrdil, že komparativní lingvistika musí vycházet ze studia staroindických jazyků. Věnoval se též dalším jazykům (gothic, stará pruština, stará perština, litevština, ruština, církevní slovanština) a sepisoval práce o fonetice založené na historickém studiu jazyků.

S bratrem Robertem a švagrem Ch. Hessem napsal knihu *Deutsche Pflanzennamen* (1870); rozhodl se představit německá jména všech rostlin rostoucích v německy mluvících zemích, ukázat jejich souvislosti s řečtinou a latinou a popsat vznik těchto termínů. Věřil v užitečnost takovéto práce pro botaniky i lingvisty.

V letech 1873 až 1875 vydal H. Grassmann obrovský *Wörterbuch zum Rig-Veda* (Brockhaus, Leipzig, celkem 1776 stran), který je dodnes ceněným dílem. Na tuto práci navázal v letech 1876 až 1877 skvělým překladem a výkladem hymnů *Rig-Veda* (Brockhaus, Leipzig, viii+589+ii+524 stran) s bohatými komentáři.

Grassmannovy filologické práce měly úspěch a v odborných kruzích byly a stále jsou velice ceněny. H. Grassmann byl roku 1876 zvolen členem *American Oriental Society* a obdržel čestný doktorát Univerzity v Tübingen.[6] Grassman-

[6] Grassmannův úspěch na tomto poli byl umocněn srovnáním s neúspěšným překladem

nův *Wörterbuch zum Rig-Veda* vyšel v 6. přepracovaném vydání ve Wiesbadenu roku 1996.

V letech 1876 až 1877 se H. Grassmann opět vrátil k matematice. Začal připravovat do tisku druhé vydání své knihy *Die lineale Ausdehnungslehre ...* z roku 1844. Nedočkal se jej však, zemřel 26. září 1877 ve Štětíně. Druhé vydání jeho knihy vyšlo ve Wigandově nakladatelství v Lipsku roku 1878.

Ocenění Grassmannova matematického díla přinesl až konec devatenáctého století a hlavně století dvacáté.

2. Grassmannova Die lineale Ausdehnungslehre z roku 1844

Od počátku třicátých let rozvíjel Hermann Grassmann myšlenky vektorového počtu, roku 1840 je velmi úspěšně využil v práci *Theorie der Ebbe und Flut*. V plném rozsahu se je snažil vyložit až v monografii *Die lineale Ausdehnungslehre*, kterou vydal roku 1844. V úvodu mimo jiné napsal:

Schon lange war es mir nämlich einleuchtend geworden, dass die Geometrie keinesweges in dem Sinne wie die Arithmetik oder die Kombinationslehre als ein Zweig der Mathematik anzusehen sei, vielmehr die Geometrie schon auf ein in der Natur gegebenes (nämlich den Raum) sich beziehe, und dass es daher einen Zweig der Mathematik geben müsse, der in rein abstrakter Weise ähnliche Gesetze aus sich erzeuge, wie sie in der Geometrie an den Raum gebunden erscheinen. Durch die neue Analyse war die Möglichkeit, einen solchen rein abstrakten Zweig der Mathematik auszubilden, gegeben; ja diese Analyse, sobald sie, ohne irgend einen schon anderweitig erwiesenen Satz vorauszusetzen, entwickelt wurde, und sich rein in der Abstraktion bewegte, war diese Wissenschaft selbst. ([Grassmann, 1844], str. vii)

H. Grassmann se krátce zmínil i o myšlenkách Möbiova barycentrického počtu a jejich vztahu ke svým výsledkům:

Die Auffassung des Schwerpunktes als Summe veranlasste mich, den barycentrischen Kalkül von Möbius zu vergleichen, ein Werk, das ich bis dahin nur dem Titel nach kannte; und zu meiner nicht geringen Freude fand ich hier denselben Begriff der Summation der Punkte vor, zu dem mich der Gang der Entwickelung geführt hatte, und war somit zu dem ersten, aber wie die Folge lehrte, auch zu dem einzigen Berührungspunkte gelangt, welchen die neue Analyse mit dem schon anderweitig bekannten darbot. ...
([Grassmann, 1844], str. vi)

Ve vlastním textu Grassmannovy monografie se objevila jména Eukleides, I. Newton, J.-L. Lagrange, P. S. Laplace, P. Varignon, C. F. Gauss, A. F. Möbius, J. Plücker, J. V. Poncelet, H. L. F. von Helmholtz, B. G. F. Riemann.[7]

indických hymnů od Alfreda Ludwiga (1832–1912), který byl vydán v letech 1876 až 1888.

[7] V předmluvě druhého vydání z roku 1878, kterou H. Grassmann napsal v létě 1877, se vyskytují jména H. Hankel, A. Clebsch, J. Plücker, V. Schlegel, H. Noth, R. Sturm, W. Preyer, W. R. Hamilton, C. T. Reye.

Grassmannova monografie *Die lineale Ausdehnungslehre* z roku 1844 obsahuje nové myšlenky (n-dimenzionální prostor, šestnáct typů součinů včetně vnějšího, vnitřního a vektorového atd.[8]), ale velmi nejasně formulované, navíc podané spíše filozofickou řečí. Zdůrazněna jsou hlavně filozofická východiska, je znát, že byl autor ovlivněn svými univerzitními studiemi, zejména působením F. E. D. Schleiermachera, studiemi, v nichž zcela chyběla matematika. H. Grassmann nebyl vychován matematiky své doby, jeho soukromé studium matematiky nestačilo k exaktnímu a srozumitelnému formulování matematických myšlenek a na sepsání textu, který by byl pochopitelný současníkům. K nesrozumitelnosti jeho díla velmi podstatně přispěla novost myšlenek, které ve své monografii prezentoval.

O Schleiermacherově vlivu na svoji tvorbu H. Grassmann napsal:

Ebensowenig will ich hier behaupten, daß ich die Schleiermacherschen Ansichten ganz zu meinem Eigentume gemacht hätte (da ich ja vieles davon nicht verstand), indessen gewann er doch einen so mächtigen Einfluß auf meine Entwickelung, ich habe ihm in geistiger Hinsicht so unendlich viel zu danken, daß ich nur ihn an die Spitze dieses Abschnittes stellen kann. –

Schon im zweiten Semester hatte ich Kollegia bei Schleiermacher gehört, die ich aber nicht verstand; dagegen fingen seine Predigten an, Einfluß auf mich zu gewinnen. Doch erst im letzten Jahre zog mich Schleiermacher ganz an; und obwohl ich damals schon mich mehr mit der Philologie beschäftigte, so erkannte ich doch nun erst, wie man von Schleiermacher für jede Wissenschaft lernen kann, weil er weniger Positives gibt, als er geschickt macht, eine jede Untersuchung von der rechten Seite anzugreifen und selbständig fortzuführen, und in den Stand setzt, das Positive selbst zu finden. – Zugleich hatten auch seine Ideen selbst mich angeregt, seine Predigten mein Gemüt erweckt, und dies konnte nicht ohne Einfluß auf meine Grundsätze und meine ganze Denkweise bleiben. (Werke III.2, str. 21–22; anglický překlad [Lewis, 1977], str. 109)

Desmond Fearnley-Sander, který se Grassmannovu dílu podrobně věnoval, studoval některé aspekty obou verzí jeho knihy Ausdehnungslehre a zařadil je do prehistorie univerzální algebry.[9] V článku *Hermann Grassmann and the prehistory of universal algebra* napsal:

... In the Ausdehnungslehre of 1844 Grassmann plainly wanted to develop his theory in axiomatic "modern algebra" style, but this he was unable to do. To find a modern parallel to the constructive approach which he adopted in the second Ausdehnungslehre one must go, I think, to a text in Universal Algebra. ([Fearnley-Sander, 1982], str. 164)

H. Grassmann výrazně předběhl dobu, svými současníky zůstal nepochopen. Tuto situaci vnímal jako výrazný neúspěch, který ho trápil. Ohlas jeho knihy *Die lineale Ausdehnungslehre* byl mizivý, většina matematiků dlouho nechápala význam myšlenek, které byly v knize vyloženy. Příčinami tohoto nepochopení

[8] Dnes lze v této knize nalézt ideje moderní vektorové analýzy.

[9] Univerzální algebrou je míněna disciplína charakterizovaná monografiemi P. M. Cohna a G. Grätzera z let 1965, resp. 1968, které nesou stejný název *Universal algebra*.

byla naprostá novost idejí, s nimiž H. Grassmann přišel, jejich filozofické podání a nedostatečná matematická prezentace.

H. Grassmann se snažil propagovat myšlenky své monografie i v časopiseckých článcích, např. v pojednání *Kurze Uebersicht über das Wesen der Ausdehnungslehre*, které bylo otištěno roku 1845 v časopisu Archiv der Mathematik und Physik. Své ideje využíval k řešení některých matematických i fyzikálních problémů. Připravoval vydání druhého dílu své knihy, k němuž však nikdy nedošlo. Roku 1846 publikoval práci *Geometrische Analyse geknüpft an die von Leibniz erfundene geometrische Charakteristik*, v níž jednak sumarizoval myšlenky z knihy *Die lineale Ausdehnungslehre*, jednak zveřejnil některé partie z připravovaného druhého dílu této monografie. Jednalo se zejména o pojem skalárního součinu v prostoru libovolné dimenze, připojeny byly úvahy o vnitřních součinech obecnějšího typu.

Jean Dieudonné (1906–1992) napsal roku 1979 v článku *The tradegy of Grassmann* velmi výstižná slova:

... With our streamlined linear and multilinear algebra of today, it is not too hard to understand precisely what notions Grassmann had in mind, but even for a modern mathematician the book makes heavy reading. The main reason is that, even by the standards of the time, it was not a book of mathematics; there are no definitions in the usual sense of the word, and very few genuine proofs. What Grassmann does is to describe his vision of new objects, in a manner quite similar to Riemann's famous papers on Riemann surfaces and n-dimensional multiplicities 10 years later, but in a language still more abstract.

The vision certainly is impressive, especially when contrasted against the background of what was understood by algebra and geometry in contemporary mathematics; very few people were familiar with the concept of vector, and that was limited to 3 dimensions, the only operations on vectors being addition and multiplication by a scalar. And here, all at once, one was propelled into a new world of arbitrary dimension, where besides vectors a whole panoply of unheard of geometric objects, the multivectors, had to be combined by non-commutative operations; no wonder that even for mathematicians who, like Möbius, were best prepared to understand these generalizations, Die Ausdehnungslehre remained a book of seven seals. ([Dieudonné, 1979], str. 4–5)

Problematice Grassmannovy knihy *Die lineale Ausdehnungslehre* z roku 1844 jsou věnovány zejména tyto práce:

M. J. Crowe: *A history of vector analysis* (1967),

A. C. Lewis: *H. Grassmann's 1844 Ausdehnungslehre and Schleiermacher's Dialektik* (1977),

D. Flament: *La "lineale Ausdehnungslehre" (1844) de Hermann Günther Grassmann* (1992).

3. Grassmannova Die Ausdehnungslehre z roku 1862

Roku 1862 H. Grassmann vydal novou verzi své monografie. Knihu *Die lineale Ausdehnungslehre* z roku 1844 zcela přepracoval, potlačil filozofický charakter díla a matematické myšlenky se snažil vyjádřit matematicky. Ani výrazné přepracování a nová formulace jeho idejí, které podal v knize *Die Ausdehnungslehre. Vollständig und in strenger Form bearbeitet*, však příliš nepřispěly k jejich pochopení a pozitivnímu přijetí. Bránila tomu velká abstraktnost zaváděných pojmů, novost předložených koncepcí a stále ještě určité problémy se srozumitelností vyjadřování.

Grassmannova kniha *Die Ausdehnungslehre* z roku 1862 je rozdělena do dvou částí: *Erster Abschnitt* (str. 1–222), *Zweiter Abschnitt* (str. 223–385). Nové pojmy jsou v knize zaváděny v definicích (*Erklärung*, tvrzení nejsou zdůrazněna žádným názvem, důkazy jsou uvedeny klasickým termínem *Beweis*. Jednotlivé články jsou průběžně číslovány bez ohledu na to, zda se jedná o definici, nebo o tvrzení, důkaz je vždy ve stejném článku jako tvrzení, k němuž patří. Základní text je proložen vysvětlujícími poznámkami (*Anmerkung*), které číslovány nejsou.

První část knihy, *Die einfachen Verknüpfungen extensiver Grössen*, má pět kapitol. Úvodní poznatky lineární algebry jsou vyloženy zejména v první kapitole *Addition, Subtraktion, Vervielfachung und Theilung extensiven Grössen* (str. 1–20).

V prvním paragrafu *Begriffe und Rechnungsgesetze* pracoval H. Grassmann nejprve s nějakými blíže nespecifikovanými veličinami. Zavedl pro ně pojem lineární kombinace: veličina a je numericky odvozena z veličin $b, c, \dots$ pomocí reálných čísel $\beta, \gamma, \dots$, jestliže je $a = \beta b + \gamma c + \dots$ Definoval lineární závislost takovýchto veličin: veličiny $a, b, c, \dots$ jsou ve vzájemném numerickém vztahu, jestliže je některá z nich numericky odvoditelná z ostatních. Poznamenal, že jednoprvková množina $\{a\}$ je lineárně závislá, pokud je $a = 0$. V originále jsou tyto pojmy zavedeny takto:

1. *Erklärung. Ich sage, eine Grösse a sei aus den Grössen $b, c, \dots$ durch die Zahlen $\beta, \gamma, \dots$ abgeleitet, wenn*

$$a = \beta b + \gamma c + \dots$$

ist, wo $\beta, \gamma, \dots$ reelle Zahlen sind, gleichviel ob rational oder irrational, ob gleich null oder verschieden von null. Auch sage ich, a sei in diesem Falle numerisch abgeleitet aus $b, c \dots$

2. *Erklärung. Ferner sage ich, dass zwei oder mehrere Grössen $a, b, c \dots$ in einer Zahlbeziehung zu einander stehen, oder dass der Verein der Grössen $a, b, c, \dots$ einer Zahlbeziehung unterliege, wenn irgend eine derselben sich aus den übrigen numerisch ableiten lässt, also wenn sich z. B.*

$$a = \beta b + \gamma c + \dots$$

setzen lässt, wo $\beta, \gamma, \dots$ reelle Zahlen sind. ([Grassmann, 1862], str. 1)

H. Grassmann si ještě neuvědomil naprostou rovnoprávnost nenulových veličin (tj. nenulových vektorů vektorového prostoru) a navíc patrně nevycházel z již existující množiny, na níž je dána nějaká struktura. Představoval si, že se z určité množiny prvků (základních jednotek) postupně vytvářejí veličiny nové. Jednotkou totiž nazval veličinu, s jejíž pomocí se numericky odvozují jiné veličiny, a základní jednotkou takovou jednotku, která nemůže být z jiných jednotek odvozena. Takovéto myšlenky jsou vlastní počátkům teorie hyperkomplexních čísel; např. 1, i, j, k jsou základní jednotky, které generují kvaterniony, bez ohledu na to, že jsou odvoditelné z jiných veličin, např.

$$\frac{1}{2}(1+\mathrm{i})+\frac{1}{2}(-1+\mathrm{i})=\mathrm{i}\ .$$

3. *Erklärung. Einheit nenne ich jede Grösse, welche dazu dienen soll, um aus ihr eine Reihe von Grössen numerisch abzuleiten, und zwar nenne ich die Einheit eine ursprüngliche, wenn sie nicht aus einer anderen Einheit abgeleitet ist. Die Einheit der Zahlen, also die Eins, nenne ich die absolute Einheit, alle übrigen relative. Null soll nie als Einheit gelten.* ([Grassmann, 1862], str. 2)

Systémem jednotek (tj. bází) je množina veličin $e_1, e_2, \ldots$, které nejsou v žádném vzájemném numerickém vztahu (tj. jsou lineárně nezávislé) a slouží k numerickému odvození dalších veličin (tj. generují).

4. *Erklärung. Ein System von Einheiten nenne ich jeden Verein von Grössen, welche in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, und welche dazu dienen sollen, um aus ihnen durch beliebige Zahlen andere Grössen abzuleiten.* ([Grassmann, 1862], str. 2)

Teprve nyní autor definoval pojem extenzivní veličiny; sice poněkud vágně, neboť ještě nebyly k dispozici potřebné pojmy, např. pojem množiny. Patrně si představoval, že veličiny, s nimiž pracuje, vznikají postupně; nevycházel z dané, již existující množiny veličin, na níž jsou zavedeny nějaké operace. Extenzivními veličinami odvozenými z daného systému jednotek jsou jejich lineární kombinace:

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots\ , \quad \text{resp.} \quad \sum \alpha e\ , \quad \text{resp.} \quad \sum \alpha_r e_r\ .$$

Pokud však výchozí systém jednotek obsahuje pouze číslo 1, nezískáváme extenzivní, ale číselné veličiny. Extenzivními veličinami prvního řádu rozuměl autor ty veličiny, které jsou odvozeny ze základních jednotek.

5. *Erklärung. Extensive Grösse nenne ich jeden Ausdruck, welcher aus einem Systeme von Einheiten (welches sich jedoch nicht auf die absolute Einheit beschränkt) durch Zahlen abgeleitet ist, und zwar nenne ich diese Zahlen die zu den Einheiten gehörigen Ableitungszahlen jener Grösse …*

… Nur wenn das System blos aus der absoluten Einheit (1) besteht, ist die abgeleitete Grösse keine extensive, sondern eine Zahlgrösse. Den Ausdruck Grösse überhaupt werde ich nur für diese beiden Gattungen derselben festhalten. Wenn

die extensive Grösse aus den ursprünglichen Einheiten abgeleitet werden kann, so nenne ich jene Grösse eine extensive Grösse erster Stufe.
([Grassmann, 1862], str. 2)

H. Grassmann zavedl sčítání a odčítání extenzivních veličin odvozených ze stejného systému jednotek a jejich násobení a dělení reálným číslem.[10]

$$\sum \alpha e + \sum \beta e = \sum (\alpha + \beta) e \ , \qquad \sum \alpha e - \sum \beta e = \sum (\alpha - \beta) e \ ,$$

$$\sum \alpha e \cdot \beta = \beta \cdot \sum \alpha e = \sum (\alpha\beta) e \ , \qquad \sum \alpha e : \beta = \sum \frac{\alpha}{\beta} e \ .$$

Dokázal, že pro extenzivní veličiny, které označil krátce a, b, c, a pro reálná čísla α, β platí základní aritmetické zákony:

$$\begin{aligned} a + b &= b + a \ , \\ a + (b + c) &= (a + b) + c \ , \\ (a + b) - b &= a \ , \\ (a - b) + b &= a \ , \\ a\beta &= \beta a \ , \\ (a\beta)\gamma &= a(\beta\gamma) \ , \\ (a + b)\gamma &= a\gamma + b\gamma \ , \\ a(\beta + \gamma) &= a\beta + a\gamma \ , \\ a \cdot 1 &= a \ . \end{aligned}$$

Ukázal, že platí i následující dvě tvrzení:

$$a\beta = 0 \iff a = 0 \ \text{ nebo } \ \beta = 0 \ ,$$

$$a : \beta = a\frac{1}{\beta} \ , \ \text{ jestliže } \ \beta \neq 0 \ .$$

Ve druhém paragrafu *Zusammenhang zwischen den aus einem System von Einheiten ableitbaren Grössen* definoval nejprve pojem oboru generovaného danými veličinami (*das Gebiet der Grössen* $a_1, \dots a_n$) jako množinu všech extenzivních veličin odvozených z dané množiny jednotek; dnes hovoříme o lineárním obalu dané množiny vektorů. Zavedl rovněž pojem obor dimenze n (*das Gebiet* n*-ter Stufe*) jako obor odvozený z n jednotek, který není odvoditelný z menšího počtu jednotek. Uvažoval i nulovou dimenzi. V originále jsou výše uvedené pojmy zavedeny takto:

14. *Erklärung. Die Gesammtheit der Grössen, welche aus einer Reihe von Grössen* $a_1, a_2, \dots a_n$ *numerisch ableitbar sind, nenne ich das aus jenen Grössen ableitbare Gebiet (das Gebiet der Grössen* $a_1, \dots a_n$*), und zwar nenne ich es ein Gebiet* n*-ter Stufe, wenn jene Grössen von erster Stufe*

[10] V případě dělení předpokládal nenulovost čísla β.

(d. h. aus n ursprünglichen Einheiten numerisch ableitbar) sind, und sich das Gebiet nicht aus weniger als n solchen Grössen ableiten lässt. Ein Gebiet, welches ausser der Null keine Grösse enthält, heisst ein Gebiet nullter Stufe. ([Grassmann, 1862], str. 6)

Autor definoval rovnost a inkluzi dvou takových oborů, dále průnik a spojení dvou nebo více oborů. Jeho definice nejsou z dnešního pohledu zcela přesné; není totiž řečeno, v jakém oboru (prostoru) se průniky a spojení vytvářejí.

15. *Erklärung. ... Die Gesammtheit der Grössen, welche zweien oder mehreren Gebieten zugleich angehören, heisst ihr gemeinschaftliches Gebiet, und die Gesammtheit der Grössen, welche sich aus den Grössen zweier oder mehrerer Gebiete numerisch ableiten lassen, ihr verbindendes Gebiet.* ([Grassmann, 1862], str. 7)

Na dalších stránkách druhého paragrafu uvedl H. Grassmann několik základních tvrzení o lineární závislosti a nezávislosti extenzivních veličin. Ukázal, že veličiny jsou lineárně závislé právě tehdy, když je nějaká jejich netriviální lineární kombinace rovna nulové veličině, že z konečné množiny lineárně závislých veličin lze vybrat lineárně nezávislou podmnožinu a je-li první veličina daného souboru veličin nenulová a každá další nezávislá na předchozích, jedná se o lineárně nezávislé veličiny. Uveďme tato tvrzení v originále:

16. *Erklärung. Zwischen n Grössen $a_1, \ldots a_n$ herrscht dann und dann eine Zahlbeziehung, wenn sich eine Gleichung*

$$\alpha_1 a_1 + \ldots \alpha_n a_n = 0$$

aufstellen lässt, in welcher die Zahlen $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ nicht alle zugleich null sind. ([Grassmann, 1862], str. 7)

17. *Wenn n Grössen in einer Zahlbeziehung zu einander stehen, und sie nicht alle null sind, so muss sich aus ihnen ein Verein von weniger als n Grössen aussondern lassen, welcher keiner Zahlbeziehung unterliegt, und aus dem die übrigen Grössen numerisch ableitbar sind.* ([Grassmann, 1862], str. 8)

18. *Erklärung. Wenn in einem Verein von Grössen $a_1, a_2, \ldots a_n$ die erste a_1 nicht null ist, und keine der folgenden sich aus den vorhergehenden numerisch ableiten lässt, so unterliegt der Verein keiner Zahlbeziehung.* ([Grassmann, 1862], str. 8–9)

Další Grassmannova tvrzení směřují k tzv. Steinitzově větě o výměně: Jsou-li veličiny $a_1, \ldots, a_m$ lineárně nezávislé a jsou-li lineárními kombinacemi veličin $b_1, \ldots, b_n$ $(n \geq m)$, pak je možno k veličinám $a_1, \ldots, a_m$ přidat $n - m$ veličin vybraných z veličin $b_1, \ldots, b_n$ tak, že vzniklý soubor veličin má stejný lineární obal jako veličiny $b_1, \ldots, b_n$.

19. *Wenn eine Grösse a_1 aus n Grössen $b_1, b_2 \ldots b_n$ numerisch ableitbar ist, und dabei die zu b_1 gehörige Ableitungszahl ungleich null ist, so ist das aus den n Grössen $b_1, b_2 \ldots b_n$ ableitbare Gebiet identisch mit dem aus den n Grössen $a_1, b_2 \ldots b_n$ ableitbaren.* ([Grassmann, 1862], str. 9)

20. *Wenn m Grössen $a_1, \dots a_m$, die in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, aus n Grössen $b_1, \dots b_n$ numerisch ableitbar sind, so kann man stets zu den m Grössen $a_1, \dots a_m$ noch $(n-m)$ Grössen $a_{m+1}, \dots a_n$ von der Art hinzufügen, dass sich die Grössen $b_1, \dots b_n$ auch aus $a_1, \dots a_n$ numerisch ableiten lassen, und also das Gebiet der Grössen $a_1, \dots a_n$ identisch ist dem Gebiete der Grössen $b_1, \dots b_n$; auch kann man jene $(n-m)$ Grössen aus den Grössen $b_1, \dots b_n$ selbst entnehmen.* ([Grassmann, 1862], str. 10)

Jako důsledky Steinitzovy věty jsou v dnešních učebnicích zpravidla uvedena tvrzení, která umožňují definovat dimenzi. H. Grassmann postupoval jinak. Nejprve vyslovil definici dimenze a teprve potom objasňoval jednotlivé vlastnosti prostoru dimenze n. Jedná se o elementární tvrzení, která známe ze základních kurzů lineární algebry. Autor zbytečně zkomplikoval situaci tím, že uvažoval veličiny prvního řádu. Uveďme několik příkladů.

Jsou-li veličiny $a_1, \dots, a_n$ lineárně nezávislé a jsou-li lineárními kombinacemi veličin $b_1, \dots, b_n$, pak tyto dvě množiny veličin generují stejný prostor. V originále:

21. *Wenn n Grössen $(a_1, \dots a_n)$, welche in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, aus n andern Grössen $(b_1, \dots b_n)$ numerisch ableitbar sind, so ist das Gebiet der ersten Grössenreihe identisch dem der letzteren.*
([Grassmann, 1862], str. 11)

Jsou-li veličiny $a_1, \dots, a_n$ lineárními kombinacemi menšího počtu veličin, jsou lineárně závislé. V originále:

22. *Wenn n Grössen $(a_1, \dots a_n)$ aus weniger als n Grössen $(b_1, \dots b_m)$ numerisch ableitbar sind, so stehen jene n Grössen stets in einer Zahlbeziehung zu einander.* ([Grassmann, 1862], str. 11)

Je-li prostor dimenze n generován n veličinami, jsou tyto veličiny lineárně nezávislé. Naopak: n lineárně nezávislých veličin prvního řádu generuje obor dimenze n. V originále:

23. *Wenn ein Gebiet n-ter Stufe aus n Grössen erster Stufe ableitbar ist, so stehen diese in keiner Zahlbeziehung zu einander, und umgekehrt: Wenn n Grössen erster Stufe in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, so ist das aus ihnen ableitbare Gebiet ein Gebiet n-ter Stufe.* ([Grassmann, 1862], str. 11)

Každý obor dimenze n je generován nějakými n lineárně nezávislými veličinami. V originále:

24. *Jedes Gebiet n-ter Stufe kann aus n Grössen erster Stufe, die in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, abgeleitet werden, und zwar aus beliebigen n solcher Grössen des Gebietes.* ([Grassmann, 1862], str. 12)

Druhý paragraf první kapitoly končí tzv. větou o dimenzích spojení a průniku dvou podprostorů daného prostoru a jejím jednoduchým důsledkem.

25. *Die Stufenzahlen zweier Gebiete sind zusammengenommen ebenso gross als die Stufenzahlen ihres gemeinschaftlichen und ihres verbindenden Gebietes zusammengenommen, d. h. wenn m und n die Stufenzahlen der gegebenen*

Gebiete sind, r die ihres gemeinschaftlichen, v die ihres verbindenden Gebietes, so ist

$$m + n = r + v\ .$$

([Grassmann, 1862], str. 13)

26. *Zwei Gebiete (A und B), welche beziehlich von α-ter und β-ter Stufe sind und in einem Gebiete n-ter Stufe liegen, haben, wenn $\alpha + \beta > n$ ist, mindestens ein Gebiet von $(\alpha + \beta - n)$-ter Stufe gemein.*
([Grassmann, 1862], str. 14)

V prvních dvou paragrafech je tedy podán náčrt pojmu vektorového prostoru dimenze n a jeho základních vlastností. Zdá se pravděpodobné, že H. Grassmann měl na mysli zejména systémy hyperkomplexních čísel; tomu odpovídají jeho pojmy základní jednotka, extenzivní veličina prvního řádu atd.

Ve třetím paragrafu nazvaném *Die Zahl als Quotient extensiver Grössen und Ersetzung der Gleichungen zwischen extensiven Grössen durch Zahlgleichungen* autor využil zavedené pojmy a postupně dokazoval (v dnešní řeči) tvrzení o lineárně nezávislých množinách, bázích a souřadnicích. Tato tvrzení opět známe ze základního kurzu lineární algebry.

28. *Eine Grösse x, welche aus n in keiner Zahlbeziehung zu einander stehenden Grössen $a_1 \dots a_n$ abgeleitet ist, ist dann und nur dann null, wenn ihre n Ableitungszahlen null sind ...* ([Grassmann, 1862], str. 15)

29. *Zwei Grössen eines Gebietes n-ter Stufe sind dann und nur dann einander gleich, wenn ihre n zu denselben Einheiten gehörigen Ableitungszahlen einander gleich sind ...* ([Grassmann, 1862], str. 16)

H. Grassmann definoval „složku“ veličiny, která leží v „dílčím podprostoru“. Tento pojem později využil při definici ortogonální projekce.

33. *Erklärung. Wenn die Grössen $a_1 \dots a_n$ in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, und die Grösse*

$$a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n$$

ist, so nennen wir, wenn m kleiner als n ist, die Grösse

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_m a_m$$

„die Zurückleitung der Grösse a auf das Gebiet $a_1 a_2 \dots a_m$, unter Ausschliessung des Gebietes $a_{m+1} a_{m+2} \dots a_n$“. ([Grassmann, 1862], str. 17)

Dále se H. Grassmann zabýval problematikou rovnic, v nichž figurují násobky extenzivních veličin, za něž dosazoval lineární kombinace jednotek. Jinými slovy: rovnice, v níž figurují lineární kombinace vektorů n-rozměrného prostoru, odpovídá soustavě n rovnic, v nichž vystupují čísla.

34. *Jede Gleichung, deren Glieder Producte je einer extensiven Grösse mit einer Zahl sind, wird, wenn die extensiven Grössen einem Gebiet n-ter Stufe angehören, ersetzt durch n Zahlengleichungen, die man erhält, indem man* *in der gegebenen Gleichung statt aller extensiven Grössen ihre zu derselben Einheit gehörigen Ableitungszahlen setzt …* ([Grassmann, 1862], str. 17–18)

Druhá kapitola se nazývá *Die Produktbildung im Allgemeinen* (str. 20–31). V jejím prvním paragrafu *Produkt zweier Grössen* zavedl autor součin extenzivních veličin. Přímo v definici je obsažen požadavek distributivity této operace.

37. *Erklärung. Unter dem Produkte $[ab]$ einer extensiven Grösse a in eine andere b, verstehe ich diejenige extensive Grösse (oder auch Zahlgrösse), die man erhält, indem man zuerst jede der Einheiten, aus denen die erste Grösse a numerisch abgeleitet ist, mit jeder der Einheiten, aus denen die zweite b numerisch abgeleitet ist, zu einem Produkte verknüpft, dessen erster Faktor die Einheit der ersten Grösse und dessen zweiter Faktor die Einheit der zweiten Grösse ist, dann dies Produkt mit dem Produkte derjenigen Ableitungszahlen multiplicirt, mit welchen jene Einheiten verknüpft waren, und die sämmtlichen so gewonnenen Produkte addirt, d. h. es ist*

$$\left[\sum \alpha_r e_r \sum \beta_s e_s\right] = \sum \alpha_r \beta_s \left[e_r e_s\right] \ ,$$

wo e_r, e_s die Einheiten, aus denen die Grössen numerisch abgeleitet sind, α_r, α_s die zugehörigen Ableitungszahlen bezeichnen, und die Summe sich auf die verschiedenen Werthe der Indices r und s bezieht. ([Grassmann, 1862], str. 20)

V následující dlouhé poznámce se autor snažil tuto definici součinu extenzivních veličin objasnit. Mimo jiné poznamenal, že je možno různými způsoby zavádět součiny základních jednotek, a tak získávat různé součiny. Jako příklad uvedl součin

$$\left[(x_1e_1 + x_2e_2)(y_1e_1 + y_2e_2)\right] = x_1y_1[e_1e_1] + x_1y_2[e_1e_2] + x_2y_1[e_2e_1] + x_2y_2[e_2e_2]$$

a diskutoval různé možnosti volby hodnot získaných součinů základních jednotek, např.

$$[e_1e_1] = 0 \ , \quad [e_2e_1] = -[e_1e_2] \ , \quad [e_2e_2] = 0 \ ,$$

resp.

$$[e_1e_1] = 1 \ , \quad [e_1e_2] = 0 \ , \quad [e_2e_1] = 0 \ , \quad [e_2e_2] = 1 \ .$$

V dalším textu dokázal základní vlastnosti zavedeného součinu:

$$\begin{aligned}
\left[\sum \alpha_r e_r b\right] &= \sum \alpha_r \left[e_r b\right] \ , \\
\left[(a + b + \dots)p\right] &= \left[ap\right] + \left[bp\right] + \dots \ , \\
\left[p(a + b + \dots)\right] &= \left[pa\right] + \left[pb\right] + \dots \ , \\
\left[(\alpha a)b\right] &= \alpha\left[ab\right] \ , \\
\left[b(\alpha a)\right] &= \alpha\left[ba\right] \ , \\
\left[(\alpha a + \beta b + \dots)p\right] &= \alpha\left[ap\right] + \beta\left[bp\right] + \dots \ , \\
\left[p(\alpha a + \beta b + \dots)\right] &= \alpha\left[pa\right] + \beta\left[pb\right] + \dots \ , \\
\left[\sum \alpha_r a_r \sum \beta_s b_s\right] &= \sum \alpha_r \beta_s \left[a_r b_s\right] \ .
\end{aligned}$$

Ve druhém paragrafu nazvaném *Produkt mehrerer Grössen* autor bezprostředně navázal na předchozí výklad. V nepříliš srozumitelné definici zavedl součin více extenzivních veličin a zabýval se jeho vlastnostmi. Uvedl např. rovnost

$$\left[\sum q_r a_r \sum r_s b_s \dots\right] = \sum q_r r_s \dots \left[a_r b_s \dots\right] ,$$

přičemž trochu nešťastně zaměnil původně užitá písmena α, β za q, r, a použil tak písmeno r ve dvou různých významech (viz [Grassmann, 1862], str. 26).[11]

Ve třetím paragrafu nazvaném *Die verschiedenen Arten der Produktbildung* se H. Grassmann zabýval problémem stanovení součinů základních jednotek. Vazby mezi těmito součiny vyjadřoval rovnicemi, uvědomoval si význam lineární závislosti či nezávislosti těchto podmínek. Poznamenejme, že z hlediska teorie hyperkomplexních čísel tato problematika velmi úzce souvisí se stanovením tzv. strukturních vzorců a strukturních konstant uvažované algebry.

48. *Erklärung. Wenn die Produktbildung dadurch näher bestimmt wird, dass zwischen den Produkten der Einheiten Zahlbeziehungen bestehen, so nenne ich jede Gleichung, welche eine solche Zahlbeziehung ausdrückt, eine zu jener Art der Produktbildung gehörige Bestimmungsgleichung. Einen Verein von p Bestimmungsgleichungen, von denen keine aus den übrigen gefolgert werden kann, nenne ich, wenn zwischen den Produkten keine andere Zahlbeziehung herrscht, als die aus jenen Gleichungen gefolgert werden kann, ein zu jener Produktbildung gehöriges System von Bestimmungsgleichungen.*

49. *Jedes System von m Bestimmungsgleichungen zwischen den n Einheitsprodukten $E_1, \dots E_n$ kann auf die Form gebracht werden, dass jede der Gleichungen ausdrückt, wie aus $n - m$ jener Einheitsprodukte, z. B. aus $E_1, \dots E_{n-m}$ die übrigen m numerisch ableitbar sind. Dann bilden $E_1, \dots E_{n-m}$ ein System von Einheiten, aus denen alle Produkte, die zu dieser Produktbildung gehören, ableitbar sind.* ([Grassmann, 1862], str. 26)

V dalším textu H. Grassmann definoval tzv. *lineální součin* a v následujícím paragrafu na několika příkladech ukázal, jak lze takovýto součin zavést.

50. *Erklärung. Jede Produktbildung, deren Bestimmungsgleichungen geltend bleiben, wenn man statt der darin vorkommenden Einheiten beliebige aus ihnen numerisch abgeleitete Grössen setzt, heisst eine lineale Produktbildung (Multiplikation).*

51. *Für Produkte aus zwei Faktoren giebt es ausser derjenigen Produktbildung, welche gar keine Bestimmungsgleichung hat, und derjenigen, deren Produkte alle null sind, nur zwei Gattungen linealer Produktbildung, und zwar ist das System der Bedingungsgleichungen für die eine*

(1) $[e_r e_s] + [e_s e_r] = 0$,

für die andere

(2) $[e_r e_s] = [e_s e_r]$,

[11] V sebraných spisech i v anglickém překladu je toto místo opraveno.

wo für r und s, wenn $e_1, e_2, \dots e_n$ die Einheiten sind, nach und nach jede 2 der Zahlen $1 \dots n$ gesetzt werden sollen. ([Grassmann, 1862], str. 27)

Třetí kapitola *Kombinatorisches Produkt* (str. 31–107) je podstatně rozsáhlejší než předchozí dvě kapitoly, sestává z osmi paragrafů. Věnována je studiu různých otázek souvisejících se součiny extenzivních veličin. První paragraf se nazývá *Allgemeine Gesetze der kombinatorischen Multiplikation*, druhý *Das kombinatorische Produkt als Grösse*, třetí *Aeussere Multiplikation von Grössen höherer Stufen.*

Ve čtvrtém paragrafu *Ergänzung der Grössen in Bezug auf ein Hauptgebiet* autor vyšel z již zavedeného součinu $[AB]$, pro který je součin všech základních jednotek $e_1, \dots, e_n$ roven číslu 1, a zavedl k jednotce E tzv. doplněk $|E$ (*Ergänzung von* E) jako součin všech jednotek, které při vytvoření jednotky E nefigurují, opatřený kladným nebo záporným znaménkem tak, aby $[E|E] = 1$.

89. *Erklärung. Wenn in einem Hauptgebiete n-ter Stufe das kombinatorische Produkt der ursprünglichen Einheiten $e_1, e_2, \dots e_n$ gleich 1 gesetzt ist, und E eine Einheit beliebiger Stufe, d. h. entweder eine der ursprünglichen Einheiten oder ein kombinatorisches Produkt von mehreren derselben ist, so nenne ich „Ergänzung von E" diejenige Grösse, welche dem kombinatorischen Produkte E' aller in E nicht vorkommenden Einheiten gleich oder entgegengesetzt ist, je nachdem $[EE']$ der absoluten Einheit gleich oder entgegengesetzt ist; ich bezeichne die Ergänzung einer Grösse durch einen vor das Zeichen der Grösse gesetzten vertikalen Strich, also die von E durch $|E$. Die Ergänzung einer Zahl setze ich dieser Zahl gleich; also:*

$$|E = [EE']E' \ ,$$

wenn E und E' die einfachen Faktoren $e_1 \dots e_n$ enthalten und

$$[e_1 e_2 \dots e_n] = 1$$

ist; und

$$|\alpha = \alpha \ , \quad \textit{wenn } \alpha \textit{ eine Zahl ist.}$$

([Grassmann, 1862], str. 57–58)

Pojem doplňku $|A$ extenzivní veličiny A pak definoval přirozeným způsobem pomocí pojmu doplněk jednotky:

90. *Erklärung. Unter der Ergänzung einer beliebigen Grösse A verstehe ich diejenige Grösse $|A$, die man erhält, wenn man in dem Ausdrucke, welcher die numerische Ableitung jener Grösse aus den Einheiten darstellt, statt jeder dieser Einheiten ihre Ergänzung setzt, d. h.*

$$|(\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \dots) = \alpha_1 |E_1 + \alpha_2 |E_2 + \dots \ ,$$

wo $E_1, E_2, \dots$ Einheiten beliebiger Stufen sind. ([Grassmann, 1862], str. 58)

Uveďme pro zajímavost tři tvrzení, která s výše definovaným doplňkem veličiny pracují.

91. *Das äussere Produkt einer Einheit in ihre Ergänzung ist* 1*, d. h.*

$$[E|E] = 1 \ .$$

([Grassmann, 1862], str. 58)

92. *Die Ergänzung der Ergänzung einer Grösse A ist dieser Grösse A gleich oder entgegengesetzt, je nachdem das Produkt der Stufenzahlen dieser Grösse einerseits und ihrer Ergänzung andrerseits gerade oder ungerade ist, d. h.*

$$||A = (-1)^{qr} A \ ,$$

wenn q die Stufenzahl von A und r die von $|A$ ist. ([Grassmann, 1862], str. 59)

93. *Ist die Stufenzahl* (n) *des Hauptgebietes ungerade, so ist*

$$||A = A \ .$$

Ist n gerade, so ist

$$||A = (-1)^{q} A \ ,$$

wenn q die Stufenzahl von A ist. ([Grassmann, 1862], str. 60)

Řada dalších myšlenek je rozvíjena v následujících čtyřech paragrafech: *Produkt in Bezug auf ein Hauptgebiet*, *Vertauschung der Faktoren und Auflösung der Klammern*, *Zurückleitung und Ersetzung*, *Elimination der Unbekannten aus algebraischen Gleichungen.*

Čtvrtá kapitola se nazývá *Inneres Produkt* (str. 107–142). Její první paragraf *Grundgesetze der inneren Multiplikation* začíná definicí vnitřního součinu. Vnitřní součin dvou jednotek je definován jako součin první veličiny s doplňkem veličiny druhé. Ve větě, která následuje, je tato definice rozšířena pro jakékoli veličiny.

137. *Erklärung. Unter dem inneren Produkte zweier Einheiten von beliebigen Stufen verstehe ich das bezügliche Produkt der ersten in die Ergänzung der zweiten; d. h. wenn E und F Einheiten beliebiger Stufen sind, so ist*
$[E|F]$ *das innere Produkt der Einheiten E und F.*

138. *Das innere Produkt zweier beliebiger Grössen ist gleich dem bezüglichen Produkt der ersten in die Ergänzung der zweiten, d. h. es ist*
$[A|B]$ *das innere Produkt der Grössen A und B.*
([Grassmann, 1862], str. 107)

Z následujících tvrzení vyplývá, že Grassmannův pojem vnitřního součinu v sobě obsahuje pojem skalárního součinu.

141. *Das innere Produkt zweier Grössen gleicher Stufe ist eine Zahl.*

142. *Das innere Produkt zweier gleicher Einheiten ist eins, das zweier verschiedener Einheiten gleicher Stufe null, d. h.*

$$[E_r|E_r] = 1 \ , \qquad [E_r|E_s] = 0 \ .$$

143. *Wenn $E_1, \dots E_m$ Einheiten von beliebiger, aber alle von gleicher Stufe sind, so ist*

$$[(\alpha_1 E_1 + \dots \alpha_m E_m)|(\beta_1 E_1 + \dots \beta_m E_m)] = \alpha_1\beta_1 + \dots \alpha_m\beta_m \ .$$

([Grassmann, 1862], str. 109)

145. *Erklärung. Wir schreiben der Kürze wegen*

$$[A|A] = A^2$$

und nennen es das innere Quadrat von A.

146. *Es ist*

$$[\alpha_1 E_1 + \dots \alpha_m E_m]^2 = \alpha_1^2 + \dots \alpha_m^2 \ .$$

([Grassmann, 1862], str. 110)

Ve druhém paragrafu nazvaném *Begriff des Normalen und seine Correlaten* je nejprve definována (v naší terminologii) norma vektoru. Následuje definice kolmých vektorů a kolmých útvarů. Definice není příliš jasná, ani zcela přesná. Třetí definice zavádí pojmy ortogonální báze (jejíž vektory mají stejnou normu) a ortonormální báze.

151. *Erklärung. Numerischer Werth einer Grösse A heisst die positive Quadratwurzel aus dem innern Quadrat dieser Grösse. Numerisch gleich heissen zwei Grössen von gleichem numerischen Werth, d. h. zwei Grössen, deren innere Quadrate gleich sind.* ([Grassmann, 1862], str. 112)

152. *Erklärung. Normal zu einander heissen zwei von null verschiedene Grössen, deren inneres Produkt null ist. Zwei Gebiete heissen normal zu einander, wenn ihre Theile es sind. Zwei Gebiete heissen allseitig zu einander normal, wenn jede Grösse erster Stufe, die dem einen Gebiete angehört, zu jeder, die dem andern angehört, normal ist; und zwei Grössen heissen allseitig normal zu einander, wenn ihre Gebiete es sind.*
([Grassmann, 1862], str. 112–113)

153. *Erklärung. Normalsystem n-ter Stufe heisst ein Verein von n numerisch gleichen (von null verschiedenen) Grössen erster Stufe, von denen jede zu jeder normal ist; und wenn n zugleich die Stufenzahl des Hauptgebietes ist, so heisst es ein vollständiges Normalsystem. Der numerische Werth jener n Grössen heisse zugleich der numerische Werth des Normalsystems. Einfaches Normalsystem heisst jedes Normalsystem, dessen numerischer Werth 1 ist.*
([Grassmann, 1862], str. 113)

Následující tvrzení říká, že nenulové kolmé vektory jsou lineárně nezávislé a že normální systém uvažovaného prostoru je lineárně nezávislým systémem generátorů.

157. *Die Grössen eines Normalsystems stehen in keiner Zahlbeziehung zu einander, und jede Grösse erster Stufe lässt sich aus einem beliebigen vollständigen Normalsystem numerisch ableiten.* ([Grassmann, 1862], str. 115)

Další tvrzení se týká dimenze ortogonálního doplňku. H. Grassmann dokázal, že všechny kolmé vektory k prvním m vektorům ortogonální báze n-dimenzionálního prostoru tvoří podprostor generovaný zbylými $n - m$ vektory.

159. *Die sämmtlichen Grössen erster Stufe, welche zu m Grössen eines vollständigen Normalsystems n-ter Stufe normal sind, gehören dem Gebiete der $n - m$ übrigen Grössen des Systems an.* ([Grassmann, 1862], str. 115)

Následující, velmi stručné tvrzení vyjadřuje důležitou skutečnost: skalární součin je zaveden tak, aby výchozí jednotky tvořily ortonormální bázi.

162. *Das System der ursprünglichen Einheiten ist ein (vollständiges) Normalsystem, dessen numerischer Werth* 1 *ist.* ([Grassmann, 1862], str. 118)

Na začátku třetího paragrafu *Gesetze des inneren Produktes, an den Begriff des Normalen geknüpft* je zaveden pojem ortogonální projekce jedné veličiny na podprostor. V následujících dvou tvrzeních se objevil předobraz Fourierova koeficientu, který figuruje i v tzv. Gramově-Schmidtově ortogonalizačním procesu.

164. *Erklärung. Normale Zurückleitung A' einer Grösse A auf ein Gebiet B nenne ich die Zurückleitung der Grösse A auf das Gebiet B, unter Ausschluss des zu B ergänzenden Gebietes.*

165. *Die normale Zurückleitung A' einer Grösse A auf ein Gebiet B ist*

$$A' = \frac{[B \cdot (A|B)]}{B^2} \ , \ \textit{oder} \ = [B \cdot (A|B)] \ ,$$

letzteres, wenn der numerische Werth von B gleich 1 *ist.*

166. *Zusatz. Sind ins Besondere A und B von gleicher Stufe, so ist die Zurückleitung*

$$A' = \frac{[A|B]B}{B^2} \ , \ \textit{oder} \ = [A|B]B \ , \ \textit{wenn} \ B^2 = 1 \ .$$

([Grassmann, 1862], str. 120)

Zbývající dva paragrafy čtvrté kapitoly se jmenují *Inneres Produkt zweier Grössen erster Stufe* a *Einführung der Winkel.*

Poslední, pátá kapitola první části Grassmannovy knihy, která nese název *Anwendung auf die Geometrie* (str. 142–222), je rozdělena na sedm paragrafů: *Addition, Subtraktion, Vervielfachung und Theilung von Punkten und Strecken*, *Räumliche Gebiete*, *Kombinatorische Multiplikation der Punkte*, *Addition von Linien und Flächen, Planimetrische und stereometrische Multiplikation, Besondere Gesetze für ein gleich Null gesetztes planimetrisches* {*und stereometrisches*} *Produkt. Ebene* {*algebraische*} *Kurven.* {*Algebraische Flächen*}, *Innere Multiplikation in der Geometrie.* Názvy paragrafů do značné míry vystihují jejich obsah.

Druhá část Grassmannovy knihy *Die Ausdehnungslehre* z roku 1862, která je nazvána *Funktionenlehre*, již navozuje problematiku matematické analýzy. Některé partie však mají obecnější charakter.

V první kapitole *Funktionen im Allgemeinen* (str. 223–293) je již v prvním paragrafu *Begriff der Funktionen, und Reduktion mehrerer Funktionen mehrerer Variabeln auf eine Funktion einer Variabeln* rozvíjena řada zajímavých myšlenek. Diskutován je např. pojem funkce, podle oboru funkčních hodnot autor rozlišil číselné a extenzivní funkce více proměnných. Jedním z prvních poznatků je tvrzení o redukci souboru několika funkcí o více proměnných na jedinou extenzivní funkci. Z originálního textu je dobře vidět, že n-tice čísel je chápána jako jediná, extenzivní veličina a rovněž m-tice funkčních hodnot je chápána jako extenzivní veličina. Následující definice připravuje pojem lineárního zobrazení n-rozměrného prostoru do m-rozměrného prostoru.

351. *Jedes System von Zahlfunktionen beliebig vieler Zahlgrössen lässt sich als eine extensive Funktion einer extensiven Grösse darstellen, und zwar, wenn*

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots x_n) \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots x_n) \\ &\vdots \\ y_m &= f_m(x_1, x_2, \dots x_n) \end{aligned}$$

ist, so ist dies System von Gleichungen gleichbedeutend der Gleichung

$$y = F(x) \ ,$$

wo

$$\begin{aligned} x &= x_1 e_1 + \dots \ x_n e_n \\ F(x) &= e_1 \varphi_1(x) + e_2 \varphi_2(x) + \dots e_m \varphi_m(x) \\ \varphi_r(x) &= f_r\big([x|e_1], [x|e_2], \dots [x|e_n]\big) \end{aligned}$$

ist und $e_1, \dots e_n$ *einfache Normalsysteme bilden.* ([Grassmann, 1862], str. 225)

Ve čtvrtém paragrafu nazvaném *Ganze Funktionen ersten Grades und Darstellung derselben als Quotient* zavedl H. Grassmann (v našem dnešním pojetí a terminologii) lineární zobrazení n-rozměrného prostoru do toho samého prostoru (tj. endomorfismus). Neužíval dnešní pojem zobrazení, nýbrž hovořil o jakémsi „objektu“ nazývaném *Bruch* nebo *Ausdruck*, kterým se násobí prvky uvažovaného prostoru, a získávají se tak opět prvky tohoto prostoru. A protože se v tomto pojetí jednalo o jakousi operaci, předpokládal její distributivitu vůči sčítání a záměnnost tohoto násobení s násobením reálnými čísly; je to vidět ze zavedení rovnosti dvou takovýchto objektů. V tomto pojetí lze pochopitelně bez podrobnějšího vysvětlení vytvářet lineární kombinace nově zavedených objektů.

377. *Erklärung. Wenn $a_1, a_2, \ldots a_n$ Grössen erster (oder $n-1$-ter) Stufe in einem Hauptgebiet n-ter Stufe sind, die in kleiner Zahlbeziehung zu einander stehen, so verstehe ich unter dem Bruche (Quotienten)*

$$Q = \frac{b_1,\ b_2, \ldots b_n}{a_1,\ a_2, \ldots a_n}$$

den Ausdruck, welcher mit $a_1, a_2, \ldots a_n$ multiplicirt, beziehlich die Werthe $b_1, b_2, \ldots b_n$ liefert, so dass also

$$\frac{b_1,\ b_2, \ldots}{a_1,\ a_2, \ldots}\ a_r = b_r\ .$$

Ich nenne $a_1, a_2, \ldots a_n$ die Nenner des Bruches, $b_1, b_2, \ldots b_n$ seine entsprechenden Zähler, und setze zwei Brüche, oder zwei Ausdrücke, welche aus Brüchen numerisch abgeleitet sind, dann und nur dann einander gleich, wenn sie mit jeder Grösse erster Stufe multiplicirt Gleiches liefern. Wenn auch die Zähler Grössen 1-ter oder $(n-1)$-ter Stufe sind, und in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, so nenne ich den Bruch einen umkehrbaren, und bezeichne in diesem Falle, wenn

$$Q = \frac{b_1,\ b_2, \ldots b_n}{a_1,\ a_2, \ldots a_n}$$

ist, mit $\frac{1}{Q}$ den umgekehrten Bruch, d. h. ich setze

$$\frac{1}{Q} = \frac{a_1,\ a_2, \ldots a_n}{b_1,\ b_2, \ldots b_n}\ .$$

([Grassmann, 1862], str. 241)

V předchozí definici tedy H. Grassmann zavedl pojem endomorfismu vektorového prostoru, a to určením obrazů prvků zvolené báze: vektory $a_1, \ldots, a_n$ se zobrazí po řadě na vektory $b_1, \ldots, b_n$. Vzhledem k předpokládané distributivitě nového násobení a jeho záměnnosti s násobením reálnými čísly je tím definován obraz libovolného vektoru uvažovaného prostoru. Pokud se navíc při daném endomorfismu Q zobrazuje báze na bázi, lze zavést inverzní zobrazení $\frac{1}{Q}$.

V následujícím tvrzení je dokázáno, že dva endomorfismy (a též jejich lineární kombinace) se rovnají, shodují-li se na vektorech nějaké báze.

378. *Zwei Brüche oder Vielfachensummen von Brüchen, welche mit n in keiner Zahlbeziehung zu einander stehenden Grössen erster Stufe multiplicirt, Gleiches liefern, sind einander gleich, vorausgesetzt, dass n die Stufe des Hauptgebietes ist.* ([Grassmann, 1862], str. 242)

V důkazu tohoto tvrzení se objevil vztah, který ukazuje, že linearitu autor předpokládal: pro $x = x_1 a_1 + \ldots x_n a_n$ je

$$Qx = Q(x_1 a_1 + \ldots x_n a_n) = x_1 Q a_1 + \ldots x_n Q a_n\ .$$

Následující věta dokumentuje vhodnost zavedeného označení. Při utvoření lineární kombinace uvažovaných endomorfismů, které jsou „převedeny na společného jmenovatele“, se stejná lineární kombinace provede na jednotlivé čitatele.

379. *Einen Bruch multiplicirt man mit einer Zahl, indem man jeden Zähler mit dieser Zahl multiplicirt, und Brüche von gleichen Nennern addirt man, indem man die entsprechenden Zähler addirt, wobei die Nenner in beiden Fällen ungeändert bleiben, d. h., beides zusammengefasst,*

$$\beta\frac{b_1,\ b_2,\dots}{a_1,\ a_2,\dots}+\gamma\frac{c_1,\ c_2,\dots}{a_1,\ a_2,\dots}+\dots$$

$$=\frac{(\beta b_1+\gamma c_1+\dots),(\beta b_2+\gamma c_2+\dots),\dots}{a_1 \qquad ,\ a_2 \qquad\qquad ,\dots}\,.$$

([Grassmann, 1862], str. 242)

V další větě nacházíme transformaci symbolického vyjádření endomorfismu, která odpovídá změně báze. Každá lineární kombinace vektorů báze $a_1,\dots,a_n$ se zobrazí na lineární kombinaci obrazů vektorů $a_1,\dots,a_n$ se stejnými koeficienty.

380. *Jeden Bruch kann man auf die Form bringen, dass seine Nenner beliebige n in keiner Zahlbeziehung zu einander stehende Grössen erster Stufe sind (wo n die Stufenzahl des Hauptgebietes ist), und zwar ist*

$$\frac{b_1,\ b_2,\dots}{a_1,\ a_2,\dots}=\frac{\sum\alpha_{1,\mathfrak{a}}b_{\mathfrak{a}},\sum\alpha_{2,\mathfrak{a}}b_{\mathfrak{a}},\dots}{\sum\alpha_{1,\mathfrak{a}}a_{\mathfrak{a}},\sum\alpha_{2,\mathfrak{a}}a_{\mathfrak{a}},\dots}$$

wenn $\sum\alpha_{1,\mathfrak{a}}a_{\mathfrak{a}},\sum\alpha_{2,\mathfrak{a}}a_{\mathfrak{a}},\dots$ *n in keiner Zahlbeziehung zu einander stehende Grössen, und* $\alpha_{r,s}$ *Zahlen sind.* ([Grassmann, 1862], str. 243)

H. Grassmann vzápětí obrátil pozornost k vyjádření endomorfismů vzhledem k základním jednotkám $\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_2,\dots\mathrm{e}_n$. Zavedl n^2 endomorfismů $\mathrm{E}_{r,s}$, $r,s=1,\dots n$, které zobrazují r-tý vektor báze na s-tý a ostatní na nulový vektor. Ukázal, že každý endomorfismus lze vyjádřit lineární kombinací těchto speciálních endomorfismů, jež jsou navíc lineárně nezávislé. Tvoří tedy bázi vektorového prostoru všech endomorfismů uvažovaného prostoru. Dnes tento fakt vyjadřujeme většinou v maticové podobě.

381. *Wenn* $\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_2,\dots\mathrm{e}_n$ *die ursprünglichen Einheiten sind, und mit* $\mathrm{E}_{r,s}$ *der Kürze wegen der Bruch bezeichnet wird, dessen Nenner die ursprünglichen Einheiten sind, und von dessen Zählern derjenige, welcher dem Nenner* e_r *entspricht, gleich* e_s *ist, während alle übrigen Zähler desselben null sind, d. h. wenn*

$$\mathrm{E}_{r,s}\,\mathrm{e}_r=\mathrm{e}_s\quad\text{und}\quad\mathrm{E}_{r,s}\,\mathrm{e}_t=0\quad[t\neq r]$$

ist, so lassen sich die n^2 *Ausdrücke, welche aus* $\mathrm{E}_{r,s}$ *hervorgehen, indem man statt r und s nach und nach beliebige der Zahlen* $1\dots n$ *setzt, als Brucheinheiten* *setzen, d. h. es lassen sich alle Brüche aus ihnen numerisch ableiten, während sie selbst in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, und zwar ist*

$$\frac{\sum \alpha_{1,\mathfrak{b}}\, \mathrm{e}_{\mathfrak{b}}, \sum \alpha_{2,\mathfrak{b}}\, \mathrm{e}_{\mathfrak{b}}, \dots}{\mathrm{e}_1 \qquad , \quad \mathrm{e}_2 \qquad , \dots} = \sum \alpha_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\, \mathrm{E}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \ .$$

([Grassmann, 1862], str. 244)

382. *Jeder Bruch lässt sich als Lückenausdruck mit einfacher Lücke darstellen, und zwar ist, wenn die Nenner $a_1, \dots a_n$ ein einfaches Normalsystem bilden,*

$$\frac{b_1,\ b_2, \dots}{a_1,\ a_2, \dots} = [l|a_1]b_1 + [l|a_2]b_2 + \dots \ .$$

([Grassmann, 1862], str. 245)

V následující větě lze poměrně snadno identifikovat tzv. větu o hodnosti a defektu endomorfismu n-rozměrného prostoru. Jedná se o endomorfismus, který má hodnost m a defekt $n - m$.

386. *Wenn zwischen den Zählern eines Bruches eine Zahlbeziehung herrscht, so lässt sich der Bruch stets auf die Form bringen, dass einer oder mehrere seiner Zähler null werden, und zwischen den übrigen Zählern keine Zahlbeziehung stattfinde; und zwar wenn $e_1, \dots e_n$ die Nenner, $a_1, \dots a_n$ die Zähler des Bruches Q sind, und zwischen $a_1, \dots a_m$ keine Zahlbeziehung stattfindet, aber die übrigen $n - m$ Zähler aus ihnen numerisch ableitbar sind, so dass*

$$a_{m+r} = \alpha_{r,1}a_1 + \alpha_{r,2}a_2 + \dots \alpha_{r,m}a_m$$

ist, so ist

$$Q = \frac{a_1, \dots a_m,\ 0, \qquad 0,\ \dots,\ 0}{e_1, \dots e_m, c_{m+1}, c_{m+2}, \dots, c_n}\ , \ \textit{wo}$$

$$\begin{aligned} c_{m+r} &= \alpha_{r,1}e_1 + \alpha_{r,2}e_2 + \dots \alpha_{r,m}e_m - e_{m+r}\ , \ \textit{d. h.} \\ &= \frac{e_1, \dots e_m}{a_1, \dots a_m} a_{m+r} - e_{m+r} \end{aligned}$$

ist. Und alle aus $c_{m+1}, \dots c_n$ numerisch ableitbaren Grössen, aber auch keine andern geben mit Q multiplicirt, null. ([Grassmann, 1862], str. 249)

Pojem vlastního čísla a příslušného podprostoru vlastních vektorů zavedl H. Grassmann velmi srozumitelným způsobem.

387. *Erklärung. Wenn ein Bruch Q mit einer von Null verschiedenen Grösse erster Stufe multiplicirt ein Vielfaches dieser Grösse, etwa das ϱ-fache derselben liefert, so dass also*

$$Qx = \varrho x$$

ist, so nenne ich den Koefficienten ϱ (mag ϱ nun reell oder imaginär sein) eine Hauptzahl des Bruches Q, und das Gebiet, welchem alle Grössen x angehören, *welche jener Gleichung genügen, das zu der Hauptzahl ϱ gehörige Hauptgebiet.* ([Grassmann, 1862], str. 250)

Po této definici zformuloval H. Grassmann úlohu nalézt pro daný endomorfismus vlastní čísla a příslušné podprostory vlastních vektorů:

388. *Aufgabe. Die Hauptzahlen und die zugehörigen Hauptgebiete eines Bruches zu finden.* ([Grassmann, 1862], str. 250)

Tuto úlohu vyřešil a poté vyslovil tvrzení, které se dodnes objevuje v učebnicích lineární algebry.

389. *Wenn die n Hauptzahlen $\varrho_1, \dots \varrho_n$ eines Bruches Q alle von einander verschieden sind, so sind die n zugehörigen Hauptgebiete alle von erster Stufe und stehen in keiner Zahlbeziehung zu einander.* ([Grassmann, 1862], str. 252)

Po provedení důkazu H. Grassmann zformuloval a řešil další úlohu – případ vícenásobných vlastních čísel.

Grassmannova monografie je velmi bohatá na ideje. Jako poslední příklad uveďme jedno tvrzení, v němž se objeví samoadjungovaný operátor.

391. *Wenn ein Bruch Q die Eigenschaft hat, dass für beliebige von Null verschiedene Grössen erster Stufe a und b*

(a) $\left[Qa|b\right] = \left[Qb|a\right]$ und $\left[Qa|a\right] \neq 0$

ist, so lassen sich stets n in keiner Zahlbeziehung zu einander stehende Grössen erster Stufe $c_1, \dots c_n$ von der Art finden, dass

(b) $\left[Qc_r|c_s\right] = 0$

ist, sobald r von s verschieden ist. Ferner sind dann die n Hauptzahlen des Bruches Q alle reell, und unter ihnen so viel positive, als es unter den Produkten

(c) $\left[Qc_1|c_1\right], \dots \left[Qc_n|c_n\right]$

positive giebt. Endlich lassen sich stets n zu einander normale Grössen $\mathrm{e}_1, \dots \mathrm{e}_n$ von der Art finden, dass jede derselben mit Q multiplicirt ein Vielfaches derselben liefert, also

(d) $Q\,\mathrm{e}_r = \varrho_r\,\mathrm{e}_r$, *wo*

(e) $\left[\,\mathrm{e}_r|\,\mathrm{e}_s\right] = 0$

für jedes von r verschiedene s. ([Grassmann, 1862], str. 259–260)

Myšlenky, které rozvíjel v předchozích partiích své knihy, H. Grassmann v dalším textu úspěšně využíval ke studiu nejrůznějších otázek matematické analýzy. Již v úvodu pátého paragrafu *Die Funktionen als extensive Grössen* zavedl lineární kombinace funkcí, lineárně nezávislé funkce atd., některé geometrické záležitosti popisoval analyticky. Ocitujeme zde jen dva články:

392. *Erklärung. Ich sage, eine Funktion f sei aus einer oder mehreren Funktionen $f_1, f_2, \dots$ numerisch ableitbar, wenn sich f in der Form*

$$f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots$$

darstellen lässt, wo $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ Zahlgrössen ausdrücken, die entweder konstant oder doch von den Variabeln der Funktionen unabhängig sind, und wo das

Gleichheitszeichen die Gleichheit für beliebige Werthe dieser letzteren Variabeln aussagt. ([Grassmann, 1862], str. 266)

394. *Erklärung. Die Funktion*

$$x^2 + y^2 + \beta x + \gamma y + \delta$$

nenne ich eine einfache Kreisfunktion, die Funktion

$$\alpha(x^2 + y^2) + \beta x + \gamma y + \delta$$

eine α*-fache Kreisfunktion. Und wenn* $f(x, y)$ *eine Kreisfunktion ist, so nenne ich den Kreis, dessen Gleichung, bei rechtwinkligen Koordinaten,*

$$f(x, y) = 0$$

ist, den zu dieser Funktion gehörigen Kreis. ([Grassmann, 1862], str. 268)

Druhá, třetí a čtvrtá kapitola druhé části Grassmannovy knihy směřují k analýze: *Differentialrechnung* (str. 293–308), *Unendliche Reihen* (str. 309–328), *Integralrechnung* (str. 328–385).

I v sedmdesátých letech se H. Grassmann snažil šířit výsledky a myšlenky obsažené v monografii *Die Ausdehnungslehre*. Dokladem tohoto faktu jsou některé jeho články. Roku 1874 publikoval v časopise Mathematische Annalen pojednání *Die neuere Algebra und die Ausdehnungslehre*; druhý paragraf se nazývá *Grundbegriffe der Ausdehnungslehre und ihre Anwendung auf die neuere Algebra*, přičemž název přesně vystihuje obsah této partie. O tři roky později zveřejnil ve stejném časopise článek *Die Mechanik nach den Principien der Ausdehnungslehre*. V prvním paragrafu *Begriffe und Gesetze der Ausdehnungslehre, die hier benutzt werden sollen* opět uvádí čtenáře do základů své teorie. Poznamenejme, že úvodní partie těchto dvou Grassmannových prací mohly podstatnou měrou přispět k pochopení jeho monografie. Úvodní slova druhého Grassmannova článku zní takto:

Es giebt wohl kaum ein Gebiet, auf welchem sich die Unentbehrlichkeit der in meiner Ausdehnungslehre (von 1844 und 1862) dargestellten Kalküls so schlagend erwiese wie in der Mechanik. Man kann sagen, jeder einfache mechanische Begriff sei zugleich ein einfacher Verknüpfungsbegriff jenes Kalküls. Und in der That hat sich mir diese ganze Rechnungsmethode, nachdem nur einmal die erste Idee derselben erfasst war, an der Hand der Mechanik am schnellsten und fruchtreichsten weiter entwickelt. ([Grassmann, 1877], str. 222)

Stojí za to si uvědomit, že tato slova H. Grassmann napsal krátce před smrtí. Roku 1877 publikoval v časopise Journal für die reine und angewandte Mathematik jedenáctistránkový článek *Verwendung der Ausdehnungslehre für die allgemeine Theorie der Polaren und den Zusammenhang algebraischer Gebilde.*

4. Vícerozměrná geometrie

Důležité podněty vedoucí postupně k vytvoření pojmu vektorový prostor konečné dimenze byly rozvíjeny i při budování vícerozměrné geometrie.

V knize *Die lineale Ausdehnungslehre* z roku 1844 i v její přepracované verzi z roku 1862 rozvíjel H. Grassmann velmi osobitým způsobem myšlenky vícerozměrné geometrie. Tyto ideje se v první polovině 19. století objevily v pracích několika matematiků. Každý z nich však šel svou vlastní cestou.

Roku 1843 publikoval Arthur Cayley (1821–1895) článek *Chapters in the analytical geometry of (n) dimensions*, který má výrazně algebraický charakter, termín vícerozměrná geometrie je pouze v názvu. Autor pracoval zejména s homogenními soustavami lineárních rovnic a s homogenními funkcemi druhého stupně zapisovanými ve tvaru

$$\sum(\alpha^2)x_\alpha^2 + 2\sum(\alpha\beta)x_\alpha x_\beta \ .$$

Své výsledky interpretoval v závěru práce pro případ čtyř proměnných x_1, x_2, x_3, x_4 na plochy druhého stupně v trojrozměrném projektivním prostoru. Některé úvahy, které můžeme řadit do vícerozměrné geometrie, jsou obsaženy i v Cayleyových pracích o kvaternionech a oktávách, resp. v jeho obsáhlém pojednání *On multiple algebra* z roku 1887.

William Rowan Hamilton (1805–1865) objevil roku 1843 kvaterniony. V sérii článků *On quaternions, or On a new system of imaginaries in algebra* publikovaných v londýnském časopise Philosophical Magazine v letech 1844 až 1850 své ideje postupně rozvíjel, v rámci teorie kvaternionů položil mimo jiné základy vektorového počtu. Výsledky svého bádání shrnul roku 1853 v monografii *Lectures on quaternions*; jeho druhá monografie, *Elements of quaternions*, byla vydána až posmrtně roku 1866. V souvislosti s problematikou kvaternionů, bikvaternionů a dalších systémů hyperkomplexních čísel postupně sílilo vnímání vícerozměrné geometrie.

Německý matematik Julius Plücker (1801–1868) vydal roku 1846 v Bonnu knihu *System der Geometrie des Raumes in neuer analytischer Behandlungsweise* a v letech 1868 a 1869 v Lipsku dvoudílnou monografii *Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement*; k prvnímu dílu napsal předmluvu Alfred Clebsch (1833–1872), ke druhému Felix Christian Klein (1849–1925). Julius Plücker vyšetřoval čtyřrozměrnou varietu přímek trojrozměrného prostoru, zavedl tzv. plückerovské souřadnice.

Švýcarský matematik Ludwig Schläfli (1814–1895) sepsal roku 1851 pro vídeňskou akademii věd rozsáhlé pojednání věnované vícerozměrné geometrii, které nazval *Theorie der vielfachen Kontinuität*. Vydáno bylo v Basileji roku 1901, šest let po autorově smrti. Některé výsledky však L. Schläfli publikoval již roku 1855 v práci *Reduction d'un intégrale multiple qui comprend l'arc du circle et l'aire du triangle sphérique comme cas particuliers* v časopisu Journal de mathématiques pures et appliquées a v článku *On the multiple integral …*, který otiskl časopis Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics (1858–1860). Na Schläfliho výsledky navázal Pieter Hendrik Schoute (1846–1923) v knize *Mehrdimensionale Geometrie* vydané v Lipsku v letech 1902 až 1905.

Myšlenky vícerozměrné geometrie nalezneme i v pracích Bernharda Georga Friedricha Riemanna (1826–1866), zejména v jeho slavné habilitační přednášce *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* přednesené roku 1854 v Göttingen. Jeho pojem variety je obecnější než odpovídající pojmy, s nimiž přišli H. Grassmann a L. Schläfli. Podobné úvahy jako B. Riemann zveřejnil roku 1972 A. Clebsch v práci *Über eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie.* Načrtnul v ní pojem $(n-1)$-dimenzionální variety.

F. Klein zformuloval některé myšlenky o vícerozměrné geometrii v závěrečném paragrafu tzv. Erlangenského programu z roku 1872. V sedmdesátých letech 19. století se této problematice věnoval v několika dalších pojednáních.

Italský matematik Enrico Betti (1823–1892) vybudoval moderní terminologii vícerozměrné geometrie v práci *Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni*, která vyšla v časopise Annali di matematica pura ed applicata roku 1871. Psal o prostorech dimenze n, jejich podprostorech, bodech, přímkách, souřadnicích atd. Ukázal souvislost podprostorů takovéhoto prostoru a soustav několika homogenních rovnic o n neznámých apod. Jeho článek začíná takto:

Siano $z_1, z_2, \ldots z_n$ *n variabili che possono prendere tutti i valori reali da* $-\infty$ *a* $+\infty$*. Il campo n volte infinito dei sistemi di valori di queste variabili lo diremo uno spazio di n dimensioni e lo denoteremo con* S_n*. Un sistema* $(z_1^0, z_2^0, \ldots, z_n^0)$ *determinerà un punto* L_0 *di questo spazio, e* $z_1^0, z_2^0, \ldots, z_n^0$ *si diranno le coordinate di questo punto.*

Un sistema di m equazioni determinerà un campo dei sistemi di valori di $n-m$ *variabili indipendenti, che sarà uno spazio* S_{n-m} *di altrettante dimensioni, contenuto in* S_n*. Uno spazio di una sola dimensione che forma una semplice continuità lo chiameremo una linea.*

Sia:

$$F(z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0$$

la equazione di uno spazio S_{n-1} *di* $n-1$ *dimensioni. Se la funzione F è continua e ad un sol valore per tutti i valori reali delle coordinate, lo spazio* S_{n-1} *in generale separerà* S_n *in due regioni, in una delle quali sarà* $F < 0$*, e nell'altra* $F > 0$ … (Opere II., str. 273)

Bettiho terminologii přijal roku 1872 Camille Jordan (1838–1922) ve dvou pracích stejného názvu – *Essai sur la géométrie à n dimensions.*

5. Ohlasy Grassmannových matematických prací

Grassmannova *Die lineale Ausdehnungslehre* z roku 1844 ani její přepracovaná verze *Die Ausdehnungslehre* z roku 1862 neměly velký ohlas. Teprve dodatečně byly nalezeny některé reakce Grassmannových současníků. Velmi zajímavá je např. výměna názorů mezi Ernstem Friedrichem Apeltem (1812–1859), profesorem filozofie v Jeně, a Augustem Ferdinandem Möbiem. E. F. Apelt dne 3. září 1845 napsal A. F. Möbiovi:

Haben Sie denn Graßmanns wunderliche Ausdehnungslehre gelesen? Ich kenne sie nur aus Grunerts Archiv, aber mir scheint eine falsche Philosophie der Mathematik zu Grunde liegen. Der wesentliche Charakter der mathematischen Erkenntnis, die Anschaulichkeit, scheint darin ganz verbannt zu sein. So eine abstrakte Ausdehnungslehre, wie er sucht, könnte sich nur aus Begriffen entwickeln lassen. Aber die Quelle der mathematischen Erkenntnis liegt nicht in Begriffen sondern in der Anschauung.
(Werke III.2, str. 101; anglický překlad viz [Lewis, 1977], str. 108)

A. F. Möbius odpověděl E. F. Apeltovi až 5. ledna 1846:

Sie fragen mich, ob ich Graßmanns Ausdehnungslehre gelesen habe. Hierauf erwiedere ich, daß der Verfasser selbst mir mit seinem Werke ein Geschenk gemacht hat, daß ich mehrmals angesetzt habe, es zu studieren, niemals aber weit über die ersten Blätter hinausgekommen bin, da es, wie Sie selbst bereits bemerkt haben, sich zu sehr von aller Anschaulichkeit, dem wesentlichen Charakter der mathematischen Erkenntnis, fern hält. Indessen bin ich doch beim Durchblättern des Buches auf Mehreres gestoßen, auf Begriffserweiterungen, Verallgemeinerungen, oder wie Sie es nennen wollen, von denen ich glaube, daß sie für die Mathematik selbst, insbesondere für die systematische Darstellung ihrer Elemente, recht einflußreich werden können. Dahin gehört namentlich die Addition und die Multiplikation von Linien, wenn man an letzteren nicht bloß ihre Längen sondern auch ihre Richtungen berücksichtigt.
(Werke III.2, str. 101)

Začátkem padesátých let 19. století se několikrát zmínil o Grassmannově díle W. R. Hamilton ve svých dopisech Augustu de Morganovi (1806–1871). Byl patrně prvním významným matematikem, který se o H. Grassmannovi vyjádřil s takovou úctou:

... a very original work ... will perhaps set up in rivalship with mine. (26. října 1852)

I have recently been reading ... more than a hundred pages of Grassmann's Ausdehnungslehre, with great admiration and interest. Previously I had only the most slight and general knowledge of the book, and thought that it would require me to learn to smoke in order to read it. If I could hope to be put in rivalship with DesCartes on the one hand, and with Grassmann on the other, my scientific ambition would be fulfilled! (31. ledna 1853)

Grassmann is a great and most German genius. (2. února 1853)
([Flament, 1992], str. 207)

O Grassmannových výsledcích napsal W. R. Hamilton roku 1853 i v předmluvě své monografie *Lectures on Quaternions.*

Roku 1860 se o H. Grassmannovi pochvalně zmínil Luigi Cremona (1830–1903) v krátké poznámce *Solution des questions 494 et 499, méthode Grassmann et propriété de la cubique gauche* uveřejněné v časopise Nouvelle Annales de mathématiques.

Roku 1867 se o Grassmannových výsledcích s uznáním vyjádřil německý matematik Hermann Hankel (1839–1873). Na několika místech své knihy *Theorie der complexen Zahlensysteme insbesondere der gemeinen imaginären Zahlen und der Hamiltonschen Quaternionen* velmi pozitivně reagoval na Grassmannovy výsledky. Znal patrně velmi dobře obě Grassmannovy knihy.

Erst H. Grassmann hat diesen Gedanken mit wahrhaft philosophischem Geiste ergriffen und von einem umfassenden Gesichtspunkte aus betrachtet. In seiner „Linealen Ausdehnungslehre ein neuer Zweig der Mathematik“ 1844 hat er auf ihn eine Wissenschaft gegründet, welche sich ganz allgemein mit abstracten, extensiven, stetigen Grössen, als deren concrete Bilder die räumlichen Figuren (Strecken, Flächen, Körperräume) erscheinen, und mit deren Verknüpfung, beschäftigt. Die rein formalen Verknüpfungsgesetze, die man nach dem hergebrachten Ausdrucke arithmetische Operationen nennt, finden hier ihr reales, aber abstractes Substrat, und, wenn man sie geometrisch veranschaulicht, ihre concrete reale Bedeutung. Die schönen in diesem Werke niedergelegten Ideen haben eine weitere Ausbildung und Verwendung erhalten in Grassmann's Leipziger Preisschrift „Geometrische Analyse …“ 1847 und in seiner „Ausdehnungslehre“ von 1862. … ([Hankel, 1867], str. 16)

Gleichzeitig hat in Deutschland H. Grassmann … im Raume oder überhaupt in einem Gebiete, welches aus mehreren von einander unabhängigen stetigen Elementaränderungen besteht, Operationen vorgenommen, welche in algebraischer Fassung Additionen und Multiplicationen complexer Zahlen darstellen, und hat deren Natur in sehr allgemeiner und eingehender Weise untersucht. ([Hankel, 1867], str. 105)

Schon in der „Ausdehnungslehre“ Grassmann's von 1844 findet sich das System der alternirenden Zahlen und Operationen, allerdings in einer sehr abstracten und schwer verständlichen Darstellung. ([Hankel, 1867], str. 140)

H. Grassmann napsal v létě roku 1877 v předmluvě ke druhému vydání knihy *Die lineale Ausdehnungslehre* tato slova:

Es war zuerst Hermann Hankel, welcher in seiner „Theorie der complexen Zahlensysteme, Leipzig 1867“ die fundamentale Bedeutung meiner Ausdehnungslehre betonte … ([Grassmann, 1878], str. xvi)

H. Grassmann poslal roku 1869 svého syna Justa studovat matematiku do Göttingen. Justus doručil dva exempláře knihy *Die Ausdehnungslehre* A. Clebschovi a Moritzi Abrahamu Sternovi (1807–1894). Tak byli upozorněni na Grassmannovy myšlenky matematici Clebschova okruhu: Alexander Brill (1842–1935), Paul Gordan (1837–1912), Olan Henrici (1840–1918), Felix Klein, Ferdinand Lindemann (1852–1939), Jakob Lüroth (1844–1910), Max Noether (1844–1921), Eduard Study (1862–1930) a Aurel Voß (1845–1931).

A. Clebsch, který již v té době znal Plückerovy a Riemannovy práce, reagoval roku 1872 na myšlenky Grassmannovy knihy v článku *Zum Gedächtnis an Julius Plücker*.

Gymnaziální profesor Victor Schlegel (1843–1905), který byl v letech 1866 až 1868 Grassmannovým kolegou na štětínském gymnáziu a později působil na gymnáziu ve Waren, byl velkým Grassmannovým příznivcem. Byl prvním matematikem, který se snažil intenzivně šířit Grassmannovy myšlenky. V letech 1872 a 1875 vydal u Teubnera v Lipsku dvoudílnou monografii, v jejímž názvu se objevilo jak Grassmannovo jméno, tak název jeho stěžejního díla – *System der Raumlehre nach den Prinzipien der Grassmann'schen Ausdehnungslehre und als Einleitung in dieselbe*, a připsal ji právě H. Grassmannovi jako tvůrci *Ausdehnungslehre.* Snažil se Grassmannovy ideje předkládat čtenářům v jednodušší a srozumitelnější formě. První díl Schlegelovy knihy je nazván *Geometrie. Die Gebiete des Punktes, der Geraden, der Ebene*, druhý díl *Die elemente der modernen Geometrie und Algebra.* Ani Schlegelova kniha nebyla příliš úspěšná.

Významný německý matematik F. Klein byl s Grassmannovými výsledky seznámen již začátkem sedmdesátých let 19. století. Roku 1872 se v tzv. Erlangenském programu – *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* – na několika místech o H. Grassmannovi zmínil.

Die Vorstellungsweise, welche das Element der beliebig ausgedehnten Mannigfaltigkeit als ein Analogon zum Punkte des Raumes betrachtet, ist wohl zuerst von Graßmann in seiner Ausdehnungslehre (1844) entwickelt worden. Bei ihm ist der Gedanke völlig frei von der erwähnten Vorstellung von der Natur des Raumes; letztere geht auf gelegentliche Bemerkungen von Gauß zurück und wurde durch Riemanns Untersuchungen über mehrfach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten, in welche sie mit eingeflochten ist, in weiteren Kreisen bekannt.

Beide Auffassungsweisen – die Graßmannsche wie die Plückersche – haben ihre eigentümlichen Vorzüge; man verwendet sie beide, zwischen ihnen abwechselnd, mit Vorteil. (Abhandlungen I., str. 492)

Krátce po Grassmannově smrti napsal jeho velký ctitel V. Schlegel pojednání *Hermann Grassmann: Sein Leben und seine Werke*; bylo publikováno v květnu roku 1878 v nakladatelství Brockhaus v Lipsku. V následujícím roce vyšel v časopise Mathematische Annalen obsáhlý článek *Hermann Grassmann. Sein Leben und seine mathematisch-physikalischen Arbeiten*, jehož autory byli Friedrich Otto Rudolf Sturm (1841–1919), Ernst Schröder (1841–1902) a Leonhard Sohncke (1842–1897).[12] V závěru jejich článku byl na třech stranách otištěn seznam Grassmannových knižních i časopiseckých prací (matematických, fyzikálních, jazykovědných a ostatních).

Zdůrazněme, že během Grassmannova života se neobjevily téměř žádné články a knihy, které by na jeho matematické myšlenky výrazněji reagovaly; Schlegelovy výše zmíněné práce byly výjimkou. Po Grassmannově smrti se však situace výrazně změnila, na přelomu sedmdesátých a osmdesátých let zájem o Grassmannovo dílo výrazně narostl. Lze říci, že tento zájem trvá více méně dodnes.

[12] V roce 1844, kdy vyšla Grassmannova kniha *Die lineale Ausdehnungslehre*, jim byly dva až tři roky!

Roku 1878 reagoval na některé Grassmannovy myšlenky W. K. Clifford (1845–1879) v článku *Applications of Grassmann's extensive algebra*, v němž má svůj původ tzv. Cliffordova algebra. O Grassmannově knize se vyjádřil takto:

... Until recently I was unacquainted with the Ausdehnungslehre, and knew only so much of it as is contained in the author's geometrical papers in Crelle's Journal and in Hankel's Lectures on Complex Numbers. I may, perhaps, therefore be permitted to express my profound admiration of that extraordinary work, and my conviction that is principles will exercise a vast influence upon the future of mathematical science. (Papers, str. 266)

Roku 1881 vyšel v časopise The Analyst článek *A brief account of the essential features of Grassmann's extensive algebra*. Jedná se o překlad Grassmannova článku *Kurze Uebersicht über das Wesen der Ausdehnungslehre* publikovaného roku 1845 v časopise Archiv der Mathematik und Physik; překladatelem byl W. W. Beman. O rok později publikoval Homersham Cox (1821–1897) v časopise Cambridge Philosophical Transactions sedmdesátistránkový článek *On the application of quaternions and Grassmann's Ausdehnungslehre to different kinds of uniform space*, v němž věnoval velkou pozornost problematice vnějšího součinu. H. Cox rozpracovával podněty z Grassmannova díla i v dalších pracích.[13]

Roku 1883 publikoval Rudolf Mehmke (1857–1944) v časopise Mathematische Annalen práci *Ueber die Bestimmung von Trägheitsmomenten mit Hülfe Grassmann'scher Methoden*.[14] V úvodu práce ocenil přístup založený na Grassmannových myšlenkách:

Bei der rechnerischen Auswerthung des Trägheitsmomentes von materiellen Flächen und Körpern bediente man sich bis jetzt meines Wissens ausschliesslich der gewöhnlichen Coordinatenmethoden. Es scheint nämlich der Anwendung neuerer Hülfsmittel – ich habe besonders die Möbius-Grassmann'schen Methoden im Auge – die weitverbreitete Ansicht entgegenzustehen, dass derartige „symbolische" Methoden wohl bisweilen zur Ableitung „allgemeiner" Resultate geeignet seien, dass man jedoch bei speciellen Problemen, namentlich metrischer Natur, am besten thun, zu den altgewohnten Coordinatenmethoden seine Zuflucht zu nehmen. Im Laufe einer letzten Winter gehaltenen Vorlesung über „Anwendung der Grassmann'schen Ausdehnungslehre auf Mechanik" habe ich mich nun überzeugt, dass die Methoden der Ausdehnungslehre, wie auf allen übrigen Gebieten der Mechanik, so auch bei der Bestimmung von Schwerpunkten, Trägheitsmomenten u. s. w. mit grösstem Vortheil verwendet werden können. ([Mehmke, 1883], str. 143)

Roku 1885 publikoval Leopold Schendel knížku *Grundzüge der Algebra nach Grassmannschen Prinzipien.*

[13] Např. roku 1891 v článku *Application of Grassmann's Ausdehnungslehre to properties of circles.*

[14] Poznamenejme, že R. Mehmke promoval roku 1880 v Tübingen u Paula Du Bois-Reymonda (1831–1889) s prací *Anwendung der Grassmann'schen Ausdehnungslehre auf die Geometrie der Kreise in der Ebene.*

V září roku 1885 a v únoru roku 1886 vyšel ve druhém ročníku časopisu Annals of Mathematics delší, velmi zasvěcený článek Alexandera Ziweta (1853–1928) *A brief account of H. Grassmann's geometrical theories.* Autor citoval obě verze Grassmannovy knihy *Ausdehnungslehre*, jeho oceněnou práci *Geometrische Analyse, geknüpft an die von Leibniz erfundene Charakteristik* z roku 1847, znal některé časopisecky publikované Grassmannovy práce i výše zmíněný Bemanův překlad z roku 1881, Schlegelovu dvoudílnou monografii *System der Raumlehre* z let 1872 a 1875 a další četnou literaturu. Snažil se mimo jiné postihnout Grassmannův pohled na geometrii, dobře vnímal vzájemný vztah Grassmannových a Hamiltonových výsledků.

Geometry, in Grassmann's view, is not a branch of pure mathematics, since it presupposes the idea of space, which does not originate in our mind but presents itself as something in nature outside and independent of the thinking mind. Geometry, therefore, requires certain axioms, i. e. propositions describing the nature of space. The nature of the necessary axioms of geometry which has lately awakened such wide interest and given rise to an extensive branch of mathematical literature, was discussed by Grassmann as early as 1844 in so satisfactory a manner that the most recent authors on the subject have found hardly anything to add to Grassmann's results. Grassmann was one of the first to clearly establish the idea of n-dimensional space; indeed, his science of extension may be regarded as a complete system of non-Euclidean geometry. ([Ziwet, 1885], str. 2–3)

Grassmann's investigations of the fundamental laws of algebra which closely agree with the results reached by Sir William R. Hamilton are now accepted by all modern authors on this subject. ([Ziwet, 1885], str. 4)

It is, however, in the science of rational mechanics that the application of Grassmann's theories and methods, in combination with those of Sir Wm. R. Hamilton, will probably prove of the greatest importance. As a valuable step in this direction, the reader might well be referred to the Vector Analysis of Professor J. Willard Gibbs (New Haven, 1881–1884), were it not for the fact that the words "not published" which appear on the title-page would seem to exclude that work from general circulation. ([Ziwet, 1885], str. 34)

Grassmannův syn Hermann vydal v letech 1886 až 1893 text *Anwendung der Ausdehnungslehre auf die allgemeine Theorie der Raumkurven und krummen Flächen.* Její první svazek z roku 1886 je nazván *Raumkurven*, druhý svazek z roku 1886 *Krumme Flächen. Erste Hälfe*, třetí svazek z roku 1893 *Krumme Flächen. Zweite Hälfe.*

Počátkem osmdesátých let 19. století se geometrickými aplikacemi Grassmannovy *Ausdehnungslehre* inspirovali italští matematici působící v Turíně. Byli to Corrado Segre (1863–1924), Giuseppe Veronese (1854–1917), Guido Castelnuovo (1865–1952), Federigo Enriques (1871–1946) a zejména Giuseppe Peano (1858–1939).

C. Segre získal doktorát v Turíně u D'Ovidia. Seznámil se s Grassmannovými idejemi, četl dokonce jeho autoreferát *Kurze Uebersicht über das Wesen der*

Ausdehnungslehre z roku 1845 otištěný v časopise Archiv der Mathematik und Physik. Ve svých pracích začal rozvíjet myšlenky vedoucí k pojmu vektorový prostor. Roku 1884 publikoval dvě obsáhlé práce (dohromady přes 150 stran), které na sebe bezprostředně navázaly: *Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimenzioni* a *Sulla geometria della retta e delle sue serie quadratiche.* Myšlenku n-rozměrného prostoru rozvíjel i v dalších pracích, např. v pojednáních *Su alcuni indirizzi nelle investigazioni geometriche* z roku 1891 a *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito* z roku 1894.

Na Grassmannovu knihu *Die lineale Ausdehnungslehre* výrazným způsobem reagoval roku 1888 G. Peano. V knize *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann preceduto dalle operazioni della logica deduttiva* se snažil Grassmannovy myšlenky propagovat a šířit. Zjednodušil je a zmodernizoval, na druhé straně však zcela vypustil některá důležitá tvrzení, která dnes řadíme k základům teorie vektorových prostorů (problematika Steinitzovy věty, věta o dimenzích spojení a průniku apod.).

G. Peano publikoval roku 1891 přehled literatury reagující na Grassmannovy myšlenky. Překvapivé je, že zde necitoval C. Segreho.[15]

Roku 1890 vydal Edward Wyllys Hyde (1843–1930), profesor matematiky na univerzitě v Cincinnati, knihu *The directional calculus based upon the methods of Hermann Grassmann.* Snažil se seznámit s Grassmannovými idejemi americké čtenáře. Byl patrně prvním Američanem, který je odvážně přijal. O čtyři roky později publikoval v časopise Annals of Mathematics krátký článek *The screw as a unit in a Grassmannian system of the sixth order.*

Roku 1891 vyšel v časopise Nature krátký článek nazvaný *Quaternions and Ausdehnungslehre*, v němž byly srovnány Hamiltonovy a Grassmannovy myšlenky. Jeho autorem byl Josiah Willard Gibbs (1839–1903).

Alexander Ziwet se o Grassmannovo dílo zajímal i později. Roku 1891 publikoval v časopise Annals of Mathematics článek *Two new works on Grassmann's geometrical calculus.* Reagoval jednak na Peanovo *Calcolo geometrico* z roku 1888, jednak na Hydeovu monografii *The Directional Calculus.* O Hydeově knize napsal:

Prof. Hyde's Directional Calculus may be recommended to all students of the higher mathematics as admirably suited to serve as a first introduction to the study of Grassmann's methods as applied to geometry. ([Ziwet, 1891], str. 14)

Grassmannův mladší bratr Robert publikoval roku 1891 ve svém nakladatelství ve Štětíně knížku *Die Ausdehnungslehre oder die Wissenschaft von den extensiven Grössen in strenger Formelentwicklung.*[16] Snažil se propagovat a po-

[15] Viz C. F. Manara, M. Spoglianti: *Le idee di iperspazio. Una dimenticata polemica tra G. Peano, C. Segre e G. Veronese*, Memorie dell'Accademia Nazionale di Scienze, Lettere e Arti di Modena 19(1977), 109–129.

[16] Na druhém titulním listě je mírně modifikovaný název *Die Ausdehnungslehre oder die Wissenschaft von den extensiven Grössen der niedere Zweig der Synthese. Dritter Zweig der*

pularizovat myšlenky svého bratra. V předmluvě jsou některé zajímavé informace o vzniku a vývoji idejí obsažených v *Ausdehnungslehre* a o jejich dalším osudu. Je možné, že některé informace převzal R. Grassmann z Peanova spisu *Calcolo geometrico* vydaného roku 1888.

Die Geschichte der Ausdehnungslehre oder der Wissenschaft von den extensiven Grösen ist eine sehr kurze.

Die Idee derselben ist zuerst um 1700 n. Chr. von Leibniz angeregt. ... Nach Leibniz hat diese Idee lange geruht. ...

... Zwar hat „Möbius barycentrischer Kalkül“ Leipzig 1827 die Addition der Punkte und Bellavitis in „Annali delle scienze de regno Lombardo-Veneto“ 1835 und 1837 die geometrische Addition der Strecken, sowie unabhängig von ihm auch „Möbius Mechanik des Himmels, Leipzig 1843“ gleichfalls die geometrische Addition der Strecken gelehrt. Aber alle diese Versuche blieben doch nur vereinzelt und kamen nicht zu einer allgemeinen Auffassung der Sache, sondern blieben nur in einzelnen geometrischen Betrachtungen befangen.

Der erste, der die Idee der Ausdehnungslehre als eines neuen Zweiges der reinen Mathematik aufgefasst und ausgebildet hat, ist mein Bruder Hermann Grassmann gewesen. Derselbe machte im Winter 1839 bis 1840 eine grose Arbeit über die Ebbe und Flut, studirte dazu Lagrange mécanique analytique und Laplace mécanique céleste, versuchte bei diesen Arbeiten die Sache durch Addition bez. Multiplikation der Bewegungen zu vereinfachen, und kam so zunächst zu einer Reihe von Gesetzen über Addition und Multiplikation von Strecken bez. Bewegungen. Er verfolgte die Sache in den folgenden Jahren weiter und gab „Die lineale Ausdehnungslehre“ Leipzig 1844 heraus. In diesem Werke geht er noch vorwiegend von geometrischen Grösen, bez. statischen Momenten aus und sucht daraus die Gesetze der neuen Wissenschaft zu gewinnen. Auch die Preisschrift „Geometrische Analyse, geknüpft an die von Leibniz erfundene Charakteristik“ Leipzig 1847 steht noch ganz auf diesem Standpunkte. Am 15. September 1845 lehrte nun auch Saint-Venant in Paris, ohne das Werk des Bruders zu kennen, die geometrische Multiplikation der Strecken in „Comptes Rendus“ Paris 1845, Tom. 21, S. 620 ff. Der Bruder sandte daher zwei Exemplare seines Werkes an Cauchy in Paris, eins für Cauchy, eins für Saint-Venant; der Empfang der Bücher ist bestätigt. Cauchy hat dadurch angeregt, ähnliche Betrachtungen angestellt und demnächst „Comptes rendus“ Paris 1853 eine Methode veröffentlicht, um vermittels gewisser symbolischer Grösen, welche er clefs algébriques nennt, algebraische Gleichungen und verwandte Probleme zu lösen; eine Methode, welche genau mit der in H. Grassmann Ausdehnungslehre von 1844 (§ 45, 46 und 93) dargestellten übereinstimmt. Er ist dabei offenbar in dem Glauben gewesen, dass diese Methode von ihm herrühre, indem er verges-

---

Formenlehre oder Mathematik.

Poznamenejme, že R. Grassmann vydal roku 1872 v šesti sešitech knížku *Die Formenlehre oder Mathematik* (reprint byl vydán r. 1966) a navazující svazky *Die Denklehre* (1875), *Das Weltleben oder die Metaphysik* (1881), *Das Gebäude des Wissens. Die Wissenslehre oder die Philosophie. Das Verstandeswissen oder das formale Wissen, umfassend die auf die Philosophie vorbereitenden Wissenschaften* (1890).

sen hatte, woher er die Anregung zu dieser Methode erhalten hatte. Der Bruder glaubte es der Sache schuldig zu sein, dass er eine Prioritäts-Reklamation an die Pariser Akademie sende; dieselbe ist, wie die „Comptes rendus Tom. 38, S. 741" berichten, im April 1854 einer Kommission zur Prüfung und Berichterstattung übergeben; allein weder Cauchy, noch diese Kommission haben ein Wort darüber verlauten lassen. Es ist die Priorität des Bruders also unzweifelhaft. ([R. Grassmann, 1891], str. iii–iv)

Roku 1892 publikoval Emmanuel Carvallo (1856–1945) v časopise Nouvelle Annales de Mathématiques třicetistránkový článek *La méthode de Grassmann*, v němž podal výklad některých Grassmannových postupů aplikovaných na trojrozměrnou geometrii.

Ve stejném roce vyšla v časopise Monatshefte für Mathematik und Physik první část práce Emila A. Müllera *Die Kugelgeometrie nach den Principien der Grassmann'schen Ausdehnungslehre*; druhá část byla otištěna ve stejném časopise v následujícím roce. V následujících letech sepsal E. A. Müller další články inspirované Grassmannovou monografií: *Anwendungen der Grassmann'schen Methoden auf die Theorie der Curven und Flächen zweiten Grades* (1895), *Die Geometrie der Punktepaare und Kreise im Raume nach Grassmann'schen Principien* (1896), *Beweis einiger Determinantensätze mittels der Grassmann'schen Ausdehnungslehre* (1897). Několik jeho obdobně zaměřených (i nazvaných) prací bylo vydáno v letech 1898 až 1914.

Roku 1892 publikoval R. Mehmke v časopise Rivista matematica dvě práce, v nichž bezprostředně reagoval na Grassmannovy ideje: *Ueber eine allgemeine Construction der Krümmungsmittelpunkte ebener Curven und eine neue Begründung der Fundamentalsätze der Flächentheorie (Eine Anwendung der Methode von Grassmann)* a *Ueber die Aenderung der Hauptkrümmungen einer Fläche bei einer beliebigen Berührungstransformation (Eine Anwendung der Methode von Grassmann)* a v časopise Zeitschrift der Mathematik und Physik článek *Kleine Beiträge zu den Anwendungen der Methoden von Grassmann.* O rok později vydal u Teubnera v Lipsku Ferdinand Kraft *Abriss des geometrischen Calcüls. Nach den Werken des Professors Dr. Hermann Graßmann.*

Grassmannovy sebrané spisy nazvané *Gesammelte mathematische und physikalische Werke* vycházely v Lipsku v letech 1894 až 1911. V prvním svazku prvního dílu je *Die lineale Ausdehnungslehre* z roku 1844 (I.1, str. 1–319) a *Geometrische Analyse* (I.1, str. 321–399), ve druhém svazku prvního dílu je *Die Ausdehnungslehre* z roku 1862 (I.2, str. 1–383), v prvním, resp. druhém svazku druhého dílu jsou pojednání z geometrie a analýzy, resp. analytické mechaniky a matematické fyziky, v prvním svazku třetího dílu je *Theorie der Ebbe und Flut* z roku 1840 (III.1, str. 1–238) a pojednání z matematické fyziky a materiály z pozůstalosti, ve druhém svazku třetího dílu je rozsáhlá Grassmannova biografie *Grassmanns Leben* od Friedricha Engela (1861–1941) (III.2, str. 1–395). Reprint Grassmannových sebraných spisů vyšel roku 1972 v New Yorku.

V. Schlegel propagoval Grassmannovy matematické myšlenky a jejich všestranné využití i v dalších letech v řadě pojednání, např. v pracích *Introduction* *aux méthodes géométriques de H. Grassmann* (1892) a *Die Hauptmethoden der Grassmann'schen Ausdehnungslehre in ihrer Anwendung auf die Mechanik dargestellt* (1894). Roku 1895 publikoval v časopise Zeitschrift für Mathematik und Physik (Historisch-literarische Abtheilung) článek *Die Grassmann'sche Ausdehnungslehre. Ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik in den letzten fünfzig Jahren*. Uvedl zde 179 titulů spjatých s tímto dílem. Toto Schlegelovo pojednání vyšlo o rok později ve Varšavě v polském překladu S. Dicksteina (1851–1939).

Cesare Burali-Forti (1861–1931) vydal roku 1897 v Paříži knihu *Introduction à la géometrie différentielle suivant la méthode de H. Grassmann*, v níž navázal jak na H. Grassmanna, tak na G. Peana.

Alfred North Whitehead (1861–1947) vydal roku 1898 knihu *A treatise on universal algebra*. Jako matematik a filozof dobře znal a využíval myšlenky Grassmannova díla, jeho monografie je jimi velmi silně ovlivněna. V úvodu napsal:

… Accordingly after the general principles of the whole subject have been discussed in Book I. of this volume, the remaining books of the volume are devoted to the separate study of the Algebra of Symbolic Logic, and of Grassmann's Calculus of Extension, and of the ideas involved in them. …

… Thus Grassmann's Algebra, the Calculus of Extension, is applied to Descriptive Geometry, Line Geometry, and Metrical Geometry, both non-Euclidean and Euclidean. But these sciences, as here developed, are not the same sciences as developed by other methods, though they apply to the same general subject-matter. … Book IV. is devoted to the principles of the Calculus of Extension. Book V. applies the Calculus of Extension to the theory of forces in a Positional manifold of three dimensions. Book VI. applies the Calculus of Extension to Non-Euclidean Geometry … Book VII. applies the Calculus of Extension to ordinary Euclidean Space of three dimensions.

The greatness of my obligations in this volume to Grassmann will be understood by those who have mastered his two Ausdehnungslehres. The technical development of the subject is inspired chiefly by his work of 1862, but the underlying ideas follow the work of 1844. At the same time I have tried to extend his Calculus of Extension both in its technique and in its ideas. But this work does not profess to be a complete interpretation of Grassmann's investigations, and there is much valuable matter in his Ausdehnungslehres which it has not fallen within my province to touch upon.
([Whitehead, 1898], str. v, ix, x)

Zájem o H. Grassmanna a jeho dílo sílil i koncem 19. století. Bylo sepsáno několik textů, jejichž cílem byla srozumitelná prezentace Grassmannových myšlenek. Takovýto článek se objevil i v češtině.

Středoškolský profesor Antonín Libický (1854–1930), který působil na reálkách v Pardubicích, Litomyšli, Roudnici, v Praze na Vinohradech a v Hradci Králové, člen International Association for promoting the study of Quaternions and allied Systems of Mathematics (od r. 1913) a propagátor teorie relativity,[17] publikoval roku 1896 ve 25. ročníku Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky dlouhý článek *Základové geometrického počtu Grassmannova.* V jeho úvodu napsal:

Přede dvěma lety bylo tomu padesát roků, co vyšel jeden z vynikajících spisů mathematické literatury tohoto století, nadepsaný: „Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik, dargestellt von H. Grassmann." Jest známo, jakým nepříznivým osudem toto pozoruhodné dílo bylo postiženo; zůstaloť po dlouhou řadu let nepovšimnuto a v odborných časopisech, té doby vycházejících, nenalézáme ani stopy po tom, že by zásady Grassmannem vyslovené byly nalezly nějakého pěstovatele a vzdělavatele. Spisovatel, domnívaje se, že příčinou tohoto neúspěchu jest forma spisu, která jest spíše filosofická než mathematická, zpracoval nauku svou r. 1862 po druhé, uživ tu formy mathematikům obvyklejší (Die Ausdehnungslehre. Vollständig und in strenger Form bearbeitet von H. Grassmann.). Avšak ani pak nebyla knize věnována pozornost, které vším právem zasluhovala, třeba že ta odvětví mathematiky, jež s ní úzce souvisí, jako jsou: Möbiusův počet barycentrický, Bellavitisova methoda aequipollencí, Saint-Venantův pojem geometrického součinu a zvláště Hamiltonova theorie vektorů, docházela čím dále, tím většího rozšíření a užívání. Teprve v nejnovější době jeví se potěšitelný obrat k lepšímu, jednak tím, že se vydávají spisy, pojednávající o Grassmannově Ausdehnungslehre neb o některé části její, jednak tím, že se v odborných časopisech častěji vyskytují články, jichž účelem jest, dále vzdělávati nauku tu a ukázati její prospěšnost.
([Libický, 1896], str. 187)

A. Libický prokázal poměrně dobrou znalost literatury, jak ukazují bibliografické odkazy uvedené zejména v prvních dvou poznámkách pod čarou.[18] V letech 1906 až 1910 publikoval na pokračování v 35. až 39. ročníku Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky rozsáhlý článek *Úvod do vektorové analyse.*[19] Libického text vydala roku 1914 Jednota českých mathematiků a fysiků pod názvem *Vektorová analysis*; autor připojil závěrečný podrobný přehled vzorců (36 stran), kterým přispěl k jakémusi propojení jednotlivých částí své práce. Na obdobné téma napsal Karel Dusl (1884–1948), profesor matematiky na české technice a na vysoké obchodní škole v Praze, knížku *Úvod do vektorového počtu*, která vyšla roku 1923. O ohlasu Grassmannova díla (ale též Bellavitisových a Hamiltonových myšlenek) v pracích českých matematiků viz [Nádeník, 1996].

Poznamenejme ještě, že Vladimír Libický (1891–1970), syn A. Libického,

---

[17] Viz F. Záviška: *Antonín Libický*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 54(1924), 402–403.

[18] A. Libický též čerpal z rukopisu profesora Václava Lásky (1862–1943) nazvaného *Die Ausdehnungslehre*, jak sám poznamenal (viz [Libický, 1896], str. 188).

[19] V úvodu uvedl: *Vektorová analysis, jedna z mladších větví vědy mathematické, pěstována byla s počátku hlavně učenci anglickými a americkými (Hamilton, Hyde, Heaviside, Gibbs, Wilson a j.). V Německu, kde základy tohoto počtu zbudovány byly F. Möbiusem a H. Grassmannem, teprv od nedávna jeví se proň čilý zájem, obzvláště když se ukázalo, jaké platné služby prokazuje v novější nauce o elektřině (v elektrodynamice a v theorii elektronové).* ([Libický, 1906], str. 207, resp. [Libický, 1914], str. 1)

který působil na středních školách v Českých Budějovicích, Přerově, Vídni, Litomyšli, Táboře a v Praze a později v Národním technickém muzeu v Praze a na Stavební fakultě ČVUT, sepsal disertační práci *Vektorová analýza v prostoru čtyřrozměrném*. Obhájil ji ve stejném roce, kdy jeho otec Antonín vydal knihu *Vektorová analysis.*[20]

V časopise The American Mathematical Monthly vycházel v letech 1899 až 1900 na pokračování článek Josepha V. Collinse *An elementary exposition of Grassmann's "Ausdehnungslehre," or theory of extension.* Roku 1901 byl tento Collinsův text vydán samostatně jako útlá knížka. V úvodu autor uvedl:

Grassmann's Ausdehnungslehre is one of the few great works of mathematics of the 19th century. Appearing first in 1844 and rewritten in 1862, it is only within the last decade or two that it has received a tardy recognition. One reason for this is found in the difficulty of the subject itself, being unlike other mathematics; and another, in the rigorous methods of presentation adopted by the author. In the Ausdehnungslehre of 1862, following some 150 pages of theory, the author for the first time gives the subject concrete form by applying his method to geometry. The theoretical part is naturally the more difficult, while the application to geometry is the more interesting. ...

An elementary exposition which will give the simpler portions of the theoretical part as well as the applications of the theory seems to be needed.
([Collins, 1899], str. 193)

J. V. Collins čerpal přímo z Grassmannovy *Ausdehnungslehre* z roku 1862, využil však též výše zmíněnou knihu Roberta Grassmanna z roku 1891. Téměř žádnou další literaturu neuvedl. Připomeňme, že roku 1903 publikoval v témže časopise článek *A general notation for vector analysis.*

E. W. Hyde vydal roku 1906 v New Yorku v edici Mathematical monographs knížku *Grassmann's space analysis*, v níž opět propagoval Grassmannovy myšlenky v kontextu rovinné a prostorové geometrie a ve statice.

Roku 1909 se připomínalo sto let od Grassmannova narození. V časopise Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung vyšel článek F. Engela nazvaný *Hermann Graßmann.*[21] Ve stejném roce publikoval Felix Müller drobný příspěvek *Zur Erinnerung an Hermann Grassmann*; tato vzpomínka byla přednesena v den stého výročí Grassmannova narození, 15. dubna 1909, v Drážďanech. V následujícím roce byla publikována Engelova přednáška *Hermann Grassmann* přednesená 20. září 1909 v Salzburgu. O Hermannu Grassmannovi a jeho matematických výsledcích vyšlo ještě v té době několik článků (E. Jahnke, C. Müsebeck).

V německé encyklopedii matematických věd bylo otištěno roku 1911 Segreho pojednání *Mehrdimensionale Räume.* První paragraf tohoto přehledového článku se nazývá *Geschichtliche Einleitung.* Začíná těmito slovy:

---

[20] Viz Antonín Libický: *K nedožitým osmdesátinám Dr. Vladimíra Libického*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 16(1971), 343–344.

[21] Podtitul zní: *Festrede zur Feier von Kaisers Geburtstag, gehalten am 27. Januar 1909 in der Aula der Universität Greifswald.* Připojen byl též Grassmannův portrét.

Will man die erste Begründung der Theorie der n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten mit einem Namen verknüpfen, so wird es derjenige von H. Graßmann sein, der in seiner Ausdehnungslehre von 1844 (wie nachher in derjenigen von 1862) gerade diese Theorie entwickelt hat. Er nimmt nicht weiter definierte) Elemente, und mit diesen erzeugt er solche Mannigfaltigkeiten. Die Behandlung dieser erscheint als ein Zweig der reinen Mathematik, welche die gewöhnliche Geometrie umfaßt (die man erhält, wenn man als erzeugendes Element den Punkt annimmt). Die Entwicklung kommt, von wenigen Ausnahmen abgesehen, nicht über die elementaren grundlegenden Teile hinaus …

Das Werk Graßmanns blieb viele Jahre hindurch unbeachtet und hat daher die Fortschritte der n-dimensionalen Geometrie nicht beeinflußt.
([EMW], díl III.2, str. 772–773)

Roku 1926 věnoval Grassmannovým výsledkům pozornost F. Klein v prvním díle své knihy *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert.*

… sein großes Werk, die Ausdehnungslehre, deren erste Auflage, nur die affine Geometrie betreffend, 1844 erschien; die zweite Auflage (1861) enthält dieselbe Theorie in gänzlich anderer Darstellung und unter Mitumfassung des Metrischen. Beide Werke sind äußerst schwer zugänglich, ja fast unlesbar. Das erste deduziert aus allgemeinsten philosophischen Begriffen ohne irgendwelche Formeln. Der zweite Teil operiert zwar mit n Koordinaten, bedient sich aber sehr vieler neuer Termini und Algorithmen und ist in durchaus streng systematischer euklidischer Darstellungsweise aufgebaut. Um ein Bild des Inhalts zu geben, will ich hier versuchen, das Wesentliche in unsere Sprache zu fassen. ([Klein, 1926], díl I., str. 175)

Zájem o H. Grassmanna trval po celé 20. století, jeho dílo bylo diskutováno z řady nejrůznějších hledisek. Krátký výklad Grassmannových myšlenek nacházíme ve 2. vydání německé verze Pascalova kompendia *Repertorium der höheren Mathematik* z roku 1910, a sice ve druhém a třetím paragrafu osmé kapitoly *Geometrische „Rechnungsarten“*, které se nazývají *Die Quaternionen. Vektoren. Äußere und innere Produkte* (str. 155–161) a *Die Graßmannsche Punktrechnung* (str. 161–167). Připomínány jsou jeho monografie z let 1844 a 1862, jeho práce *Geometrische Analyse* z roku 1847, dále Schlegelovy knížky (1875, 1878) a Peanova monografie (1888). Grassmannovy výsledky byly dány do souvislosti s Hamiltonovými, Möbiovými a Cliffordovými výsledky.

Alfred Lotze (1882–1964) napsal pro německou matematickou encyklopedii rozsáhlý článek *Die Graßmannsche Ausdehnungslehre*, příslušný svazek byl vydán roku 1923 (viz [EMW], díl III.1.2, str. 1425–1550).

Roku 1967 vydal Michael J. Crowe monografii *A history of vector analysis. The evolution of the idea of a vectorial system.* Velkou pozornost věnoval i H. Grassmannovi a jeho dílu.

Uveďme ještě dva úryvky z článku *The tragedy of Grassmann*, který roku 1979 publikoval J. Dieudonné:

It is only in our time that Grassmann's faith in the value of his ideas has been completely vindicated by genuine applications, which have made exterior algebra an indispensable tool of modern mathematics in ways he could not have foreseen: first of all E. Cartan's calculus of differential forms, which is now the basis of Differential geometry and of the theory of Lie groups; and second the definition of the Grassmannians as projective algebraic varieties, and the realization that their algebraic and topological structures hold the key to many results of differential topology and algebraic geometry. ...

And so it was that for almost 80 years the wonderful opportunities which Grassmann's exterior algebra might have oponed remained unsuspected. When E. Cartan, around 1900, developed the calculus of differential forms, he very wisely only used the exterior product, to the exclusion of the other ones; but as his own work was little understood until 1930, it did not do much to popularize Grassmann's ideas. They had to wait until a proper understanding of linear algebra, and in particular a reasonable theory of duality of vector spaces, had given them their full power. ([Dieudonné, 1979], str. 7, 11)

Joachim Buhrow napsal roku 1993 v časopise Der Mathematikunterricht článek *Hermann Grassmann – Späte Anerkennung eines originellen Mathematikers.*

Matematické dílo Hermanna Grassmanna poutalo zájem po celé 20. století, ačkoliv jeho knihy *Die lineale Ausdehnungslehre* a *Die Ausdehnungslehre* nebyly přeloženy do jiných jazyků. Snad k tomu přispěla i značně komplikovaná Grassmannova němčina, zejména v jeho knize z roku 1844.

Teprve roku 1994 vyšel kvalitní francouzský překlad Grassmannovy knihy *Die lineale Ausdehnungslehre* z roku 1844 pod názvem *La science de la grandeur extensive. La "Lineale Ausdehnungslehre".* Vydali jej Dominique Flament a Bernd Bekemeier, kteří též připojili zasvěcený úvod o H. Grassmannovi a jeho díle; jejich překlad ještě revidoval Eberhard Knobloch (nar. 1943).

O rok později vyšel anglický překlad této Grassmannovy knihy pod názvem *A new branch of mathematics. The 'Ausdehnungslehre' of 1844, and other works.* Autorem překladu je Lloyd C. Kannenberg (nar. 1924), úvod napsal Albert C. Lewis. Překladatel do této knihy zařadil několik překladů Grassmannových prací, v nichž jsou myšlenky jeho teorie použity při zkoumání Hamiltonových kvaternionů a při řešení různých otázek elektrodynamiky a mechaniky; zvlášť užitečné je otištění překladu Grassmannova pojednání *Kurze Uebersicht über das Wesen der Ausdehnungslehre.* Rovněž je zde překlad Leibnizova dopisu Christiaanu Huygensovi (1629–1695) z roku 1679 obsahující ranou formulaci myšlenky, která byla rozvíjena v letech 1823 až 1844 v pracích G. Bellavitise, A. F. Möbia, W. R. Hamiltona, H. Grassmanna a později G. Peana – vybudování jakéhosi geometrického počtu.

Roku 2000 vyšel anglický překlad Grassmannovy knihy *Die Ausdehnungslehre* z roku 1862 pod názvem *Extension theory.* Jeho autorem je opět L. C. Kannenberg.[22]

[22] Recenze překladů Grassmannových knih viz Historia Mathematica 32(2005), 100–106.

Roku 1994 byla v nakladatelství Wissenschaftsverlag (Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich) vydána monografie A. Zaddacha nazvaná *Grassmanns Algebra in der Geometrie. Mit Seitenblicken auf verwandte Strukturen*, která obsahuje kromě matematických pasáží četné informace z historie matematiky a řadu bibliografických odkazů.

V květnu roku 1994 se konala na Rujaně velká konference ke 150. výročí vydání Grassmannovy monografie *Die lineale Ausdehnungslehre*, hlavním organizátorem této akce byl Gert Schubring. Roku 1995 vyšel sborník *Hermann Graßmann. Werk und Wirkung. Internationale Fachtagung anläßlich des 150. Jahrestages des ersten Erscheinens der "linealen Ausdehnungslehre"* (Greifswald), jehožeditorem byl Peter Schreiber (viz [Schreiber, 1995]). Další sborník z této konference vyšel roku 1996 v nakladatelství Kluwer Academic Publisher v edici Boston Studies in the Philosophy of Science pod názvem *Hermann Günther Graßmann (1809–1877). Visionary Mathematician, Scientist and Neohumanist Scholar. Papers from a Sesquicentennial Conference.* Editorem byl G. Schubring (viz [Schubring, 1996]).

Živý zájem o Grassmannův život a jeho dílo dokumentuje nedávno vydaná kniha *Graßmann*, jejímž autorem je Hans-Joachim Petsche. Vyšla roku 2006 v nakladatelství Birkhäuser v edici Vita Mathematica. Další pohledy na Grassmannovo dílo najdeme např. v pracích [Crowe, 1967], [Monna, 1973], [Dieudonné, 1979], [Fearnley-Sander, 1979], [Fearnley-Sander, 1982], [Gordienko, 1990], [Flament, 1992], [Zaddach, 1994].

V září 2009 se bude v Postupimi a Štětíně u příležitosti dvoustého výročí Grassmannova narození konat *Grassmann Bicentennial Conference*. Jejím hlavním organizátorem je Hans-Joachim Petsche, autor výše zmíněné knihy o Hermannu Grassmannovi.

6. Závěr

Hermann Grassmann přišel před polovinou 19. století s řadou idejí lineární algebry. Načrtnul základní myšlenky teorie vektorových prostorů, které dnes tvoří součást každého podrobnějšího kurzu lineární algebry. Jeho myšlenky se těžko ujímaly, teprve po čtyřech desetiletích se jim matematici začali více věnovat.

Malý ohlas Grassmannových myšlenek, který trval až do počátku osmdesátých let 19. století, byl vystřídán sílícím zájmem ve zbylých dvou desetiletích tohoto století. Ještě počátkem 20. století však bylo zapotřebí publikovat delší články, v nichž byly Grassmannovy myšlenky srozumitelně objasňovány širší matematické komunitě (např. J. V. Collins, A. Libický). Základy teorie vektorových prostorů a jejich homomorfismů byly obecně přijaty až ve třicátých letech, přestože byly již dříve prezentovány v pracích G. Peana, S. Pincherlea a dalších.

Po celé 20. století byly Grassmannovy myšlenky pro matematiky velikou inspirací. Zájem o jeho dílo, jak jsme v předchozích odstavcích uvedli, stále trvá.