VI. KOMPLEXNÍ A HYPERKOMPLEXNÍ ČÍSLA, LINEÁRNÍ ALGEBRY

Objev komplexních čísel, práce s nimi, pochopení jejich významu a geometrické interpretace, to vše inspirovalo řadu matematiků k úvahám o větších číselných oborech a strukturách vícesložkových čísel. Problematika tzv. systémů hyperkomplexních čísel byla velmi intenzivně zkoumána během druhé poloviny 19. století. Vyšetřování řady konkrétních číselných systémů (kvaterniony, oktávy, triplety, matice atd.) podmiňovalo postupný vývoj teorie hyperkomplexních čísel, který vedl ke vzniku obecného pojmu *lineární asociativní algebra*, k rozvíjení obecné teorie i ke zkoumání nejrůznějších typů algeber, asociativních i neasociativních. Teorie hyperkomplexních čísel se počátkem 20. století začala přetvářet v *teorii algeber konečné dimenze*, jednu z historicky prvních partií moderní algebry. Postupným zobecňováním se dospělo k algebrám nad obecným tělesem, k algebrám nekonečné dimenze, k různým neasociativním algebrám atd.

Studium systémů hyperkomplexních čísel, z něhož se během doby zrodila teorie algeber, výrazně napomohlo rozvoji lineární algebry, vektorové analýzy a maticového počtu. Matematici totiž pracovali s důležitými pojmy, které stojí v základech lineární algebry – s lineárními kombinacemi, lineární závislostí a nezávislostí, s generováním, bázemi a souřadnicemi, lineárními transformacemi, zavedli pojem dimenze, zkoumali algebry dvojic, trojic, čtveřic a obecně n-tic reálných či jiných čísel atd. I v teorii hyperkomplexních čísel se postupně utvářely důležité pojmy moderní algebry – těleso, vektorový prostor, maticová reprezentace atd. Ukazovalo se, jak významnou roli hrají v teorii algeber matice, charakteristický polynom atd.

Intenzivní výzkum v těchto směrech byl stimulem dalšího vývoje jak lineární algebry, tak teorie hyperkomplexních čísel a teorie algeber vůbec. Objev vztahů mezi teorií asociativních algeber a teorií reprezentací grup (v osmdesátých letech 19. století) měl zásadní význam pro další rozvoj algebry.

1. Komplexní čísla

Krátce před polovinou 16. století vstoupila do matematiky při řešení algebraických rovnic komplexní čísla. Trvalo však ještě zhruba tři století, než došlo k jejich plnému uznání, všeobecnému rozšíření a k pochopení jejich geometrické interpretace.

O vývoji představ o komplexních číslech a jejich narůstajícím významu v matematice se lze dočíst v řadě rozsáhlejších knih a učebnic z historie matematiky, existují však i monografie a speciální články věnované právě této problematice, např. [McClenon, 1923], [Kline, 1972], [Green, 1976], [Kolmogorov, Juškevič, 1978], [Maracchia, 1979], [Franci, Toti Rigatelli, 1979], [Nikiforovskij, 1979], [Ebbinghaus, 1983], [Aleksandrova, 1992], [Pycior, 1997], [Nahin, 1998], [Flament, 2003].

Gerolamo Cardano a Rafael Bombelli

Komplexní čísla se poprvé objevila roku 1545 v knize *Ars magna*, v níž byla zveřejněna metoda algebraického řešení rovnic třetího a čtvrtého stupně. Její autor, italský učenec Gerolamo Cardano (1501–1576), je uvedl na scénu v této úloze:

Je-li třeba rozdělit 10 *na dvě části, jejichž součin je* 30 *nebo* 40*, je jasné, že tento případ je nemožný. Budeme však postupovat takto: rozdělíme* 10 *napůl, polovina bude* 5*; to vynásobeno samo sebou dá* 25*. Potom odečteme od* 25 *požadovaný součin, řekněme* 40*, zůstane* m:15 [tj. -15]*; vezmeme-li z toho* $R_\times$ [tj. odmocninu] *a přidáme k* 5 *a odečteme od* 5*, vyjdou veličiny, které vynásobeny mezi sebou dají* 40*. Tyto veličiny budou* 5p:$R_\times$m:15 a 5m:$R_\times$m:15 [tj. $5+\sqrt{-15}$ a $5-\sqrt{-15}$].

Uvedený příklad vede na kvadratickou rovnici $x(10-x)=40$. G. Cardano došel k řešení $5+\sqrt{-15}$ a $5-\sqrt{-15}$; „podivné číslo“ $\sqrt{-15}$ nazýval *quantitas sophistica*.

Hlavním motivem pro intenzivní zkoumání komplexních čísel byl tzv. *casus irreducibilis* – tj. případ, kdy má kubická rovnice tři reálné kořeny a kdy se v Cardanově vzorci vyskytují odmocniny ze záporného čísla. G. Cardano si však při studiu kubických rovnic uvědomil, že ke komplexním číslům lze dospět již u rovnic kvadratických; tato myšlenka se neobjevila po celá tři tisíciletí, během nichž byly úlohy vedoucí na kvadratické rovnice řešeny.

Další italský matematik Rafael Bombelli (1526–1572) dospěl ve své inspirativní knize *L'Algebra parte maggiore dell'Aritmetica* z roku 1572 při počítání s komplexními čísly podstatně dále než G. Cardano. Usoudil, že odmocněním záporného čísla nemůžeme dostat ani kladné, ani záporné číslo; napsal tedy před odmocninu z absolutní hodnoty tohoto čísla *più di meno*, když ji přičítal, resp. *meno di meno*, když ji odčítal – nejednalo se o nic jiného než o slovní označení pro pozdější symbol i, resp. $-i$. Pro počítání s takovýmito čísly formuloval v první části své knihy osm pravidel pro práci s komplexní jednotkou; v současné symbolice je můžeme vyjádřit těmito vztahy:

$$(+1)(+\mathrm{i})=+\mathrm{i}\,,\quad (-1)(+\mathrm{i})=-\mathrm{i}\,,\quad (+1)(-\mathrm{i})=-\mathrm{i}\,,\quad (-1)(-\mathrm{i})=+\mathrm{i}\,,$$

$$(+\mathrm{i})(+\mathrm{i})=-1\,,\quad (+\mathrm{i})(-\mathrm{i})=+1\,,\quad (-\mathrm{i})(+\mathrm{i})=+1\,,\quad (-\mathrm{i})(-\mathrm{i})=-1\,.$$

S komplexními čísly zacházel velmi odvážně, v jeho knize najdeme např. rovnosti

$$8\,\mathrm{i}+(-5\,\mathrm{i})=3\,\mathrm{i}\,,\quad \sqrt[3]{3+\mathrm{i}\sqrt{10}}\cdot\sqrt[3]{3-\mathrm{i}\sqrt{10}}=\sqrt[3]{19}\,,\quad \sqrt[3]{52+47\,\mathrm{i}}=4+\mathrm{i}\,.$$

R. Bombelli zkoumal Cardanův vzorec, velkou pozornost věnoval situaci, kdy nastane casus irreducibilis. Pokoušel se počítat třetí odmocniny komplexních čísel; ty totiž figurují v Cardanově vzorci, pokud nastává casus irreducibilis. Zjistil přitom, že třetí odmocniny komplexně sdružených čísel jsou opět komplexně sdružená čísla.

Komplexní čísla v 17. a 18. století

V 17. století pracovalo s komplexními čísly stále více matematiků. Jedním z nich byl Albert Girard (1595–1632), autor knihy *Invention nouvelle en l'algèbre* vydané roku 1629, který jako jeden z prvních vyslovil tzv. základní větu algebry.[1]

Francouzský matematik a filozof René Descartes (1596–1650) sehrál významnou roli i při rozšiřování číselných oborů. Často pracoval se zápornými čísly, i když ani pro něho ještě nebyla zcela rovnocenná číslům kladným, a s komplexními čísly, která nazýval *imaginaire*.

Anglický matematik a teolog John Wallis (1616–1703), profesor oxfordské univerzity, věnoval velkou pozornost otázkám číselných interpretaci. Dokumentuje to i jeho kniha *Treatise of algebra, both historical and practical with some additional treatises* z roku 1685, která vyšla roku 1693 latinsky pod názvem *De algebra tractatus. Historicus et practicus. Operum mathematicorum. Volumen alterum.*

J. Wallis uznával záporná čísla, kladná a záporná čísla interpretoval pomocí pohybů na opačné strany, o uspořádání číselné osy však ještě neměl zcela jasnou představu. Jako první naznačil smysluplnou geometrickou interpretaci imaginárních čísel. Odmocninu ze záporného čísla uvažoval ve tvaru $\sqrt{-b \cdot c}$, kde b, c jsou čísla kladná; čísla $-b$, c reprezentoval opačně orientovanými úsečkami se společným počátečním bodem P. Podle Eukleidovy věty o výšce je nyní veličinu $\sqrt{-b \cdot c}$ možno znázornit úsečkou s počátečním bodem P, která je kolmá k přímce, na níž leží úsečky $-b$, c. Wallisova interpretace komplexních čísel, která byla jen naznačena, však neměla ohlas.

S komplexními čísly rovněž pracovali Isaac Newton (1643–1727), Johann Bernoulli (1667–1748), Abraham de Moivre (1667–1754) a další matematici. Jejich rozpaky vyplývající z neujasněné podstaty komplexních čísel můžeme snadno dokumentovat např. názorem Gottfrieda Wilhelma Leibnize (1646–1716), který roku 1675 napsal Christiaanu Huygensovi (1629–1695), že tato „podivná čísla“ jsou divem analýzy, netvorem světa idejí a obojživelníkem mezi bytím a nebytím (… *analyseos miraculum, idealis mundi monstrum, pene inter Ens et non-Ens amphibium*). Podrobněji o Leibnizových úvahách o komplexních číslech viz např. [McClenon, 1923].

V 18. století pracoval s komplexními čísly zejména Leonhard Euler (1707–1783), který roku 1777 použil prvního písmene slova *imaginaire* pro označení komplexní jednotky $\sqrt{-1}$; ve vytištěné podobě se toto označení objevilo až roku 1794. Zdá se téměř jisté, že již v padesátých letech 18. století chápal komplexní číslo $x+y\,\mathrm{i}$ jako bod roviny s kartézskými souřadnicemi x, y; nikde to však výslovně nenapsal. Komplexní čísla vyjadřoval i v goniometrickém tvaru: $x + y\,\mathrm{i} = r \cdot (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, uvažoval rozklad

$$1 = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)(\cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi)$$

[1] Připomeňme, že nutným předpokladem základní věty algebry je uznání záporných a komplexních čísel.

a vztah

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \ .$$

Tyto myšlenky najdeme v jeho spise *Introductio in analysin infinitorum* z roku 1748, zejména v odstavcích 132 až 134 a 138.

Eulerovy práce postupně vedly k rozvoji teorie funkcí komplexní proměnné. Této problematice se věnoval např. Eulerův současník Jean-Baptist le Rond d'Alembert (1717–1783). Koncem 18. století se komplexní čísla již hojně a s úspěchem užívala v matematické analýze, např. při řešení lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty, při výpočtech integrálů i v různých aplikacích. Přesto ještě stále nebylo jasné, jak se na komplexní čísla dívat, jak si je představit.

Caspar Wessel

Ke geometrické interpretaci komplexních čísel dospěl jako první norský kartograf a geodet Caspar Wessel (1745–1818), který úspěšně spolupracoval s Dánskou akademií věd. V práci *Om Directionens analytiske Betegning, et Forsøg anvendt fornemmeling til plane og sphaeriske Polygoners Opløsning* [O analytické reprezentaci směru. Pokus jednoduše aplikovatelný na řešení rovinných a sférických mnohoúhelníků], kterou předložil dne 10. března 1797 Dánské akademii věd a vydal v Kodani o dva roky později, rozpracoval základy vektorového počtu v rovině a v prostoru jako analytický aparát pro řešení geodetických úloh. Zavedl imaginární osu kolmou k ose reálné, vektory roviny reprezentoval komplexními čísly a operace s vektory prováděl pomocí operací s komplexními čísly. Pro komplexní jednotku užíval symbol ε, pro který tedy platilo např.

$$(+\varepsilon)\cdot(+\varepsilon) = -1 \ , \quad (+\varepsilon)\cdot(-\varepsilon) = +1 \ , \quad (-\varepsilon)\cdot(+\varepsilon) = +1 \ .$$

Dospěl rovněž ke goniometrickému vyjádření komplexního čísla a k Moivreově větě[2]; svůj aparát aplikoval i v řadě úloh o sférických mnohoúhelnících. Geometrická interpretace komplexních čísel a jejich operací byla jen jedním aspektem jeho práce.

Let $+1$ *designate the positive rectilinear unit and* $+\varepsilon$ *a certain other unit perpendicular to the positive unit and having the same origin; then the direction angle of* $+1$ *will be equal to* $0°$*, that of* -1 *to* $180°$*, that of* $+\varepsilon$ *to* $90°$*, and that of* $-\varepsilon$ *to* $-90°$ *or* $270°$*. By the rule that the direction angle of the product shall equal the sum of the angles of the factors, we have:* $(+1)(+1) = +1$; $(+1)(-1) = -1$; $(-1)(-1) = +1$; $(+1)(+\varepsilon) = +\varepsilon$; $(+1)(-\varepsilon) = -\varepsilon$; $(-1)(+\varepsilon) = -\varepsilon$; $(-1)(-\varepsilon) = +\varepsilon$; $(+\varepsilon)(+\varepsilon) = -1$; $(+\varepsilon)(-\varepsilon) = +1$; $(-\varepsilon)(-\varepsilon) = -1$.

[2] A. de Moivre užíval vztah $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$, nikdy jej však v této podobě nezapsal; nynější tvar je přičítán Rogeru Cotesovi (1682–1716). Slovní formulaci Moivreovy věty publikoval již roku 1570 François Viète (1540–1603). Viz např. I. Saxl, L. Ilucová: *Abraham de Moivre*, in M. Bečvářová, J. Bečvář (ed.): Matematika v proměnách věků V, edice Dějiny matematiky, sv. 33, Matfyzpress, Praha, 2007, 7–55.

From this it is seen that ε is equal to $\sqrt{-1}$; and the divergence of the product is determined such that not any of the common rules of operation are contravened.

The cosine of a circle arc begining at the terminal point of the radius $+1$ is that part of the radius, or of its opposite, which begins at the centre and ends in the perpendicular dropped from the terminal point of the arc. The sine of the arc is drawn perpendicular to the cosine from its end point to the end point of the arc.

Thus, …, the sine of a right angle is equal to $\sqrt{-1}$. Set $\sqrt{-1} = \varepsilon$. Let ν be any angle, and let $\sin\nu$ represent a right line of the same lenght as the sine of the angle ν, positive, if the measure of the angle terminates in the first semi-circumference, but negative, if in the second. …
([Sm], str. 60–61, [Midonick, 1965], str. 326–327)

Wesselova práce byla otištěna v dánštině; patrně i proto zůstala bez odezvy. Teprve po sto letech, roku 1897, byla v Kodani vydána francouzsky pod názvem *Essai sur la représentation analytique de la direction*, roku 1999 vyšla anglicky. Podrobné informace o C. Wesselovi a jeho práci viz [Lützen, 2001].

Komplexní čísla na počátku 19. století

V první čtvrtině 19. století rozvíjelo geometrické představy o komplexních číslech několik matematiků. Jedním z nich byl francouzský matematik a fyzik Lazare Nicolas Marquerite Carnot (1753–1823), který na počátku 19. století vydal knihy *De la correlation des figures de géométrie* a *Geométrie de position*, v nichž diskutoval problematiku záporných a komplexních čísel (pochází od něho termín *komplexní číslo*). Jeho myšlenkami byl ovlivněn další francouzský matematik Adrien-Quentin Buée (1748–1826) žijící v Londýně, který si uvědomoval rozdíl mezi znaménkem čísla a znakem operace. Domníval se, že číslo má „velikost“, kterou chápal aritmeticky, a „směr“, který chápal geometricky. Symbol $\sqrt{-1}$ vnímal jako znak pro kolmost, veličinu $a+b\sqrt{-1}$ jako vektor roviny. Své názory vyložil v práci *Mémoire sur les quantités imaginaires* vydané roku 1806. Sehrál tak důležitou roli jednak v přijetí záporných čísel, jednak v grafické reprezentaci čísel komplexních.

Švýcarský matematik Jean Robert Argand (1768–1822) interpretoval $\sqrt{-1}$ jako otočení roviny o 90°, byl totiž inspirován vztahem $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = -1$. Jeho práce *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques* byla vydána v Paříži roku 1806 a po svém přetištění v časopise Annales de mathématiques pures et appliquées (1813/14) vyvolala značnou diskusi o povaze a chápání komplexních čísel.

Britský matematik John Warren (1796–1852) vydal roku 1828 knihu *A treatise on the geometrical representation of the square roots of negative quantities*, která byla rovněž velmi podnětná. Nevyvolala však velkou pozornost, mimo Británii nebyla téměř známa. Ovlivnila však W. R. Hamiltona. Kromě této knihy publikoval J. Warren roku 1829 o odmocninách ze záporných čísel další dvě práce (viz [Warren, 1829]). Rozvíjel v nich své originální představy o veličinách, které mají jednak velikost, jednak „sklon“ k základnímu směru reprezentovanému čísly reálnými; veličiny $\sqrt{-1}$ a $-\sqrt{-1}$ jsou k němu kolmé. V tomto duchu rovněž interpretoval n-té odmocniny z 1.

Gaussova rovina

Ke geometrické interpretaci komplexních čísel jako bodů roviny dospěl na přelomu 18. a 19. století Carl Friedrich Gauss (1777–1855). Geometrických představ o komplexních číslech využil již ve své disertační práci z roku 1799 při důkazu základní věty algebry. Jejich geometrickou interpretaci podal později ve své práci *Theoria residuorum biquadraticorum. Commentatio secunda* z roku 1831. Uveďme dvě krátké ukázky:

Sicuti omnis quantitas realis per partem rectae utrinque infinitae ab initio arbitrario sumendam, et secundum segmentum arbitrarium pro unitate acceptum aestimandam exprimi, adeoque per punctum alterum repraesentari potest, ita ut puncta ab altera initii plaga quantitates positivas, ab altera negativas repraesentent: ita quaevis quantitas complexa repraesentari poterit per aliquod punctum in plano infinito, in quo recta determinata ad quantitates reales refertur, scilicet quantitas complexa $x + \mathrm{i}y$ *per punctum, cuius abscissa* $= x$*, ordinata (ab altera lineae abscissarum plaga positive, ab altera negative sumta)* $= y$*. Hoc pacto dici potest, quamlibet quantitatem complexam mensurare inaequalitatem inter situm puncti ad quod refertur atque situm puncti initialis, denotante unitate positiva deflexum arbitrarium determinatum versus directionem arbitrariam determinatam; unitate negativa deflexum aeque magnum versus directionem oppositam; denique unitatibus imaginariis deflexus aeque magnos versus duas directiones laterales normales. …*

Difficultates, quibus theoria quantitatum imaginariarum involuta putatur, ad magnam partem a denominationibus parum idoneis originem traxerunt (quum adeo quidam usi sint nomine absono quantitatum impossibilium). Si, a conceptibus, quos offerunt varietates duarum dimensionum, (quales in maxima puritate conspiciuntur in intuitionibus spatii) profecti, quantitates positivas directas, negativas inversas, imaginarias laterales nuncupavissemus, pro tricis simplicitas, pro caligine claritas successisset.
(Werke II., str. 109–110)

Pod výrazným Gaussovým vlivem postupně došlo k všeobecnému rozšíření představy o komplexních číslech jako bodech roviny; proto se později ujal termín *Gaussova rovina.*[3] Komplexní čísla přestala mít tajuplný charakter, jejich sčítání a násobení získalo výrazný geometrický smysl (vektorový rovnoběžník, rotace).

William Rowan Hamilton

Aritmetickou teorii komplexních čísel vytvořil počátkem třicátých let 19. století W. R. Hamilton. Ve dnech 4. listopadu 1833 a 1. června 1835 četl

[3] Poznamenejme, že roku 1821 prezentoval podobný pohled na komplexní čísla Augustin Louis Cauchy (1789–1857) v knize *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique.*

v akademii svoji práci *Theory of conjugate functions, or algebraic couples; with a preliminary and elementary essay on algebra as the science of pure time*, která však vyšla až roku 1837. V první části svého textu se věnoval problematice čísel kladných a záporných, v druhé části předložil novou teorii čísel komplexních.

Komplexní čísla chápal jako uspořádané dvojice reálných čísel, jejichž sčítání a násobení definoval vztahy

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \ ,$$
$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 b_1 - a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1) \ .$$

Znal také vzorec

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) = (a_1 b_1 - a_2 b_2)^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2 \ ,$$

kterému říkal zákon modulů (*law of the moduli*) – modul komplexního čísla $\alpha = (a_1, a_2)$ definoval vztahem $|\alpha| = a_1^2 + a_2^2$, zákon modulů má tedy tvar

$$|\alpha| \cdot |\beta| = |\alpha \cdot \beta| \ .$$

Uveďme krátké úryvky z druhé části jeho výše zmíněné práce:

Proceeding to operations upon number-couples, considered in combination with each other, it is easy now to see the reasonableness of the following definitions, and even their necessity, if we would preserve in the simplest way, the analogy of the theory of couples to the theory of singles:

$$(b_1, b_2) + (a_1, a_2) = (b_1 + a_1, b_2 + a_2) \ ;$$

$$(b_1, b_2) - (a_1, a_2) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) \ ;$$

$$(b_1, b_2) \cdot (a_1, a_2) = (b_1, b_2) \times (a_1, a_2) = (b_1 a_1 - b_2 a_2, b_2 a_1 + b_1 a_2) \ ;$$

$$\frac{(b_1, b_2)}{(a_1, a_2)} = \left(\frac{b_1 a_1 + b_2 a_2}{a_1^2 + a_2^2} \, , \, \frac{b_2 a_1 - b_1 a_2}{a_1^2 + a_2^2} \right) \ .$$

… When the pure primary couple $(1, 0)$ *is thus considered as equivalent to the number 1, it may be called, for shortness, the primary unit; and the pure secondary couple* $(0, 1)$ *may be called in like manner the secondary unit. …* ([Ham2], str. 95)

In the THEORY OF SIMPLE NUMBERS, the symbol $\sqrt{-1}$ *is absurd, and denotes an IMPOSSIBLE EXTRACTION, or a merely IMAGINARY NUMBER; but in the THEORY OF COUPLES, the same symbol* $\sqrt{-1}$ *is significant, and denotes a POSSIBLE EXTRACTION, or a REAL COUPLE, namely … the principal square-root of the couple* $(-1, 0)$*. In the latter theory, therefore, though not in the former, this sign* $\sqrt{-1}$ *may properly be employed; and we may write, if we choose, for any couple* (a_1, a_2) *whatever,*

$$(a_1, a_2) = a_1 + a_2 \sqrt{-1} \ ,$$

interpreting the symbols a_1 *and* a_2*, in the expression* $a_1 + a_2\sqrt{-1}$*, as denoting the pure primary couples* $(a_1, 0)$ $(a_2, 0)$ … *and interpreting the symbol* $\sqrt{-1}$ … *as denoting the secondary unit or pure secondary couple* $(0, 1)$ …
([Ham2], str. 107)

Připomeňme ještě pro zajímavost knížku *Die Rechnung mit Richtungszahlen oder die geometrische Behandlung imaginären Grössen*, kterou vydal roku 1856 Friedrich J. P. Riecke, vrchní studijní rada a profesor matematiky na Zemské akademii lesního hospodářství v Hohenheim. Je to učební text o komplexních číslech, obsahuje 140 obrázků a zajímavý bibliografický dodatek se stručnými charakteristikami jednotlivých prací.

2. Hyperkomplexní čísla

Geometrická interpretace komplexních čísel a způsob, jakým jsou komplexní čísla vytvořena z čísel reálných (proces „zdvojení“), inspirovaly některé matematiky jednak k pokusům o rozšiřování oboru komplexních čísel na nějaký větší číselný obor, jednak k obecnějším úvahám o strukturách vícesložkových čísel. Postupně se rodila tzv. teorie *hyperkomplexních čísel*.

Problém je možno vyslovit takto: na množině M formálních výrazů

$$x_1 \cdot \alpha_1 + \cdots + x_n \cdot \alpha_n \ ,$$

kde $x_1, \ldots, x_n$ jsou reálná čísla a $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jakési nové základní jednotky, se sčítání definuje po složkách. Takto definované sčítání má všechny rozumné vlastnosti: je asociativní, komutativní, v množině M existuje nulový prvek $0 \cdot \alpha_1 + \cdots + 0 \cdot \alpha_n$ a ke každému prvku $x_1 \cdot \alpha_1 + \cdots + x_n \cdot \alpha_n$ existuje opačný prvek $-x_1 \cdot \alpha_1 - \cdots - x_n \cdot \alpha_n$, tj. v množině M je možno odčítat.

Násobení bylo třeba definovat takovým způsobem, aby byly zachovány i další aritmetické zákony známé z klasických číselných oborů: asociativita a komutativita násobení, existence jednotkového prvku, inverzních prvků (tj. možnost dělení) a distributivita násobení vzhledem ke sčítání. S přihlédnutím k požadované platnosti distributivního zákona stačilo stanovit vhodný předpis pro násobení základních jednotek $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Jinými slovy lze říci, že bylo zapotřebí nalézt rozumnou definici násobení n-tic $(x_1, \ldots, x_n)$ reálných čísel, které by spolu se sčítáním n-tic po složkách splňovalo všechny nebo téměř všechny aritmetické zákony.

Těmito problémy se koncem první poloviny 19. století velmi intenzivně zabývali William Rowan Hamilton, George Peacock (1791–1858), Arthur Cayley, Auguste de Morgan (1806–1871), bratři Charles Graves (1810–1860) a John Thomas Graves (1806–1870) a další matematici. Někteří se snažili rozšířit obor komplexních čísel (předpokládali $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \mathrm{i}$, $\alpha_2^2 = -1$) na nějaký větší číselný obor, jiní přistupovali k problému obecněji a studovali struktury hyperkomplexních čísel s nejrůznějšími definicemi násobení, pro něž nebyly a priori vyžadovány vlastnosti známé z číselných oborů. Např. A. Cayley studoval roku 1845 systém dvousložkových hyperkomplexních čísel tvaru $\mathrm{i}x + \mathrm{j}y$ v práci *On algebraical couples.*

Poznamenejme, že problém rozšíření komplexních čísel na nějaký větší číselný obor, v němž by platily všechny aritmetické zákony (tj. axiomy komutativního tělesa), vyslovil již C. F. Gauss roku 1831 ve svém komentáři k práci *Theoria residuorum biquadraticorum. Commentatio secunda.*

Der Verf. hat sich vorbehalten, den Gegenstand, welcher in der vorliegenden Abhandlung eigentlich nur gelegentlich berührt ist, künftig vollständiger zu bearbeiten, wo dann auch die Frage, warum die Relationen zwischen Dingen, die eine Mannigfaltigkeit von mehr als zwei Dimensionen darbieten, nicht noch andere in der allgemeinen Arithmetik zulässige Arten von Grössen liefern können, ihre Beantwortung finden wird. (Werke II., str. 178)

O vzniku a vývoji teorie hyperkomplexních čísel viz např. [Rothe, 1914], [Hawkins, 1972], [Kline, 1972], [Rozenfel'd, 1976], [Kolmogorov, Juškevič, 1978], [Ebbinghaus, 1983], [Waerden, 1985], [Zaddach, 1994], [Gray, Parshall, 2007].

Kvaterniony

Problém nalezení oboru hyperkomplexních čísel bylo přirozené řešit nejprve pro $n = 3$; jednalo se tedy vlastně o aritmetizaci bodů „normálního“ trojrozměrného prostoru. Jeden z prvních pokusů tohoto typu nacházíme již koncem 18. století ve výše zmíněné práci C. Wessela, který přiřazoval bodům prostoru o souřadnicích x, y, z formální výrazy $x + y\varepsilon + z\eta$, kde ε, η jsou jakési nové jednotky; pomocí těchto trojsložkových čísel popisoval rotace prostoru kolem souřadnicových os a řešil úlohy o sférických mnohoúhelnících. Vyšetřoval přitom nekomutativní a neasociativní násobení těchto čísel.

W. R. Hamilton publikoval roku 1837 práci *Theory of conjugate functions, or algebraical couples ...*, v níž byla komplexní čísla $a + ib$ reprezentována dvojicemi (a, b) reálných čísel. V následujících letech se čas od času vracel k problému nalézt rozumný vzorec pro násobení trojic reálných čísel (a, b, c), resp. trojsložkových čísel $a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j}$. Zachoval přirozenou definici pro jejich sčítání, zachoval definici modulu $|a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j}| = a^2 + b^2 + c^2$ a velké úsilí věnoval hledání vhodného vzorce pro násobení těchto trojsložkových čísel, které by bylo distributivní vzhledem ke sčítání a navíc splňovalo zákon modulů. Stále mu však vycházely struktury, které obsahovaly netriviální dělitele nuly, tj. nenulové prvky, jejichž součin je roven nule. V takovéto struktuře nelze bez omezení dělit. W. R. Hamilton se tedy pokoušel „vytvořit“ čísla z bodů prostoru podobným způsobem, jakým jsou z bodů roviny „konstruována“ čísla komplexní.

V roce 1865 na své dlouholeté marné snažení vzpomínal v dopise synu Archibaldovi:

In October 1843, having recently returned from a meeting of the British Association in Cork, the desire to discover the laws of the multiplication of triplets regained with me a certain strengh and earnestness, which had for years been dormant, but was then on the point of being gratified, and was occasionally *talked of with you. Every morning in the early part of the above-cited month, on my coming down to breakfast, your brother William Edwin and yourself used to ask me, 'Well, Papa, can you multiply triplets?' Whereto I was always obliged to reply, with a sad shake of the head. 'No, I can only add and subtract them.'* (Papers III., str. xv)

Dne 16. října 1843 se W. R. Hamilton procházel doprovázen manželkou na tehdejším okraji Dublinu. Když přecházeli kamenný most přes tzv. „canal“, rozhodl se řešit problém pro čtveřice $a + b\,\mathrm{i} + c\,\mathrm{j} + d\,\mathrm{k}$ a současně ho napadl vzorec pro násobení čtyř základních jednotek 1, i, j, k:

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = \mathrm{i\,j\,k} = -1\ .$$

Nadšen svou myšlenkou vyryl kapesním nožem tento vzorec do jednoho z kamenů na mostě.[4] Místo, kde W. R. Hamilton objevil kvaterniony, bylo později označeno kamennou deskou s tímto nápisem:

Here as he walked by
on the 16th of October 1843
Sir **William Rowan Hamilton**
in a flash of genius discovered
the fundamental formula for
quaternion multiplication
$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = \mathrm{i\,j\,k} = -1$
& cut it on a stone of this bridge.

Ze vztahů

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = \mathrm{i\,j\,k} = -1$$

se již snadno doplní (za předpokladu asociativity) tabulka pro násobení základních jednotek 1, i, j, k:

.	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	−1	k	− j
j	j	− k	−1	i
k	k	j	− i	−1

W. R. Hamilton tak roku 1843 sestrojil obor čtyřsložkových hyperkomplexních čísel $a+b\,\mathrm{i}+c\,\mathrm{j}+d\,\mathrm{k}$, která nazval kvaterniony. S výjimkou komutativity má

[4] *Nor could I resist the impulse – unphilosophical as it may have been – to cut with a knife on a stone of Brougham Bridge, as we passed it, the fundamental formula … which contains the solution of the Problem …*

násobení kvaternionů všechny rozumné vlastnosti: je asociativní, oboustranně distributivní vzhledem ke sčítání, existuje jednotkový prvek a ke každému nenulovému kvaternionu $\alpha = a + b\,\mathrm{i} + c\,\mathrm{j} + d\,\mathrm{k}$ existuje inverzní kvaternion, který má tvar

$$\alpha^{-1} = \frac{a - b\,\mathrm{i} - c\,\mathrm{j} - d\,\mathrm{k}}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}\ ,$$

tj. každým nenulovým kvaternionem je možno oboustranně dělit. Kvaterniony tedy tvoří nekomutativní těleso, které přirozeným způsobem rozšiřuje těleso čísel komplexních. Kromě komutativity násobení v něm platí všechny aritmetické zákony, které známe z klasických číselných oborů (racionální čísla, reálná čísla, komplexní čísla).

Kvaternion $\overline{\alpha} = a - b\,\mathrm{i} - c\,\mathrm{j} - d\,\mathrm{k}$ se nazývá sdružený ke kvaternionu α, výraz $|\alpha| = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ je tzv. modul kvaternionu α. Pro libovolné kvaterniony α, β je

$$\overline{\alpha \cdot \beta} = \overline{\beta} \cdot \overline{\alpha}\ ,$$

$$\overline{\alpha} \cdot \alpha = \alpha \cdot \overline{\alpha} = |\alpha|$$

a dále

$$|\alpha| \cdot |\beta| = |\alpha \cdot \beta|\ .$$

I pro kvaterniony tedy platí zákon modulů.

W. R. Hamilton byl nadšen svým objevem kvaternionů. Přednášel o nich v královské irské akademii věd již 13. listopadu 1843.[5] Své první výsledky o těchto nových veličinách publikoval na pokračování v sérii článků nazvaných *On quaternions; or on a new system of imaginaries in algebra*, které vycházely v letech 1844 až 1850. První z těchto článků začíná takto:

LET an expression of the form

$$Q = w + \mathrm{i}x + \mathrm{j}y + \mathrm{k}z$$

be called a quaternion, when w, x, y, z, which we shall call the four constituents of the quaternion Q, denote any real quantities, positive or negative or null, but i, j, k *are symbols of three imaginary quantities, which we shall call imaginary units, and shall suppose to be unconnected by any linear relation with each other …*

It will then be natural to define that the addition or subtraction of quaternions is effected by the formula

$$Q \pm Q' = w \pm w' + \mathrm{i}(x \pm x') + \mathrm{j}(x \pm x') + \mathrm{k}(z \pm z')\ ;$$

or, in words, by the rule, that the sums or differences of the constituents of any two quaternions, are the constituents of the sum or difference of those two quaternions themselves. …

[5] Jeho přednáška je zachycena v článku *On a new species of imaginary quantities connected with a theory of quaternions*, který vyšel roku 1844 v Proceedings of the Royal Irish Academy.

... we have the four following expressions for the four constituents of the product of two quaternions, as functions of the constituents of the multiplier and multiplicand:

$$w'' = ww' - xx' - yy' - zz' \ ,$$

$$x'' = wx' + xw' + yz' - zy' \ ,$$

$$y'' = wy' + yw' + zx' - xz' \ ,$$

$$z'' = wz' + zw' + xy' - yx' \ .$$

These equations give

$$w''^2 + x''^2 + y''^2 + z''^2 = (w^2 + x^2 + y^2 + z^2)(w'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

... the modulus of the product Q'' of any two quaternions Q and Q', is equal to the product of their moduli. ([Hamilton, 1844], str. 10–12)

W. R. Hamilton se oprávněně domníval, že kvaterniony jsou systémem hyperkomplexních čísel, který je nejbližší číslům komplexním. Očekával od nich alespoň stejně důležité výsledky jako od komplexních čísel. Věnoval jim zbytek života, napsal o nich dvě rozsáhlé monografie – *Lectures on quaternions* (1853) a *Elements of quaternions* (1866).

Někteří matematici se záhy po Hamiltonovu objevu kvaternionů snažili tato nová „čísla“ geometricky interpretovat. Připomeňme např. práci W. F. Donkina *On the geometrical interpretation of quaternions* z roku 1850 a stejně nazvanou práci W. Spottiswoodea z téhož roku. Obě vyšly v časopisu Philosophical Magazine.

W. R. Hamilton a jeho následovníci očekávali velké výsledky od rozvinutí matematiky založené na kvaternionech; ty se však nenaplnily. Význam kvaternionů se významu komplexních čísel nevyrovnal, i když byly nalezeny krásné vzorce vyjadřující pomocí kvaternionů řadu jevů, např. v geometrii a ve fyzice. Viz např. [Lambek, 1995], [Dyson, 1962].

O Hamiltonově cestě od komplexních čísel k objevu kvaternionů viz např. [Papers III.], str. xv–xvi a 103–155, [Hamilton, 1853], předmluva, [MacDuffee, 1944], [Kramar, 1966], [Waerden, 1976] atd. O tom, proč není možno vytvořit číselný obor trojsložkových čísel viz např. [May, 1966], [Bečvář, 1993] atd.

Prehistorie kvaternionů

Poznamenejme, že základní idea násobení kvaternionů se objevila dlouho před W. R. Hamiltonem. Skládání čtveřic reálných čísel, které odpovídá násobení kvaternionů, vyšetřoval totiž již L. Euler. Svědčí o tom jeho dopis Christianu von Goldbachovi (1690–1764) ze 4. května 1748 (viz [Fuss, 1843], díl I., str. 450–455).

Folgendes theorema kann auch dienen in vielen Fällen die quatuor quadrata selbst zu bestimmen, woraus eine Zahl zusammengesetzt ist: Si $m = aa + bb + cc + dd$ *et* $n = pp + qq + rr + ss$ *erit* $mn = A^2 + B^2 + C^2 + D^2$ *existente*

$$\begin{aligned} A &= ap + bq + cr + ds \\ B &= aq - bp - cs + dr \\ C &= ar + bs - cp - dq \\ D &= as - br + cq - dp \ . \end{aligned}$$

Weil man nun die Zahlen a, b, c, d, p, q, r, s *sowohl affirmative als negative annehmen, dieselben ferner auch nach Belieben mit einander combiniren oder ihre Ordnung verändern kann, so ist die resolutio producti* mn *auf sehr vielerley verschiedene Arten möglich.* ([Fuss, 1843], str. 452)

O šest let později L. Euler uvažoval takovéto „skládání“ čtveřic čísel v práci *Demonstratio theorematis Fermatiani omnem numerum sive integrum sive fractum esse summam quatuor pauciorumve quadratorum* v souvislosti s rozkladem celých, resp. racionálních čísel v součet nejvýše čtyř čtverců.

... si enim ponatur

$$(aa + bb + cc + dd)(pp + qq + rr + ss) = xx + yy + zz + vv \ ,$$

erit

$$\begin{aligned} x &= ap + bq + cr + ds \ , \\ y &= aq - bp \pm cs \mp dr \ , \\ z &= ar \mp bs - cp \pm dq \ , \\ v &= as \pm br \mp cq - dp \ , \end{aligned}$$

qui quatuor numeri, ... (Opera (1), II., str. 369)

Vektorový počet

Pomocí kvaternionů dospěl W. R. Hamilton k základům vektorového počtu. Kvaternion $\alpha = a + b\,\mathrm{i} + c\,\mathrm{j} + d\,\mathrm{k}$ rozdělil na tzv. *skalární část* a, kterou nazval krátce *skalár* a značil $S\alpha$, a tzv. *vektorovou část* $\vec{v} = b\,\mathrm{i} + c\,\mathrm{j} + d\,\mathrm{k}$, kterou nazval *vektor* a značil $V\alpha$; tu lze chápat jako vektor v trojrozměrném prostoru. Při sčítání (odčítání) kvaternionů se sčítají (odčítají) nezávisle na sobě skalární a vektorové části. Při násobení dvou skalárních kvaternionů dostaneme opět skalár, při násobení skalárního a vektorového kvaternionu získáme skalární násobek vektoru. Při násobení vektorových kvaternionů $\vec{v_1}$ a $\vec{v_2}$ dostaneme kvaternion, jehož skalární část je rovna záporně vzatému skalárnímu součinu těchto vektorů a vektorová část jejich vektorovému součinu:

$$\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = (b_1\,\mathrm{i} + c_1\,\mathrm{j} + d_1\,\mathrm{k}) \cdot (b_2\,\mathrm{i} + c_2\,\mathrm{j} + d_2\,\mathrm{k}) =$$

$$= -(b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2) + (c_1d_2 - d_1c_2)\,\mathrm{i} + (d_1b_2 - b_1d_2)\,\mathrm{j} + (b_1c_2 - c_1b_2)\,\mathrm{k} =$$

$$= -(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) + \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} \ .$$

Odtud snadno dostaneme obecný vzorec pro násobení kvaternionů rozložených na skalární a vektorovou část:

$$(a_1 + \overrightarrow{v_1}) \cdot (a_2 + \overrightarrow{v_2}) = a_1a_2 - (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) + a_1\overrightarrow{v_2} + a_2\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} \ .$$

W. R. Hamilton úspěšně aplikoval svůj vektorový počet ve fyzice. Vektorovými rovnicemi vyjádřil podmínky rovnováhy soustavy sil působících v daných bodech; pomocí vektorů popsal jak polohu uvažovaných bodů, tak velikost a směr působících sil. Zavedl a vyšetřoval tzv. vektorové pole – zobrazení, které každému bodu prostoru přiřazuje určitý vektor, zavedl a pojmenoval diferenciální operátor *nabla*

$$\nabla = \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathrm{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

a použil jej k definici gradientu ∇a skalárního pole $a(x, y, z)$

$$\nabla a = \frac{\partial a}{\partial x}\,\mathrm{i} + \frac{\partial a}{\partial y}\,\mathrm{j} + \frac{\partial a}{\partial z}\,\mathrm{k} \ ,$$

který reprezentuje velikost a směr největšího přírůstku funkce a. Aplikoval rovněž operátor ∇ na vektorové pole $v = v_1\,\mathrm{i} + v_2\,\mathrm{j} + v_3\,\mathrm{k}$, kde v_1, v_2, v_3 jsou funkce x, y, z:

$$\nabla v = \Big(\ \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathrm{k}\frac{\partial}{\partial z}\Big)\big(v_1\,\mathrm{i} + v_2\,\mathrm{j} + v_3\,\mathrm{k}\big) \ =$$

$$= -\Big(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}\Big) + \Big(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\Big)\,\mathrm{i} + \Big(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\Big)\,\mathrm{j} + \Big(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\Big)\,\mathrm{k}\,.$$

Hodnotou ∇v je tedy kvaternion; absolutní hodnota jeho skalární části je tzv. divergence v, vektorová část tzv. rotace v (tyto termíny jsou však pozdější).

Velmi brzy se ukázalo, že pomocí kvaternionů lze efektivně popsat rotace trojrozměrného a čtyřrozměrného prostoru. V trojrozměrném prostoru se rotace kolem osy procházející počátkem a určené jednotkovým vektorem (p, q, r) o úhel 2φ vyjádří jako zobrazení, které každému vektoru $\overrightarrow{v}$ přiřadí vektor $\alpha\,\overrightarrow{v}\,\alpha^{-1}$, kde α je kvaternion definovaný vztahem

$$\alpha = \cos\varphi + (p\,\mathrm{i} + q\,\mathrm{j} + r\,\mathrm{k}) \cdot \sin\varphi \ .$$

Pomocí takovéhoto popisu rotací se dá snadno dokázat, že složení dvou rotací kolem os procházejících počátkem, je opět rotace kolem osy procházející počátkem. Navíc je možno z daných rotací snadno vypočítat rotaci výslednou.

Uvažujme druhou rotaci kolem osy procházející počátkem, která je určena jednotkovým vektorem (p', q', r'), o úhel $2\varphi'$; této rotaci odpovídá kvaternion

$$\alpha' = \cos\varphi' + (p'\,\mathrm{i} + q'\,\mathrm{j} + r'\,\mathrm{k}) \cdot \sin\varphi'.$$

Provedeme-li postupně obě rotace, zobrazí se vektor $\overrightarrow{v}$ nejprve na vektor $\alpha\overrightarrow{v}\alpha^{-1}$, a ten na vektor

$$\alpha'(\alpha\overrightarrow{v}\alpha^{-1})(\alpha')^{-1} = (\alpha'\alpha)\overrightarrow{v}(\alpha'\alpha)^{-1}\ .$$

Složením uvažovaných rotací je tedy rotace reprezentovaná kvaternionem $\alpha'\alpha$.

Podobně se vyjádří rotace ve čtyřrozměrném prostoru (jeho body můžeme chápat jako kvaterniony): kvaternionu v se přiřadí kvaternion $\alpha v \beta$.

Již roku 1844 se touto problematikou zabývali W. R. Hamilton a A. Cayley. A. Cayley vyšetřoval v práci *On certain results relating to quaternions* z roku 1845 zobrazení dané vztahem

$$(A + B\,\mathrm{i} + C\,\mathrm{j} + D\,\mathrm{k})^{-1}(\alpha + \beta\,\mathrm{i} + \gamma\,\mathrm{j} + \delta\,\mathrm{k})(A + B\,\mathrm{i} + C\,\mathrm{j} + D\,\mathrm{k})\ .$$

Později, v prvním svazku svých sebraných spisů (1889), k tomuto svému článku poznamenal:

The discovery of the formula $q(\mathrm{i}x + \mathrm{j}y + \mathrm{k}z)q^{-1} = \mathrm{i}x' + \mathrm{j}y' + \mathrm{k}z'$, *as expressing a rotation, was made by Sir W. R. Hamilton some months previous to the date of this paper.*[6] (Papers I., str. 586)

Problematikou rotací se A. Cayley zabýval i v dalších pracích, např. roku 1848 v práci *On the application of quaternions to the theory of rotation* a roku 1855 v článku *Recherches ultérieures sur les déterminants gauches*, v němž pomocí kvaternionů vyšetřoval transformace čtyřrozměrného prostoru.

Poznamenejme, že právě v souvislosti s transformacemi trojrozměrného prostoru vyšetřoval C. F. Gauss roku 1819 v práci *Mutationen des Raumes* násobení čtveřic reálných čísel, které bylo téměř identické s násobením kvaternionů (Werke VIII., str. 358).

Aus der Verbindung zweier Transformationen,

deren	*erster*	*die Scale*	$a,$	$b,$	$c,$	d	
"	*zweiter*	" "	$\alpha,$	$\beta,$	$\gamma,$	δ	*entspricht,*

entsteht eine neue, deren Scale:

$$\begin{aligned}&a\alpha - b\beta - c\gamma - d\delta\\ &a\beta + b\alpha - c\delta + d\gamma\\ &a\gamma + b\delta + c\alpha - d\beta\\ &a\delta - b\gamma + c\beta + d\alpha\ .\end{aligned}$$

[6] Viz W. R. Hamilton: *Applications in geometry*, Papers III., str. 353–362.

Problematikou rotací se zabýval i Olinde Rodrigues (1794–1851) v práci *Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un système solide dans l'espace ...* z roku 1840. Studoval pohyby tuhého tělesa, rotace jednotkové sféry kolem různých os, skládal transformace trojrozměrného eukleidovského prostoru, např. rotace a translace. Viz [Gray, 1980], [Altmann, 1989], [Altmann, Ortiz, 2005]. Rodriguesovy výsledky neunikly pozornosti. Např. A. Cayley začal svůj výše zmíněný článek z roku 1848 těmito slovy:

In a paper published in the Philosophical Magazine, February 1845, I showed how some formulae of M. Olinde Rodrigues relating to the rotation of a solid body might be expressed in a very simple form by means of Sir W. Hamilton's theory of quaternions. ...

Let the question be proposed to compound two rotations (both axes of rotation being supposed to pass through the origin). Let L be the first axis, Λ the quaternion of rotation, L′ the second axis, which is supposed to be fixed in space, so as not to alter its direction by reason of the first rotation, Λ′ the corresponding quaternion of rotation. The combined effect is given at once by

$$\Pi_1 = \Lambda'(\Lambda\Pi\Lambda^{-1}){\Lambda'}^{-1} \ ,$$

that is,

$$\Pi_1 = \Lambda'\Lambda\Pi(\Lambda'\Lambda)^{-1} \ ;$$

... (Papers I., str. 405–406)

E. Study na mezinárodním matematickém kongresu roku 1893 řekl:

Frühzeitig schon ist der Zusammenhang des Quaternionencalculs mit gewissen Transformationsgruppen hervorgetreten. Cayley hat bereits 1843 die Entdeckung gemacht, dass die von Euler (1770) aufgefundenen und von Rodrigues (1840) vervollständigten Formeln zur Transformation rechtwinkliger Coordinaten oder zur Darstellung der Drehungen um einen Punkt auf eine einfache Weise aus dem Quaternionencalcül hergeleitet werden können.
([Study, 1896], str. 367–368)

Různé úvahy o vektorech, operacích s nimi a možnostech aplikací se objevují od čtyřicátých let 19. století v pracích několika dalších matematiků. Uvedeme několik zajímavých příkladů.

Ve čtyřicátých letech 19. století formuloval základní ideje vektorové analýzy Matthew O'Brien (1814–1855), málo známý profesor matematiky na vojenské akademii ve Woolwich a profesor přírodní filozofie a astronomie na Kings College v Londýně. V letech 1846 až 1847 napsal čtyři články, v nichž do značné míry rozvinul ideje vektorové analýzy a jejích aplikací. Zavedl vhodnou symboliku, pomocí níž byl schopen ve vektorovém tvaru vyjadřovat a řešit problémy geometrie i mechaniky. Myšlenky z těchto článků publikoval v letech 1847 až 1851 v sérii prací uveřejněných v časopise Philosophical Magazine. Rozpracoval vektorovou symboliku, zavedl skalární a vektorový součin, odvodil vlastnosti těchto operací a ukázal aplikace svého vektorového počtu v geometrii, dynamice, optice a statistice, zavedl i Laplaceův operátor ∇^2. Jeho myšlenky se však neprosadily a k rozvoji vektorového počtu příliš nepřispěly. Více viz [Smith, 1982].

Pro zajímavost uveďme ještě ukázku zavedení pojmů *rotor* a *motor* v práci *Preliminary sketch of biquaternions* Williama Kingdona Clifforda (1845–1879) z roku 1873. Vznik těchto pojmů byl inspirován různými úvahami o vektorech.

The name vector may be conveniently associated with a velocity of translation, as the simplest type of the quantity denoted by it. In analogy with this, I propose to use the name rotor (short for rotator) to mean a quantity having magnitude, direction, and position, of which the simplest type is a velocity of rotation about a certain axis. …

And we shall say that in general the sum of rotors is a motor, but that in particular cases it may degenerate into a rotor or a vector.
(Papers, str. 182–183)

Hamiltonův vektorový počet byl úspěšně využit v teorii magnetického pole; anglický fyzik James Clerk Maxwell (1831–1879) rozvinul a aplikoval vektorový počet roku 1873 ve významné práci *A treatise on electricity and magnetism*, v níž předpověděl existenci elektromagnetických vln, které později experimentálně prokázal Heinrich Rudolf Hertz (1857–1894). J. C. Maxwell též zavedl a vyšetřoval tzv. Laplaceův operátor

$$\Delta = \nabla^2 = \mathrm{i}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathrm{j}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \mathrm{k}\frac{\partial^2}{\partial z^2} \ ;$$

obrátil pozornost fyziků k vektorovému počtu.

Významným přínosem pro další rozvoj vektorového počtu byl studijní text amerického fyzika Josiaha Willarda Gibbse (1839–1903) nazvaný *Elements of vector analysis*. Vyšel roku 1881 a ve druhém vydání o tři roky později. J. W. Gibbs tehdy navázal nejen na Hamiltonovy, ale i na Grassmannovy myšlenky. Gibbsův text byl roku 1901 včleněn do knihy *Vector analysis*, kterou sepsal Gibbsův žák Edwin Bidwell Wilson (1879–1964) na základě Gibbsových přednášek.

Anglický fyzik Oliver Heaviside (1850–1925) velmi úspěšně rozvíjel ve své třídílné knize *Electromagnetic theory* z roku 1893 vektorový počet ve fyzikálních aplikacích. Intenzivně studoval pojem *lineární operátor*, jeden ze stěžejních matematických pojmů 20. století. Inspiroval se přitom jak Hamiltonovými, tak Grassmannovými myšlenkami a navázal na Gibbsovo pojetí vektorového počtu.

Vektorový počet studovali, rozvíjeli a přetvářeli nejen fyzici, ale i matematici. Jako příklad je možno uvést knihu *Elementi di calcolo vettoriale …* z roku 1909, jejímiž autory jsou italští matematici Cesare Burali-Forti (1861–1931) a Roberto Marcolongo (1862–1943). V závěru této knihy je řada cenných historických a bibliografických poznámek, zejména o terminologii a symbolice. Připomeňme rovněž jejich knihu *Omografie vettoriali con applicazioni alle derivate rispetto ad un punto e alla fisica matematica* ze stejného roku a dále např. knihu německého matematika Alfreda Lotze (1882–1964) *Punkt- und*

Vektor-Rechnung z roku 1929. O kvaternionech v širším kontextu viz [Rothe, Lotze, Betsch, 1916]. O rozvoji vektorového počtu viz [Kramar, 1962], [Crowe, 1967], [Kline, 1972], [Aleksandrova, 1992], [Zaddach, 1994].

Oktávy

O svém objevu kvaternionů napsal W. R. Hamilton hned druhý den, tj. dne 17. října 1843, svému příteli J. T. Gravesovi.

MY DEAR GRAVES, – A very curious train of mathematical speculation occured to me yesterday, which I cannot but hope will prove of interest to you. You know that I have long wished, and I believe that you have felt the same desire, to possess a Theory of Triplets, analogous to my published Theory of Couplets, and also to Mr. Warren's geometrical representation of imaginary quantities. Now I think that I discovered yesterday a theory of quaternions, which includes such a theory of triplets. ([Hamilton, 1844], str. 490)

J. T. Gravese tato problematika velmi zaujala a ještě v prosinci roku 1843 nalezl další systém hyperkomplexních čísel s osmi základními jednotkami.

Jeho výsledek byl publikován až roku 1848 (viz [Young, 1848], [Hamilton, 1848], [Hamilton: Papers III.], str. 106–110, 648). Mezitím sestrojil nezávisle na J. T. Gravesovi stejný obor hyperkomplexních čísel A. Cayley. Svůj výsledek zveřejnil již roku 1845 v poznámce *On Jacobi's elliptic functions, in reply to the Rev. B. Bronwin; and on quaternions* a o dva roky později v krátkém sdělení *Note on a system of imaginaries.*

It is possible to form an analogous theory with seven imaginary roots of (-1) *(? with* $\nu = 2^n - 1$ *roots when* ν *is a prime number). Thus if these be* $\mathrm{i}_1, \mathrm{i}_2, \mathrm{i}_3, \mathrm{i}_4, \mathrm{i}_5, \mathrm{i}_6, \mathrm{i}_7$, *which group together according to the types*

$$123\,,\qquad 145\,,\qquad 624\,,\qquad 653\,,\qquad 725\,,\qquad 734\,,\qquad 176\,,$$

i.e. the type 123 *denotes the system of equations*

$$\begin{array}{lll} \mathrm{i}_1\,\mathrm{i}_2 = \ \ \mathrm{i}_3\,, & \mathrm{i}_2\,\mathrm{i}_3 = \ \ \mathrm{i}_1\,, & \mathrm{i}_3\,\mathrm{i}_1 = \ \ \mathrm{i}_2\,, \\ \mathrm{i}_2\,\mathrm{i}_1 = -\,\mathrm{i}_3\,, & \mathrm{i}_3\,\mathrm{i}_2 = -\,\mathrm{i}_1\,, & \mathrm{i}_1\,\mathrm{i}_3 = -\,\mathrm{i}_2\,, \end{array}$$

&*c.* (Papers I., str. 127)

A. Cayley dále uvedl vzorec pro násobení těchto hyperkomplexních čísel a poznamenal:

… the modulus of this expression is the product of the moduli of the factors.

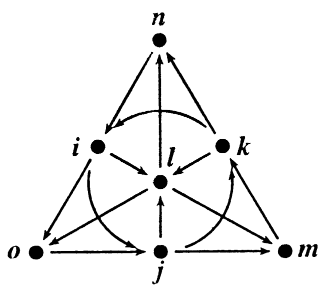
Tato nová hyperkomplexní čísla začala být označována jako oktávy. Dnes jsou užívány též termíny Cayleyova čísla, Gravesova-Cayleyova čísla nebo též oktoniony (neboť slovo *oktáva* patří do hudby). Jedná se o formální výrazy tvaru

$$a + b\,\mathrm{i} + c\,\mathrm{j} + d\,\mathrm{k} + e\,\mathrm{l} + f\,\mathrm{m} + g\,\mathrm{n} + h\,\mathrm{o}\,,$$

kde a, b, c, d, e, f, g, h jsou reálná čísla a i, j, k, l, m, n, o nové základní jednotky, které se násobí pomocí vztahů uvedených v následující tabulce.

.	1	i	j	k	l	m	n	o
1	1	i	j	k	l	m	n	o
i	i	−1	k	− j	m	− l	− o	n
j	j	− k	−1	i	n	o	− l	− m
k	k	j	− i	−1	o	− n	m	− l
l	l	− m	− n	− o	−1	i	j	k
m	m	l	− o	n	− i	−1	− k	j
n	n	o	l	− m	− j	k	−1	− i
o	o	− n	m	l	− k	− j	i	−1

Násobení základních jednotek i, j, k, l, m, n, o je možno znázornit na následujícím obrázku (tzv. Fanův matroid).



Součin dvou sousedních jednotek na stranách (resp. těžnicích, resp. kružnici vepsané) ve směru (proti směru) vyznačené orientace je roven třetí jednotce na této straně (těžnici, kružnici) se znaménkem plus (minus). Tedy např.

$$\mathrm{i\,l} = \mathrm{m}\ ,\quad \mathrm{l\,m} = \mathrm{i}\ ,\quad \mathrm{m\,i} = \mathrm{l}\ ,\quad \mathrm{l\,i} = -\,\mathrm{m}\ ,\quad \mathrm{m\,l} = -\,\mathrm{i}\ ,\quad \mathrm{i\,m} = -\,\mathrm{l}\ .$$

Násobení oktáv není komutativní ani asociativní. Je však alespoň *alternativní*, tj. pro každé dvě oktávy α, β platí rovnosti

$$(\alpha\alpha)\beta = \alpha(\alpha\beta)\ , \qquad (\alpha\beta)\beta = \alpha(\beta\beta)\ , \qquad (\alpha\beta)\alpha = \alpha(\beta\alpha)\ ,$$

přičemž z každých dvou výše uvedených rovností vyplývá rovnost třetí. Jinými slovy lze říci, že každé dvě oktávy algebry všech oktáv generují asociativní podalgebru.

Je zřejmé, že v množině všech oktáv existuje jednotkový prvek a ke každé nenulové oktávě existuje oktáva inverzní, tj. v množině všech oktáv lze oboustranně dělit. K oktávě

$$\alpha = a + b\,\mathrm{i} + c\,\mathrm{j} + d\,\mathrm{k} + e\,\mathrm{l} + f\,\mathrm{m} + g\,\mathrm{n} + h\,\mathrm{o}$$

je sdruženou oktávou oktáva

$$\overline{\alpha} = a - b\,\mathrm{i} - c\,\mathrm{j} - d\,\mathrm{k} - e\,\mathrm{l} - f\,\mathrm{m} - g\,\mathrm{n} - h\,\mathrm{o}$$

a je-li $\alpha \neq 0$, je

$$\alpha^{-1} = \frac{a - b\,\mathrm{i} - c\,\mathrm{j} - d\,\mathrm{k} - e\,\mathrm{l} - f\,\mathrm{m} - g\,\mathrm{n} - h\,\mathrm{o}}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2}\ ,$$

přičemž $|\alpha| = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2$ je tzv. modul (norma) oktávy α.

Pro libovolné oktávy α, β platí – podobně jako pro kvaterniony – rovnosti

$$\overline{\alpha \cdot \beta} = \overline{\beta} \cdot \overline{\alpha}\ ,$$

$$\overline{\alpha} \cdot \alpha = \alpha \cdot \overline{\alpha} = |\alpha|\ ,$$

a dále

$$|\alpha| \cdot |\beta| = |\alpha \cdot \beta|\ ,$$

tj.

$$\begin{aligned}
&(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+g^2+h^2)({a'}^2+{b'}^2+{c'}^2+{d'}^2+{e'}^2+{f'}^2+{g'}^2+{h'}^2) = \\
&\quad = (aa' - bb' - cc' - dd' - ee' - ff' - gg' - hh')^2 + \\
&\quad = (ab' + ba' + cd' - dc' + ef' - fe' - gh' + hg')^2 + \\
&\quad = (ac' - bd' + ca' + db' + eg' + fh' - ge' - hf')^2 + \\
&\quad = (ad' + bc' - cb' + da' + eh' - fg' + gf' - he')^2 + \\
&\quad = (ae' - bf' - cg' - dh' + ea' + fb' + gc' + hd')^2 + \\
&\quad = (af' + be' - ch' + dg' - eb' + fa' - gd' + hc')^2 + \\
&\quad = (ag' + bh' + ce' - df' - ec' + fd' + ga' - hb')^2 + \\
&\quad = (ah' - bg' + cf' + de' - ed' - fc' + gb' + ha')^2\ .
\end{aligned}$$

J. T. Graves se po svém objevu oktáv pokoušel vytvořit systém hyperkomplexních čísel s šestnácti jednotkami. Dnes víme, že jeho snaha nemohla být úspěšná.

Poznamenejme, že roku 1822 zveřejnil výše uvedený vzorec pro součin součtů osmi čtverců C. P. Degen (1776–1825) v práci *Adumbratio demonstrationis theorematis arithmeticae maxime generalis*. K násobení osmičlenných posloupností čísel, které odpovídá násobení oktáv, dospěl roku 1856 rovněž Francesco Brioschi (1824–1897) v práci *Sur l'analogie entre une classe de déterminants d'ordre pair et les déterminants binaires*. Proto se někdy vzorcům, které vyjadřují složky součinu dvou oktáv pomocí složek obou činitelů, říká Brioschiovy formule (viz např. [Vahlen, 1901]). A. Cayley se k problematice oktáv vrátil roku 1881 v čánku *On the 8-square imaginaries.*

Modifikovanou konstrukci oktáv podal Claude Chevalley (1909–1984) v knize *The algebraic theory of spinors* z roku 1954 (viz str. 123–128). O různých aspektech souvisejících s algebrou oktáv viz [Freudenthal, 1951]. Teorie Cayleyových čísel je dnes rozpracována v řadě knih i časopiseckých prací. Např. monografie [Springer, Veldkamp, 2000] obsahuje četné bibliografické odkazy a historické poznámky. O oktávách a jejich historii viz [Blij, 1961], [Kleinfeld, 1963].

Triplety

Roku 1844 vyšetřoval skotský matematik A. de Morgan množinu prvků tvaru $a\xi + b\eta + c\zeta$, kde a, b, c jsou reálná čísla a ξ, η, ζ nové jednotky, s různě definovanými operacemi násobení. Tyto výsledky shrnul roku 1849 ve čtvrté části své práce *On the foundation of algebra* nazvané *On triple algebra.* Viz [Morgan, 1842, 1849].

Jednou ze zkoumaných struktur byla algebra, v níž je násobení základních jednotek ξ, η, ζ popsáno rovnostmi $\eta^3 = \zeta^3 = -\xi$, přičemž ξ je jednotkový prvek. Násobení je přehledně zachyceno v této tabulce:

$\cdot$	ξ	η	ζ
ξ	ξ	η	ζ
η	η	$-\zeta$	ξ
ζ	ζ	ξ	$-\eta$

Ve stejné době připravoval C. Graves publikaci své práce *On algebraical triplets* (1847), která je věnována trojsložkovým číslům. Slovem triplety označoval výrazy tvaru $a + b\varepsilon + c\varepsilon^2$, kde $\varepsilon^3 = 1$. Položíme-li $\xi = 1$, $\eta = -\varepsilon$ a $\zeta = -\varepsilon^2$, vidíme, že jde o již uvedenou algebru A. de Morgana. Tato algebra má netriviální dělitele nuly, např.

$$(a + a\varepsilon + a\varepsilon^2) \cdot (b - b\varepsilon) = 0\ .$$

Triplety můžeme chápat jako body trojrozměrného eukleidovského prostoru. Vezmeme-li v tomto prostoru rovinu $x + y + z = 0$ a její normálu procházející počátkem, potom při násobení dvou tripletů se násobí jejich kolmé průměty na uvažovanou rovinu jako komplexní čísla a kolmé průměty na normálu jako čísla reálná. Tímto způsobem C. Graves ukázal, že algebra tripletů je direktním součtem tělesa reálných a tělesa komplexních čísel.

Grupové algebry

Roku 1854 zavedl A. Cayley v práci *On the theory of groups, as depending on the symbolic equation* $\theta^n = 1$ pojmy *abstraktní grupa* a *grupová algebra.*

Při vytváření oborů hyperkomplexních čísel bylo třeba rozumným způsobem definovat násobení základních jednotek. A. Cayley tento problém obešel. Jako základní jednotky vzal prvky nějaké konečné grupy spolu s původním grupovým násobením. Tím byla zaručena asociativita násobení a existence jednotkového prvku.

Následující úryvek naznačuje, jak se tehdy rodily pojmy *grupa* a *grupová algebra*:

A set of symbols,

$$1, \alpha, \beta, \ldots$$

all of them different, and such that the product of any two of them (no matter in what order), or the product of any one of them into itself, belongs to the set, is said to be a group. It follows that if the entire group is multiplied by any one of the symbols, either as further or nearer factor, the effect is simply to reproduce the group; ... (Papers II., str. 124)

A. Cayley dále zachytil grupovou operaci ve čtvercové tabulce a dodal:

... each line as each column of the square will contain all the symbols $1, \alpha, \beta, \ldots$ (Papers II., str. 124)

V dalším textu A. Cayley diskutoval některé příklady grup, zejména grupy zadané nějakými definujícími relacemi, a uvedl tabulky příslušných grupových operací. Na základě posledního příkladu zavedl pojem grupová algebra:

It is, I think, worth noticing, that if, instead of considering $\alpha, \beta,$ *&c. as symbols of operation, we consider them as quantities (or, to use a more abstract term, 'cogitables') such as the quaternion imaginaries; the equations expressing the existence of the group are, in fact, the equations defining the meaning of the product of two complex quantities of the form*

$$w + a\alpha + b\beta + \ldots;$$

thus, in the system just considered,

$$(w + a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta + e\varepsilon)(w' + a'\alpha + b'\beta + c'\gamma + d'\delta + e'\varepsilon) =$$

$$= W + A\alpha + B\beta + C\gamma + D\delta + E\varepsilon \ ,$$

where

$$\begin{aligned} W &= ww' + ab' + a'b + cc' + dd' + ee' \ , \\ A &= wa' + w'a + bb' + dc' + ed' + ce' \ , \\ B &= wb' + w'b + aa' + ec' + cd' + de' \ , \\ C &= wc' + w'c + da' + eb' + bd' + ae' \ , \\ D &= wd' + w'd + ea' + cb' + ac' + be' \ , \\ E &= we' + w'e + ca' + db' + bc' + ad' \ . \end{aligned}$$

(Papers II., str. 124, 129)

Strukturní teorii grupových algeber rozpracoval koncem 19. století Fjodor Eduardovič Molin (Theodor Molien, 1861–1941), zejména v pracích *Ueber Systeme höherer complexer Zahlen* z roku 1893 a *Eine Bemerkung zur Theorie der homogenen Substitutionsgruppen* z roku 1897.

Algebra matic

Roku 1858 publikoval A. Cayley svůj proslulý *A memoir on the theory of matrices*, v němž definoval sčítání a násobení čtvercových matic, násobení matice skalárem a uvedl základní vlastnosti těchto operací. Vytvořil tak další systém hyperkomplexních čísel (algebru dimenze n^2), jehož význam pro další rozvoj této teorie byl obrovský.

Matice řádu n s reálnými prvky tvoří systém hyperkomplexních čísel s n^2 základními jednotkami; formální rozdíl je jen v tom, že n^2 reálných složek zapisujeme do čtvercového schématu a základní jednotky zpravidla nejsou označeny zvláštními symboly; označíme-li symbolem E_{ij} matici řádu n, která má na místě ij jedničku a jinde samé nuly, pak lze každou matici $A = (a_{ij})$ řádu n vyjádřit jako lineární kombinaci

$$A = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} E_{ij} \ .$$

A. Cayley rovněž sestrojil izomorfní vnoření algebry kvaternionů do algebry komplexních matic druhého řádu; toto zobrazení je historicky první lineární reprezentací algebry. Každému kvaternionu $\alpha = a + b\,\mathrm{i} + c\,\mathrm{j} + d\,\mathrm{k}$ lze přiřadit matici

$$Q = \begin{pmatrix} a + d\,\mathrm{i} & b + c\,\mathrm{i} \\ -b + c\,\mathrm{i} & a - d\,\mathrm{i} \end{pmatrix} \ .$$

Toto zobrazení je homomorfismem vzhledem ke sčítání, k násobení i k násobení skalárem; navíc je modul (norma) každého kvaternionu roven determinantu příslušné matice, tj.

$$|\alpha| = \det Q \ .$$

Kvaternion $\alpha = a + b\,\mathrm{i} + c\,\mathrm{j} + d\,\mathrm{k}$ lze tedy vyjádřit ve tvaru

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \ ;$$

symbol i představuje komplexní jednotku, uvedené čtyři matice reprezentují po řadě kvaternionové jednotky 1, i, j, k. (Pozor: je třeba rozlišovat, kdy symbol i představuje komplexní jednotku a kdy jednu z jednotek tělesa kvaternionů!)

Bikvaterniony

Ve své knize *Lectures on quaternions* z roku 1853 zavedl W. R. Hamilton tzv. bikvaterniony – kvaterniony s komplexními koeficienty, kterým se dnes většinou říká hyperbolické bikvaterniony. Jejich základní jednotky označíme I, J, K, abychom je odlišili od komplexní jednotky i. Tato struktura však má netriviální dělitele nuly a nenulový bikvaternion může mít nulovou normu, jak vyplývá z následujících příkladů:

$$(\mathrm{i}+\mathrm{I})\cdot(\mathrm{i}-\mathrm{I})=0\;,\qquad |\sqrt{3}+\mathrm{i}\,\mathrm{I}+\mathrm{i}\,\mathrm{J}+\mathrm{i}\,\mathrm{K}|=0\;.$$

W. R. Hamilton mimo jiné napsal:

It must, however, be confessed that such calculations as these with biquaternions, or with mixed expressions involving $\mathrm{i}\,\mathrm{j}\,\mathrm{k}$ *and* $\sqrt{-1}$, *are sometimes very delicate, and require great caution, from the following circumstance, to which nothing analogous occurs in the theory of pure or single or real quaternions. This circumstance is that the PRODUCT OF TWO BIQUATERNIONS may vanish, without either factor separately vanishing. To give a very simple example, the product*

$$(\mathrm{k}+\sqrt{-1})(\mathrm{k}-\sqrt{-1})=\mathrm{k}^2+1=0\;.$$

While $\mathrm{k}+\sqrt{-1}$ *and* $\mathrm{k}-\sqrt{-1}$ *must each be considered as different from zero, if* k *be still one of the peculiar symbols of this calculus, while* $\sqrt{-1}$ *is the old imaginary. …* ([Hamilton, 1853], str. 650–651)

W. K. Clifford dospěl k dalším dvěma podobným strukturám. Roku 1873 publikoval práci *Preliminary sketch of biquaternions*, v níž prezentuje své úvahy o veličinách tvaru $\alpha+\omega\beta$, kde α,β jsou kvaterniony a pro novou jednotku ω platí $\omega^2=1$, resp. $\omega^2=0$.

O bikvaternionech se W. K. Clifford opět zmiňuje v práci *Applications of Grassmann's extensive algebra* z roku 1878:

… This form is what I have called a biquaternion, and may be easily exhibited as such. Namely, … we have …

$$\omega^2=1\;.$$

Therefore, the product of any even number of factors greater than two is a linear function of $1,\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k},\omega,\omega\,\mathrm{i},\omega\,\mathrm{j},\omega\,\mathrm{k}$; *that is to say, it is of the form* $q+\omega r$, *where* q, r *are quaternions.* (Papers, str. 270)

V článku *Further note on biquaternions* z roku 1876 píše:

Let now ω *be the operation which converts any rotor into an equal rotor along the polar line of its axis. …*

Consider two motors

$$\xi\alpha+\eta\beta\;,\quad \xi\gamma+\eta\delta\;,\quad \textit{and let}\quad \gamma\alpha^{-1}=p\;,\quad \delta\beta^{-1}=q\;,$$

so that p *and* q *are known quaternions; then we have*

$$\begin{aligned}(\xi p+\eta q)(\xi\alpha+\eta\beta)&=\xi p\alpha+\eta q\beta\\&=\xi\gamma+\eta\delta\;.\end{aligned}$$

Thus the ratio of two motors is a quantity of the form $\xi p+\eta q$, or, which is the same thing,

$$s+\omega t \quad (\textit{if} \;\; 2s=p+q, \;\; t=2p-q) \;,$$

where p, q, s, t are quaternions. This combination of two quaternions I have called a Biquaternion. (Papers, str. 393–394)

Cliffordovým bikvaternionům se dnes říká eliptické a parabolické bikvaterniony. Není obtížné ukázat, že druhý typ jeho algebry bikvaternionů je direktním součtem dvou exemplářů tělesa kvaternionů.

Na Cliffordovy myšlenky z roku 1873 navázal Christian Felix Klein (1849–1925) v práci *Zur Nicht-Euklidischen Geometrie* (1890). Cliffordovy myšlenky o bikvaternionech využil roku 1891 Eduard Study (1862–1922) v článku *Von den Bewegungen und Umlegungen* a v přednášce *Ältere und neuere Untersuchungen über Systeme complexer Zahlen* přednesené o tři roky později na mezinárodním matematickém kongresu (Chicago, 1893). Viz [Study, 1896].

Duální a dvojná čísla

Počátek teorie duálních a dvojných čísel se váže k výše uvedené Cliffordově práci *Preliminary sketch of biquaternions* z roku 1873, v níž se základní myšlenka těchto struktur objevila.

Duální, resp. dvojná čísla jsou výrazy tvaru $a+b\omega$, kde a, b jsou reálná čísla a pro jednotku ω platí $\omega^2=0$, resp. $\omega^2=1$; jedná se tedy o určitou modifikaci komplexních čísel. Algebry duálních a dvojných čísel však mají netriviální dělitele nuly (jsou to čísla tvaru $a\omega$, resp. $a(1\pm\omega)$). Duální čísla se nyní většinou zapisují ve tvaru $a+b\varepsilon$, kde $\varepsilon^2=0$, a dvojná čísla ve tvaru $a+b\,\mathrm{e}$, kde $\mathrm{e}^2=1$. Násobení duálních čísel je dáno vzorcem

$$(a+b\varepsilon)(c+d\varepsilon)=ac+(ad+bc)\varepsilon \;,$$

násobení dvojných čísel vzorcem

$$(a+b\,\mathrm{e})(c+d\,\mathrm{e})=(ac+bd)+(ad+bc)\,\mathrm{e} \;.$$

E. Study uvedl roku 1893 duální a dvojná čísla v souvislost s bikvaterniony v textu své výše zmíněné přednášky ([Study, 1896], str. 368–369):

… die von Clifford eingeführten Biquaternionen, von deren Anwendung auf die Geometrie des Raumes ihr Urheber sich den grössten Nutzen versprach. Die Biquaternionen sind ursprünglich nichts Anderes als Quaternionen mit gewöhnlichen complexen Zahlencoefficienten. Fasst man aber die Quaternioneneinheiten und ihre Producte mit der imaginären Einheit $\sqrt{-1}$ wiederum als neue Einheiten auf, so erhält man ein neues System, ein System mit acht Haupteinheiten, das, wie man sagen kann, durch „Multiplication“ aus dem Quaternionensystem Q und dem System der gewöhnlichen complexen Zahlen $\varepsilon_0=1$, $\varepsilon_1=\sqrt{-1}$, oder besser, aus Q und dem System

$$\varepsilon_0^2=\varepsilon_0 \;, \quad \varepsilon_0\varepsilon_1=\varepsilon_1\varepsilon_0=\varepsilon_1 \;, \quad \varepsilon_1^2=-\varepsilon_0 \tag{1}$$

hervorgegangen ist. An Stelle des Systems (1) *konnte Clifford noch eines der folgenden beiden Systeme von zwei Haupteinheiten setzen:*

$$\varepsilon_0^2 = \varepsilon_0 \;, \quad \varepsilon_0\varepsilon_1 = \varepsilon_1\varepsilon_0 = \varepsilon_1 \;, \qquad \varepsilon_1^2 = 0 \;, \tag{2}$$

$$\varepsilon_0^2 = \varepsilon_0 \;, \quad \varepsilon_0\varepsilon_1 = \varepsilon_1\varepsilon_0 = \varepsilon_1 \;, \quad \varepsilon_1^2 = +\varepsilon_0 \;. \tag{3}$$

Dvojná čísla se rovněž nazývají parakomplexní čísla, štěpitelná komplexní čísla, resp. eliptická komplexní čísla – jedná se o direktní součet dvou exemplářů tělesa reálných čísel. Duální čísla se též nazývají parabolická komplexní čísla (a obyčejná komplexní čísla se nazývají hyperbolická komplexní čísla).

Není obtížné ukázat, že každá reálná algebra dimenze dva s jednotkovým prvkem, tj. algebra prvků tvaru $a+b\omega$, kde a, b jsou reálná čísla a $\omega^2 = p+q\omega$, je izomorfní s algebrou komplexních, duálních nebo dvojných čísel. Viz např. [Bečvář, 1993]. Duální a dvojná čísla (a samozřejmě i komplexní čísla) se s úspěchem užívají v geometrii; duální čísla figurují také v tzv. šroubovém počtu.

Antikvaterniony

Od kvaternionů jsou odvozeny tzv. antikvaterniony (též štěpitelné kvaterniony), výrazy tvaru $a + b\,\mathrm{i} + c\,\mathrm{e} + d\,\mathrm{f}$, kde a, b, c, d jsou reálná čísla a i, e, f nové jednotky, pro jejichž násobení platí:

$\cdot$	1	i	e	f
1	1	i	e	f
i	i	-1	f	$-$ e
e	e	$-$ f	1	$-$ i
f	f	e	i	1

K antikvaternionu $\alpha = a + b\,\mathrm{i} + c\,\mathrm{e} + d\,\mathrm{f}$ je sdruženým antikvaternionem prvek

$$\overline{\alpha} = a - b\,\mathrm{i} - c\,\mathrm{e} - d\,\mathrm{f} \;,$$

modul antikvaternionu α je definován vztahem

$$|\alpha| = a^2 + b^2 - c^2 - d^2 \;.$$

Přitom platí

$$\overline{\alpha \cdot \beta} = \overline{\beta} \cdot \overline{\alpha} \qquad \text{a} \qquad |\alpha| = \alpha \cdot \overline{\alpha} \;.$$

Platí i zákon modulů:

$$|\alpha| \cdot |\beta| = |\alpha \cdot \beta| \;.$$

Antikvaternion $\alpha = a + b\,\mathrm{i} + c\,\mathrm{e} + d\,\mathrm{f}$ můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci čtyř matic:

$$a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ;$$

uvedené čtyři matice reprezentují po řadě jednotky 1, i, e, f. Přitom je determinant výsledné matice roven modulu antikvaternionu.

Grassmannova a Cliffordova algebra

Hermann Grassmann (1809–1877) sestrojil ve své knize *Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik* (1844) a v jejím přepracovaném vydání *Die Ausdehnungslehre. Vollständig und in strenger Form bearbeitet* (1862) tzv. Grassmannovu neboli vnější algebru n-tého řádu. Modifikoval ji německý matematik Hermann Hankel (1839–1873), později k ní byl přidán jednotkový prvek.

Při konstrukci Grassmannovy algebry dnes vycházíme z $n+1$ základních jednotek $1, \mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \ldots, \mathrm{e}_n$, z nichž vytvoříme výrazy

$$a + \sum_{i=1}^{n} a_i\,\mathrm{e}_i + \sum_{i<j} a_{ij}\,\mathrm{e}_i\,\mathrm{e}_j + \cdots + \sum_{i_1<\cdots<i_r} a_{i_1\ldots i_r}\,\mathrm{e}_{i_1}\ldots\,\mathrm{e}_{i_r} + a_{12\ldots n}\,\mathrm{e}_1\,\mathrm{e}_2\ldots\,\mathrm{e}_n ,$$

kterým se říká Grassmannova čísla n-tého řádu. Násobení těchto výrazů definujeme pomocí distributivního zákona a rovností

$$\mathrm{e}_i^2 = 0 , \qquad \mathrm{e}_i\,\mathrm{e}_j = -\,\mathrm{e}_j\,\mathrm{e}_i \quad \text{pro} \quad i \neq j ;$$

např. $\mathrm{e}_1\,\mathrm{e}_2\,\mathrm{e}_4 \cdot \mathrm{e}_2\,\mathrm{e}_5 = 0$ a $\mathrm{e}_1\,\mathrm{e}_2\,\mathrm{e}_4 \cdot \mathrm{e}_3 = -\,\mathrm{e}_1\,\mathrm{e}_2\,\mathrm{e}_3\,\mathrm{e}_4$. Snadno lze prověřit, že násobení Grassmannových čísel je asociativní. Jednoduchou kombinatorickou úvahou zjistíme, že Grassmannova čísla mají

$$1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

složek, tj. jedná se o algebru dimenze 2^n. Poznamenejme, že pro $n = 1$ dostáváme algebru duálních čísel.

Grassmannovu algebru modifikoval roku 1878 W. K. Clifford. Vyšetřoval, podobně jako H. Grassmann, lineární kombinace základních jednotek $1, \mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \ldots, \mathrm{e}_n$ a jejich součinů, místo Grassmannova vztahu $\mathrm{e}_i^2 = 0$ však požadoval platnost rovnosti $\mathrm{e}_i^2 = -1$. Je tedy např. $\mathrm{e}_1\,\mathrm{e}_2 \cdot \mathrm{e}_1 = -\,\mathrm{e}_1^2\,\mathrm{e}_2 = \mathrm{e}_2$. Asociativitu násobení je rovněž možno snadno prověřit. V práci *Applications of Grassmann's extensive algebra*[7] z roku 1878 W. K. Clifford píše:

In general, if we consider an algebra of n units, $\iota_1, \iota_2, \ldots \iota_n$, *such that* $\iota_r^2 = -1$, $\iota_r\iota_s = -\iota_s\iota_r$, *a product of m linear factors will contain terms which*

[7] V odstavci nazvaném *Rules of multiplication in an algebra of n units.*

are all of even order if m is even, and all of odd order if m is odd; for the substitution of -1 for any square factor of a term reduces the order of the term by 2. ...

The square of a term of the m^{th} order is $+1$ or -1 according as the integer part of $\frac{1}{2}(m+1)$ is even or odd. For the product $\iota_1\iota_2\ldots\iota_m\iota_1\iota_2\ldots\iota_m$ is transformed into $\iota_1^2\iota_2^2\ldots\iota_m^2$ by $\frac{1}{2}m(m-1)$ changes of consecutive factors, and therefore equals ±1 according as $\frac{1}{2}m(m+1)$ is even or odd, which is equivalent to the rule stated. (Papers, str. 271–272)

Algebra vytvořená W. K. Cliffordem dnes nese jeho jméno, její prvky se nazývají Cliffordova čísla n-tého řádu. Jedná se o algebru dimenze 2^n. Pro $n = 1$ dostáváme komplexní čísla, pro $n = 2$ kvaterniony, pro $n = 3$ eliptické bikvaterniony. Pro větší n však již v Cliffordově algebře existují netriviální dělitelé nuly. Cliffordova algebra tedy zobecňuje kvaterniony v jiném smyslu než oktávy. Jak jsme již viděli, v algebře oktáv neplatí asociativní zákon, ale neexistují netriviální dělitelé nuly (je možno dělit). V Cliffordově algebře je tomu naopak – násobení je asociativní, ale existují netriviální dělitelé nuly (nelze dělit).

Geometrické interpretace Cliffordových čísel (popis rotací ve vícerozměrném prostoru) ukázal roku 1886 Rudolf Lipschitz (1832–1903) v práci *Untersuchungen über die Summen von Quadraten.* Fyzikálními aplikacemi Cliffordových čísel (kvantová teorie elektronu) se roku 1928 zabýval Paul Adrien Maurice Dirac (1902–1984) a roku 1935 Richard Dagobert Brauer (1901–1977) a Hermann Weyl (1885–1955). Teorii Cliffordových čísel zobecnil roku 1954 Claude Chevalley (1909–1984).

Jestliže v definici Cliffordovy algebry zaměníme podmínku $\mathrm{e}_i^2 = -1$ podmínkou

$$\mathrm{e}_i^2 = 1 \quad \text{pro} \quad i = 1, \ldots, k \quad \text{a} \quad \mathrm{e}_i^2 = 0 \quad \text{pro} \quad i = k+1, \ldots, n\ ,$$

získáme další typ algebry. Pro $n = k = 1$ se jedná o dvojná čísla, pro $n = 2, k = 1$, resp. pro $n = k = 2$ o antikvaterniony, a pro $n = 3, k = 1$ o hyperbolické bikvaterniony.

3. Lineární asociativní algebry

Ve čtyřicátých, padesátých a šedesátých letech 19. století se postupně nashromáždilo velké množství obecnějších poznatků i konkrétních příkladů systémů hyperkomplexních čísel; v nejlepším slova smyslu lze hovořit o rodící se teorii.

Velká pozornost byla věnována nejprve kvaternionům. Kromě obou rozsáhlých Hamiltonových monografií z let 1853 a 1866 vyšel již roku 1862 spisek *Essai sur le calcul des quaternions de M. W. Hamilton* od Alexandrea Allégreta a roku 1867 kniha *An elementary treatise on quaternions*, jejímž autorem je Peter Guthrie Tait (1831–1901).[8] Byla velmi úspěšná, její druhé vydání je z roku 1873, německý překlad z roku 1880, francouzský z let 1882 až 1884. V sedmdesátých letech se objevily další texty o kvaternionech – Philip Kelland, Peter Guthrie Tait: *Introduction to quaternions, with numerous examples* (1873, 2. vydání 1881, 3. vydání 1904), Guillaume Jules Hoüel (1823–1886): *Eléments de la théorie des quaternions* (1874). Kniha *Theorie der goniometrischen und der longimetrischen Quaternionen, zugleich als Einführung in die Rechnung mit Punkten und Vectoren*, kterou vydal Karl Wilhelm Unverzagt roku 1876, má v závěru krátký přehled o vzniku a vývoji teorie kvaternionů.

Poznamenejme ještě, že roku 1895 byla na Yale University v New Havenu (Connecticut) založena *International Association for Promoting the Study of Quaternions and Allied Systems of Mathematics*; během první světové války tato společnost zanikla.

Jedním z prvních textů obecnějšího charakteru, který ukazoval cestu od komplexních čísel ke kvaternionům, byla kniha H. Hankela nazvaná *Theorie der complexen Zahlensysteme, insbesondere der gemeinen imaginären Zahlen und der Hamilton'schen Quaternionen nebst ihrer geometrischen Darstellung.* Byla vydána roku 1867 jako první díl plánovaného rozsáhlejšího celku nazvaného *Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Functionen.* Zůstalo bohužel pouze u prvního dílu, žádný další svazek již nevyšel.

Benjamin Peirce

Problematiku hyperkomplexních čísel postavil na obecnější a abstraktnější základ B. Peirce (1809–1880), který vytvořil pojem *lineární asociativní algebra.*

Byl to americký astronom, matematik a filozof. Nejprve působil jako učitel matematiky na různých institucích, potom jako profesor matematiky a přírodní filozofie a později jako profesor astronomie a matematiky na univerzitě v Harvardu. Sestavil tabulky pohybu Neptunu a Měsíce, vypočítal dráhy mnoha komet, sepsal teoretické práce o Saturnových prstencích. S jeho jménem je spojeno pravidlo pro vyloučení podezřelých pozorování. Intenzivně se zabýval též matematikou, zejména v posledním období svého života. Zkoumal systémy hyperkomplexních čísel, pokusil se je klasifikovat a vytvořit jejich přehled.

Peirceova práce *Linear associative algebra* byla roku 1870 čtena v Americké akademii věd ve Washingtonu. Litograficky bylo vyrobeno sto exemplářů, řadu z nich B. Peirce rozeslal svým přátelům. Úvodní oslovení *To my friends* začíná osobním vyznáním: *This work has been the pleasantest mathematical effort of my life.*[9]

Roku 1881, rok po Peirceově smrti, byla jeho práce *Linear associative algebra* publikována v časopise American Journal of Mathematics. Do tisku ji připravil

---

[8] Poznamenejme, že P. G. Tait napsal slovníková hesla *Hamilton* (1880) a *Quaternions* (1886) pro Encyclopedia Britannica – viz Papers II., str. 440–444, 445–456.

[9] Naskenovaná Peirceova práce (153 stran) je dostupná na adrese http://www.math.harvard.edu/history/peirce_algebra/001.html.

syn Charles Sanders Peirce (1839–1914), který k ní připojil několik svých poznámek.

Benjamin Peirce začal svůj spis delšími úvahami o matematice a algebře. Navázal tak na myšlenky o novém, abstraktním pojetí algebry (nauka o symbolech a pravidlech pro práci s nimi), které během několika předchozích desetiletí stále sílily. Již v první polovině 19. století rozvíjeli takovéto úvahy zejména George Peacock (1791–1858) – [Peacock, 1830, 1834, 1845], Auguste de Morgan – [Morgan, 1842, 1849], Duncan Farquharson Gregory (1813–1844) – [Gregory, 1840], J. Warren – [Warren, 1828, 1829], George Boole (1815–1864) – [Boole, 1847], W. R. Hamilton a další matematici. Algebra se v té době pomalu přetvářela, postupně sílila problematika vedoucí k pozdější algebře struktur. Podrobněji o vývoji algebry v této době viz např. [Nový, 1973], [Kolmogorov, Juškevič, 1978] apod.

Po delším obecném úvodu začal B. Peirce v krátkých číslovaných odstavcích postupně budovat pojem lineární asociativní algebry. Jeho výklad postupuje v duchu předchozích úvah; ve srovnání s dnešním stručným a efektivním axiomatickým způsobem zavádění pojmů se nám Peirceův přístup jeví zdlouhavý, neohrabaný a nepříliš srozumitelný. Uveďme obšírnou ukázku.

8. Algebras may be distinguished from each other by the number of their independent fundamental conceptions, or of the letters of their alphabet. Thus an algebra which has only one letter in its alphabet is a single algebra; one which has two letters is a double algebra; one of three letters a triple algebra; one of four letters a quadruple algebra, and so on. …

Each fundamental conception may be called a unit; and thus each unit has its corresponding letter, and the two words, unit and letter, may often be used indiscriminately in place of each other, when it cannot cause confusion.

9. The present investigation, not usually extending beyond the sextuple algebra, limit the demand of the algebra for the most part to six letters; and the six letters, i, j, k, l, m and n, will be restricted to this use except in special cases. ([Peirce, 1881], str. 99)

14. Letters which are not appropriated to the alphabet of the algebra may be used in any convenient sense. But it is well to employ the small letters for expressions of common algebra, and the capital letters for those of the algebra under discussion. ([Peirce, 1881], str. 101)

*20. The sign + is called plus in common algebra and denotes addition. …
… so that it may be assumed that*

$$A + B = B + A$$

and

$$(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C\ .$$

21. The sign − is called minus in common algebra, and denotes subtraction. … This gives the equations

$$A + B - B = A - B + B = A$$

and

$$B - B = 0 \ .$$

([Peirce, 1881], str. 102–103)

25. When an expression raised to the square or any higher power vanishes, it may be called nilpotent; but when, raised to a square or higher power, it gives itself as the result, it may be called idempotent.

The defining equation of nilpotent and idempotent expressions are respectively $A^n = 0$*, and* $A^n = A$*; but with reference to idempotent expressions, it will always be assumed that they are of the form*

$$A^2 = A \ ,$$

unless it be otherwise distinctly stated. ([Peirce, 1881], str. 104)

… there is the equation

$$Aa = aA \ ,$$

and in such a product, the quantity a *may be called the coefficient.*

In like manner, terms which only differ in their coefficients, may be added by adding their coefficients; thus

$$(a \pm b)A = aA \pm bA = Aa \pm Ab = A(a \pm b) \ .$$

… The distributive principle of multiplication may be adopted; namely, the principle that the product of an algebraic sum of factors into or by a common factor, is equal to the corresponding algebraic sum of the individual products of the various factors into or by the common factor; and it is expressed by the equations

$$(A \pm B)C = AB \pm BC \ ,$$

$$C(A \pm B) = CA \pm CB \ .$$

32. The associative principle of multiplication may be adopted; namely, that the product of successive multiplications is not affected by the order in which the multiplications are performed, provided there is no change in the relative position of the factors; and it is expressed by the equations

$$ABC = (AB)C = A(BC) \ .$$

This is quite an important limitation, and the algebras which are subject to it will be called associative.

33. The principle that the value of a product is not affected by the relative position of the factors is called the commutative principle, and is expressed by the equation

$$AB = BA \ .$$

This principle is not adopted in the present investigation.

34. An algebra in which every expression is reducible to the form of an algebraic sum of terms, each of which consists of a single letter with a quantitative coefficient, is called a linear algebra. Such are all the algebras of the present investigation. ([Peirce, 1881], str. 106–107)

38. All the expressions of an algebra are distributive, whenever the distributive principle extends to all the letters of the alphabet. …

39. An algebra is associative whenever the associative principle extends to all the letters of its alphabet. …

40. In every linear associative algebra, there is at least one idempotent or one nilpotent expression. … ([Peirce, 1881], str. 108–109)

Jak je vidět z předchozího textu, B. Peirce zavedl dva důležité pojmy – nilpotentní a idempotentní prvek.[10] Je-li i idempotentní prvek, potom se každý prvek $a \in A$ dá zapsat ve tvaru

$$a = ia + (a - ia)$$

(tzv. pravý Peirceův rozklad), kde pro prvek $u = ia$ je $iu = u$ a pro prvek $v = a - ia$ je $iv = 0$. Podobně se vytvoří levý rozklad. Oboustranným Peirceovým rozkladem rozumíme rozklad

$$a = ai + (ia - iai) + (ai - iai) + (a - ia - ai + iai) \ .$$

B. Peirce vyšetřoval mnoho různých algeber (maximálně dimenze 6); vytvořil jejich seznam, který však nebyl úplný. Vycházel ze své teorie nilpotentních a idempotentních prvků a ze vztahů mezi základními jednotkami; jednotlivé algebry popisoval multiplikativními tabulkami, v nichž je násobení základních jednotek zachyceno.[11]

Podstatná část Peirceovy práce, která je nazvána *Investigation of special algebras* (str. 119–215), je věnována přehledu algeber dimenzí 1 až 6 (*single, algebra, double algebra, triple algebra, quadruple algebra, quintuple algebra, sextuple algebra*).

Závěrečnou část práce tvoří *Addenda*; tyto poznámky připojil jednak Benjamin Peirce (str. 216–221), jednak jeho syn Charles Sanders Peirce (str. 221–229).

O vzniku a vývoji teorie hyperkomplexních čísel a lineárních asociativních algeber viz např. [Newton, 1881], [Hawkes, 1902], [Archibald, 1925, 1927], [Kuroš, 1951], [Peterson, 1955], [Širšov, 1958], [Crowe, 1967], [Lenzen, 1968, 1973], [Hawkins, 1972], [Nový, 1974], [Rozenfel'd, 1976], [Pycior, 1979], [Waerden, 1985], [Parshall, 1985], [Bečvář, 1988], [Borel, 2001] atd.

---

[10] Prvek x se nazývá nilpotentní, existuje-li přirozené číslo k, pro něž $x^k = 0$. Prvek y se nazývá idempotentní, jestliže $y^2 = y$. Idempotentními prvky jsou například dvojná čísla tvaru $\frac{1}{2}(1 \pm \mathrm{e})$, nilpotentní je např. duální číslo ε apod.

[11] Poznamenejme, že E. Study sestavil roku 1890 v práci *Über Systeme complexer Zahlen und ihre Anwendungen in der Theorie der Transformationsgruppen* seznam všech reálných a komplexních asociativních algeber s jednotkovým prvkem dimenze nejvýše čtyři.

O Peirceově přínosu k teorii lineárních asociativních algeber viz např. [Nový, 1974], [Pycior, 1979], [Schlote, 1983].

Dnešní pohled

Lineární asociativní algebru nad komutativním tělesem T dnes definujeme jako množinu A se dvěma binárními operacemi (sčítáním a násobením) a s násobením prvků množiny A prvky tělesa T; prvky tělesa T nazýváme skaláry. Vzhledem ke sčítání a k násobení skaláry je množina A vektorovým (lineárním) prostorem nad tělesem T, vzhledem ke sčítání a násobení je asociativním okruhem a binární násobení je s násobením skaláry svázáno podmínkou

$$\forall a \in T \quad \forall \xi, \eta \in A \quad (a\xi)\eta = a(\xi\eta) = \xi(a\eta) \; .$$

Dimenzí lineární asociativní algebry rozumíme dimenzi příslušného vektorového prostoru. Je-li T těleso reálných, resp. komplexních čísel, hovoříme o reálné, resp. komplexní algebře.

Poznamenejme, že z vektorového prostoru je možno vytvořit lineární asociativní algebru zavedením vhodného binárního násobení – stačí definovat součin každých dvou vektorů libovolně zvolené báze. Jestliže je

$$\mathfrak{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$$

nějaká báze vektorového prostoru A, potom jsou prvky prostoru A vyjádřeny ve tvaru $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n$, kde $x_i \in T$, a pro definici násobení stačí stanovit součiny $\alpha_i \cdot \alpha_j$ pro každé $i, j = 1, \ldots, n$ jako lineární kombinace vektorů báze $\mathfrak{B}$, tj.

$$\alpha_i \cdot \alpha_j = \sum_{k=1}^{n} A_{ij}^k \alpha_k \; .$$

Tyto vztahy se nazývají strukturní vzorce algebry A a skaláry A_{ij}^k strukturní konstanty algebry A. Pomocí strukturních vzorců se pak (s pomocí distributivních zákonů) násobí obecné prvky. Násobení vektorů báze však nelze definovat zcela libovolně, neboť požadovaná asociativita násobení klade značná omezení.

W. R. Hamilton a další matematici postupovali ve čtyřicátých a padesátých letech minulého století výše naznačeným způsobem. Hledali strukturní vzorce, tj. formule pro násobení základních jednotek – prvků báze vektorového prostoru všech n-tic reálných čísel (pro pevně zvolené n). Často požadovali, aby operace násobení měla některé další vlastnosti. Zejména se jednalo o existenci jednotkového prvku a o možnost dělení (komutativity a asociativity násobení byli někdy nuceni – jak jsme již viděli – se nakonec vzdát). Tím bylo hledání strukturních vzorců značně zkomplikováno.

Definici lineární asociativní algebry vyhovují Hamiltonovy kvaterniony, triplety A. de Morgana a C. Gravese, Cayleyovy matice, duální a dvojná čísla, Grassmannova i Cliffordova algebra. Lineární asociativní algebru však netvoří ani oktávy, ani algebra vektorů v trojrozměrném prostoru s vektorovým součinem, ani mnohé algebry A. de Morgana, neboť v těchto strukturách neplatí asociativní zákon. Vzdáme-li se asociativity násobení, můžeme hovořit o neasociativních lineárních algebrách; takovéto algebry se začaly hlouběji studovat až koncem 19. století.

Další výsledky

V poslední čtvrtině 19. století a v prvních desetiletích 20. století se obecnou teorií hyperkomplexních čísel zabývala řada matematiků.

K. T. Weierstrass (1815–1897) se věnoval problematice algeber již v šedesátých letech 19. století ve svých přednáškách na berlínské univerzitě. Vyšetřoval direktní součty konečně mnoha algeber (báze direktního součtu vznikne sjednocením bází jednotlivých algeber, přičemž je součin dvou prvků takto vytvořené báze roven nule, jedná-li se o prvky dvou různých algeber) a dokázal, že každá reálná komutativní algebra (konečné dimenze) bez nilpotentních prvků je direktním součtem několika exemplářů těles reálných a komplexních čísel. Toto tvrzení bylo jedním z prvních strukturních výsledků v algebře. Vezmeme-li např. tzv. algebru cyklických čísel, tj. algebru s bází $\{1, e, e^2, e^3, \ldots, e^{n-1}\}$, kde $e^n = 1$, potom pro n liché se jedná o direktní součet $\frac{1}{2}(n-1)$ těles komplexních čísel a jednoho tělesa reálných čísel a pro n sudé o direktní součet $\frac{1}{2}n - 1$ těles komplexních čísel a dvou těles reálných čísel. Odtud např. vyplývá, že algebra dvojných čísel ($n = 2$) je direktním součtem dvou těles reálných čísel a algebra tripletů ($n = 3$) direktním součtem tělesa reálných čísel a tělesa komplexních čísel.

V osmdesátých letech se problematikou hyperkomplexních čísel zabýval český matematik Eduard Weyr. V práci *Sur la théorie des quaternions* z roku 1884 ukázal, jak převést řešení rovnice

$$a_0 x^n b_0 + a_1 x^{n-1} b_1 + \cdots + a_{n-1} x b_{n-1} = r \ ,$$

kde $a_0, b_0, \ldots, a_{n-1}, b_{n-1}, r$ jsou dané kvaterniony a x hledaný kvaternion, na řešení obyčejných číselných rovnic. Navázal na nedávné Sylvesterovy výsledky o řešení rovnic, v nichž je neznámý kvaternion x násoben koeficienty pouze z jedné strany. J. J. Sylvester reagoval na intenzivní rozpracovávání svých výsledků v časopise Nature takto:

The subject could not be in better hands. The ball is served, and the most skilful and practised players – the Cayleys, the Lipschitzes, the Poincarés, the Weyrs, the Buchheims (and who knows how many more?) – stand round ready to receive it, and keep it flying in the air. ([Sylvester, 1884], str. 36)

V čtyřicetistránkové práci *O binarných matricích* z roku 1887 se Eduard Weyr věnoval maticím druhého řádu a mimo jiné poukázal na jejich úzký vztah ke kvaternionům. V úvodu napsal:

V jedné ze svých úvah o matricích … vytknul Sylvester výslovně totožnost theorie binarných matric s theorií kvaternionů; ale již Cayley … byl k souvislosti obou theorií poukázal.

Theorie kvaternionů založena Hamiltonem vzhledem k zamýšleným applikacím na úvahách geometrických; avšak nebude zajisté nezajímavo přihlédnouti k ní se stanoviska ryze počtářského, zaujatého v theorii matric.

Následující, arci velice elementarné úvahy obsahují základy theorie binarných matric a tím i základy theorie kvaternionů. ([Weyr, 1887], str. 358)

Vztahu kvaternionů a matic se Eduard Weyr věnoval v posledních dvou paragrafech; pracoval s kvaterniony s reálnými, resp. komplexními koeficienty, v závěru ukázal, kdy pro daný kvaternion q reprezentuje řada

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k q^k$$

opět určitý kvaternion.

V práci *Sur la réalisation des systèmes associatifs de quantités complexes à l'aide des matrices* z roku 1887 sestrojil Eduard Weyr reprezentaci lineární asociativní algebry dimenze n v algebře matic řádu n; k obdobným výsledkům došli dříve C. S. Peirce a Henri Poincaré (1854–1912).

V práci *Note sur la théorie des quantités complexes formées avec n unités principales* z roku 1887 studoval lineární asociativní algebru A dimenze n nad tělesem reálných či komplexních čísel a došel k tomuto významnému výsledku: pro daný prvek $x \in A$ definuje nekonečný součet

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$$

zcela určitý prvek y algebry A právě tehdy, když kořeny minimálního polynomu prvku x leží uvnitř kruhu konvergence mocninné řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k z^k$. Za uvedených předpokladů vyjádřil Eduard Weyr prvek

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$$

jako lineární kombinaci prvků $x, x^2, \ldots, x^{m-1}$, kde m je stupeň minimálního polynomu prvku x. Za předpokladu, že algebra A má jednotkový prvek a k prvku x existuje prvek inverzní, nalezl nutnou a postačující podmínku pro konvergenci řady $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_k x^k$. Vzhledem k tomu, že matice řádu n tvoří lineární asociativní algebru dimenze n^2, je možno výsledky této práce snadno přepsat v maticové řeči. Eduard Weyr to ostatně udělal již ve výše zmíněné práci *O binarných matricích* pro matice druhého řádu, v samostatně vydaném spise *O theorii forem bilinearných* (1889) a v jeho německé verzi *Zur Theorie der bilinearen Formen*, která vyšla roku 1890 v prvním ročníku časopisu

Monatshefte für Mathematik und Physik. Podrobněji o Weyrových výsledcích viz [Bečvář, 1995].

V sedmdesátých až devadesátých letech 19. století se kvaternionům věnovalo několik českých matematiků. Byli to František Josef Studnička (1836–1903), Josef Odstrčil (1837–1888), August Seydler (1849–1891) a Anton Puchta (1851–1903). F. J. Studnička sepsal k padesátému výročí objevu kvaternionů drobnou knížku *O kvaternionech* (1894), několik let byl tajemníkem (pro Rakousko-Uhersko) mezinárodní společnosti pro studium kvaternionů. Viz [Odstrčil, 1879], [Seydler, 1881], [Puchta, 1887], [Studnička, 1876, 1883, 1894]; podrobněji o těchto výsledcích viz [Bečvářová-Němcová, 1998].

Značný význam pro teorii hyperkomplexních čísel měl rozvoj tzv. Lieových grup a Lieových algeber, které začal studovat norský matematik Sophus Lie (1842–1899) v souvislosti se svým vyšetřováním spojitých grup transformací. Závažné výsledky o těchto algebrách podali zejména v sedmdesátých a osmdesátých letech 19. století Wilhelm Karl Joseph Killing (1847–1923), Friedrich Engel (1861–1941), Elie Cartan (1869–1951) a další.

Připomeňme, že Lieovou algebrou rozumíme algebru, v níž pro libovolně zvolené prvky x, y, z platí vztahy

$$x^2 = 0 \,, \qquad x(yz) + y(zx) + z(xy) = 0 \,;$$

druhá rovnost je tzv. Jacobiho identita.[12] Lieovy algebry mohou být vytvořeny z libovolné asociativní algebry zavedením nového násobení $\circ$ definovaného rovností $x \circ y = xy - yx$. O Lieových algebrách viz např. [Jacobson, 1962].

E. Study uvedl roku 1890 čtrnáctý paragraf *Der Nutzen der Systeme complexer Zahlen* své práce *Über Systeme complexer Zahlen und ihre Anwendungen in der Theorie der Transformationsgruppen* touto zajímavou poznámkou:

In weiten Kreisen, namentlich in Deutschland, ist die Ansicht verbreitet, dass die Systeme von complexen Zahlen oder ähnliche Algorithmen überhaupt gar keinen Nutzen hätten, ausgenommen allein die gewöhnlichen complexen Zahlen; und man begründet dies damit, dass durch sie nichts geleistet werden könnte, was nicht „ebenso gut“ auch ohne sie zu leisten wäre.
([Study, 1890], str. 341–342)

Georg Wilhelm Scheffers (1866–1945), F. E. Molin a G. Frobenius zavedli tzv. jednoduché algebry (algebry bez ideálů), polojednoduché algebry (algebry bez nilpotentních prvků) a definovali radikál (ideál tvořený všemi nilpotentními prvky). Tyto pojmy byly převzaty z teorie Lieových algeber. Výše zmíněná Weierstrassova strukturní věta tedy popisuje komutativní polojednoduché algebry.

V roce 1893 podal F. E. Molin kritérium polojednoduchosti algebry a ukázal, že faktorová algebra každé algebry podle jejího radikálu je polojednoduchá a že každá polojednoduchá algebra je izomorfní s direktním součtem jednoduchých

[12] Důsledkem je tzv. antikomutativnost $xy = -yx$.

algeber. Dokázal též, že každá jednoduchá algebra nad tělesem komplexních čísel je izomorfní s algebrou komplexních matic. Roku 1898 dokázal analogické věty pro reálné jednoduché algebry E. Cartan. Např. každá reálná jednoduchá nekomutativní algebra je izomorfní buď s algebrou reálných matic, nebo s algebrou komplexních matic, nebo s algebrou matic, jejichž prvky jsou kvaterniony. Viz [Molien, 1893], [Cartan, 1898].

H. E. Hawkes v článku *On hypercomplex number systems* z roku 1902 zjednodušil a zpřehlednil výsledky týkající se Peirceových rozkladů.[13] Postupně sílily snahy po řádné klasifikaci a po strukturním popisu algeber. G. Frobenius publikoval roku 1903 obsažnou práci *Theorie der hypercomplexen Grössen*, James Byrnie Shaw vydal v témže roce delší článek *Theory of linear associative algebra*, v němž kladl velký důraz na maticové algebry.

Na počátku 20. století byly k dispozici dva přehledové články o teorii komplexních a hyperkomplexních čísel napsané pro německou a francouzskou matematickou encyklopedii:

E. Study: *Theorie der gemeinen und höheren komplexen Grössen* (1898),

E. Cartan, E. Study: *Nombres complexes* (1908).

V té době již podstatně narostl objem nových poznatků. Byly kompletovány seznamy asociativních algeber malých dimenzí, teorie se rozvíjela do šířky i do hloubky. Došlo k výraznému zobecňování studované problematiky, začaly se vyšetřovat lineární algebry nad libovolným tělesem i některé speciální třídy algeber. Teorie hyperkomplexních čísel se pozvolna přetvářela do teorie algeber. Začalo se ustupovat od požadavku asociativity, velká pozornost byla věnována studiu některých speciálních neasociativních algeber, které byly vymezeny některými identitami. Šlo zejména o výše zmíněné Lieovy algebry a později o Jordanovy algebry. Viz např. [Širšov, 1958].

Jordanovou algebrou rozumíme neasociativní algebru, v níž pro každé dva prvky x, y platí identity

$$xy = yx \ , \qquad ((xx)y)x = (xx)(yx) \ .$$

Zavedeme-li v asociativní algebře nové násobení rovností

$$x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx) \ ,$$

dostaneme právě Jordanovu algebru.

Tyto algebry zavedl počátkem třicátých let 20. století Ernst Pasqual Wilhelm Jordan (1902–1980) v souvislosti se svými fyzikálními úvahami. Bylo to v pracích *Über eine Klasse nichtassoziativer hyperkomplexer Algebren* a *Über Verallgemeinerungsmöglichkeiten des Formalismus der Quantenmechanik*.[14]

[13] Připomeňme i jeho článek *Estimate of Peirce's Linear Associative Algebra* z roku 1902.

[14] Viz též P. Jordan, J. von Neumann, E. Wigner: *On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism* (1934).

Jeho výsledky zobecnil Abraham Adrian Albert (1905–1972), který tyto algebry vyšetřoval nad libovolným tělesem, později je zkoumali N. Jacobson (1910–1999) a další matematici. O Jordanových algebrách existuje rozsáhlá literatura; viz např. [Paige, 1963], [Jacobson, 1981], [Springer, Veldkamp, 2000]. O neasociativních algebrách viz např. [Schafer, 1966].

Leonard Eugenne Dickson

Americký matematik L. E. Dickson (1874–1954) působil na univerzitě v Chicagu. Byl jedním z největších znalců teorie čísel, jeho třídílná monografie *History of the theory of numbers* obsahuje výsledky jeho mnohaletého úsilí. Řadu matematických prací věnoval algebře, výrazně napomohl k přetváření teorie hyperkomplexních čísel v teorii algeber.

Roku 1903 se v práci *Definitions of a linear associative algebra by independent postulates* věnoval úvahám o definici pojmu lineární asociativní algebra; podstatným způsobem tak přispěl k jejímu zpřesnění.

The term linear associative algebra, introduced by Benjamin Peirce, has the same significance as the term system of (higher) complex numbers. In the usual theory of complex numbers, the coördinates are either real numbers or else ordinary complex quantities. To avoid the resulting double phraseology and to attain an evident generalization of the theory, I shall here consider systems of complex numbers whose coördinates belong to an arbitrary field F.

I first give the usual definition by means of a multiplication table for the n units of the system. It employs three postulates, shown to be independent, relating to n^3 elements of the field F.

The second definition is of abstract character. It employs four independent postulates which completely define a system of complex numbers.
([Dickson, 1903], str. 21)

Ve druhé definici zavedl pojem lineární asociativní algebry; uvažoval množinu všech n-tic prvků tělesa F, jejichž sčítání a odčítání je definováno po složkách, a formuloval tyto požadavky:

1. For any two elements A and B of the system, $A \cdot B$ is an element of the system whose coördinates are bilinear functions of the coördinates of A and B, with fixed coefficients belonging to F.

2. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$, if $A \cdot B$, $B \cdot C$, $(A \cdot B) \cdot C$, $A \cdot (B \cdot C)$ belong to the system.

3. There exists in the system an element I such that $A \cdot I = A$ for every element A of the system.

4. There exists in the system at least one element A such that $A \cdot Z \neq 0$ for any element $Z \neq 0$. ([Dickson, 1903], str. 24)

V práci *Linear algebras* z roku 1912 L. E. Dickson ukázal, že podobně jako jsou komplexní čísla vyjádřena jako dvojice čísel reálných, můžeme kvaterniony chápat jako dvojice čísel komplexních a oktávy jako dvojice kvaternionů s násobením definovaným rovností

$$(\alpha, \beta) \cdot (\gamma, \delta) = (\alpha\gamma - \overline{\delta}\beta, \delta\alpha + \beta\overline{\gamma}) \ .$$

Velmi často se v této souvislosti hovoří o Dicksonově procesu zdvojení. Viz též [Dickson, 1914], [Dickson, 1923].

Uvědomme si, že při násobení dvojic reálných čísel nemá ve výše uvedeném vztahu žádný význam pruh nad čísly γ a δ, při násobení dvojic komplexních čísel již podstatný je, není však důležité pořadí, v jakém čísla násobíme. Jsou-li však $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ kvaterniony, je podstatný jak pruh nad čísly γ, δ, tak pořadí činitelů.

Roku 1919 prezentoval L. E. Dickson tento svůj výsledek v práci nazvané *On quaternions and their generalization* takto:

... every number of the algebra is of the form $q + Q\,\mathrm{e}$, *where* q *and* Q *are linear functions of* 1, i, j, k *and hence are quaternions. It can be verified that Cayley's 49 relations, giving the product of two equal or distinct units* $\mathrm{i}_1, \ldots, \mathrm{i}_7$, *are together equivalent to the single formula*

$$(q + Q\,\mathrm{e})(r + R\,\mathrm{e}) = qr - R'Q + (Rq + Qr')\,\mathrm{e} \ ,$$

where r' *and* R' *are the quaternions conjugate to* r *ad* R.
([Dickson, 1919], str. 158)

V knize *Algebras and their arithmetics* z roku 1923 zavádí L. E. Dickson proces zdvojení velmi stručně:

Consider algebra C *in which multiplication is defined by*

$$(q + Q\,\mathrm{e})(r + R\,\mathrm{e}) = t + T\,\mathrm{e} \ , \qquad t = qr - R'Q \ , \qquad T = Rq + Qr'$$

where q, Q, r, R *are any real quaternions, and* r', R' *are the conjugates of* r, R. *Taking* $r = q'$, $R = -Q$, *we get*

$$N(q + Q\,\mathrm{e}) \equiv (q + Q\,\mathrm{e})(q' - Q\,\mathrm{e}) = qq' + QQ' \ .$$

The norm of a product is the product of the norms of the factors. Each of the two kinds of division except by zero is always possible and unique, so that C *is a division algebra; it is not associative.* ([Dickson, 1923], str. 237)

Dicksonova kniha *Algebras and their arithmetics* byla krátce po svém vydání rozšířena, upravena a přeložena do němčiny; roku 1927 vyšla pod názvem *Algebren und ihre Zahlentheorie.*

Poznamenejme ještě, že i antikvaterniony lze chápat jako dvojice komplexních čísel a jejich násobení je v tomto pojetí možno vyjádřit rovností

$$(\alpha, \beta) \cdot (\gamma, \delta) = (\alpha\gamma + \overline{\delta}\beta, \delta\alpha + \beta\overline{\gamma}) \ .$$

L. E. Dickson definoval roku 1927 další alternativní algebru, tzv. antioktávy (též štěpitelné oktávy nebo Cayleyova-Dicksonova čísla), jako dvojice kvaternionů, jejichž násobení je definováno výše uvedenou rovností. Max August Zorn

(1906–1993) reprezentoval roku 1930 v práci *Theorie der alternativen Ringe* algebru antioktáv čtvercovými maticemi, jejichž prvky jsou jednak reálná čísla (na hlavní diagonále), jednak vektory trojrozměrného reálného prostoru (na vedlejší diagonále):

$$\begin{pmatrix} \alpha & \overrightarrow{a} \\ \overrightarrow{b} & \beta \end{pmatrix}.$$

Násobení takovýchto matic je založeno na obyčejném násobení reálných čísel, reálném násobku vektorů, skalárním a vektorovém součinu vektorů:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \overrightarrow{a} \\ \overrightarrow{b} & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & \overrightarrow{c} \\ \overrightarrow{d} & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\gamma - (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}) & \alpha\overrightarrow{c} + \delta\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{d} \\ \gamma\overrightarrow{b} + \beta\overrightarrow{d} + \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c} & \beta\delta - (\overrightarrow{b}, \overrightarrow{d}) \end{pmatrix}.$$

Joseph Henry Maclagan Wedderburn

Obecnou teorií algeber nad libovolným tělesem se jako první začal intenzivně zabývat J. H. M. Wedderburn (1882–1948), který v prvních desetiletích 20. století výrazně ovlivnil další vývoj algebry. V práci *A theorem on finite algebras* z roku 1905 dokázal, že každé konečné těleso je komutativní, a je tedy Galoisovým tělesem. Řadu důležitých výsledků z teorie algeber publikoval roku 1908 v práci *On hypercomplex numbers*:

- *An algebra can be expressed uniquely as the direct sum of two algebras, one of which has a modulus, and the other no modulus and no integral sub-algebra which has a modulus.*[15]
- *An algebra, which has a modulus, can be expressed uniquely as the direct sum of a number of irreducible algebras.*
- *Any algebra can be expressed as the sum of a nilpotent algebra and a semi-simple algebra. The latter algebra is not unique, but any two determinations of it are simply isomorphic.*
- *A semi-simple algebra can be expressed uniquely as the direct sum of a number of simple algebras.*
- *A simple algebra can be expressed as the direct product of a primitive and a simple quadrate algebra.*
- *A simple quadrate algebra can be expressed as a matric algebra.*

([Wedderburn, 1908], str. 109)

Wedderburnovy výsledky byly zobecněny v pracích matematiků německé školy. Jejich autory byli zejména Ammalie Emmy Noetherová (1882–1935), Emil Artin (1898–1962) a R. D. Brauer. Většina výsledků byla přenesena na tzv. Artinovy okruhy, byla ukázána fundamentální role pojmů modul a reprezentace. Ve čtyřicátých letech 20. století rozpracoval Nathan Jacobson strukturní teorii okruhů bez předpokladů konečnosti. Ve třicátých a čtyřicátých

[15] Slovem *modulus* rozumí autor jednotkový prvek uvažované algebry.

letech 20. století se problematikou neasociativních, resp. alternativních struktur (nad obecnými tělesy) zabývali např. A. A. Albert, M. Zorn, Ruth Moufang (1905–1977) a R. D. Schafer.

O lineárních asociativních algebrách a Wedderburnově strukturní teorii viz např. [Abian, 1971], [Parshall, 1985].

Popisem polojednoduchých algeber byly položeny základy ke studiu algeber, které polojednoduché nejsou. Jejich studium je však značně obtížné. Studují se a popisují některé speciální třídy algeber. Zde hrají důležitou roli metody homologické algebry, teorie kategorií a algebraická geometrie.

4. Vzorce pro součty čtverců

Jak jsme již v předchozím textu viděli, platí pro reálná čísla, komplexní čísla, kvaterniony i oktávy α, β vztah

$$|\alpha| \cdot |\beta| = |\alpha \cdot \beta| \ ,$$

který můžeme vyjádřit slovy takto: norma (modul) součinu dvou čísel (reálných, komplexních, kvaternionů, oktáv) je rovna součinu norem (modulů) obou činitelů. Jedná se o dříve zmíněný Hamiltonův „zákon modulů“; není přitom podstatné, zda u komplexních čísel, kvaternionů a oktáv definujeme normu s odmocninou nebo bez odmocniny. Pro reálná čísla (tj. pro $n = 1$) má zákon modulů tvar

$$a^2 \cdot b^2 = (ab)^2 \ ,$$

pro komplexní čísla (tj. pro $n = 2$) má tvar

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) = (a_1b_1 - a_2b_2)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)^2 \ ,$$

pro kvaterniony (tj. pro $n = 4$) má tvar

$$\begin{aligned}
(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2) \ &= \\
= \ &(a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_4 - a_4b_3)^2 + \\
+ \ &(a_1b_3 + a_3b_1 + a_4b_2 - a_2b_4)^2 + (a_1b_4 + a_4b_1 + a_2b_3 - a_3b_2)^2
\end{aligned}$$

a pro oktávy (tj. pro $n = 8$) má tvar

$$\begin{aligned}
(a_1^2 + \ldots + a_8^2)(b_1^2 + \cdots + b_8^2) &= \\
= \ &(a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4 - a_5b_5 - a_6b_6 - a_7b_7 - a_8b_8)^2 + \\
+ \ &(a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_4 - a_4b_3 + a_5b_6 - a_6b_5 - a_7b_8 + a_8b_7)^2 + \\
+ \ &(a_1b_3 - a_2b_4 + a_3b_1 + a_4b_2 + a_5b_7 + a_6b_8 - a_7b_5 - a_8b_6)^2 + \\
+ \ &(a_1b_4 + a_2b_3 - a_3b_2 + a_4a_1 + a_5b_8 - a_6b_7 + a_7b_6 - a_8b_5)^2 + \\
+ \ &(a_1b_5 - a_2b_6 - a_3b_7 - a_4b_8 + a_5b_1 + a_6b_2 + a_7b_3 + a_8b_4)^2 + \\
+ \ &(a_1b_6 + a_2b_5 - a_3b_8 + a_4b_7 - a_5b_2 + a_6b_1 - a_7b_4 + a_8b_3)^2 + \\
+ \ &(a_1b_7 + a_2b_8 + a_3b_5 - a_4b_6 - a_5b_3 + a_6b_4 + a_7b_1 - a_8b_2)^2 + \\
+ \ &(a_1b_8 - a_2b_7 + a_3b_6 + a_4b_5 - a_5b_4 - a_6b_3 + a_7b_2 + a_8b_1)^2 \ .
\end{aligned}$$

Je přirozené se ptát, zda obdobné vzorce existují pro součin součtů n čtverců ještě pro nějaká jiná přirozená čísla n, tj. zda existují nějaké vzorce

$$(a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2) = c_1^2 + \cdots + c_n^2 \ ,$$

kde

$$c_i = \sum_{j,k=1}^{n} A^i_{jk} a_j b_k \ , \qquad i = 1, \ldots, n \ ,$$

pro nějaká reálná (celá) čísla A^i_{jk}. Ptáme se tedy vlastně na existenci bilineárních forem $c_1, \ldots, c_n$ na reálném n-dimenzionálním prostoru, které mají reálné (celočíselné) koeficienty. Tato problematika má dlouhou historii.

Vzorec

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) = (a_1 b_1 \mp a_2 b_2)^2 + (a_1 b_2 \pm a_2 b_1)^2$$

znal už Diofantos ve 3. století našeho letopočtu. Ve třetí knize své *Aritmetiky* (19. problém) uvádí, že číslo 65 je možno vyjádřit dvěma způsoby jako součet dvou čtverců přirozených čísel, a to

$$65 = 4^2 + 7^2 = 8^2 + 1^2 \ ,$$

neboť $65 = 13 \cdot 5$ a každé z těchto čísel je součtem dvou čtverců, tj.

$$13 = 3^2 + 2^2 \ , \qquad 5 = 2^2 + 1^2 \ .$$

Proto je

$$65 = (3^2+2^2)(2^2+1^2) = (3\cdot2-2\cdot1)^2+(2\cdot2+3\cdot1)^2 = (3\cdot2+2\cdot1)^2+(2\cdot2-3\cdot1)^2 \ .$$

Poznamenejme, že Diofantos řešil tento problém v kontextu pythagorejských trojúhelníků, resp. pythagorejských trojic čísel. V Diofantově díle lze nalézt další zajímavé výsledky týkající se součtů čtverců.

Obdobná problematika se později objevovala v pracích dalších matematiků (Leonardo Pisánský, zvaný Fibonacci, François Viète a další). Těm, kdo se věnovali teorii čísel, muselo být jasné, že obdobný vzorec pro součin součtů tří čtverců nemůže (v oboru celých čísel) existovat, neboť např. čísla 3 a 5 jsou součty tří čtverců, $3 = 1 + 1 + 1$, $5 = 0 + 1 + 4$, jejich součin 15 však takto vyjádřit nelze.

Roku 1621 vydal Claude-Gaspar Bachet de Méziriac (1581–1639) Diofantovu *Aritmetiku*, k níž připojil řadu komentářů. Mimo jiné zde uvedl svoji domněnku, že každé přirozené číslo je součtem dvou, tří nebo čtyř čtverců, a prověřil ji pro přirozená čísla menší než 325. Obecný důkaz však nepodal. Později bylo toto tvrzení často označováno jako Bachetova věta.

Leonhard Euler nalezl vzorec pro součin dvou součtů čtyř čtverců; až na nepodstatné změny ve znaménkách se jedná o výše uvedený „zákon modulů“

pro kvaterniony. O svém výsledku napsal dne 4. května 1748 Christianu von Goldbachovi (viz [Fuss, 1843]) a publikoval jej i ve svých dalších pracích – *Demonstratio theorematis Fermatiani omnem numerum sive integrum sive fractum esse summam quatuor pauciorumve quadratorum* z roku 1754/55 a *Novae demonstrationes circa resolutionem numerorum in quadrata* z roku 1773. Píše zde:

Sit tale productum

$$(aa + bb + cc + dd)(\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma + \delta\delta)$$

et capiatur

$$\begin{aligned} A &= a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta \ , \\ B &= a\beta - b\alpha - c\delta + d\gamma \ , \\ C &= a\gamma + b\delta - c\alpha - d\beta \ , \\ D &= a\delta - b\gamma + c\beta - d\alpha \end{aligned}$$

horumque quadratorum summa erit

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) \ ;$$

manifestum enim est singula producta ex binis partibus se mutuo destruere et singula quadrata litterarum latinarum in singula graecarum duci.
(Opera (1), III., str. 229)

Bachetovu větu dokázal až Joseph Louis Lagrange v práci *Démonstration d'un théorème d'arithmétique* z roku 1770. Připustil nulové sčítance a dokázal, že každé přirozené číslo je možno vyjádřit jako součet čtyř čtverců. Využil výše zmíněný Eulerův vzorec, který navíc zobecnil; dokázal, že součin dvou čísel tvaru $a_1^2 - xa_2^2 - ya_3^2 + xya_4^2$ je opět číslo tohoto tvaru.

Jednodušší důkaz Bachetovy věty podal roku 1773 L. Euler v práci *Novae demonstrationes ...*; dokázal, že každé prvočíslo je součtem čtyř čtverců celých čísel a pomocí výše zmíněného vzorce pro součin součtů čtyř čtverců své tvrzení rozšířil na všechna přirozená čísla.

Rovněž C. F. Gauss znal vzorec pro součin součtů čtyř čtverců; vyjádřil jej pro komplexní čísla v následujícím tvrzení:

Zur Theorie der Zerlegung der Zahlen in vier Quadrate.

Das Theorem: das Product zweier Summen von vier Quadraten ist selbst eine Summe von vier Quadraten, wird am einfachsten so dargestellt:
es seien $l, m, \lambda, \mu, \lambda', \mu'$ sechs complexe Zahlen, so dass λ, λ' und μ, μ' sociirt sind. Durch N bezeichne man die Norm. Es ist dann

$$(Nl + Nm)(N\lambda + N\mu) = N(l\lambda + m\mu) + N(l\mu' - m\lambda') \ .$$

(Werke III., str. 384)

Francouzský matematik Adrien-Marie Legendre (1752–1833) uvedl ve své knize *Essai sur la théorie des nombres*[16] z roku 1797/98 nepatrně modifikovaný vzorec pro součin součtů čtyř čtverců. V poznámce pod čarou upozorňuje, že podobný vzorec pro tři čtverce v oboru celých čísel neplatí. Dokumentuje to na čísle 63, které je součinem dvou součtů tří čtverců,

$$(1 + 1 + 1) \cdot (16 + 4 + 1) = 63 \ ,$$

ale samo není součtem tří čtverců, neboť dává při dělení osmi zbytek 7 a žádné číslo tvaru $8n + 7$ není možno vyjádřit jako součet tří čtverců celých čísel.

V roce 1818 nalezl dánský matematik C. P. Degen dvě varianty vzorce pro násobení součtů osmi čtverců, které se jen nepodstatně liší od zákona modulů pro oktávy. Dopustil se však omylu, když tvrdil, že takovéto vzorce existují pro každé přirozené číslo, které je mocninou dvojky. Chybný byl i jeho náznak vzorce pro součin součtů 16 čtverců. Degenova práce zůstala bez odezvy.

Vzorce, které představují tzv. zákony modulů pro komplexní čísla, kvaterniony a oktávy, byly tedy objeveny podstatně dříve než tyto číselné obory.

W. R. Hamilton neznal výše uvedené poznatky o součinech součtů tří a čtyř čtverců, jinak by se tak dlouho nepokoušel hledat vzorec pro násobení trojic reálných čísel.[17] Teprve roku 1844, již po objevu oktáv, si J. T. Graves tuto problematiku nastudoval v Legendreově knize a upozornil W. R. Hamiltona na to, že vzorec pro tři čtverce neexistuje a že vzorec pro čtyři čtverce znal již L. Euler. Jak už bylo řečeno, J. T. Graves se nejprve domníval, že obdobné vzorce existují pro každou mocninu dvojky; bez úspěchu se snažil takovýto vzorec nalézt pro $n = 16$.

Ve druhé polovině 19. století byly postupně nalezeny další varianty vzorců pro $n = 8$, které jsou jednoduchými modifikacemi zákona modulů pro oktávy. Byla diskutována otázka, zda obdobné vzorce existují pro jiná přirozená čísla, zejména pro další mocniny dvojky. John Radford Young (1799–1885) se zabýval touto problematikou v letech 1845 až 1849. Nalezl vzorec pro $n = 8$, tvrdil, že podobné vzorce existují i pro $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$, a hledal vzorec pro $n = 16$. Později změnil názor; byl přesvědčen, že pro $n > 8$ již takovéto vzorce neexistují. A. Cayley hledal podmínky existence takovýchto vzorců pro $n = 2^k$ roku 1852 v práci *Demonstration of a theorem relating to the products of sums of squares*; inspiroval se prací *On pluquaternions and homoid products of sums of n squares* Thomase Penyngtona Kirkmana (1806–1895) z roku 1848. Došel k závěru, že *… the product of two sums, each of them of sixteen squares, is not a sum of sixteen squares.* A. Cayley navíc poznamenal, že k takovémuto závěru došel již J. R. Young roku 1848 v práci *On an extension of a theorem of Euler …*

Problematikou vzorců pro $n = 8$ se zabývali F. Brioschi, Henri Lebesgue (1875–1941), E. Sadun a další. S. Roberts (1827–1913) roku 1879 znovu dokázal

---

[16] Ve 2. vydání na str. 184, ve 3. vydání na str. 213.

[17] B. L. van der Waerden poznamenal: *If Hamilton had known of this remark by Legendre he would probably have quickly given up the search to multiply triplets. Fortunately he did not read Legendre: he was self-taught.* ([Waerden, 1976], str. 234)

v práci *On the impossibility of the general extension of Euler's theorem ...*, že pro $n = 16$ obdobný vzorec neexistuje.

A. Cayley se vrátil k problematice součinu součtů osmi čtverců roku 1881 v rozsáhlejší práci *On the theorems of the 2, 4, 8, and 16 squares.* Prezentoval nejprve vzorce pro součiny součtů dvou, čtyř a osmi čtverců a pak dokázal, že obdobný vzorec pro 16 čtverců neexistuje. Jeho práce začíná zcela jasným konstatováním:

A sum of 2 squares multiplied by a sum of 2 squares is a sum of 2 squares; a sum of 4 squares multiplied by a sum of 4 squares is a sum of 4 squares; a sum of 8 squares multiplied by a sum of 8 squares is a sum of 8 squares; but a sum of 16 squares multiplied by a sum of 16 squares is not a sum of 16 squares. (Papers XI., str. 294)

Připomeňme ještě, že roku 1886 dokončil Rudolf Lipschitz svou práci *Untersuchungen über die Summen von Quadraten.* V osmdesátých letech 19. století se problematikou součtů čtverců zabývala řada matematiků – viz např. [Studnička, 1883], [Puchta, 1887], podrobněji viz [Bečvářová-Němcová, 1998], str. 95–107.

Podle Bachetovy věty je každé přirozené číslo možno vyjádřit jako součet čtyř čtverců celých čísel. Počet takovýchto vyjádření nalezl roku 1828 na základě výsledků matematické analýzy Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851); výsledek publikoval v práci *Note sur la décomposition d'un nombre donné en quatre quarrés.* Označíme-li symbolem k součet všech lichých dělitelů čísla n, pak pro sudé přirozené číslo n existuje $24k$ čtveřic (a, b, c, d), pro něž

$$n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \ ,$$

a pro liché n existuje takových čtveřic $8k$.

Krátký, čistě algebraický důkaz Jacobiho výsledku podal německý matematik Adolf Hurwitz (1859–1919) roku 1896 v práci *Über die Zahlentheorie der Quaternionen*; tento důkaz lze najít i v jeho knize *Vorlesungen über die Zahlentheorie der Quaternionen* z roku 1919. Vyšetřoval dělitelnost v okruhu tzv. celých kvaternionů[18], tj. kvaternionů tvaru

$$a + b\,\mathrm{i} + c\,\mathrm{j} + d\,\mathrm{k} \ , \qquad \text{resp.} \qquad \left(a + \frac{1}{2}\right) + \left(b + \frac{1}{2}\right)\mathrm{i} + \left(c + \frac{1}{2}\right)\mathrm{j} + \left(d + \frac{1}{2}\right)\mathrm{k} \ ,$$

kde a, b, c, d jsou celá čísla, a převedl problém na hledání všech celých kvaternionů dané normy n. V závěru 9. paragrafu své práce píše:

Die Anzahl der Darstellungen einer ganzen positiven Zahl als Summe von vier Quadraten beträgt, je nachdem die darzustellende Zahl ungerade oder

[18] *Man verstehe unter ρ das Quaternion $\rho = \frac{1}{2}(1 + \mathrm{i}_1 + \mathrm{i}_2 + \mathrm{i}_3)$. Dann bilden die Quaternionen $g = k_0\rho + k_1\,\mathrm{i}_1 + k_2\,\mathrm{i}_2 + k_3\,\mathrm{i}_3$, it wo k_0, k_1, k_2, k_3* alle ganzen rationalen Zahlen durchlaufen sollen, einen Integritätsbereich J mit der Basis $(\rho, \mathrm{i}_1, \mathrm{i}_2, \mathrm{i}_3)$. *Dieser ist der grösste Integritätsbereich, welcher die Einheiten* $1, \mathrm{i}_1, \mathrm{i}_2, \mathrm{i}_3$ *enthält. ... Ein Quaternion heisst „ganz", wenn es dem Integritätsbereiche J angehört.* (Werke II., str. 309–310) Poznamenejme, že množina všech celých kvaternionů tvoří tzv. eukleidovský obor integrity.

gerade ist, das 8-fache oder 24-fache der Summe der ungeraden Divisoren der Zahl. (Werke II., str. 325)

Pomocí celých kvaternionů je možno dokázat i Bachetovu větu (viz např. [Drozd, 1983]). Na Hurwitzovy myšlenky o celých kvaternionech navázal L. E. Dickson v práci *Arithmetic of quaternions* z roku 1922, a zejména ve své knize *Algebras and their arithmetics* (1923).

Poznamenejme ještě, že ve druhém díle Dicksonovy monografie *History of the theory of numbers* z roku 1920 jsou podrobné statě o součtech dvou, tří, čtyř a obecně n čtverců (VI. až IX. kapitola, str. 221–323).

5. Číselné obory jako lineární algebry

Snahy o rozšíření oboru komplexních čísel na nějaký větší číselný obor přivedly matematiky ke zkoumání lineárních algeber s dělením, normovaných algeber a podobných struktur. Nejprve se jednalo o reálné asociativní algebry, později o reálné neasociativní algebry a o algebry nad obecnými tělesy. Připomeňme nejprve tyto pojmy; pro jednoduchost se budeme věnovat pouze reálným algebrám.

Algebra A se nazývá algebra s dělením, pokud splňuje tuto podmínku: pro každé dva prvky $\alpha, \beta \in A$, $\alpha \neq 0$, existují jednoznačně určené prvky $\xi, \eta \in A$, pro něž $\alpha\xi = \beta$ a $\eta\alpha = \beta$.

Algebra A se nazývá normovaná (též kompoziční), jestliže je opatřena skalárním součinem a pro odvozenou normu platí:

$$\forall x, y \in A \qquad |x \cdot y| = |x| \cdot |y| \ .$$

Algebra A se nazývá kvadratická, jestliže má jednotkový prvek e a každý prvek $x \in A$ vyhovuje nějaké kvadratické rovnici $x^2 = ae + bx$.

Jestliže je A reálná algebra dimenze n, potom je každý prvek $x \in A$ možno vyjádřit souřadnicemi $(x_1, \ldots, x_n)$ vzhledem k pevně zvolené bázi. Místo algebry A je tedy možno uvažovat izomorfní algebru $\mathbb{R}^n$.

Není obtížné dokázat následující tvrzení:

- Reálná algebra konečné dimenze je algebrou s dělením právě tehdy, když nemá netriviální dělitele nuly.
- Normovaná reálná algebra nemá netriviální dělitele nuly.
- Reálná normovaná algebra konečné dimenze je algebrou s dělením.
- Reálná alternativní algebra konečné dimenze je algebrou s dělením právě tehdy, když má jednotkový prvek a ke každému jejímu nenulovému prvku existuje prvek inverzní. (Reálná asociativní algebra s dělením, která má konečnou dimenzi, je tedy tělesem.)

H. Hankel v knize *Theorie der complexen Zahlensysteme* z roku 1867 dokázal, že obor komplexních čísel nelze rozšířit na větší číselný obor, v němž by platily všechny aritmetické zákony. Dokázal tedy, že neexistuje reálná komutativní asociativní algebra s dělením obsahující komplexní čísla jako vlastní podalgebru. Zodpověděl tak negativně Gaussovu otázku z roku 1831.

Ein höheres complexes Zahlensystem, dessen formale Rechnungsoperationen nach den Bedingungen des §. 28 bestimmt sind, und dessen Einheitsproducte in's Besondere lineare Functionen der ursprünglichen Einheiten sind, und in welchem kein Product verschwinden kann, ohne dass einer seiner Factoren Null würde, enthält also in sich einer Widerspruch und kann nicht existiren. ([Hankel, 1867], str. 107)

Obdobnými problémy se zabýval K. T. Weierstrass v šedesátých letech 19. století ve svých přednáškách na berlínské univerzitě.[19] Své výsledky publikoval až se značným časovým odstupem v práci *Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen* z roku 1884. Zformuloval problém rozšiřování číselných oborů a odvolal se na výše zmíněnou Gaussovu otázku:

Nach Aufstellung des Begriffes einer aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grösse ist zunächst zu untersuchen, ob und wie sich für ein Gebiet solcher Grössen, d. h. für die Gesammtheit der aus denselben Haupteinheiten $(e_1, e_2, \dots e_n)$ *gebildeten Grössen die arithmetischen Grundoperationen so definiren lassen, dass erstens, wenn* $a, b, c, \dots$ *beliebige Grössen des Gebietes sind,*

$$a + b, \quad a - b, \quad ab, \quad \frac{a}{b}$$

ebenfalls dem Gebiete angehören, und dass zweitens die in den folgenden Gleichungen ausgesprochenen Gesetze gelten: … – a připojil běžné aritmetické identity. ([Weierstrass, 1884], str. 312)

K. T. Weierstrass zavedl v této práci pojem netriviálního dělitele nuly; dokázal, že každá reálná komutativní algebra dimenze $n > 2$ má netriviální dělitele nuly. (Význam netriviálních dělitelů nuly si uvědomoval i H. Hankel. Viz [Hankel, 1867].)

Wenn ich nun mit dem Ergebniss der vorstehenden Untersuchung die im Anfang angeführte Gaussische Bemerkung, dass complexe Grössen mit mehr als zwei Haupteinheiten in der allgemeinen Arithmetik unzulässig seien, zusammenhalte, so scheint es mir, dass Gauss diese Unzulässigkeit als dadurch begründet angesehen habe, dass das Product zweier Grössen, sobald $n > 2$, *verschwinden kann, ohne dass einer seiner Factoren den Werth Null hat. … In der That geht aus dem oben … ausgesprochenen Satze hervor, dass die Arithmetik der allgemeinen complexen Grössen zu keinem Resultate führen kann, das nicht aus Ergebnissen der Theorie der complexen Grössen mit einer oder mit zwei Haupteinheiten ohne Weiteres ableitbar wäre.*
([Weierstrass, 1884], str. 327–328)

[19] Viz též [Kossak, 1872], str. 24–27, [Cartan, Study, 1908], str. 361.

G. Frobenius publikoval roku 1878 práci *Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen*, v níž mimo jiné dokázal, že reálné asociativní algebry s dělením, které mají konečnou dimenzi, jsou pouze tři: reálná čísla, komplexní čísla a kvaterniony.

Wir sind also zu dem Resultate gelangt, dass ausser den reellen Zahlen $(m = 0)$, *den imaginären Zahlen* $(m = 1)$ *und den Quaternionen* $(m = 3)$ *keine andern complexen Zahlen in dem oben definirten Sinne existiren.* ([Frobenius, 1878], str. 63)

Další důkaz této věty podal roku 1881 Charles Sanders Peirce ve třetím dodatku k práci svého otce Benjamina Peirceho *Linear associative algebra*, který nese název *On the algebras in which division is unambiguous*, uvádí stejný výsledek:

... Thus it is proved ... that ordinary real algebra, ordinary algebra with imaginaries, and real quaternions are the only associative algebras in which division by finites always yields an unambiguous quotient.
([Peirce, 1881], str. 229)

F. X. Grissemann v práci *Elementarer Nachweis des Satzes von Frobenius über die Ausnahmsstellung der Quaternionen unter den complexen Zahlensystemen von mehr als zwei Einheiten* z roku 1900 píše:

Die Quaternionen nehmen unter den Systemen complexer Zahlen mit mehr als 2 Einheiten eine Ausnahmsstellung ein. Denn kein anderes System kommt dem reellen und gemeinen complexen Zahlensysteme hinsichtlich der Regeln für die 4 Rechnungsarten so nahe wie das sogenannte System der Quaternionen.

Wenn man nämlich neben dem Fortbestande des distributiven und associativen Gesetzes auch noch die Forderung stellt, dass ein Product niemals verschwinde, wenn nicht wenigstens einer der Factoren verschwindet, so genügt von den mit einem Modul ausgestatteten Systemen complexer Zahlen von mehr als 2 Einheiten nur noch das Quaternionensystem. Dieser merkwürdige, in der Theorie der complexen Zahlensysteme so bedeutsame Satz wurde zuerst von Frobenius ... nachgewiesen. ([Grissemann, 1900], str. 132)

Frobeniovu větu najdeme v řadě monografií či učebnic, např. v monografii L. E. Dicksona *Linear algebras* z roku 1914, v knize A. A. Alberta *Structure of algebras* z roku 1939 atd. Ve třetím vydání učebnice A. G. Kuroše *Kurs vysšej algebry* z roku 1952 je Frobeniova věta dokázána na stranách 321 až 325. Je i v Kurošově knize *Lekcii po obščej algebre* (1962), v knize Israela Nathana Hersteina (1923–1988) *Topics in algebra* (1964), v knížce I. L. Kantora a A. S. Solodovnikova *Giperkompleksnye čisla* (1973). Jednoduchý důkaz Frobeniovy věty podal roku 1968 R. S. Palais v článku *The classification of real division algebras.* Mimo jiné píše:

The proofs of Frobenius' theorem in the literature seem to be of two types. Either they are elementary, but rather computational, ... or else they deduce the theorem from sophisticated general results about division algebras, ... We wish to give here a short, self-contained proof which seems both elementary and conceptual. ([Palais, 1968], str. 366–367)

Vraťme se však ještě na konec 19. století.

Roku 1898 dokázal A. Hurwitz v práci *Über die Komposition der quadratischen Formen von beliebig vielen Variablen*, že reálné normované algebry dimenze n existují pouze pro $n = 1, 2, 4, 8$; tomuto výsledku se říká Hurwitzova věta. Problém, který řešil, zformuloval v úvodu své práce jasně a srozumitelně:

Im Gebiete der quadratischen Formen von n Variablen wird eine Kompositionstheorie stattfinden, wenn für irgend drei quadratische Formen φ, ψ, χ von nicht verschwindender Determinante die Gleichung

$$\varphi(x_1, x_2, \dots x_n)\psi(y_1, y_2, \dots y_n) = \chi(z_1, z_2, \dots z_n) \tag{1}$$

dadurch befriedigt werden kann, dass man die Variablen $z_1, z_2, \dots z_n$ durch geeignet gewählte bilineare Funktionen der Variablen $x_1, x_2, \dots x_n$ und y_1, y_2, $\dots$ y_n ersetzt. Da eine quadratische Form durch lineare Transformation der Variablen in eine Summe von Quadraten übergeführt werden kann, so darf man, ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, an Stelle der Gleichung (1) *die folgende:*

$$(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) = z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2 \tag{2}$$

betrachten. Hiernach ist die Frage, ob für quadratische Formen mit n Variablen eine Kompositionstheorie existiert, im wesentlichen identisch mit der andern, ob man der Gleichung (2) *durch geeignete bilineare Funktionen $z_1, z_2, \dots z_n$ der $2n$ unabhängigen Variablen $x_1, x_2, \dots x_n$, $y_1, y_2, \dots$ y_n genügen kann. In den folgenden Zeilen will ich zeigen, dass dieses nur in den Fällen $n = 2, 4, 8$ möglich ist, dass also nur für binäre Formen, für quaternäre Formen und für Formen mit 8 Variablen eine Kompositionstheorie existiert. Durch diesen Nachweis wird dann insbesondere auch die alte Streitfrage, ob sich die bekannten Produktformeln für Summen von 2, 4 und 8 Quadraten auf Summen von mehr als 8 Quadraten ausdehnen lassen, endgültig, und zwar in verneinendem Sinne entscheiden.* (Werke II., str. 565)

V Hurwitzově pozůstalosti byla nalezena delší práce s obdobným názvem – *Über die Komposition der quadratischen Formen*; vydána byla až roku 1923. A. Hurwitz se v ní zabýval obecnějším problémem, kdy součin součtu p čtverců a součtu n čtverců dává součet n čtverců, tj.

$$(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) = z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2 \,.$$

V obou těchto pracích výrazně využíval maticový aparát.

Podrobně o problematice vzorců pro součty čtverců a o Hurwitzově větě píše L. E. Dickson v článku *On quaternions and their generalization and the history of the eight square theorem* z roku 1919. V jeho páté části zcela exaktně formuluje problém a pak podává důkaz Hurwitzovy věty založený na lineární závislosti matic.

We seek the values of n for which there exists an identity (as to the $x's$ and $y's$) of the form

$$(x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2) = z_1^2 + \cdots + z_n^2 \;, \tag{8}$$

where $z_1, \ldots, z_n$ are linear in $x_1, \ldots, x_n$ and also in $y_1, \ldots, y_n$. Let

$$z_i = a_{i1}y_1 + \cdots + a_{in}y_n \qquad (i = 1, \ldots, n) \;,$$

where the a_{ij} are linear functions of $x_1, \ldots, x_n$. ([Dickson, 1919], str. 159–160)

Theorem. Except for $n = 1, 2, 4, 8$, there exists no identity (8) *expressing the product $(x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2)$ as a sum of the squares of n bilinear functions of $x_1, \ldots, x_n$ and $y_1, \ldots, y_n$.* ([Dickson, 1919], str. 164)

Stejný problém jako A. Hurwitz řešil jinou metodou Johann Karl August Radon (1887–1956) v práci *Lineare Scharen orthogonaler Matrizen* z roku 1921. Beno Eckmann (nar. 1917) dospěl roku 1943 ke stejnému výsledku v článku *Gruppentheoretischer Beweis des Satzes von Hurwitz-Radon über die Komposition quadratischer Formen.* Problematika vzorců pro součty čtverců dosud není mrtvá; viz např. relativně nedávná práce [Lam, Yiu, 1989].

Jurij Vladimirovič Linnik (1915–1972) zobecnil roku 1938 v článku *Obobščenie teoremy Frobenius'a i ustanovlenie svjazi ee s teoremoj Hurwitz'a o kompozicii kvadratičnych form* tvrzení Frobeniovy věty a pomocí tohoto svého výsledku dokázal větu Hurwitzovu.

Hans Freudenthal (1905–1990) dokázal v první části svého spisu *Oktaven, Ausnahmegruppen und Oktavengeometrie* z roku 1951 Hurwitzovu větu pomocí projektivní geometrie nad dvouprvkovým tělesem a Desarguesovy věty. Claude Chevalley užil v knize *The algebraic theory of spinors* z roku 1954 k důkazu Hurwitzovy věty Cliffordovy algebry.

Důkaz Hurwitzovy věty najdeme např. v Curtisově článku *The four and eight square problem and division algebras* z roku 1963 (autor zde využívá jednoho výsledku N. Jacobsona z roku 1958) i v pozdějších vydáních (1974, 1984) Curtisovy knihy *Linear algebra. An introductory approach*, která vyšla poprvé roku 1963. Důkaz využívající teorie reprezentací konečných grup je v Hersteinově knize *Noncommutative rings* z roku 1968.

Výsledky dosažené na přelomu 19. a 20. století byly postupně zobecňovány.

M. Zorn dokázal roku 1933 v práci *Alternativkörper und quadratische Systeme*, že každá kvadratická jednoduchá alternativní neasociativní algebra nad tělesem nulové charakteristiky je izomorfní s algebrou oktáv.

Na problematiku algeber s dělením narazil také švýcarský matematik Heinz Hopf (1894–1971). V článku *Systeme symmetrischer Bilinearformen und euklidische Modelle der projektiven Räume* z roku 1940 dokázal, že reálná komutativní algebra konečné dimenze s dělením má nejvýše dimenzi 2, a je tedy izomorfní s algebrou reálných nebo komplexních čísel (z komutativity zde vyplývá asociativita). Má-li tato algebra jednotkový prvek, jedná se o algebru reálných nebo komplexních čísel. V této Hopfově práci je zajímavá pasáž:

Wir ziehen für eine Algebra – oder ein hyperkomplexes System mit endlich vielen Einheiten –, in welcher die Addition als Vektor-Addition in üblichen Sinne erklärt sein soll, die folgenden Postulate für die Multiplikation in Betracht:

a) das distributive Gesetz,
b) das assoziative Gesetz,
c) das kommutative Gesetz,
d) die Divisions-Eigenschaft, d.h. die Nicht-Existenz von Nullteilern.

Es soll sich nur um Algebren über dem Körper der reellen Zahlen handeln. Man weiß : die einzige Algebra, welche alle vier Postulate erfüllt, ist der Körper der gewöhnlichen komplexen Zahlen; verzichtet man auf gewisse der Postulate, so kommen neue Systeme hinzu. Wir wollen hier jedenfalls an a) und d) festhalten; hält man außerdem an b) fest, verzichtet aber auf c), so kommt das System der Quaternionen – und nur dieses – hinzu; verzichtet man auf c) und b), so gibt es noch mindestens ein weiteres System: das Cayleysche System mit 8 Einheiten. Der Umstand, daß dieses Cayleysche System eine gewisse Rolle in Algebra und Geometrie spielt, zeigt, daß auch der Verzicht auf das assoziative Gesetz b) nicht unberechtigt ist. Daher liegt die Frage nach Systemen nahe, in welchen zwar a), c), d) erfüllt sind, aber nicht b).

Es gilt nun der Satz, daß es kein solches System gibt; also: die Gültigkeit des assoziativen Gesetzes ist für eine Algebra über dem Körper der reellen Zahlen eine Folge der Postulate a), c), d); anders ausgedrückt: auch wenn man die Gültigkeit des assoziativen Gesetzes der Multiplikation nicht ausdrücklich postuliert, ist der Körper der komplexen Zahlen der einzige kommutative Erweiterungskörper endlichen Grades über dem Körper der reellen Zahlen. (Selecta, str. 109–110)

V práci *Ein topologischer Beitrag zur reellen Algebra* z roku 1940 H. Hopf dokázal, že reálná algebra konečné dimenze s dělením musí mít dimenzi, která je mocninou dvojky; využil k tomu výsledky algebraické topologie.

Zhruba ve stejné době došli Stanislaw Mazur (1905–1981) a Izrail' Moiseevič Gel'fand (nar. 1913) k výsledku, který je ve funkcionální analýze označován jako Gel'fandova-Mazurova věta: jedinými Banachovými algebrami s dělením jsou reálná čísla, komplexní čísla a kvaterniony.

Roku 1947 se věnoval A. A. Albert normovaným algebrám v článku *Absolute valued real algebras*; dokázal, že reálná algebra s dělením, která má jednotkový prvek, je alternativní. O dva roky později podal v práci *Absolute valued algebraic algebras* popis všech reálných normovaných algeber.

Roku 1950 dokázali R. H. Bruck a E. Kleinfeld, že existuje pouze jediná reálná alternativní neasociativní algebra konečné dimenze s dělením, a to oktávy. Tomuto tvrzení se někdy říká zobecněná Frobeniova věta. Vyslovuje se též takto: reálné alternativní algebry s dělením, které mají konečnou dimenzi, jsou právě čtyři: reálná čísla, komplexní čísla, kvaterniony a oktávy. Viz [Bruck, Kleinfeld, 1951], viz též [Skornjakov, 1950].

Roku 1958 dokázali nezávisle na sobě M. Kervaire, Raoul Bott (1923–2005) a John W. Milnor (nar. 1931), že reálné algebry s dělením dimenze n existují pouze pro $n = 1, 2, 4, 8$. Z předchozího víme, že se jedná o dvě komutativní asociativní algebry (reálná a komplexní čísla), jednu nekomutativní asociativní algebru (kvaterniony) a jednu neasociativní algebru, která je však alespoň alternativní (oktávy); dále existuje nekonečně mnoho reálných algeber s dělením, které však nejsou alternativní.

Bylo dokázáno, že reálné normované algebry konečné dimenze, které mají jednotkový prvek, jsou pouze čtyři (reálná a komplexní čísla, kvaterniony a oktávy) a že všechny další normované algebry z nich vzniknou zavedením nového násobení rovností

$$a \circ b = f(a) \cdot f(b) \ ,$$

kde f a g jsou izomorfismy zachovávající normu (ortogonální zobrazení), tj. izomorfismy, pro něž pro každý prvek a platí

$$|f(a)| = |a| = |g(a)| \ .$$

Doplňme ještě pro zajímavost, že existují pouze čtyři neizomorfní reálné normované algebry dimenze 2. Je to algebra komplexních čísel a tři algebry, které z ní vzniknou zavedením nového násobení

$$a \circ b = \overline{a} \cdot b \ , \qquad a \circ b = a \cdot \overline{b} \ , \qquad a \circ b = \overline{a \cdot b} \ .$$

Rovněž všechny reálné normované algebry dimenze 4 dostaneme z algebry kvaternionů zavedením nového násobení některou z následujících rovností:

$$a \circ b = c \cdot a \cdot b \cdot d \ , \quad a \circ b = c \cdot \overline{a} \cdot b \cdot d \ , \quad a \circ b = c \cdot a \cdot \overline{b} \cdot d \ , \quad a \circ b = c \cdot \overline{a \cdot b} \cdot d \ ,$$

kde c, d jsou pevně zvolené kvaterniony.

O reálných algebrách s dělením viz [Ebbinghaus, 1983].

Vraťme se nyní na počátek 20. století k pracím, které se neomezovaly pouze na reálné algebry.

Roku 1906 se L. E. Dickson věnoval lineárním algebrám s dělením nad obecným tělesem, a to v článcích *Linear algebras in which division is always uniquely possible* a *On commutative linear algebras in which division is always uniquely possible.* Ve stejném roce vyšetřoval v práci *On linear algebras* algebry nad tělesem racionálních čísel:

In the theory of algebraic numbers we consider such systems of numbers as the set of all numbers $r + s\,\mathrm{i} + t\,\mathrm{i}^2$, *in which* r, s, t *are rational, while* i *is an irrational number satisfying an equation* $x^3 - \beta x - b = 0$ *with rational coefficients. This set of numbers is called a field (or domain) since the sum, difference, product, or quotient, of any two of the numbers is likewise an unique number of the set. If we put* $\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}$, *we may consider this field to be a linear* *algebra composed of all numbers* $r+s\,\mathrm{i}+t\,\mathrm{j}$ *(r, s, t rational), in which the "units"* 1, i, j *satisfy the relations*

$$1^2 = 1\ ,\quad 1\cdot \mathrm{i} = \mathrm{i}\cdot 1 = \mathrm{i}\ ,\quad 1\cdot \mathrm{j} = \mathrm{j}\cdot 1 = \mathrm{j}\ , \tag{1}$$

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}\ ,\quad \mathrm{i}\cdot \mathrm{j} = \mathrm{j}\cdot \mathrm{i} = b + \beta\,\mathrm{i}\ ,\quad \mathrm{j}^2 = b\,\mathrm{i} + \beta\,\mathrm{j}\ . \tag{2}$$

([Dickson, 1906], str. 201)

L. E. Dickson se v několika pracích zabýval lineárními algebrami, které jsou v určitém smyslu blízké číselným oborům:

There is a very extensive literature on linear associative algebras, in which $\mathrm{i}(\mathrm{j}\,\mathrm{k}) = (\mathrm{i}\,\mathrm{j})\,\mathrm{k}$ *for any three units (not necessarily distinct). But only in rare instances, such as for quaternions, is division always possible; while then multiplication is not commutative. Another class of highly interesting linear algebras has been considered recently. In these, multiplication is commutative and distributive, but not always associative, while division is always uniquely possible. We shall here investigate such triple algebras …*
([Dickson, 1906], str. 201–202)

Věnoval se též souvislostem teorie čísel a teorie algeber, někdy se hovoří o aritmetice v algebrách. Viz např. [Albert, 1955], [Fenster, 1998].

6. Závěr

Objev komplexních čísel, rozpoznání jejich místa v matematice, vnímání jejich významu a užitečnosti, a zejména pochopení jejich geometrické interpretace motivovalo řadu matematiků k úvahám o číselných oborech, které by vhodným způsobem rozšiřovaly obor čísel komplexních na ještě větší číselný obor, nebo nějakým jiným způsobem rozšiřovaly obor čísel reálných. Studium takovýchto číselných struktur, tzv. hyperkomplexních čísel, bylo ve druhé polovině 19. století poměrně atraktivním tématem badatelské práce.

V souvislosti s objevem kvaternionů a s jejich dalším intenzivním studiem byly mimo jiné položeny základy vektorového počtu. Při vyšetřování různých struktur hyperkomplexních čísel byla rozvinuta řada velmi zajímavých myšlenek, které lze oprávněně řadit do algebry, teorie čísel, geometrie, matematické analýzy a dalších disciplín. Cenné podněty dala teorie hyperkomplexních čísel i fyzice.

Studium nejrůznějších oborů hyperkomplexních čísel vedlo v poslední třetině 19. století ke zrodu obecnějšího pojmu, k vytvoření důležitého pojmu lineární asociativní algebra. Řada konkrétních oborů hyperkomplexních čísel je lineární asociativní algebrou, neasociativní struktury, například oktávy, však zůstávají stranou; teprve ve 20. století byly zahrnuty do obecnějšího pojmu algebra. Tzv. algebry s dělením zobecnily v jiném slova smyslu klasické číselné obory.

V pojmu lineární asociativní algebra je obsažen pojem vektorového prostoru. Stačí rezignovat na násobení prvků a ponechat jen jejich sčítání a násobení skalárem. Pojem vektorového prostoru se spolu s řadou důležitých poznatků, které dnes řadíme do lineární algebry, postupně rodil ve druhé polovině 19. století. Teprve ve dvacátých a třicátých letech 20. století však dosáhl všeobecného uznání. Vyšetřování hyperkomplexních čísel, lineárních asociativních algeber a obecnějších struktur významně přispělo k rozvíjení řady myšlenek, které se později staly základem teorie vektorových prostorů, resp. lineární algebry.