V. KANONICKÉ TVARY

Between 1850 and 1880 are proved the main theorems of linear algebra, concerning what are called the "reductions" of square matrices. One of these is the problem of finding, for a given square matrix U, an invertible matrix P such that PUP^{-1} has a "reduced" unique canonical form, which here (for complex matrices U) means a diagonal array of Jordan matrices; this is the way Jordan himself treats the problem, improving on a previous result of Grassmann, who had proved the existence of a "reduced" triangular matrix PUP^{-1} for any U (using already the intrinsic notion of endomorphism instead of the notion of square matrix).

([Dieudonné, 1981], str. 72–73)

1. Formulace problémů

Velmi důležitou partii teorie matic tvoří poznatky o kongruenci a podobnosti matic; úzce souvisejí s problematikou kanonických tvarů. Velký význam v ní mají vlastní čísla a vlastní vektory, systémy invariantů podobnosti atd. Vlastní čísla matic (a operátorů na nejrůznějších typech prostorů nekonečné dimenze) hrají důležitou roli v teoretických otázkách i v řadě aplikací. Poznatky o vlastních číslech, jejichž soubor tvoří spektrum matice, resp. operátoru, jsou předmětem tzv. *spektrální teorie.*

Nejprve připomeneme v současné řeči následující dva okruhy problémů:

I. Klasifikace symetrických bilineárních, resp. kvadratických forem.

II. Klasifikace lineárních zobrazení (endomorfismů, operátorů).

I. Budeme říkat, že čtvercové matice A, B (téhož řádu) jsou *kongruentní*, existuje-li taková regulární matice P, že

$$B = P^{\mathrm{T}} A P \,.$$

Uvažujeme-li, že matice A je maticí bilineární, resp. kvadratické formy na nějakém vektorovém prostoru konečné dimenze nad daným komutativním tělesem, odpovídá tento vztah změně báze, přičemž transformační matice P je maticí přechodu od jedné báze ke druhé. Je pochopitelné, že se z řady důvodů snažíme, aby byla matice zkoumané formy co nejjednodušší, nejlépe diagonální (odpovídající analytické vyjádření příslušné formy potom neobsahuje „smíšené součiny“). Je-li matice A symetrická, tj. jedná-li se o symetrickou bilineární, resp. kvadratickou formu (a těleso, nad kterým pracujeme, nemá charakteristiku 2), lze toho dosáhnout vhodnou změnou báze daného prostoru.

Má-li např. kvadratická forma q vzhledem k jedné bázi vyjádření[1]

$$q(x) = xAx^{\mathrm{T}},$$

pak je po provedené transformaci souřadnic $x^{\mathrm{T}} = P\xi^{\mathrm{T}}$

$$q(\xi) = \xi P^{\mathrm{T}} A P \xi^{\mathrm{T}} = \xi B \xi^{\mathrm{T}}.$$

Na množině všech čtvercových matic pevně zvoleného řádu je kongruence matic ekvivalencí, je totiž reflexivní, symetrická a tranzitivní. Určuje proto disjunktní rozklad množiny všech matic daného řádu na třídy navzájem kongruentních matic. Omezíme-li se na symetrické matice, pak v každé třídě uvažované ekvivalence existuje alespoň jeden vhodný reprezentant, kterým je diagonální matice.

Pro matice nad tělesem komplexních čísel nemá předchozí teorie rozumný smysl, musíme ji proto modifikovat. Kongruentní matice definujeme vztahem

$$B = P^{\mathrm{T}} A \overline{P}\ , \quad \text{resp.} \quad B = P^* A P\ ;$$

matice $\overline{P}$ je sdružená k matici P a $P^* = \overline{P}^{\mathrm{T}}$.

V komplexním případě hrají důležitou roli formy seskvilineární, hermitovské seskvilineární, resp. kvadratické formy z nich odvozené; jejich matice jsou hermitovské.

V reálném i komplexním případě je možno navíc nezávisle na zvolené bázi zjistit počet kladných, záporných a nulových členů v diagonálním tvaru uvažované symetrické, resp. hermitovské matice.

II. Budeme říkat, že čtvercové matice A, B (téhož řádu) jsou *podobné*, existuje-li taková regulární matice P, že

$$B = P^{-1} A P\ .$$

Uvažujeme-li, že matice A je maticí lineárního zobrazení (endomorfismu, operátoru) vektorového prostoru, odpovídá tento vztah změně báze. Transformační matice P je přitom maticí přechodu od jedné báze ke druhé. Z řady důvodů se snažíme, aby byla matice zkoumaného lineárního zobrazení co nejjednodušší. Nelze však požadovat, aby byla matice B diagonální, pro některé matice A toho nelze dosáhnout. Z takového požadavku je nutno slevit. Navíc se zde projevuje zcela zásadní závislost na vlastnostech tělesa, nad nímž se vše provádí.

Má-li lineární zobrazení (endomorfismus) f prostoru V konečné dimenze vzhledem k jedné bázi vyjádření

$$f(x)^{\mathrm{T}} = Ax^{\mathrm{T}},$$

[1] Vektory, tj. n-tice prvků uvažovaného tělesa, chápeme v dalším textu jako řádky.

pak je po provedené transformaci souřadnic $x^{\mathrm{T}} = P\xi^{\mathrm{T}}$ (a proto je tedy též $f(x)^{\mathrm{T}} = Pf(\xi)^{\mathrm{T}}$, resp. $f(\xi)^{\mathrm{T}} = P^{-1}f(x)^{\mathrm{T}}$)

$$f(\xi)^{\mathrm{T}} = P^{-1}f(x)^{\mathrm{T}} = P^{-1}Ax^{\mathrm{T}} = P^{-1}AP\xi^{\mathrm{T}} = B\xi^{\mathrm{T}}.$$

Na množině všech čtvercových matic pevně zvoleného řádu nad daným komutativním tělesem je podobnost matic ekvivalencí, je totiž reflexivní, symetrická a tranzitivní. Určuje tedy disjunktní rozklad množiny všech matic daného řádu na třídy navzájem podobných matic. Jak již bylo řečeno, v některých třídách neexistují diagonální matice. Zásadním problémem je zvolit vhodné reprezentanty tříd navzájem podobných matic a stanovit systém invariantů charakterizujících podobnost matic. Podobné matice mají stejný charakteristický polynom, a tedy i vlastní čísla.[2]

Poznamenejme, že pokud budeme požadovat ortogonalitu transformační matice P, potom vzhledem ke vztahu

$$P^{-1} = P^{\mathrm{T}}, \quad \text{resp. v komplexním případě} \quad P^{-1} = \overline{P}^{\mathrm{T}} = P^*,$$

případy I. a II. splývají.

Obecný pojem ekvivalence matic diskutoval G. Frobenius (1849–1917) v práci *Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen* z roku 1878. Navázal tak obecně pojatou prací na speciální případy, kterými se zabývali zejména K. T. Weierstrass (1815–1897) v práci *Zur Theorie der quadratischen und bilineare Formen* (1868) a L. Kronecker (1823–1891) v pojednání *Ueber die congruenten Transformationen der bilinearen Formen* (1874).

Problematikou vývoje teorie matic se v sedmdesátých letech 20. století intenzivně zabýval Thomas Hawkins. Jeho obšírné a zasvěcené práce je možno vřele doporučit k hlubšímu studiu myšlenek a postupů jednotlivých matematiků, kteří se v nejrůznějších souvislostech věnovali otázkám kanonických tvarů, charakteristické (sekulární) rovnici, vlastním číslům a vlastním vektorům, resp. tzv. spektrální teorii matic.

T. Hawkins: *The Theory of Matrices in the 19th Century* (1974),

T. Hawkins: *Cauchy and the Spectral Theory of Matrices* (1975),

T. Hawkins: *Another Look at Cayley and the Theory of Matrices* (1977),

T. Hawkins: *Weierstrass and the Theory of Matrices* (1977).

Základní informace a hlavní bibliografické odkazy lze nalézt v článku

I. Grattan-Guiness, W. Ledermann: *Matrix theory* (1994).

První část této kapitoly uzavřeme slovy T. Hawkinse z roku 1977:

Although the origins of the theory of matrices can be traced back to the 18^{th} *century and although it was not until the* 20^{th} *century that it was absorbed*

[2] Toto tvrzení nelze obrátit, existují matice, které podobné nejsou, ačkoliv mají stejný charakteristický polynom.

into the mainstream of mathematics, it was a creation of the 19^{th} century. During that fertile epoch in the history of mathematics, basic theorems on matrix similarity, congruence and equivalence were established and canonical matrix forms introduced. The properties of the characteristic roots of various types of matrices (symmetric, Hermitean, orthogonal, unitary, etc.) were also discovered. ([Hawkins, 1977], str. 155)

2. Transformace rovnic kuželoseček a kvadrik k hlavním osám

V základních učebnicích analytické geometrie se poměrně brzy setkáváme s úlohou na převedení rovnice kuželosečky na základní tvar, která se řeší rotací souřadného systému o takový úhel, aby osy uvažované kuželosečky byly rovnoběžné (resp. totožné) s osami souřadného systému. Obdobná úloha se týká kvadrik, problém je však možno zobecnit na jakoukoli konečnou dimenzi. Někdy je tvrzení o existenci příslušné ortogonální transformace uváděno jako teorém o hlavních osách (*Principal axis theorem*).

V jednoduchém případě se jedná o transformaci kvadratické formy

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

na tvar $\alpha\xi^2 + \beta\eta^2$, který obsahuje pouze čtverce proměnných.

S tímto problémem se setkali již zakladatelé analytické geometrie. René Descartes (1596–1650) se roku 1637 zmínil ve svém díle *La géométrie* o algebraické transformaci kvadratické formy, která odpovídá rotaci souřadné soustavy. V pojednání *Elements of curves*, které bylo roku 1660 publikováno jako součást komentářů k dalšímu vydání této Descartesovy knihy, převedl Johan de Witt (1625–1672) rovnici kuželosečky na základní tvar, tj. k hlavním osám. Dá se říci, že provedl diagonalizaci příslušné symetrické matice.

V době, kdy R. Descartes rozvíjel myšlenky analytické geometrie, zabýval se obdobnými idejemi rovněž Pierre de Fermat (1601–1665). I on studoval převedení rovnice kuželosečky k hlavním osám. Jeho pojednání *Ad locos planos et solidos isagoge* však bylo publikováno až roku 1679, tj. čtrnáct let po jeho smrti. Vývoj analytické a algebraické geometrie příliš neovlivnilo.

Leonhard Euler

Leonhard Euler (1707–1783) řešil problém převedení binární a ternární kvadratické formy na diagonální tvar ve druhém díle své knihy *Introductio in analysin infinitorum* z roku 1748. V páté kapitole apendixu nazvané *De superficiebus secundi ordinis* studoval kvadratickou plochu

$$\alpha z^2 + \beta yz + \gamma xz + \delta y^2 + \varepsilon xy + \zeta x^2 + \eta z + \theta y + \iota x + \chi = 0$$

a zabýval se otázkou, jak změnou souřadného systému (přechod od souřadnic x, y, z k souřadnicím p, q, r) docílit zjednodušení její rovnice. Jednalo se tedy o převedení výše uvedené rovnice kvadratické plochy vyjádřené v souřadnicích x, y, z na rovnici

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + K = 0$$

vyjádřenou v souřadnicích p, q, r. Je pochopitelné, že se zde objevila vlastní čísla příslušné lineární transformace. Tuto problematiku vyšetřoval L. Euler v odstavcích 113, 114 a 115, které zde uvedeme.

113. *Quia, mutando positionem ternorum Axium, quibus Coordinatae sunt parallelae, aequatio generalis ad formam simpliciorem reduci potest, ista reductione ita utamur, ut aequationem generalem pro Superficiebus secundi ordinis ad formam simplicissimam redigamus, quae tamen omnes species aeque ac generalis in se complectatur. Cum igitur aequatio generalis pro Superficiebus secundi ordinis sit*

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \varepsilon xy + \zeta xx + \eta z + \theta y + \iota x + \chi = 0 \ ,$$

quaeramus aequationem inter alias ternas Coordinatas p, q & r, quae quidem se mutuo in eodem puncto, quo ternae priores se decussent. Ad hoc ex §.92 *statuatur*

$$x = p(cos.k.cos.m - sin.k.sin.m.cos.n) + q(cos.k.sin.m + sin.k.cos.m.cos.n) - r.sin.k.sin.n$$

&

$$y = -\ p(sin.k.cos.m + cos.k.sin.m.cos.n) - q(sin.k.sin.m - cos.k.cos.m.cos.n) - r.cos.k.sin.n$$

atque

$$z = -\ p.sin.m.sin.n + q.cos.m.sin.n + r.cos.n \ ,$$

unde resultet ista aequatio

$$App + Bqq + Crr + Dpq + Epr + Fqr + Gp + Hq + Ir + K = 0 \ .$$

114. *Jam anguli illi arbitrarii k, m, & n ita definiri poterunt, ut tres coëfficientes D, E, & F evanescant. Quanquam enim calculus nimis fit prolixus, quam ut angulorum illorum determinatio actu ostendi possit; tamen si quis forte dubitet, an semper ista eliminatio ad valores reales angulorum illorum perducat, is certe concedere debebit, duos saltem coëfficientes D & E nihilo aequales reddi posse. Hoc autem si fuerit effectum, positio tertii Axis, cui Ordinatae r sunt parallelae in plano ad Ordinatas p normali, facile ita mutari potest, ut etiam coëfficiens F evanescat. Statuatur enim $q = t.sin.i + u.cos.i.$ & $r = t.cos.i - u.sin.i$, ita ut, loco termini qr, novus terminus tu ingrediatur, cujus coëfficiens ope anguli i nihilo aequalis fieri poterit. Hoc igitur modo aequatio generalis pro Superficiebus secundi ordinis ad hanc formam perducetur*

$$App + Bqq + Crr + Gp + Hq + Ir + K = 0 \ .$$

115. *Nunc praeterea Coordinatae* p, q, r *datis quantitatibus ita augeri diminuive poterunt, ut coëfficientes* G, H & I *evanescant; quod fiet mutato tantum puncto illo, unde omnes Coordinatae initium habent. Atque hoc modo omnes Superficies secundi ordinis in hac aequatione continebuntur*

$$App + Bqq + Crr + K = 0 \ ,$$

ex qua intelligitur unumquodque trium planorum principalium per initium Coordinatarum ductorum Superficiem in duas partes similes & aequales bisecare. Omnis ergo Superficies secundi ordinis non solum unum habet planum diametrale, sed adeo tria, quae se mutuo in eodem puncto normaliter intersecent; quod punctum propterea Centrum Superficiei constituet, etiamsi in nonnullis casibus hoc Centrum in infinitum distet. Simili scilicet modo, quo omnes Sectiones conicae Centro dicuntur praeditae, etiamsi in Parabola Centrum a Vertice infinite removeatur.
([Euler, 1748], díl II., odst. 113–115, str. 378–380)

L. Euler se problémům transformace kvadratické plochy k hlavním osám, rotacím souřadných os, resp. ortogonálním transformacím věnoval i později. Roku 1765 vydal tři práce, v nichž se zabýval rotacemi tuhého tělesa: knihu *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum ex primis nostrae cognitionis principiis stabilita et ad omnes motus, qui in hujusmodi corpora cadere possunt, accommodata*, asi dvacetistránkovou práci *Recherches sur la connoisance mechanique des corps* a rozsáhlejší pojednání *Du mouvement de rotation des corps solides autour d'un axe variable.* V té době zavedl termín hlavní osy – *principal axes.*

Joseph Louis Lagrange

Problém převedení kvadratické formy na součet čtverců studoval J. L. Lagrange (1736–1813) roku 1759 v práci *Recherches sur la méthode de maximis et minimis* věnované zejména výpočtům extrémů funkcí více proměnných ([Oeuvres I., str. 3–4).

Tout ceci supposé et bien entendu, que Z *représente une fonction algébrique des variables* $t, u, x, y, \ldots$, *et qu'on se propose de la rendre un maximum ou un minimum. Soit, selon les règles ordinaires,*

$$dZ = pdt + qdu + rdx + sdy + \ldots \ ,$$

et l'on aura d'abord cette équation

$$pdt + qdu + rdx + sdy + \cdots = 0 \ .$$

Potom má ovšem d^2Z tvar následující kvadratické formy:

$$\begin{aligned} d^2Z = & Adt^2 + 2Bdtdu + Cdu^2 + 2Ddtdx + 2Edudx + \\ & + Fdx^2 + 2Gdtdy + 2Hdudy + 2Idxdy + Ldy^2 + \ldots \end{aligned}$$

Autor se dále věnoval speciálnímu, jednoduchému případu, kdy je $n = 2$:

Les variables contenues dans Z soient deux, savoir t et u; alors

$$d^2Z = Adt^2 + 2Bdtdu + Cdu^2 \ .$$

… Qu'on donne cependant à la proposée

$$Adt^2 + 2Bdtdu + Cdu^2$$

cette forme

$$A\Big(dt + \frac{Bdu}{A}\Big)^2 + \Big(C - \frac{B^2}{A}\Big)du^2 \ ;$$

… (Oeuvres I., str. 5)

Roku 1775 publikoval další pojednání o tomto tématu nazvané *Nouvelle solution du problème du mouvement de rotation d'un corps de figure quelconque qui n'est animé par aucune force accélératrice*; ukázal v něm, že koeficienty výsledného tvaru symetrické formy tří proměnných jsou reálné.

Teorie čísel

V teorii čísel byly často vyšetřovány kvadratické formy s celočíselnými koeficienty a lineární substituce (rovněž s celočíselnými koeficienty), pomocí nichž byly některé kvadratické formy převáděny na jednoduché tvary (např. na součty čtverců), kterým někdy říkáme *kanonické*.

Problematika kvadratických forem se v určité podobě objevila již u Diofanta ve 3. století našeho letopočtu. V 19. století se ukázaly zajímavé souvislosti s otázkami, které dnes řadíme do lineární algebry, resp. do teorie matic.

Teorií čísel se zabýval jeden z největších matematiků všech dob, Carl Friedrich Gauss (1777–1855). Roku 1801 vyšetřoval v rozsáhlém pojednání *Disquisitiones arithmeticae* převody binárních a ternárních kvadratických forem s celočíselnými koeficienty na kanonický tvar; užíval přitom celočíselné invertibilní substituce. Tato problematika do lineární algebry přímo nepatří, metodika zmíněných postupů s ní však úzce souvisí.

Další výsledky

Studium převádění rovnic křivek a ploch k hlavním osám zaměstnávalo i další matematiky. Připomeňme v této souvislosti jen několik prací z počátku 19. století, v nichž se toto téma v širším rozsahu objevilo.

Francouzský fyzik, astronom a matematik Jean-Baptiste Biot (1831–1907) vydal roku 1810 práci *Essai de géométrie analytique appliquée aux courbes et aux surfaces du second ordre* (7. vydání je z roku 1826), Octave Rochat publikoval roku 1812 stať *Géométrie analitique. Construction des formules qui servent à déterminer directement la grandeur et la situation des diamètres principaux,* *dans les courbes du second degré rapportées à deux axes rectangulaires quelconques*, francouzský geometr Jean Nicolas Pierre Hachette (1769–1834) vydal roku 1813 v Paříži pojednání nazvané *Traité des surfaces du second degré*.

Během dalších desetiletí se otázka transformace rovnic kvadratických křivek a ploch objevovala v řadě prací a monografií. Některé měly teoretický charakter, jiné řešily konkrétní problémy z oblasti geometrie, mechaniky apod.

Carl Gustav Jacob Jacobi

C. G. J. Jacobi (1804–1851) vyšetřoval roku 1827 transformaci rovnice kvadratické plochy v práci *Über die Hauptaxen der Flächen der zweiten Ordnung*, která má výrazně početní charakter. Studovaný problém výstižně charakterizoval:

Die Aufgabe, eine Oberfläche der zweiten Ordnung auf ihr Hauptaxensystem zu beziehen, fordert bekanntlich, einen Ausdruck von der Form:

$$Axx + Byy + Czz + 2ayz + 2bzx + 2cxy \ ,$$

wo x, y, z die Coordinaten eines Punktes bedeuten, durch Einführung eines neuen rechtwinkligen Coordinatensystems in einen Ausdruck von der Form:

$$L\xi\xi + M\upsilon\upsilon + N\zeta\zeta$$

zu transformiren. Ich werde im Folgenden voraussetzen, dass das ursprüngliche Coordinatensystem, in Bezug auf welches die Gleichung der Oberfläche gegeben ist, ein schiefwinkliges sei. Das Problem, in dieser Allgemeinheit gefasst, umfasst die beiden Fälle, wo das ursprüngliche Coordinatensystem ein rechtwinkliges oder ein schiefwinkliges conjugirtes ist, welche beide schon früher behandelt sind. (Werke III., str. 47)

C. G. J. Jacobi vyjádřil uvažovanou transformaci souřadnic ve tvaru

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= \alpha x + \beta y + \gamma z \ , \\ \upsilon &= \alpha' x + \beta' y + \gamma' z \ , \\ \zeta &= \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z \ . \end{aligned}\right.$$

Předpokládal, že systém souřadnic ξ, υ, η je kartézský, zatímco osy výchozího systému svírají úhly λ, μ, ν. Vzájemné vztahy koeficientů uvažované transformace vyjádřil následujícími rovnostmi:

$$\left\{\begin{array}{ll} 1)\ \alpha\alpha + \alpha'\alpha' + \alpha''\alpha'' = 1 \ , & 4)\ \beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'' = \cos\lambda \ , \\ 2)\ \beta\beta + \beta'\beta' + \beta''\beta'' = 1 \ , & 5)\ \gamma\alpha + \gamma'\alpha' + \gamma''\alpha'' = \cos\mu \ , \\ 3)\ \gamma\gamma + \gamma'\gamma' + \gamma''\gamma'' = 1 \ , & 6)\ \alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' = \cos\nu \ . \end{array}\right.$$

Jestliže je tedy původní systém kartézský, je $\cos\lambda = \cos\mu = \cos\nu = 0$ a uvažovaná transformace je ortogonální.

Roku 1834 se C. G. J. Jacobi s kvadratickými formami a jejich převedením na kanonický tvar znovu zabýval v práci o transformaci integrálů nazvané *De binis quibuslibet functionibus homogeneis secundi ordinis per substitutiones lineares in alias binas transformandis, quae solis quadratis variabilium constant; una cum variis theorematis de transformatione et determinatione integralium multiplicium.*

Julius Plücker, Ludwig Otto Hesse

Německý matematik a fyzik J. Plücker (1801–1868) publikoval roku 1842 v časopise Journal für die reine und angewandte Mathematik článek *Aphorismen aus der Geometrie des Raumes.* V jeho druhé části nazvané *Allgemeine Methode, eine homogene Function beliebig vieler Veränderlichen in eine andere zu verwandeln, welche nur die Quadrate der Veränderlichen einhält* se zabýval transformací homogenní rovnice druhého stupně n proměnných na kanonický tvar.[3] V úvodu napsal, že se snaží zobecnit známé případy $n = 2$ a $n = 3$:

Die Haupt-Aufgabe bei der Discussion der allgemeinen Gleichung vom zweiten Grade zwischen zwei und drei Veränderlichen besteht darin, aus dieser Gleichung diejenigen Glieder wegzuschaffen, welche die Producte dieser Veränderlichen enthalten. Wir wollen diese Aufgabe auf eine beliebige Anzahl von Veränderlichen ausdehnen, und können bei der Symmetrie der Entwickelungen die Aufgabe als gelöset betrachten, nachdem wir den Fall der allgemeinen Gleichung zwischen vier, oder der allgemeinen homogenen Gleichung zwischen fünf Veränderlichen behandelt haben. ([Plücker, 1842], str. 287)

Převodem kvadratických ploch k hlavním osám se v některých pracích zabýval také německý matematik L. O. Hesse (1811–1874). Jednalo se zejména o články *Neue Eigenschaften der linearen Substitutionen welche gegebene homogene Functionen des zweiten Grades in andere transformiren die nur die Quadrate der Variabeln enthalten* (1859) a *Zerlegung der Bedingung für die Gleichheit der Hauptaxen eines auf einer Oberfläche zweiter Ordnung liegenden Kegelschnittes in die Summe von Quadraten* (1862).

Obdobnými problémy se v té době již zabývali mnozí další matematici a fyzici.

3. Sekulární rovnice

Důležité myšlenky maticového počtu jsou spjaty s metodami výpočtu pohybu planet a jejich satelitů.

Na základě výsledků Johanna Keplera (1571–1630) byla sluneční soustava nějakou dobu chápána jako dokonalý stroj, který se přesně řídí třemi zákony, které dnes nesou jeho jméno. Lze říci, že Keplerův popis sluneční soustavy

[3] První část se nazývá *Die Axen der Flächen zweiter Ordnung.*

a jejího chodu byl postaven na geometrickém základě. Isaac Newton (1643–1727) vyložil o několik desetiletí později pohyb planet a jejich měsíců pomocí gravitačního zákona a pohybových zákonů, z nichž bylo možno (v ideálním případě) Keplerovy zákony odvodit.

Během 18. století upřesňovali astronomové, fyzici a matematici teorii pohybu jednotlivých těles sluneční soustavy a postupně budovali její matematický model. Pohyb každé planety je totiž ovlivněn nejen přitažlivostí Slunce, ale i přitažlivostí ostatních těles sluneční soustavy; některými více, některými méně, podle toho, jakou hmotnost mají a jak jsou daleko. Totéž lze říci o pohybech měsíců, komet apod. Vzájemná gravitační působení jednotlivých těles sluneční soustavy proto způsobují menší či větší odchylky jejich drah od ideálních keplerovských eliptických orbitů.

Studium těchto odchylek a dlouhodobých poruch, jež byly v pohybech planet a jejich satelitů pozorovány, bylo velikým tématem nebeské mechaniky 18. století. Závažnou otázkou, která se v této souvislosti objevila, byla stabilita sluneční soustavy. Nebylo totiž vůbec jasné, zda poruchy v jejím chodu nebudou narůstat tak dlouho, až tím či oním způsobem zanikne.

Dlouhodobé poruchy planetárních pohybů (změny výstředností a velikostí poloos eliptických drah, změny jejich sklonů k ekliptice apod.) byly intenzivně studovány ve druhé polovině 18. století. Byla zkoumána zejména dlouhodobá periodicita těchto poruch, která se stabilitou sluneční soustavy úzce souvisí.

Matematický popis této problematiky vedl na řešení soustav lineárních diferenciálních rovnic, jejichž matice byly sestaveny z reálných čísel a byly symetrické. Při řešení těchto soustav hraje důležitou roli tzv. *charakteristická rovnice* příslušné matice. Astronomové, fyzici a matematici, kteří se nebeskou mechanikou a zejména dlouhodobými poruchami planetárních pohybů zabývali, ji nazývali *sekulární rovnice*.[4] Jednalo se o rovnici

$$\det(A - \lambda E) = 0 \ ,$$

kde matice A je sestavena z čísel daných studovaným problémem (a matice E je jednotková). Polynom stojící v této rovnici na levé straně je *charakteristický polynom* matice A, jeho kořeny jsou *vlastní čísla* matice A, s každým vlastním číslem matice A jsou spjaty *vlastní vektory*.

Problém charakteristické rovnice, vlastních čísel a vlastních vektorů se tedy v plné síle objevil již v 18. století, ještě dříve, než existovala teorie matic, v době, kdy teprve vznikala a rozvíjela se teorie determinantů: jednak v analytické geometrii při snahách o zjednodušení rovnic křivek a ploch, jednak v nebeské mechanice při studiu planetárních pohybů.

Výše zmíněnými problémy nebeské mechaniky se zabývali L. Euler (pohyb Měsíce), J.-B. le Rond d'Alembert (pohyb Jupitera a Saturna), J. L. Lagrange, P. S. Laplace.

[4] Slovo sekulární je z latinského *saeculum* – pokolení, generace; *saeculum civile* – stoletá perioda, *in saecula saeculorum* – na věky věků.

Joseph Louis Lagrange

J. L. Lagrange se řadu let věnoval právě takovýmto problémům nebeské mechaniky; v letech 1764 a 1766 získal dvě ceny pařížské akademie za práci o libracích Měsíce a za pojednání o satelitech Jupitera. Řadu svých výsledků shrnul v rozsáhlém díle nazvaném *Méchanique analitique* z roku 1788, které prezentovalo mechaniku jako disciplínu založenou na analytické geometrii a infinitesimálním počtu.

V jeho pracích se objevily problémy nebeské mechaniky v úzkém vztahu k analytické geometrii. V souvislosti s otázkami pohybů nebeských těles totiž vyšetřoval transformaci symetrické bilineární formy dvou, resp. tří proměnných na kanonický tvar, což právě odpovídá převedení rovnice kuželosečky nebo kvadriky k hlavním osám. Matematickou podstatou obou těchto problémů je existence ortogonální transformace, kterou lze kvadratickou formu převést na kanonický tvar, a skutečnost, že vlastní čísla reálné symetrické matice jsou reálná. Souvislost těchto problémů si matematici poměrně rychle uvědomili.

V letech 1762 až 1765 pracoval J. L. Lagrange s charakteristickou rovnicí, v sedmdesátých letech intenzivně studoval planetární pohyby, řešil soustavy obyčejných diferenciálních rovnic[5] a narazil v této souvislosti na problém reálnosti vlastních čísel reálné symetrické matice. Ve stejné době ukázal, že poruchy ve sklonech planetárních drah k ekliptice jsou periodické.

Velmi zajímavý je vývoj Lagrangeových komentářů k otázce (v naší řeči) reálnosti a násobnosti vlastních čísel reálné symetrické matice. Uvedeme proto několik úryvků z jeho pojednání z let šedesátých až osmdesátých, které se této problematiky dotýkají.

V práci *Solution de différents problèmes de calcul intégral* z roku 1766 J. L. Lagrange napsal:

Au reste, quoiqu'il soit difficile, peut-être impossible, de déterminer en général les racines de l'équation $P = 0$, *on peut cependant s'assurer, par la nature même du problème, que ces racines sont nécessairement toutes réelles inégales et négatives; car sans cela les valeurs de* $y', y'', y''', \ldots$ *pourraient croitre à l'infini, ce qui serait absurde.* (Oeuvres I., str. 538)

V Lagrangeově práci *Recherches sur les équations séculaires des mouvements des noeuds* z roku 1774 nalézáme tato slova:

Avant de terminer cet Article, nous devons encore remarquer que, quoique nous ayons sapposé que toutes les racines $a, b, c \ldots$ *de l'équation en* x *soient réelles et inégales, il peut néanmoins arriver qu'il y en ait d'égales ou d'imaginaires; mais il est facile de résoudre ces cas par les méthodes connues:*

[5] Poznamenejme, že k pravidlům pro sestavení diferenciálních rovnic pro pohyb soustavy hmotných bodů i k pojmu vlastní číslo dospěl již Jean-Baptist le Rond d'Alembert (1717–1783). Jedním z fyzikálních problémů, které řešil, byly kmity strun. Své výsledky prezentoval roku 1743 ve spise *Traité de dynamique* (2. vydání je z roku 1758), resp. v práci *Suite des recherches sur le calcul intégral* vydané roku 1750. Reálnost vlastních čísel zdůvodňoval fyzikálními argumenty. Více viz [Hawkins, 1975].

nous observerons seulement que, dans le cas des racines égales, les valeurs de $s, s_1, s_2, \ldots, u, u_1, u_2, \ldots$ *contiendront des arcs de cercle, et que dans celui des racines imaginaires ces valeurs contiendront des exponentielles ordinaires; de sorte que, dans l'un et l'autre cas, les quantités dont il s'agit croitront à mesure que t croit; par conséquent la solution précédente cessera d'être exacte au bout d'un certain temps* (23)*; mais heureusement ces cas ne paraissent pas avoir lieu dans le Système du monde.* (Oeuvres VI., str. 665–666)

V předmluvě k prvnímu vydání své monografie *Méchanique analitique* z roku 1788 se J. L. Lagrange výrazně distancoval od geometrického pojetí mechaniky v newtonovském duchu a zdůraznil analytický přístup:

… Je me suis proposé de réduire la théorie de cette Science, et l'art de résoudre les problêmes qui s'y rapportent, à des formules générales, dont le simple développement donne toutes les équations nécessaires pour la solution de chaque problême. …

On ne trouvera point de Figures dans cet Ouvrage. Les méthodes que j'y expose ne demandent ni constructions, ni raisonnemens géométriques ou méchaniques, mais seulement des opérations algébriques, assujetties à une marche réguliere et uniforme. Ceux qui aiment l'Analyse, verront avec plaisir la Méchanique en devenir une nouvelle branche, et me sauront gré d'en avoir étendu ainsi le domaine. ([Lagrange, 1788], 3. vydání, str. i–ii)

V jedenáctém článku pátého paragrafu druhé části své monografie J. L. Lagrange napsal:

On voit que le second membre de l'équation précédente est la même fonction que nous avons vu devoir être indépendante du temps t …: d'où il suit qu'après y avoir substitué les valeurs de ξ, ψ, φ*, etc., en fonctions de t et des constantes arbitraires, on pourra y faire t nul ou égal à une valeur quelconque.*
([Lagrange, 1788], 3. vydání, str. 308)

Připomeňme v této souvislosti ještě Lagrangeovu rozsáhlou práci z roku 1778 nazvanou *Recherches sur les équations séculaires des mouvements des noeuds et des inclinaisons des orbites des planètes* a jeho dvoudílný spis *Théorie des variations séculaires des éléments des planètes* z let 1783 a 1784, který má více než dvě stě stran. Obě tato pojednání jsou věnována problematice planetárních pohybů a sekulárních poruch, charakteristické rovnici, která odpovídá příslušným soustavám diferenciálních rovnic atd.

T. Hawkins o Lagrangeových výsledcích napsal:

Lagrange had indeed reduced the consideration of principal axes to pure algebra. Moreover, he had formulated it in such a manner that it can be regarded as a special case of a more general algebraic problem: Given a quadratic form in n variables does there exist an "orthogonal transformation" … that transforms the form into a linear combination of squares? Furthermore, Lagrange's treatment indicated that the solution of the problem depends upon the reality of the eigenvalues. ([Hawkins, 1975], str. 18)

Pierre Simon Laplace

Francouzský matematik a fyzik P. S. Laplace (1749–1827) se rovněž intenzivně věnoval nebeské mechanice, podrobně studoval pohyby planet a zejména jejich nepravidelnosti. Navázal na výsledky prací svých předchůdců (L. Euler, J.-B. le Rond d'Alembert, J. L. Lagrange). V souvislosti s otázkami nebeské mechaniky narazil roku 1772 na problém charakteristické (sekulární) rovnice, vlastních čísel a vlastních vektorů.

K některým výsledkům nebeské mechaniky došli J. L. Lagrange a P. S. Laplace zhruba ve stejné době, řešili tehdy velmi aktuální problém nebeské mechaniky – otázku stability sluneční soustavy. V sedmdesátých a osmdesátých letech zjistili, že poruchy velikostí velkých poloos planetárních drah a poruchy výstředností těchto drah jsou periodické, a že je tedy vysoce pravděpodobné, že sluneční soustava je dlouhodobě stabilní a nepotřebuje žádné regulace (případné Boží zásahy).

Studovanou problematiku dobře vystihují názvy Laplaceových prací: *Mémoire sur les solutions particulières des équations différentielles et sur les inégalités séculaires des planètes* (1775), *Recherches sur le calcul intégral et sur le système du monde* (1776), *Mémoire sur les inégalités séculaires des planètes et des satellites* (1787), *Mémoire sur les variations séculaires des orbites des planètes* (1787, 1789).

P. S. Laplace navíc ukázal, že excentricity eliptických drah planet a jejich sklony k ekliptice oscilují kolem středních hodnot; při matematickém zpracování této problematiky se totiž neobjevují složky, které by závisely exponenciálně na čase. P. S. Laplace si byl dobře vědom skutečnosti, že existence komplexních kořenů charakteristické rovnice by vedla k funkcím, které s časem exponenciálně rostou, a tedy nejsou v souladu se stabilitou sluneční soustavy.[6]

J. L. Lagrange a P. S. Laplace pracovali s kvadratickými formami, studovali sekulární rovnici 6. stupně, neboť bylo v té době známo šest planet. Chybně se domnívali, že předpoklad stability sluneční soustavy je ve sporu s vícenásobností kořenů charakteristické rovnice.[7]

Roku 1787 sepsal P. S. Laplace práci *Mémoire sur les variations séculaires des orbites des planètes*, v níž studoval malé poruchy pohybů planet, které se objevují v dlouhých časových intervalech (tzv. *variations séculaires*). Tyto

[6] Analogické situace se již dříve vyskytovaly v poměrně jednoduchých úlohách o lineárních oscilacích; některými parametry uvažovaného problému byly totiž kořeny kvadratické rovnice.

[7] Astronom Edward John Routh (1831–1907) ukázal, že se v tomto názoru J. L. Lagrange a P. S. Laplace mýlili, a to v práci *A treatise on the stability of a given state of motion*, která vyšla roku 1877 v Londýně.
O násobnosti kořenů charakteristické rovnice uveřejnil zajímavou práci německý astronom Hugo Hans Ritter von Seeliger (1849–1924). Nese název *Ueber die Gleichung, von deren Wurzeln die säcularen Veränderungen der Planetenbahnelemente abhängen*, vyšla roku 1878 v časopise Astronomische Nachrichten.

problémy vedly na soustavu diferenciálních rovnic

$$\frac{dp^{(i)}}{dt} = q^{(i)} \cdot \sum_{r=0}^{n} (i,r) - \sum_{r=0}^{n} q^{(r)} \cdot [i,r] \ ,$$

$$\frac{dq^{(i)}}{dt} = -p^{(i)} \cdot \sum_{r=0}^{n} (i,r) + \sum_{r=0}^{n} p^{(r)} \cdot [i,r] \ ,$$

kde parametry $p^{(i)}$, $q^{(i)}$ reprezentují odchylky dráhy i-té planety, (i,r), $[i,r]$ závisí na hmotnostech planet $m^{(i)}$, jejich vzdálenostech od Slunce $a^{(i)}$ a rychlosti i-té a r-té planety. Systém byl symetrický vzhledem k i a r.

Pomocí transformace

$$p^{(i)} = M^{(i)} \cdot sin(ft + \beta)$$

$$q^{(i)} = M^{(i)} \cdot cos(ft + \beta)$$

autor původní soustavu transformoval na soustavu

$$fM^{(i)} = M^{(i)} \cdot \sum_{r=0}^{n} (i,r) - \sum_{r=0}^{n} M^{(r)} \cdot [i,r] \ ,$$

což je v podstatě charakteristická rovnice a f_i jsou příslušná vlastní čísla.

P. S. Laplace zjistil, že pokud mají zůstat poruchy planetárních pohybů malé, musí být hodnoty f_i reálné a navzájem různé. Reálnost vlastních čísel symetrické reálné matice zdůvodňoval fyzikálními argumenty, hlavně stabilitou sluneční soustavy.

Uveďme nyní delší ukázku z tohoto díla, z níž je dobře znát Laplaceův přístup k problému i jeho nazírání na celou problematiku.

Reprenons *maintenant les équations* (B) *de l'art. II. Si l'on y suppose successiventement* $i = 0$, $i = 1$, $i = 2$, $\ldots$ $i = n-1$*; on aura* $2n$ *équations différentielles linéaires du premier ordre, dont les intégrales doivent par conséquent renfermer* $2n$ *constantes arbitraires. Supposons*

$$p^{(i)} = M^{(i)}.sin.(ft + \beta) \ ; \quad q^{(i)} = M^{(i)}.cos.(ft + \beta) \ ;$$

en substituant ces valeurs dans les équations (B)*, on aura*

$$fM^{(i)} = M^{(i)} \cdot \sum (i,r) - \sum .M^{(r)}[i,r] \ .$$

Au moyen des n *équations que l'on formera par les suppositions de* $i = 0$, $i = 1$, $i = 2$, $\ldots$ $i = n-1$, *on pourra éliminer les constantes* $M^{(0)}$, $M^{(1)}$, *&c. & l'on aura une équation en* f*, du degré* n*; de plus, toutes les constantes* $M^{(0)}$, $M^{(1)}$, *&c. seront données au moyen de l'une d'elles, telle que* $M^{(0)}$ *qui restera arbitraire.*

Soient f, f^1, &c. les n racines de l'équation en f; on aura par la théorie connue des équations différentielles linéaires,

$$p^{(i)} = M^{(i)}.sin.(ft+\beta) + N^{(i)}.sin.(f^1t+\beta^1) + \&c.$$

$$q^{(i)} = M^{(i)}.cos.(ft+\beta) + N^{(i)}.cos.(f^1t+\beta^1) + \&c.$$

Ces valeurs de $p^{(i)}$ & de $q^{(i)}$ seront complettes, puisqu'elles renfermeront les $2n$ arbitraires, $M^{(0)}$, $N^{(0)}$, &c. β, β^1, &c.

Maintenant si les racines f, f^1, &c. sont réeles & inégales; les valeurs de $p^{(i)}$ & de $q^{(i)}$ resteront toujours fort petites, & comme on a $\varepsilon^{(i)^2} = p^{(i)^2} + q^{(i)^2}$, les excentricités des orbites seront toujours peu considérables. Mais il n'en est pas de même si quelques-unes de ces racines sont égales ou imaginaires; car alors les sinus & les cosinus se changent en arcs de cercle, ou en exponentielles. Les excentricités des orbites cesseront donc, après un long intervalle de temps, d'être fort petites; ce qui, en changeant la constitution du système solaire, détruiroit sa stabilite. Par conséquent, il importe de s'assurer que les valeurs de f, ne peuvent être ni égales ni imaginaires. Cette recherche paroît supposer la connoissance des masses des planètes, qui entrent dans les coéfficiens de l'équation en f; mais il est trèsremarquable que quelles que soient ces masses, pourvu qu'elles se meuvent toutes dans le même sens, l'équation en f ne peut avoir que des racines réelles & inégales.

Pour le démontrer de la manière la plus générale, nous observerons que dans le cas des racines imaginaires valeur de $p^{(i)}$ contient des termes de la forme c étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité, & $P^{(i)}$ étant une quantité réelle, puisque $p^{(i)}$ qui est égal à $e^{(i)}.sin.\omega^{(i)}$, est nécessairement réel. La valeur de $q^{(i)}$ renferme un terme correspondant de la forme $c^{gt}\cdot Q^{(i)}$, $Q^{(i)}$ étant encore une quantité réelle; la fonction $p^{(i)^2} + q^{(i)^2}$ renfermera donc le terme $c^{2gt}\cdot(P^{(i)^2} + Q^{(i)^2})$, & par conséquent le premier membre de l'équation

$$\sum\nolimits^1 \cdot m^{(i)} \cdot \sqrt(a^{(i)}) \cdot (p^{(i)^2} + q^{(i)^2}) = const.$$

renfermera le terme

$$\sum\nolimits^1 \cdot m^{(i)} \cdot \sqrt(a^{(i)}) \cdot (P^{(i)^2} + Q^{(i)^2}) \cdot c^{2gt} \ .$$

Si l'on suppose que l'exponentielle c^{gt} soit la plus grande de toutes celles que renferment les valeurs de $p^{(i)}$ & de $q^{(i)}$; il est clair que le terme précédent ne peut être détruit par aucun autre, dans le premier membre de cette équation; d'où il suit que ce membre ne peut se réduire à une constante, à moins que l'on ait

$$\sum\nolimits^1 \cdot m^{(i)} \cdot \sqrt(a^{(i)}) \cdot (P^{(i)^2} + Q^{(i)^2}) = 0 \ ;$$

or cela est impossible lorsque les quantités $m^{(0)}\cdot\sqrt(a^{(0)})$, $m^{(1)}\cdot\sqrt(a^{(1)})$, &c. sont toutes de même signe, ou, ce qui revient au même, lorsque toutes les

planètes tournent dans le même sens; les valeurs de $p^{(i)}$ & de $q^{(i)}$ ne peuvent donc point renfermer d'exponentielles, & l'équation en f ne peut avoir que des racines réelles, dans le cas de la nature.
([Laplace, 1787], str. 275–277; viz též Oeuvres XI., str. 302–304)

L'analyse précédente ne peut s'appliquer qu'à un systéme de planètes qui se meuvent toutes dans le même sens, comme cela a lieu dans notre système planétaire; dans ce cas, on voit que le système est stable, & ne s'éloigne jamais que très-peu, d'un état moyen autour duquel il oscille avec une extrême lenteur. Mais cette propriété remarquable convient – elle également à un système de planètes qui se meuvent en différens sens? c'est ce qu'il seroit très-difficile de déterminer. Comme cette recherche n'est d'aucune utilité dans l'astronomie, nous nous dispenserons de nous en occuper.
([Laplace, 1787], str. 279; viz též Oeuvres XI., str. 305–306)

T. Hawkins ocenil Laplaceův přístup ke studované problematice těmito slovy:

… Laplace had discovered that properties of the roots of the characteristic equation, no matter how high its degree, can be deduced from symmetry properties of the corresponding system of coefficients. Previously it had appeared necessary to appeal to peculiarities of the physical context. Laplace's work thus indicated the possibility of an underlying mathematical theory.
([Hawkins, 1975], str. 15)

Koncem 18. století začal P. S. Laplace publikovat rozsáhlou pětidílnou monografii *Traité de Mécanique céleste* (1799 až 1825). O něco dříve, v letech 1795 až 1796, vydal stručný, populárnější výklad hlavních myšlenek svého připravovaného díla v knize *Exposition du systèm du monde.* Laplaceovými výsledky, jež shrnula jeho monografie *Traité de Mécanique céleste*, byl do značné míry dovršen vývoj nebeské mechaniky, který začal ve druhé polovině 17. století objevem gravitačního zákona a pohybových zákonů.

Optimismus, který dosavadní výsledky přinesly, přispěl ke zformulování tzv. *mechanického determinismu*, jehož byl P. S. Laplace hlavním představitelem. Stručné (a zjednodušené) vyjádření této představy zní asi takto: Dejte mi současné polohy a rychlosti hmotných bodů ve vesmíru a budu vám schopen říci, jak bude vesmír vypadat zítra.

Traduje se, že Napoleon Bonaparte (1769–1821) položil Laplaceovi tuto otázku: „Newton ve své knize často mluví o Bohu. Prohlížel jsem tu Vaši, ale nenašel jsem v ní jeho jméno ani jednou.“ A P. S. Laplace odpověděl takto: „Občane první konzule, tuto hypotézu jsem nepotřeboval.“

Planeta Uran

Roku 1781 objevil anglický astronom německého původu Frederick William (Friedrich Wilhelm) Herschel (1738–1822) sedmou planetu, která dostala jméno Uran. Řadu let však ještě trvalo, než byly dostatečně přesně zjištěny parametry dráhy, z nichž bylo možno vycházet při dalších úvahách a výpočtech. Astronomové a matematici začali tedy studovat sekulární rovnice 7. stupně.

Carl Gustav Jacob Jacobi

Jedním z nich byl C. G. J. Jacobi, který úspěšně rozvíjel analytickou mechaniku, jejíž základy položili zejména L. Euler a J. L. Lagrange. Roku 1846 publikoval v časopise Journal für die reine und angewandte Mathematik obsáhlou práci *Über ein leichtes Verfahren, die in der Theorie der Säcularstörungen vorkommenden Gleichungen numerisch aufzulösen*, která byla zaměřena na numerické záležitosti nebeské mechaniky. Studoval metody řešení sekulární rovnice 7. stupně; při svých výpočtech používal hodnoty, které zveřejnil Urbain Jean Joseph Le Verrier (1811–1877) v práci *Sur les variations séculaires des éléments des orbits, Additions à la Connaissance pour l'An 1843*.

C. G. J. Jacobi uvedl svoje pojednání zajímavým a velmi výstižným slovním nástinem pojmů, které byly později nazvány charakteristická matice, charakteristická rovnice, vlastní číslo a vlastní vektor.

In der Theorie der Säcularstörungen und der kleinen Oscillationen wird man auf ein System linearer Gleichungen geführt, in welchem die Coefficienten der verschiedenen Unbekannten in Bezug auf die Diagonale symmetrisch sind, die ganz constanten Glieder fehlen und zu allen in der Diagonale befindlichen Coefficienten noch dieselbe Grösse $-x$ addirt ist. Durch Elimination der Unbekannten aus solchen linearen Gleichungen erhält man eine Bedingungsgleichung, welcher x genügen muss. Für jeden Werth von x, welcher diese Bedingungsgleichung erfüllt, hat man sodann aus den linearen Gleichungen die Verhältnisse der Unbekannten zu bestimmen. (Werke VII., str. 97)

V následujícím odstavci přešel k formálnímu matematickému vyjádření soustavy rovnic, která představuje vztah mezi vlastním číslem a příslušnými vlastními vektory.

Es sei zwischen den n Unbekannten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \varpi$ ein System von n linearen Gleichungen von folgender Form gegeben:

$$\begin{array}{lllllll}
\{(a,a)-x\}\alpha & + (a,b)\beta & + (a,c)\gamma & + \ldots + & (a,p)\varpi & = 0 \,, \\
(b,a)\alpha & + \{(b,b)-x\}\beta & + (b,c)\gamma & + \ldots + & (b,p)\varpi & = 0 \,, \\
(c,a)\alpha & + (c,b)\beta & + \{(c,c)-x\}\gamma & + \ldots + & (c,p)\varpi & = 0 \,, \\
\multicolumn{6}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
(p,a)\alpha & + (p,b)\beta & + (p,c)\gamma & + \ldots + & \{(p,p)-x\}\varpi & = 0 \,,
\end{array}$$

in welchen je zwei zur Diagonale symmetrisch liegende Coefficienten, welche durch Vertauschung der Buchstaben aus einander erhalten werden, gleich sind:

$$(a,b) = (b,a) \,, \quad (a,c) = (c,a) \,, \quad (b,c) = (c,b) \,, \quad \ldots$$

... Es seien nämlich die Gleichungen

$$\begin{array}{l}
\cdots + (g-a)M_i + \cdots + cM_k + \cdots + h_{i,l}M_l + \cdots = 0 \,, \\
\cdots + cM_i + \cdots + (g-b)M_k + \cdots + h_{k,l}M_l + \cdots = 0
\end{array}$$

zwei von den Gleichungen des Systems ..., in welchen der ausserhalb der Diagonale befindliche Coefficient c einen erheblichen Werth hat, so kann man dadurch, dass man M_i und M_k durch andere Unbekannte P_i und P_k ersetzt und die beiden Gleichungen gehörig zu zwei anderen combinirt, das gegebene System in ein anderes von ähnlicher Form verwandeln, in welchem, während g unverändert bleibt, der Coefficient, welcher an die Stelle von c tritt, verschwindet. Setzt man nämlich

$$\begin{aligned} M_i &= \cos\alpha\, P_i - \sin\alpha\, P_k\ , \\ M_k &= \sin\alpha\, P_i + \cos\alpha\, P_k\ , \end{aligned}$$

so wird jetzt in jeder von den beiden Gleichungen die Grösse g in zwei Gliedern stehen. (Werke VII., str. 98–99)

Planeta Neptun

Planeta Uran se nepohybovala tak, jak bylo vypočteno. Astronomové začali uvažovat, zda není její pohyb ovlivňován další, ještě vzdálenější planetou. U. J. J. Le Verrier a John Couch Adams (1819–1892) vypočetli nezávisle na sobě v letech 1843 až 1845 polohu předpokládané další planety. Výsledky jejich výpočtů se překvapivě shodovaly. Roku 1846 nalezl tuto novou planetu Johann Gottfried Galle (1812–1910) nedaleko místa, které vypočetli. Nová planeta byla pojmenována Neptun.

Koncem 19. století začaly být proto studovány sekulární rovnice 8. stupně, například v monografii *Traité de Mécanique céleste*, kterou v letech 1889 až 1896 vydal francouzský astronom François Felix Tisserand (1845–1896), zakladatel časopisu Bulletin astronomique (1884).[8]

Augustin-Louis Cauchy

A.-L. Cauchy (1789–1857) vyučoval na École Polytechnique od roku 1815. Konal přednášky z analytické geometrie, věnoval se v nich i problematice kvadratických ploch a jejich převedení k hlavním osám. Roku 1826 vydal učební text *Leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la géométrie*, v němž se zabýval i problémem převedení kvadratické plochy k hlavním osám.

V roce 1829 řešil v práci *Sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des mouvements des planètes* uveřejněné v časopisu Exercices de Mathématiques stejný problém, o němž psali již L. Euler (1748) a J. L. Lagrange (1773). Jednalo se o převod rovnice kvadratické formy n proměnných

$$A_{xx}x^2 + A_{yy}y^2 + A_{zz}z^2 + \dots + 2A_{xy}xy + 2A_{xz}xz + \dots$$

[8] Pro další informace a bibliografické údaje můžeme čtenáře odkázat na dva články C. Wilsona otištěné v encyklopedii [Grat]: *The dynamics of the Solar System* a *The three-body problem.*

na kanonický tvar, tj. na součet čtverců

$$s_1\xi^2 + s_2\eta^2 + s_3\zeta^2 + \dots$$

Název Cauchyovy práce poukázal na úzký vztah této problematiky k otázkám, kterými se zabýval P. S. Laplace roku 1787; na tuto souvislost upozornil autora Jacques Charles François (Jacob Karl Franz) Sturm (1803–1855).

Jak J. L. Lagrange, tak A.-L. Cauchy uvažoval podmínku

$$x^2 + y^2 + z^2 + \dots = \xi^2 + \eta^2 + \xi^2 + \dots = 1 \ ,$$

tj. předpokládal užití ortogonální transformace. L. Euler i J. L. Lagrange řešili tyto otázky pro případ tří proměnných, A.-L. Cauchy obecně pro libovolné n.

A.-L. Cauchy ukázal, že výše uvedená čísla $s_1, s_2, \dots$ jsou kořeny charakteristické rovnice, která vznikne, položíme-li determinant matice

$$\begin{array}{llll} A_{xx} - s & A_{xy} & A_{xz} & \dots \\ A_{xy} & A_{yy} - s & A_{yz} & \dots \\ A_{xz} & A_{yz} & A_{zz} - s & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

roven nule.

Pomocí teorie determinantů, kterou se intenzivně zabýval v předchozích letech, dokázal, že čísla $s_1, s_2, \dots$ jsou reálná. Dokázal rovněž, že analytické vyjádření obecné kvadratické formy může být převedeno na jednoduché vyjádření obsahující jen součet čtverců pomocí transformace, které dnes říkáme ortogonální. Podstatné na celé záležitosti je ovšem to, že výchozí matice je reálná a symetrická.

Cauchyova práce *Sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des mouvements des planètes* začíná takto:

Soit

$$s = f(x, y, z, \dots) \tag{1}$$

une fonction réelle homogène et du second degré. Soient de plus

$$\varphi(x, y, z, \dots)\ , \quad \chi(x, y, z, \dots)\ , \quad \psi(x, y, z, \dots)\ , \quad \textit{etc.}\ , \tag{2}$$

les dérivées partielles de $f(x, y, z, \dots)$ *prises par rapport aux variables* $x, y, z, \dots$ *Si l'on assujettit ces variables à l'équation de condition*

$$x^2 + y^2 + z^2 + \dots = 1\ , \tag{3}$$

les maxima et minima de la fonction s *seront déterminés ... par la formule*

$$\frac{\varphi(x, y, z, \dots)}{x} = \frac{\chi(x, y, z, \dots)}{y} = \frac{\psi(x, y, z, \dots)}{z} = \dots \tag{4}$$

D'ailleurs les diverses fractions que renferme la formule (4), *étant égales entre elles, seront égales au rapport*

$$\frac{x\varphi(x,y,z,\dots)+y\chi(x,y,z,\dots)+z\psi(x,y,z,\dots)+\dots}{x^2+y^2+z^2+\dots}\ ,$$

qui, en vertu de la condition (3) *et du théorème des fonctions homogènes, se réduira simplement à*

$$2f(x,y,z,\dots)=2s\ .$$

On aura donc encore

$$(5)\qquad \frac{\varphi(x,y,z,\dots)}{x}=\frac{\chi(x,y,z,\dots)}{y}=\frac{\psi(x,y,z,\dots)}{z}=\dots=2s\ ,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(6)\quad \frac{1}{2}\varphi(x,y,z,\dots)=sx,\ \frac{1}{2}\chi(x,y,z,\dots)=sy,\ \frac{1}{2}\psi(x,y,z,\dots)=sz,\ etc.$$

Soit maintenant

$$(7)\qquad S=0$$

l'équation que fournira l'élimination des variables $x, y, z, \dots$ *entre les formules* (6). *Les maxima et les minima de la fonction*

$$s=f(x,y,z,\dots)$$

ne pourront être que des racines de l'équation (7). *D'ailleurs cette équation sera semblable à celle que l'on rencontre dans la théorie des inégalités séculaires des mouvements des planètes, et dont les racines, toutes réelles, jouissent de propriétés dignes de remarque. Quelques-unes de ces propriétés étaient déjà connues: nous allons les rappeler ici, et en indiquer de nouvelles.*

Soit n *le nombre des variables* $x, y, z, \dots$. *Désignons d'ailleurs, pour plus de commodité, par*

$$A_{xx},\quad A_{yy},\quad A_{zz},\quad etc\dots,$$

les coefficients des carrés

$$x^2,\quad y^2,\quad z^2,\quad etc\dots$$

dans la fonction homogène $s=f(x,y,z,\dots)$, *et par*

$$A_{xy}=A_{yx},\quad A_{xz}=A_{zx},\ \dots\ A_{yz}=A_{zy},\ \dots$$

les coefficients des doubles produits

$$2xy\ ,\quad 2xz\ ,\ \dots\ 2yz\ ,\ \dots\ ,$$

ensorte qu'on ait

$$(8)\qquad \begin{aligned} s = {} & A_{xx}x^2 + A_{yy}y^2 + A_{zz}z^2 + \dots \\ & + 2A_{xy}xy + 2A_{xz}xz + \dots + 2A_{yz}yz + \dots\ . \end{aligned}$$

Les équations (6) *deviendront*

$$(9)\qquad \begin{cases} A_{xx}x + A_{xy}y + A_{xz}z + \dots & = sx\ , \\ A_{xy}x + A_{yy}y + A_{yz}z + \dots & = sy\ , \\ A_{xz}x + A_{yz}y + A_{zz}z + \dots & = sz\ , \\ \textit{etc.}\ \dots\ ; \end{cases}$$

et pourront s'écrire comme il suit:

$$(10)\qquad \begin{cases} (A_{xx} - s)x + A_{xy}y + A_{xz}z + \dots & = 0\ , \\ A_{xy}x + (A_{yy} - s)y + A_{yz}z + \dots & = 0\ , \\ A_{xz}x + A_{yz}y + (A_{zz} - s)z + \dots & = 0\ , \\ \textit{etc.}\ \dots \end{cases}$$

Cela posé, il résulte des principes établis dans le troisième chapitre de l'Analyse algébrique [§2] *que le premier membre de l'équation* (8)*, ou* S*, sera une fonction alternée des quantités comprises dans le tableau*

$$(11)\qquad \begin{cases} A_{xx} - s, & A_{xy}, & A_{xz}, & \dots \\ A_{xy}, & A_{yy} - s, & A_{yz}, & \dots \\ A_{xz}, & A_{yz}, & A_{zz} - s, & \dots \\ \textit{etc.}\ \dots\ , \end{cases}$$

savoir, celle dont les différents termes sont représentés, aux signes près, par les produits qu'on obtient, lorsqu'on multiplie ces quantités, n *à* n*, de toutes les manières possibles, en ayant soin de faire entrer dans chaque produit un facteur pris dans chacune des lignes horizontales du tableau, et un facteur pris dans chacune des lignes verticales. En opérant ainsi, on trouvera, par exemple, pour* $n = 2$*,*

$$(12)\qquad S = (A_{xx} - s)(A_{yy} - s) - A_{xy}^2\ ;$$

pour $n = 3$*,*

$$(13)\qquad S = (A_{xx} - s)(A_{yy} - s)(A_{zz} - s)$$

$$-A_{yz}^2(A_{xx} - s) - A_{zx}^2(A_{yy} - s) - A_{xy}^2(A_{zz} - s) + 2A_{xy}A_{xz}A_{yz}\ ;$$

(Oeuvres (2) IX., str. 174–176)

V závěru své práce A.-L. Cauchy poznamenal, že pro $n = 3$ se vyšetřovaná problematika redukuje na otázky, které se často objevují v geometrii a v mechanice:

Dans le cas particulier où les variables x, y, z sont au nombre de trois seulement, l'équation (7) *se réduit à celle qui se représente dans diverses questions de géométrie et de mécanique, par exemple, dans la théorie des moments d'inertie; et le théorème* 1.^{er} *fournit les règles que j'ai données dans le troisième volume des Exercices comme propres à déterminer les limites des racines de cette équation. Alors aussi les équations* (22) *sont semblables à celles qui existent entre les cosinus des angles que forment trois axes rectangulaires quelconques avec les axes coordonnés, supposés eux-mêmes rectangulaires, et le théorème 2 correspond à une proposition de géométrie, savoir, que par le centre d'une surface du second degré on peut mener trois plans perpendiculaires l'un à l'autre, et dont chacun la divise en deux parties symétriques.*
(Oeuvres (2) IX., str. 195)

Připomněl rovněž obdobné výsledky, k nimž dospěl J. Ch. F. Sturm (1803–1855) v práci předložené roku 1829 akademii, z níž vyšel výtah *Extrait d'un mémoire sur l'intégration d'un système d'équations différentielles linéaires* v časopisu Bulletin des Sciences Mathématiques. I ten studoval soustavy obyčejných lineárních diferenciálních rovnic, následoval tak J. L. Lagrangea a P. S. Laplacea. Problém vlastních čísel zobecnil, neboť ke dvěma maticím A, B studoval rovnici $\det(A - \lambda B) = 0$.

J'observerai, en terminant cet article, que, au moment où je n'en avais encore écrit qu'une partie, M. Sturm m'a dit ètre parvenu à démontrer fort simplement les théorèmes I et II Il se propose de publier incessamment le Mémoire qu'il a composé à ce suject, et qui a été offert à l'Académie des Sciences le mème jour que le présent article. (Oeuvres (2) IX., str. 195)

A.-L. Cauchy se výše uvedenou problematikou zabýval též v práci *Mémoire sur l'équation qui a pour racines les moments d'inertie principaux d'un corps solide et sur diverses équations du même genre* z roku 1830; v této souvislosti lze připomenout i jeho krátký článek ze stejného roku nazvaný *L'équation qui a pour racines les moments d'inertie principaux d'un corps solide, et sur diverse équations du même genre.*

Velmi zasvěceným pojednáním o sledu prací, které inspirovaly Cauchyovy výsledky o charakteristické rovnici a vlastních číslech, případně je pouze časově předcházely, je stať Thomase Hawkinse nazvaná *Cauchy and the Spectral Theory of Matrices* z roku 1975.

Charles Hermite

Ch. Hermite (1822–1901) v práci *Remarque sur un théorème de M. Cauchy* z roku 1855 zobecnil Cauchyův výsledek o reálnosti vlastních čísel reálné symetrické matice na komplexní matice, kterým dnes říkáme hermiteovské:

C'est à M. Cauchy qu'on doit la première démonstration générale de la réalité des racines de l'équation remarquable à l'aide de laquelle se déterminent les inégalités séculaires des éléments du mouvement elliptique des planètes. Cette équation s'obtient, comme on sait, en égalant à zéro le déterminant du systéme

$$\Theta = \left\{ \begin{array}{llll} a_{1,1} - \theta & a_{2,1} & \dots & a_{n,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} - \theta & \dots & a_{n,2} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & \dots & a_{n,3} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \dots & a_{n,n} - \theta \end{array} \right\} ,$$

dont les éléments $a_{\mu,\nu}$ *sont des quantités réeles soumises à cette condition,*

$$a_{\mu,\nu} = a_{\nu,\mu} \ .$$

(Oeuvres I., str. 479)

V důkazu použil Ch. Hermite vtipný obrat, který se dodnes objevuje v učebnicích lineární algebry a v teoretičtěji pojatých matematických kurzech.

4. Kanonické tvary

James Joseph Sylvester

Roku 1852 publikoval J. J. Sylvester (1814–1897) práci *A demonstration of the theorem that every homogeneous quadratic polynomial is reducible by real orthogonal substitutions to the form of a sum of positive and negative squares.* Zformuloval v ní tzv. zákon setrvačnosti kvadratických forem, který dnes nese jeho jméno. Důkaz tohoto výsledku práce neobsahuje, autor se totiž domníval, že je jeho tvrzení očividné.

Jednalo se o kvadratickou formu

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \ ,$$

kterou J. J. Sylvester zapsal ve tvaru

$$(1,1)x^2 + 2(1,2)xy + (2,2)y^2 + \cdots + (n,n)t^2$$

(koeficienty vyjadřoval dvojicemi přirozených čísel) a převedl ji na tvar

$$\sum_{i=1}^{n} A_i \zeta_i^2 \ .$$

Jeho článek začíná těmito slovy:

It is well known that the reduction of any quadratic polynomial

$$(1,1)x^2 + 2(1,2)xy + (2,2)y^2 + \cdots + (n,n)t^2$$

to the form $a_1\zeta^2 + a_2\eta^2 + \cdots + a_n\theta^2$*, where* ζ, η, θ *are linear functions of* $x, y \ldots t$*, such that* $x^2 + y^2 + \cdots + t^2$ *remains identical with* $\zeta^2 + \eta^2 + \cdots + \theta^2$ *(which identity is the characteristic test of orthogonal transformation), depends upon the solution of the equation*

$$\begin{vmatrix} (1,1)+\lambda, & (1,2) & \ldots & (1,n) \\ (2,1), & (2,2)+\lambda & \ldots & (2,n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (n,1), & (n,2) & \ldots & (n,n)+\lambda \end{vmatrix} = 0 .$$

The roots of this equation give $a_1, a_2 \ldots a_n$*; and if they are real, it is easily shown that the connexions between* $x, y \ldots t$*;* $\zeta, \eta \ldots \theta$*, are also real. M. Cauchy has somewhere given a proof of the theorem, that the roots of* λ *in the above equation must necessarily always be real; but the annexed demonstration is, I believe, new …* (Papers I., str. 378)

J. J. Sylvester poté dokázal (v naší současné terminologii), že vlastní čísla reálné symetrické matice jsou reálná. Po ukončení tohoto důkazu poznamenal:

I may take this occasion to remark, that by whatever linear substitutions, orthogonal or otherwise, a given polynomial be reduced to the form $\sum A_1\zeta^2$*, the number of positive and negative coefficients is invariable: this is easily proved.* (Papers I., str. 380)

Článek uzavřel následující poznámkou:

… a law to which my view of the physical meaning of quantity of matter inclines me, upon the ground of analogy, to give the name of the Law of Inertia for Quadratic Forms, as expressing the fact of the existence of an invariable number inseparably attached to such forms. (Papers I., str. 381)

Připomeňme, že zákon setrvačnosti dokazoval již C. F. Gauss v letech 1846 až 1847 ve svých přednáškách o metodě nejmenších čtverců. Později na tuto skutečnost upozornil Bernhard Riemann (1826–1866), který Gaussovy přednášky navštěvoval.

Arthur Cayley

A. Cayley (1821–1895) napsal roku 1860 pro anglickou encyklopedii (*English Cyclopaedia*) heslo „Kanonické tvary“. Přestože o dva roky dříve publikoval memoár o teorii matic, v souvislosti s kanonickými tvary se o maticích nezmínil.

Canonical forms. – A binary quantic of an odd order $2m+1$ *admits of being expressed as a sum of* $(m+1)$ *powers of linear functions, for example, the cubic* $(a,b,c,d)(x,y)^3$ *can be expressed in the form* $(lx+my)^3 + (l'x+m'y)^3$ *– this is the canonical form of a binary function of an odd order. And there* *is in like manner a form (not admitting, however, of a simple definition) which is taken as the canonical form of a binary quantic of an even order. The catalecticant and the canonisant present themselves in the problem of the reduction of a binary quantic to the canonical form.* (Papers IV., str. 606–607)

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass

> *The theory of elementary divisors … is one of the most useful and perfect of algebraic theories.*
>
> ([Bôcher, 1907/08], str. 194)

Německý matematik K. T. Weierstrass je tvůrcem tzv. teorie elementárních dělitelů. Vybudoval ji roku 1868 v práci *Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen.* Té však předcházel článek *Über ein die homogenen Functionen zweiten Grades betreffendes Theorem, nebst Anwendung desselben auf die Theorie der kleinen Schwingungen* z roku 1858, v němž řešil problém současného převedení dvou kvadratických forem na kanonický tvar, tj. na součet čtverců. Na začátku této práce charakterizoval studovaný problém těmito slovy:

Wenn zwei ganze und homogene Functionen zweiten Grades Φ, Ψ von n Veränderlichen $x_1, x_2, \dots x_n$ gegeben sind, so ist es im Allgemeinen immer möglich, dieselben in der Form

$$\Phi = \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n$$
$$\Psi = s_1\theta_1 + s_2\theta_2 + \cdots + s_n\theta_n$$

dergestalt darzustellen, dass $\theta_1, \theta_2, \dots \theta_n$ die Quadrate homogener linearer Ausdrücke von $x_1, x_2, \dots x_n$, und $s_1, s_2, \dots s_n$ Constanten sind. Bezeichnet man, unter s eine willkürliche Grösse verstehend, die Determinante von

$$s\Phi - \Psi$$

mit $f(s)$, so sind bekanntlich $s_1, s_2, \dots s_n$ diejenigen Werthe von s, welche

$$f(s) = 0$$

machen – wie sofort daraus erhellt, dass sich $s\Phi - \Psi$, wenn man s einen dieser Werthe beilegt, durch weniger als n lineare Functionen von $x_1, x_2, \dots x_n$ ausdrücken lässt –, während die Coefficienten von $\theta_1, \theta_2, \dots \theta_n$ rational aus denen von Φ, Ψ und aus $s_1, s_2, \dots s_n$ zusammengesetzt werden.
(Werke I., str. 233)

K. T. Weierstrass připomněl ve své práci Cauchyovy, Jacobiovy, Borchardtovy a Sylvesterovy výsledky. V závěru čtvrté části práce zformuloval dokázané poznatky do následujícího teorému:

Es seien Φ, Ψ homogene ganze Functionen zweiten Grades von n Veränderlichen $x_1, x_2, \dots x_n$ mit reellen Coefficienten, und die erstere überdies so *beschaffen, dass sie für reelle Werthe von $x_1, x_2, \ldots x_n$ stets dasselbe Zeichen behält und nur Null wird, wenn diese Grössen sämmtlich verschwinden. Die Determinante der Function*

$$s\Phi - \Psi$$

ist dann eine ganze Function n^{ten} Grades der willkürlichen Grösse s, welche nur für eine Anzahl reeller Werthe der letzteren Null wird. Sind diese $s_1, s_2, \ldots s_m$, und daher die Determinante, abgesehen von einem s nicht enthaltenden Factor, gleich

$$(s - s_1)^{\lambda_1}(s - s_2)^{\lambda_2} \ldots (s - s_m)^{\lambda_m} ,$$

wo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ ganze positive Zahlen bedeuten, deren Summe n ist; so giebt es ebenso viele völlig bestimmte homogene Functionen zweiten Grades $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_m$ von $x_1, x_2, \ldots x_n$, durch welche sich Φ, Ψ in der Form

$$\Phi = \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_m$$
$$\Psi = s_1\theta_1 + s_2\theta_2 + \cdots + s_m\theta_m$$

ausdrücken lassen, während θ_μ oder $-\theta_\mu$, je nachdem Φ stets positiv oder stets negativ bleibt, als Summe der Quadrate von λ_μ reellen linearen Functionen der Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ dargestellt werden kann, und zwar, wenn $\lambda_\mu > 1$ ist, auf unendlich viele Arten. (Werke I., str. 242–243)

Tímto teorémem skončila teoretická část Weierstrassovy práce. V její další části autor aplikoval své výsledky na problematiku malých oscilací, jak ostatně napovídá druhá část názvu jeho práce. Napsal, že uvádí na pravou míru jeden Lagrangeův omyl z jeho monografie *Mécanique analytique*, který se této problematiky týká. Problém malých oscilací vedl na soustavu lineárních diferenciálních rovnic, její řešení záviselo na kořenech charakteristické rovnice, tj. na vlastních číslech. K. T. Weierstrass kritizoval názory svých předchůdců na případ vícenásobných vlastních čísel těmito slovy:

… die genannte Gleichung keine gleiche Wurzeln haben dürfe, weil sonst in den Integralen Glieder vorkommen würden, die mit der Zeit beliebig gross werden könnten. Dieselbe Behauptung findet sich bei Laplace wiederholt, da wo er in der Mécanique céleste die Säcular-Störungen der Planeten behandelt, und ebenso, so viel mir bekannt ist, bei allen übrigen diesen Gegenstand behandelnden Autoren, wenn sie überhaupt den Fall der gleichen Wurzeln erwähnen, was z. B. bei Poisson nicht geschieht. Aber sie ist nicht begründet. (Werke I., str. 244)

V práci *Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen* z roku 1868 zavedl K. T. Weierstrass pojem elementárních dělitelů, podal nutné a postačující podmínky pro podobnost matic, pro diagonalizovatelnost matice a dospěl v podstatě k tzv. Jordanovu kanonickému tvaru. Vyjadřoval se však v řeči bilineárních a kvadratických forem, nikoli v řeči matic. Tato jeho práce začíná opět vymezením problému, kterému je věnována:

Es seien zwei bilineare Formen derselben $2n$ Veränderlichen ($x_1, \ldots x_n$ und $y_1, \ldots y_n$) gegeben:

$$\begin{cases} P = \sum\limits_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta \\ Q = \sum\limits_{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta \ , \end{cases}$$

wo α, β *– wie überhaupt in dieser Abhandlung die ersten Buchstaben des kleinen griechischen Alphabets – Zahlen aus der Reihe* $1, 2, \ldots n$ *bezeichnen.*

Die Determinante der Form

$$pP + qQ \ ,$$

wo p, q *unbestimmte Grössen bedeuten, d. h. die Determinante des Systems*

$$\begin{cases} pA_{11} + qB_{11}, \ \ldots \ pA_{1n} + qB_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ pA_{n1} + qB_{n1}, \ \ldots \ pA_{nn} + qB_{nn} \ , \end{cases}$$

welche ich, um auf ihren Ursprung aus den Formen P, Q *hinzuweisen, mit*

$$[P, Q]$$

bezeichnen will, ist dann eine homogene ganze Function n^{ten} *Grades von* p, q*, und kann – wenn man von dem singulären Falle, wo ihre Coefficienten sämmtlich gleich Null sind, absieht – als ein Product von* n *Factoren, die homogene lineare Functionen von* p, q *sind, und einer von diesen Veränderlichen unabhängigen Grösse dargestellt werden. Dabei möge, um diesen Ausdruck von* $[P, Q]$ *zu einem völlig bestimmten zu machen, ein Paar besonderer Werthe* (g, h) *von* (p, q)*, für welche* $[P, Q]$ *nicht verschwindet, nach Willkür angenommen und festgesetzt werden, dass jeder einzelne der genannten* n *Factoren für* $p = g$*,* $q = h$ *den Werth Eins erhalten soll.* (Werke II., str. 19–20)

K. T. Weierstrass studoval determinant formy $pP + qQ$, všechny jeho subdeterminanty daného řádu $k = 1, \ldots, n$, jejich největší společné dělitele atd., až došel k systému elementárních dělitelů a k rozkladu

$$[P, Q] = C(a_1 p + b_1 q)^{e_1} (a_2 p + b_2 q)^{e_2} \ldots (a_\varrho p + b_\varrho q)^{e_\varrho} \ ,$$

kde C je hodnota determinantu $[P, Q]$ pro $p = g$, $q = h$. Výsledky zformuloval do tohoto teorému:

Es werde durch die Substitutionen

$$(7.) \qquad \begin{cases} x_1 = \sum\limits_\gamma h_{1\gamma} u_\gamma \ , \quad \ldots \quad x_n = \sum\limits_\gamma h_{n\gamma} u_\gamma \\ y_1 = \sum\limits_\gamma k_{1\gamma} v_\gamma \ , \quad \ldots \quad y_n = \sum\limits_\gamma k_{n\gamma} v_\gamma \end{cases}$$

wo $u_1, \dots u_n$ *und* $v_1, \dots v_n$ *neue Veränderliche bedeuten,* $h_{11}, \dots h_{nn}$*,* $k_{11}, \dots k_{nn}$ *aber Constanten, welche keiner anderen Beschränkung unterworfen sind, als dass die Determinanten*

$$(8.)\qquad H = \begin{vmatrix} h_{11}, & \dots & h_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{n1}, & \dots & h_{nn} \end{vmatrix}, \qquad K = \begin{vmatrix} k_{11}, & \dots & k_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ k_{n1}, & \dots & k_{nn} \end{vmatrix}$$

nicht gleich Null sein dürfen, die Form

$$P(x_1, \dots x_n | y_1, \dots y_n) \text{ in eine andere } P'(u_1, \dots u_n | v_1, \dots v_n),$$

und zugleich

$$Q(x_1, \dots x_n | y_1, \dots y_n) \quad \text{in} \quad Q'(u_1, \dots u_n | v_1, \dots v_n)$$

verwandelt; so stimmen die Determinanten der beiden Formen

$$pP + qQ\ , \qquad pP' + qQ'$$

in ihren Elementar-Theilern überein.

Und umgekehrt, wenn zwei Formen-Paare

$$P(x_1, \dots x_n | y_1, \dots y_n)\ , \qquad Q(x_1, \dots x_n | y_1, \dots y_n)$$

und

$$P'(u_1, \dots u_n | v_1, \dots v_n)\ , \qquad Q'(u_1, \dots u_n | v_1, \dots v_n)$$

gegeben sind, und es stimmen die beiden Determinanten

$$[P, Q]\ , \qquad [P', Q']$$

in ihren Elementar-Theilern überein; so können auch die stets die Coefficienten $(h_{11}, \dots h_{nn})$ *und* $(k_{11}, \dots k_{nn})$ *so bestimmt werden, dass durch die unter* (7.) *angegebenen Substitutionen* P *in* P' *und zugleich* Q *in* Q' *übergeht.*
(Werke II., str. 21–22)

V závěrečné části svého článku K. T. Weierstrass přenesl získané výsledky z teorie bilineárních forem do teorie forem kvadratických. Zformuloval je v šesti teorémech, první z nich zde uvádíme. Srovnejme pro zajímavost Weierstrassovy formulace pro bilineární a kvadratické formy:

Wenn zwei quadratische Formen $\mathfrak{B}$*,* $\mathfrak{D}$ *von* n *Veränderlichen* $x_1, \dots x_n$ *durch Substitutionen von der Gestalt*

$$x_1 = \sum_\gamma h_{1\gamma} u_\gamma\ , \quad \dots \quad x_n = \sum_\gamma h_{n\gamma} u_\gamma$$

gleichzeitig in zwei andere $\mathfrak{B}'$*,* $\mathfrak{D}'$ *von* $u_1, \dots u_n$ *verwandelt werden, und die Substitutions-Determinante*

$$\begin{vmatrix} h_{11}, & \dots & h_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{n1}, & \dots & h_{nn} \end{vmatrix}$$

ist nicht gleich Null, so stimmen die Determinanten der beiden Formen

$$p\mathfrak{B} + q\mathfrak{D}\ , \qquad p\mathfrak{B}' + q\mathfrak{D}'$$

in ihren Elementar-Theilern überein. (Werke II., str. 38)

T. Hawkins ocenil Weierstrassovu roli v teorii matic v článku *Weierstrass and the Theory of matrices* těmito slovy:

... I would suggest that, insofar as anyone deserves the title of founder of the theory of matrices, it is Weierstrass. ... he is the central figure in the developments occuring in the 19$^{\text{th}}$ *century. His theory of elementary divisors provided a theoretical core, a substantial foundation, upon which to build. His work demonstrated the possibility of dealing by the methods of analysis with the non-generic case, thereby opening up a whole new world to mathematical investigation, a world that his colleagues and students proceeded to explore.* ([Hawkins, 1977], str. 156)

K. T. Weierstrass tedy řešil problém současné redukce dvou kvadratických forem na součty čtverců i v tom případě, kdy jsou kořeny vícenásobné, a diskutoval kanonické tvary svazku $pP + qQ$. Jeho řešení se týkalo situace, kdy existují čísla p, q, pro něž $\det(pP + qQ) \neq 0$.

Poznamenejme ještě, že myšlenky, s nimiž přišel ve své teorii elementárních dělitelů, se dají vysledovat již dříve, např. v pracích J. J. Sylvestera z let 1850 a 1851 (*On the intersection, contacts, and other correlations of two conics expressed by indeterminante coordinates*, *An enumeration of the contacts of lines and surfaces of the second order*) nebo u H. J. S. Smithe (1826–1883), který obdobné myšlenky využil roku 1861 v práci *Report on the theory of numbers.*

Leopold Kronecker

Německý matematik L. Kronecker se zabýval obdobnou problematikou jako K. T. Weierstrass. Roku 1866 publikoval článek *Über bilineare Formen*, který byl motivován výsledky K. T. Weierstrasse, Elwina Bruna Christoffela (1829–1900) a Ch. Hermitea. Naznačme studovanou problematiku, výrazové prostředky i symboliku (např. známé Kroneckerovo δ) krátkým úryvkem z této Kroneckerovy práce:

Wenn die bilineare Form, deren Coefficienten a_{ik} *sind, durch eine Substitution mit den Coefficienten* c_{ik} *auf die Normalform:*

$$\sum \lambda_k x'_k y'_{n+k}$$

reducirt werden soll, so muss den vorstehenden Ausführungen gemäss:

$$\sum_{i,k} (ua_{ik} + va_{ki}) x_i y_k = \sum_h (u\lambda_h + v\lambda_{n+h}) x'_h y'_{n+h}$$

werden, wenn:

$$x_i = \sum_h c_{ih} x'_h \ , \qquad y_i = \sum_h c_{ih} y'_h$$

und in Folge dessen:

$$x'_h = \sum_k \gamma_{hk} x_k \ , \qquad y'_h = \sum_h \gamma_{hk} y_k$$

gesetzt wird, wobei die Coefficienten c *und* γ *durch die Relation:*

$$\sum_h c_{ih} \gamma_{hk} = \delta_{ik}$$

mit einander verbunden sind. (Werke I., str. 150–151)

Na Weierstrassovy výsledky, konkrétně na jeho pojednání *Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen* z roku 1868, navázal L. Kronecker roku 1868 prací *Über Schaaren quadratischer Formen.* V úvodu napsal, že je jeho cílem převést společnou transformací dvě kvadratické formy na součty čtverců, a přesně zformuloval několik základních vlastností kvadratických forem, které využil. Nastínil dále některé pojmy a termíny:

Wenn nun $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$ *und* $\psi(x_1, x_2, \ldots x_n)$ *quadratische Formen mit reellen Coefficienten bedeuten, so bilden die Formen:*

$$u\varphi + v\psi$$

für alle verschiedenen reellen Werthe des Verhältnisses: $\frac{u}{v}$ *– um einen der Geometrie entlehnten Ausdruck zu gebrauchen – eine Schaar von quadratischen Formen. Solcher Schaaren giebt es zwei wesentlich verschiedene Arten. Die erste Art enthält „bestimmte Formen“ (formae definitae) von* n *Variabeln, deren Determinante von Null verschieden ist: die zweite Art enthält derartige Formen nicht. – Es kann offenbar unbeschadet der Allgemeinheit angenommen werden, dass nicht eine und dieselbe lineare Relation zwischen den* n *Ableitungen beider Formen* φ *und* ψ *besteht, dass also die* n *Ableitungen von* $(u\varphi+v\psi)$ *nicht durch eine lineare Gleichung mit constanten, d. h. auch von* u *und* v *unabhängigen, Coefficienten mit einander verbunden sind; dagegen soll der Fall nicht ausgeschlossen werden, in welchem für die* n *Ableitungen von* $(u\varphi + v\psi)$ *eine lineare Gleichung existirt, deren Coefficienten von dem variabeln Verhältnisse:* $\frac{u}{v}$ *abhängig sind. Dieser besondere und bisher noch nicht beachtete Fall, in welchem die Determinante von* $(u\varphi + v\psi)$ *identisch Null wird und also die Determinante jeder Form der Schaar verschwindet, soll nachher im zweiten Theile der vorliegenden Notiz eingehend behandelt werden.* (Werke I., str. 166–167)

Dokázal též následující stručné a výstižné tvrzení (Werke I., str. 168):

Wenn die Determinante von $(u\varphi + v\psi)$ *einen complexen Linearfactor hat, so ist die Schaar von der zweiten Art; für Schaaren der ersten Art besteht demnach die bezeichnete Determinante aus lauter reellen Linearfactoren.*

Roku 1874 se L. Kronecker k problematice současné transformace dvou bilineárních, resp. dvou kvadratických forem vrátil, několikrát na toto téma referoval v berlínské akademii věd. Vyřešil případ $\det(pP + qQ) = 0$, který dosud nebyl zpracován. V rozsáhlé práci *Über Schaaren von quadratischen und bilinearen Formen* znovu navázal na Weierstrassovy výsledky z roku 1868. Zmínil se rovněž o tom, jak jeho původně neúspěšné pokusy o řešení studovaného problému nakonec vedly k cíli.

... hat Hr. Weierstrass das allgemeine Problem der gleichzeitigen Transformation von zwei quadratischen Formen in zwei andere fast vollständig erledigt, indem einzig und allein der Fall ausgeschlossen blieb, wo die der Untersuchung zu Grunde gelegte, ... mit $[P, Q]$ bezeichnete Determinante identisch verschwindet. (Werke I., str. 351)

Meine Bemühungen waren zu jener Zeit im Sommer 1868 erfolglos; als ich jedoch vor einigen Monaten bei Gelegenheit allgemeinerer Untersuchungen, von ganz anderen Gesichtspunkten ausgehend, den erwähnten Gegenstand wieder aufnahm, gelang es mir, jene Reductionsmethode in der That dahin zu erweitern, dass mittels derselben jede beliebige Schaar quadratischer oder bilinearer Formen auf ein Aggregat von elementaren Schaaren zurückgeführt wird. (Werke I., str. 355)

L. Kronecker si velmi cenil Weierstrassových prací a jeho výsledků. Ve svých pojednáních svého berlínského kolegu často citoval, připomínal jeho zásluhy na řešení různých matematických problémů. Přesně a výstižně vyjádřil vztah Weierstrassových výsledků z let 1858 a 1868 týkajících se elementárních dělitelů a návaznost svých výsledků, které přispěly k úplnosti celé teorie.

Mit dem Aufgeben jener Voraussetzung führte die Weierstrass'sche Arbeit vom Jahre 1858 schon zu einer höheren Einsicht und namentlich zu einer vollständigen Erledigung des Falles, in welchem nur einfache Elementartheiler vorhanden sind. Aber die allgemeine Einführung dieses Begriffes der Elementartheiler, zu welcher dort nur ein vorläufiger Schritt gethan war, erfolgte erst in der Weierstrass'schen Abhandlung vom Jahre 1868, und es kam damit ganz neues Licht in die Theorie der Schaaren für den Fall beliebiger, doch von Null verschiedener Determinanten. Als ich darauf auch diese letzte Beschränkung abstreifte und aus jenem Begriffe der Elementartheiler den allgemeineren der elementaren Schaaren entwickelte, verbreitete sich die vollste Klarheit über die Fülle der neu auftretenden algebraischen Gebilde, und bei dieser vollständigen Behandlung des Gegenstandes wurden zugleich die werthvollsten Einblicke in die Theorie der höheren, in ihrer wahren Allgemeinheit aufzufassenden Invarianten gewonnen. (Werke I., str. 405–406)

Ve stejném roce L. Kronecker publikoval práci *Über die congruenten Transformationen der bilinearen Formen*, v níž se opět zabýval problematikou transformace bilineárních a kvadratických forem. V těchto pracích se odkazoval na výsledky Weierstrassovy, Jordanovy, Jacobiovy a Christoffelovy.

Stejnou problematiku komentoval roku 1890 v krátké poznámce *Reduction der Systeme von n^2 ganzzahligen Elementen*, v níž citoval zejména G. Frobenia.

V delší práci *Algebraische Reduction der Schaaren bilinearer Formen* z téhož roku znovu studoval redukci svazku kvadratických forem. Otázkami transformací bilineárních forem se zabýval i v rozsáhlé práci *Über die congruenten Transformationen der bilinearen Formen* z roku 1895.

Camille Marie Ennemond Jordan

Roku 1870 publikoval C. Jordan (1838–1922) monografii *Traité des substitutions et des équations algébriques*, v níž podal systematický výklad výsledků francouzského matematika Evaristea Galoise (1811–1832) o řešitelnosti algebraických rovnic (tzv. Galoisova teorie) včetně řady poznatků rodící se teorie grup. Jeho kniha ovlivnila celou jednu generaci matematiků.

C. Jordan zkoumal z různých hledisek lineární substituce, zavedl mimo jiné obdobný kanonický tvar jako o dva roky dříve K. T. Weierstrass. Matice, která jeho kanonickému tvaru odpovídá, je složena z buněk, jež mají na hlavní diagonále příslušné vlastní číslo a na rovnoběžné linii bezprostředně pod ní (místo dnes obvyklých jedniček) totéž vlastní číslo. Pomocí tohoto kanonického tvaru určil lineární substituce, které s danou lineární substitucí komutují. Studoval rovněž metody nalezení všech lineárních substitucí, jež mají stejný kanonický tvar, a ukázal, že pro takové dvě ekvivalentní substituce A, B platí vztah $B = P^{-1}AP$, kde P je vhodná substituce.

Poznamenejme, že C. Jordan v té době ještě neznal ani Cayleyho práci o maticích z roku 1858, ani Weierstrassovu teorii elementárních dělitelů.

Pátý paragraf druhé knihy Jordanovy monografie *Traité des substitutions et des équations algébriques* je nazván *Forme canonique des substitutions linéaires* (viz [Jordan, 1870], str. 114–126). V dnešní terminologii lze jako hlavní téma tohoto paragrafu označit podobnost matic a převod matice na tzv. Jordanův kanonický tvar. Zdůrazněme, že se autor zabýval problematikou lineárních substitucí nad konečným tělesem, které má p prvků. Teorém uzavírající tento paragraf zní takto:

Théorème. — *Soit*

$$A = \ |\ x, x', \dots \ ax + bx' + \dots,\ a'x + b'x + \dots,\ \dots\ |$$

une substitution linéaire quelconque à coefficients entiers entre n indices variables chacun de 0 à $p-1$;

Soient $F, F', \dots$ les facteurs irréductibles de la congruence de degré n

$$\begin{vmatrix} a-K & a' & \dots \\ b & b'-K & \dots \\ . & \dots & \dots \end{vmatrix} \equiv 0 \quad (mod.\ p)\ ;$$

$l, l', \dots$ leurs degrés respectifs; $m, m', \dots$ leurs degrés de multiplicité;

On pourra remplacer les n indices indépendants $x, x', \dots$ par d'autres indices jouissant des propriétés suivantes:

1° *Ces indices se partagent en systèmes correspondants aux divers facteurs* $F, F', \ldots$ *et contenant respectivement* $lm, l'm', \ldots$ *indices;*

2° *Soient* $K_0, K_1, \ldots, K_{l-1}$ *les racines de la congruence irréductible* $F = 0$ *(mod. p); les* lm *indices du système correspondant à* F *se partagent en* l *séries correspondantes aux racines* $K_0, K_1, \ldots, K_{l-1}$*;*

3° *Les indices de la première série de ce système sont des fonctions linéaires des indices primitifs, dont les coefficients sont des entiers complexes formés avec l'imaginaire* K_0*: ils constituent une ou plusieurs suites* $y_0, z_0, u_0, \ldots;$ $y_0', z_0', \ldots; \ldots$ *telles, que* A *remplace les indices* $y_0, z_0, u_0, \ldots$ *d'une même suite respectivement par* K_0y_0*,* $K_0(z_0 + y_0)$*,* $K_0(u_0 + z_0)$*,* $\ldots;$

4° *Les indices de la* $r + 1^{\text{ième}}$ *série sont les fonctions* $y_r, z_r, u_r, \ldots;$ $y_r', z_r', \ldots; \ldots$*, respectivement conjuguées des précédentes, que l'on forme en y remplaçant* K_0 *par* K_r*;* A *les remplace respectivement par* K_ry_r*,* $K_r(z_r + y_r)$*,* $K_r(u_r + z_r), \ldots; \ldots$ ([Jordan, 1870], str. 125–126)

C. Jordan se i v dalších pracích věnoval některým otázkám lineárních substitucí, které souvisejí s kanonickým tvarem. To již byl seznámen s Weierstrassovými a Kroneckerovými výsledky. Ukazoval souvislost svých výsledků s Weierstrassovými a naznačil, jak odvodit teorii elementárních dělitelů pomocí redukce forem na kanonický tvar. Připomeňme jen jeho krátkou stať *Sur la résolution des équations différentielles linéaires* z roku 1871 a pět článků z roku 1874: *Mémoire sur les formes bilinéaires*, *Sur la réduction des formes bilinéaires*, *Mémoire sur une application de la théorie des substitutions à l'etude des équations différentielles linéaires*, *Mémoire sur la réduction et la transformation des systèmes quadratiques* a *Sur les systèmes de formes quadratiques.*

Jordanovo jméno je již řadu let spjato s problematikou kanonických tvarů. Termíny *Jordanova buňka*, *Jordanova matice*, *Jordanův kanonický tvar* jsou běžně užívané, nacházíme je v řadě učebnic lineární algebry.[9]

Georg Frobenius

G. Frobenius se problematikou charakteristické rovnice, minimálního polynomu, podobnosti, invariantních faktorů, elementárních dělitelů a příbuznými otázkami zabýval roku 1878 v práci *Über lineare Substitutionen und bilineare Formen.*

Diskutoval zde mimo jiné obecný pojem ekvivalence na množině bilineárních forem, výběr reprezentantů tříd ekvivalence apod. Svoji práci napsal velmi moderním jazykem; sice ještě v řeči bilineárních forem, ale symbolikou, pod níž již cítíme maticový přístup. Výrazně se odvolával na výsledky K. T. Weierstrasse (1868) a L. Kroneckera (1874), kteří tato témata studovali nedlouho před ním.

Součin bilineárních forem

$$A = \sum a_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta \ , \qquad B = \sum b_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$$

[9] Jordanův kanonický tvar a příbuzné otázky stále poutají zájem matematiků. Viz např. [Wedderburn, 1937], [Cavallucci, 1937], [Cramlet, 1938], [Browne, 1940], [Petr, 1940], [Smiley, 1942], [Pták, 1956], [Arcese, 1968], [Filippov, 1971], [Galperin, Waksman, 1980], [Fletcher, Sorensen, 1983], [Väliaho, 1986], [Brualdi, 1987], [Hall, 1991].

definoval G. Frobenius vztahem

$$AB = \sum \frac{\partial A}{\partial y_\kappa} \frac{\partial B}{\partial x_\kappa} \ ;$$

přitom je

$$AB = \sum c_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta \ , \quad \text{kde} \quad c_{\alpha\beta} = \sum_\kappa a_{\alpha\kappa} b_{\kappa\beta} \ .$$

Uvažovanou formu A transformoval pomocí substitucí

$$x_\alpha = \sum_\beta p_{\alpha\beta} X_\beta \quad \text{a} \quad y_\alpha = \sum_\beta q_{\alpha\beta} Y_\beta \ ,$$

které reprezentoval bilineárními formami

$$P = \sum p_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta \ , \qquad\qquad Q = \sum q_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta \ ,$$

a došel k formě vyjádřené schématem $P^{\mathrm{T}}AQ$.

V šestém paragrafu této práce zavedl G. Frobenius obecný pojem ekvivalence forem a zkoumal několik jeho speciálních případů. Při této příležitosti se několikrát odvolával na L. Kroneckera.

Eine Form B heisst einer Form A äquivalent, wenn zwei Formen P und Q von nicht verschwindender Determinante bestimmt werden können, welche der Gleichung

$$PAQ = B$$

genügen, und welche ausserdem noch einer weiteren Beschränkung unterworfen sein können. Dieselbe muss aber der Art sein, dass A mit B äquivalent ist, wenn es B mit A ist, und dass zwei Formen, die einer dritten äquivalent sind, es auch unter einander sind. (Mündliche Mittheilung des Herrn Kronecker). P und Q heissen die Substitutionen, durch welche A in B übergeht. Alle Formen, die einer bestimmten äquivalent sind, bilden eine Klasse von Formen.
([Frobenius, 1878], str. 19)

Zmíněnými omezujícími podmínkami G. Frobenius rozuměl důležité případy, kdy je P rovno Q nebo Q^{T} nebo Q^{-1}; ve druhém a třetím případě nazýval substituce P a Q *cogrediente*, resp. *contragrediente*.

Dále definoval svazek forem $rA - B$, kde r je proměnný parametr, a ekvivalenci dvou takových svazků vztahem

$$P(rA - B)Q = rC - D \ ,$$

resp. ekvivalentním vyjádřením $PAQ = C$, $PBQ = D$.

Damit zwei Formenschaaren äquivalent sind, ist nothwendig, dass die Elementartheiler ihrer Determinanten übereinstimmen. Diese Bedingung ist auch hinreichend, falls jene Determinanten nicht identisch verschwinden.
([Frobenius, 1878], str. 20)

Jako speciální případ ekvivalence forem definoval G. Frobenius podobnost forem: formy A a B se nazývají podobné, existuje-li substituce P, pro niž je

$$P^{-1}AP = B \ .$$

Formy A a B jsou podobné právě tehdy, když jsou svazky $rE - A$ a $rE - B$ ekvivalentní (symbolem E se rozumí forma „odpovídající jednotkové matici“, tj. $E = \sum x_\alpha y_\alpha$).

Damit also A und B ähnlich seien, ist nothwendig und hinreichend, dass die Schaaren $rE - A$ und $rE - B$ äquivalent sind, oder dass Elementartheiler der charakteristischen Functionen von A und B übereinstimmen.
([Frobenius, 1878], str. 21)

Jako další speciální případ ekvivalence forem definoval G. Frobenius kongruenci forem: formy A a B se nazývají kongruentní, existuje-li substituce P, pro niž je

$$P^{\mathrm{T}}AP = B \ .$$

Formy A a B jsou kongruentní právě tehdy, když jsou svazky $rA - A^{\mathrm{T}}$ a $rB - B^{\mathrm{T}}$ ekvivalentní.

V sedmém paragrafu vyšetřoval G. Frobenius podobnost forem, dokázal zde řadu důležitých tvrzení, která se tohoto pojmu týkají. Jako příklad uveďme věty o charakteristickém a minimálním polynomu.

Bestimmt man für jede der verschiedenen Wurzeln der charakteristischen Gleichung einer Form A den Elementartheiler höchsten Grades, der für dieselbe verschwindet, und bezeichnet man das Product dieser Elementartheiler mit $\psi(r)$, so ist $\psi(A) = 0$ die Gleichung niedrigsten Grades, der A genügt.

Ist $f(A) = 0$ eine Gleichung, der A genügt, und $f(r) = 0$ eine Gleichung ohne mehrfache Wurzeln, so hat die charakteristische Function von A lauter einfache Elementartheiler. ([Frobenius, 1878], str. 26)

G. Frobenius rovněž řešil případ $AP = PB$, kdy P je singulární, tj. kdy nemůžeme psát $P^{-1}AP = B$:

Ich knüpfe daran noch einige Bemerkungen über die Möglichkeit der Gleichung $AP = PB$, falls die Determinante von P verschwindet. …

Ist $AP = PB$, so kann in der Determinante von P der höchste Grad nicht verschwindender Unterdeterminanten nicht grösser sein, als der Grad des grössten gemeinsamen Theilers der charakteristischen Functionen von A und B.

Sind die charakteristischen Functionen von A und B theilerfremd, und ist $AP = PB$, so ist P gleich Null. ([Frobenius, 1878], str. 27–28)

V osmém paragrafu *Transformation der bilinearen Formen in sich selbst* vyšetřoval situaci, kdy se bilineární forma A převádí sama v sebe, tj. existují substituce P, Q, pro něž je

$$PAQ = A \ .$$

Objevil řadu poznatků, např. ekvivalentní podmínku pro to, aby substituce P, Q transformovaly nějakou regulární bilineární formu v sebe.

Damit die Substitutionen P, Q geeignet seien, eine Form von nicht verschwindender Determinante in sich selbst zu transformiren, ist nothwendig und hinreichend, dass die Formenschaaren $rE - P$ und $rQ - E$ äquivalent sind.
([Frobenius, 1878], str. 31)

Devátý paragraf *Transformation der bilinearen Formen mit cogredienten Variabeln in sich selbst* přímo navazuje na paragraf předchozí. Zabývá se situací, kdy se regulární bilineární forma A převádí sama v sebe transformací

$$P^{\mathrm{T}}AP = A \ .$$

Wenn eine Substitution eine Form in sich selbst transformirt, so transformirt jede ähnliche Substitution eine congruente Form in sich selbst.

Damit eine Substitution geeignet sei, eine Form A von nicht verschwindender Determinante in sich selbst zu transformiren, muss sie mit $A^{-1}A'$ vertauschbar sein.[10]

Eine Form A von nicht verschwindender Determinante wird durch die Substitution $A^{-1}A'$ eigentlich in sich selbst transformirt.
([Frobenius, 1878], str. 34, 36)

Desátý paragraf *Transformation der symmetrischen und der alternirenden Formen in sich selbst* začíná rozkladem bilineární formy A na symetrickou a antisymetrickou část: $A = S + T$. Položí-li se nyní $U = A^{-1}A^{\mathrm{T}}$, získá se vhodná transformace symetrické i antisymetrické části formy A:

$$U^{\mathrm{T}}SU = S \ , \qquad U^{\mathrm{T}}TU = T \ .$$

Damit eine Substitution geeignet sei, eine symmetrische [alternirende] Form von nicht verschwindender Determinante in sich selbst zu transformiren, ist nothwendig und hinreichend, dass die Elementartheiler ihrer charakteristischen Function paarweise von gleichem Grade sind und für reciproke Werthe verschwinden, mit Ausnahme derer, welche für den Werth $+1$ oder -1 verschwinden und einen ungeraden [geraden] Exponenten haben.
([Frobenius, 1878], str. 41)

Jedenáctý paragraf nese název *Untersuchung der Grenzfälle*, dvanáctý paragraf *Orthogonale Formen* je věnován formám R, pro něž $R^{\mathrm{T}} = R^{-1}$. Uveďme zde jen jeden z výsledků:

Die charakteristische Function einer reellen orthogonalen Form hat lauter einfache Elementartheiler. ([Frobenius, 1878], str. 53)

Studované téma pokračuje v třináctém paragrafu *Aehnliche orthogonale Formen*; končí tímto výsledkem:

[10] Symbolem A' značil Frobenius formu „transponovanou“ k formě A.

Sind zwei orthogonale Formen ähnlich, so sind sie auch congruent und können durch orthogonale Substitutionen in einander transformirt werden. ([Frobenius, 1878], str. 58)

Roku 1879 publikoval G. Frobenius rozsáhlou práci *Theorie der linearen Formen mit ganzen Coefficienten.* V úvodu rekapituloval problém, který řešili zejména K. T. Weierstrass, L. Kronecker a C. Jordan.

Wenn die beiden bilinearen Formen

$$A' = \sum a'_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta \ , \qquad A'' = \sum a''_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$$

der Variabeln $x_1, y_1, \dots x_n, y_n$ *durch die linearen Substitutionen*

$$(P.) \quad x_\alpha = \sum_\gamma p_{\gamma\alpha} x'_\gamma \ , \qquad (Q.) \quad y_\beta = \sum_\delta q_{\beta\delta} y'_\delta$$

in die beiden Formen

$$B' = \sum b'_{\gamma\delta} x'_\gamma y'_\delta \ , \qquad B'' = \sum b''_{\gamma\delta} x'_\gamma y'_\delta$$

transformirt werden, so geht die Form

$$A = rA' + A'' = \sum a_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$$

mit dem unbestimmten Parameter r *durch die nämlichen Substitutionen in*

$$B = rB' + B'' = \sum b_{\gamma\delta} x'_\gamma y'_\delta$$

über. Sind die Determinanten der Substitutionen P, Q *von Null verschieden, so verwandeln die inversen Substitutionen*

$$(R.) \quad x'_\gamma = \sum_\alpha r_{\alpha\gamma} x_\alpha \ , \qquad (S.) \quad y'_\delta = \sum_\beta s_{\delta\beta} y_\beta$$

die Form B *wieder in* A*. Giebt man dem Parameter* r *alle möglichen Werthe, so heisst die Gesammtheit der Formen* $rA' + A''$ *eine Schaar von Formen, und zwei Formenschaaren, welche in der angegebenen Weise gegenseitig in einander transformirt werden können, werden äquivalent genannt.*
(Abhandlungen I., str. 482)

Na počátku prvního paragrafu nazvaného *Die Bedingungen der Aequivalenz bilinearer Formen* definoval pomocí subdeterminantů pojem hodnosti obdélníkového schématu A sestávajícího z prvků $a_{\alpha\beta}$ (viz předchozí kapitola této monografie) a definoval pojem elementárního dělitele (symbolem l označil hodnost):

Sind die Elemente $a_{\alpha\beta}$ *reelle ganze Zahlen (oder ganze Functionen eines Parameters* r*), so sei* d_λ *der (positive) grösste gemeinsame Divisor aller*

Determinanten λten Grades von A, falls $\lambda \leq l$, und $d_\lambda = 0$, falls $\lambda > l$ ist. Da jede Determinante λ ten Grades eine homogene lineare Function von Determinanten $(\lambda - 1)$ten Grades ist, so ist d_λ durch $d_{\lambda-1}$ theilbar. Der Quotient $e_\lambda = \frac{d_\lambda}{d_{\lambda-1}}$ $(e_1 = d_1, e_{l+\mu} = 0)$ heisst der λte Elementartheiler des Systems A. (Abhandlungen I., str. 484)

Dále studoval bilineární formu

$$A = \sum a_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$$

s celočíselnými koeficienty, která pomocí transformací

$$(P.) \quad x_\alpha = \sum_\gamma p_{\gamma\alpha} x'_\gamma \ , \qquad (Q.) \quad y_\beta = \sum_\delta q_{\beta\delta} x'_\delta$$

s celočíselnými koeficienty přejde ve formu

$$B = \sum b_{\gamma\delta} x'_\gamma y'_\delta \ .$$

Místo výše uvedených substitucí pak uvažoval bilineární formy

$$P = \sum p_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta \ , \qquad Q = \sum q_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$$

a situaci, kdy forma A přechází substitucemi P, Q ve formu B, což symbolicky označil

$$PAQ = B \ .$$

Formy navzájem převoditelné nazýval G. Frobenius ekvivalentní; dokázal tento zásadní výsledek:

Damit zwei bilineare Formen äquivalent seien, ist nothwendig und hinreichend, dass die Elementartheiler der einen denen der andern der Reihe nach gleich sind. (Abhandlungen I., str. 485)

První paragraf ukončil těmito slovy:

Ist die Anzahl der Variabeln x'_γ derjenigen der Variabeln x_α gleich, so ist $P = \sum p_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$ eine Form von m^2 Variabeln, deren Determinante ich mit $|P| = |p_{\alpha\beta}|$ bezeichne und die Substitutionsdeterminante oder den Transformationsmodul nenne. Zwei Formen A und B sollen nun äquivalent heissen, wenn A durch Substitutionen in B übergeht, deren Determinanten gleich ± 1 (unimodular) sind. Da dann die inversen Substitutionen, welche B in A verwandeln, auch ganze Coefficienten haben, so müssen zwei Formen, welche in diesem Sinne äquivalent sind, es auch in dem früheren sein.
(Abhandlungen I., str. 485–486)

G. Frobenius studoval v této rozsáhlé práci řadu aspektů široké problematiky související s kanonickými tvary, s teorií elementárních dělitelů apod. Např. pátý a šestý paragraf jsou věnovány převodu bilineární formy na normální tvar – nazývají se *Die Reduction einer bilinearen Form auf die Normalform* a *Einfache Elementartheiler und Systeme zusammengesetzter Elementartheiler.* Poslední, třináctý paragraf se nazývá *Aequivalenz von Schaaren bilinearer Formen*, v závěru je připomenut Jordanův výsledek týkající se kanonického tvaru, který byl publikován v jeho knize *Traité des substitutions et des équations algébriques* z roku 1870.

O rok později vydal G. Frobenius dvacetistránkové pokračování výše uvedeného článku se stejným názvem – *Theorie der linearen Formen mit ganzen Coefficienten.* Po krátkém úvodu pokračoval ve studiu bilineárních forem čtrnáctým paragrafem *Die Reduction der bilinearen Formen.*

Roku 1894 se G. Frobenius k tématu kanonických tvarů a elementárních dělitelů ještě vrátil v práci *Über die Elementartheiler der Determinanten*, v níž dal předchozím výsledkům exaktnější podobu. Své výsledky však stále ještě formuloval v řeči bilineárních a kvadratických forem a využíval teorii determinantů. Jejich souhrn přeložený do maticové řeči je dnes součástí kurzů lineární algebry.

Ve stejném roce publikoval článek *Über das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen*, v němž se opět věnoval otázkám kanonických tvarů. V úvodním odstavci nastínil stručně situaci, připomněl zákon setrvačnosti, definoval signaturu a hodnost třídy ekvivalentních forem; tentokrát vyšetřoval formy s reálnými koeficienty a reálné substituce.

Betrachtet man zwei quadratische Formen mit reellen Coefficienten als äquivalent, wenn jede durch eine reelle lineare Substitution in die andere transformirt werden kann, so umfasst jede Klasse Formen, die nur die Quadrate der Variabeln enthalten, und in allen diesen Formen findet sich die gleiche Anzahl von positiven und von negativen Coefficienten. Die Differenz dieser Anzahlen nenne ich die Signatur, ihre Summe den Rang der Klasse und auch jeder individuellen Form der Klasse. ([Frobenius, 1895], str. 187)

Roku 1906 publikoval G. Frobenius kratší příspěvek *Über das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen II*, kterým navázal na práci českého matematika Karla Petra (1868–1950) nazvanou *Die symmetrischen Zahlensysteme und der Satz von Sturm* z roku 1906.

Až do konce 19. století byla problematika kanonických tvarů v pracích řady autorů stále ještě formulována v řeči bilineárních a kvadratických forem, maticovou řeč tehdy užívalo v kontinentální Evropě jen velmi málo matematiků. V osmdesátých letech však s maticemi pracoval velmi úspěšně český matematik Eduard Weyr (1852–1903), v devadesátých letech užíval maticové vyjádření lineární transformace Theodor Molien (Fjodor Eduardovič Molin, 1861–1941), G. Frobenius začal užívat maticovou řeč až roku 1896.

Teprve na počátku 20. století byla řada výsledků teorie bilineárních a kvadratických forem překládána do řeči matic. Výsledky týkající se vlastních čísel a vlastních vektorů byly vzápětí zobecněny na nekonečně dimenzionální případ a zařadily se do obecně chápané spektrální teorie lineárních operátorů.

Eduard Weyr

Eduard Weyr přistoupil k problematice podobnosti matic a k nalezení úplného systému invariantů podobnosti jiným způsobem. Jeho přístup je velmi moderní, je bližší dnešnímu pohledu algebry a funkcionální analýzy.

Roku 1885 publikoval v časopisu Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences dvě krátké práce nazvané *Sur la théorie des matrices* a *Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces.*[11] Oba články mají charakter předběžného oznámení výsledků. Eduard Weyr v nich velmi stručně prezentoval své výsledky o nulitě součinu matic a svoji teorii *charakteristických čísel* a *typických matic*. Později tyto myšlenky podrobně vyložil v samostatně vydaném pojednání *O theorii forem bilinearných* (1889) a v jeho německé verzi *Zur Theorie der bilinearen Formen* publikované roku 1890 v prvním ročníku časopisu Monatshefte für Mathematik und Physik, který založil jeho bratr Emil Weyr (1848–1894) spolu s Gustavem von Escherichem (1849–1935). Svoji teorii charakteristických čísel a typických matic vybudoval Ed. Weyr na pojmu *nulita matice*, který pochází od J. J. Sylvestera. Podobnosti matic se týkají následující Weyrovy výsledky (nulitu matice A značíme $n(A)$):

– Nechť A je matice řádu n. Anulující polynom matice A stupně menšího než n existuje právě tehdy, když existuje charakteristický kořen λ matice A, pro který je nulita matice $A - \lambda E$ větší než jedna.
– Matice A je podobná diagonální matici právě tehdy, když pro každý charakteristický kořen λ matice A je nulita matice $A - \lambda E$ rovna násobnosti tohoto kořene.
– Jestliže A je komplexní matice řádu n a λ její s-násobný charakteristický kořen, pak existuje přirozené číslo r takové, že

$$n(A-\lambda E) < n(A-\lambda E)^2 < \ \dots\ < n(A-\lambda E)^r = n(A-\lambda E)^{r+1} = \dots$$

Eduard Weyr užíval pro *vlastní číslo* termín *charakteristický kořen.* Navíc zavedl tzv. *charakteristická čísla.* Označíme-li

$$\begin{aligned}&n(A-\lambda E) = \alpha_1\ ,\\ &n(A-\lambda E)^2 = \alpha_1+\alpha_2\ ,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &n(A-\lambda E)^r = \alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_r\ ,\end{aligned}$$

potom přirozená čísla $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ se podle Ed. Weyra nazývají charakteristická čísla matice A příslušná k charakteristickému kořenu λ. Ed. Weyr ukázal, že pro ně platí tyto vztahy:

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_r\ ,$$

[11] Resumé obou těchto Weyrových článků bylo otištěno v časopisu Bulletin des Sciences Mathématiques.

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r = s\ .$$

Charakteristické kořeny a charakteristická čísla užil Eduard Weyr k formulaci následujících výsledků, které jsou zcela zásadní pro podobnost matic. Mimo jiné ukázal, že charakteristické kořeny a příslušná charakteristická čísla tvoří úplný systém invariantů podobnosti matic.

– Jestliže $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ jsou charakteristické kořeny matice A a $r_1, \ldots, r_k$ počty příslušných charakteristických čísel, potom

$$(\lambda - \lambda_1)^{r_1} (\lambda - \lambda_2)^{r_2} \ldots (\lambda - \lambda_k)^{r_k}$$

je minimální polynom matice A.

– Matice A a B jsou podobné právě tehdy, když mají stejné charakteristické kořeny a stejná charakteristická čísla k těmto kořenům příslušná.

– Pro každou přípustnou volbu čísel (viz dva výše uvedené vztahy pro charakteristická čísla)

$$\begin{array}{llll} \lambda_1; & \alpha_1^1, & \ldots, & \alpha_{r_1}^1, \\ \lambda_2; & \alpha_1^2, & \ldots, & \alpha_{r_2}^2, \\ \multicolumn{4}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \lambda_k; & \alpha_1^k, & \ldots, & \alpha_{r_k}^k, \end{array}$$

existuje matice řádu $n = \sum s_j$ s charakteristickými kořeny λ_j a příslušnými charakteristickými čísly $\alpha_1^j, \ldots, \alpha_{r_j}^j$, $j = 1, \ldots, k$.

Eduard Weyr sestrojil konkrétní matici M řádu n, která má předepsané charakteristické kořeny a předepsaná charakteristická čísla, a tak v dané třídě podobných matic našel reprezentanta, z něhož se pomocí vztahu

$$X = Q^{-1} M Q$$

získají všechny matice X této třídy. Weyrova matice M má velmi jednoduchý tvar, obsahuje pouze nuly, jedničky a charakteristické kořeny λ_j; od Jordanovy matice reprezentující danou třídu podobných matic se liší pouze jiným uspořádáním prvků. Později pro ni Ed. Weyr zavedl termín *typický tvar*.

Weyrova čtyřicetistránková práce *O binarných matricích* z roku 1887, jejímž hlavním cílem byla popularizace teorie matic a jejího vztahu k hyperkomplexním číslům, rovněž obsahuje partii o podobnosti matic. V desátém paragrafu *Typický tvar matrice* je elementárním způsobem matice M druhého řádu převedena na některý z tvarů

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}.$$

Roku 1889 vydala Královská česká společnost nauk Weyrovo pojednání *O theorii forem bilinearných*, v němž jsou mimo jiné rozpracovány Weyrovy výsledky publikované roku 1885. Eduard Weyr v úvodu napsal:

Předním účelem tohoto spisu jest uvedení nové pomůcky do theorie bilinearných forem, t. theorie soustav, hlavně normalných soustav příslušných dané matici.

O plodnosti těchto úvah nechť čtenář sám rozhodne; zde jen tolik podotýkám, že nová methoda stačila m. j. na úplné řešení základního problemu současné transformace dvou bilinearných forem pro případ Weierstrassem řešený.
([Weyr, 1889], str. 5)

Ed. Weyr zavedl v šesté kapitole tohoto pojednání pojem normální soustavy příslušné k dané matici N, která slouží k nalezení transformační matice Q převádějící matici N na její typický tvar M:

Každá matice N má svou typickou matici M; je-li M typickou maticí o týchž kořenech a číslech charakteristických jako N, lze … stanoviti matici Q tak, že platí $N = Q^{-1}MQ$, a tu zoveme M typickou maticí náležející ku N.
([Weyr, 1889], str. 61)

Weyrovou metodou je možno převést každou komplexní matici na typický tvar (v podstatě Jordanův kanonický tvar) a současně najít příslušnou transformační matici, resp. všechny takové transformační matice.

V jedenácté kapitole nazvané *Problem současné transformace dvou bilinearných forem a jiná upotřebení* Eduard Weyr ukázal, že pomocí teorie charakteristických čísel může podat i řešení klasického problému teorie forem, který vyřešili již K. T. Weierstrass roku 1868 v práci *Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen* a L. Kronecker v pracích *Über Schaaren quadratischer Formen* (1868) a *Über Schaaren von quadratischen und bilinearen Formen* (1874). Uvedl, že L. Kronecker zformuloval problém takto:

Nechť se stanoví nutné a postačující výminky, za kterými dva páry bilinearných forem jsou aequivalentní, a v případu aequivalence nechť se vyvine methoda ku stanovení transformace. ([Weyr, 1889], str. 76)

V maticové řeči je možno tento problém vyslovit takto: Nechť P, Q, P', Q' jsou matice řádu n. Najděte nutnou a postačující podmínku pro existenci regulárních matic H, K, pro něž je

$$P' = HPK \ , \qquad Q' = HQK \ ,$$

a metodu nalezení transformačních matic H, K.

V závěru jedenácté kapitoly podal Eduard Weyr důkazy několika známých vět, např. Cauchyova výsledku o reálnosti vlastních čísel reálné symetrické matice, Sylvesterova zákonu setrvačnosti atd.

Poznamenejme, že výklad Weyrovy teorie podali William Henry Metzler (1863–1943) v dlouhé práci *On the roots of matrices* z roku 1892, Kurt Hensel (1861–1941) v rozsáhlém článku *Theorie der Körper von Matrizen* z roku 1904[12] a Julius Wellstein (1888–1978) v pojednání *Über symmetrische,*

[12] *Bei dem hier gewählten Eingange ergeben sich die schönen Resultate, welche Eduard Weyr in seiner großen Abhandlung „Zur Theorie der bilinearen Formen“ … hergeleitet, aber nicht ohne beträchtliche Schwierigkeiten bewiesen hat, als selbstverständliche Folgerungen …* ([Hensel, 1904], str. 116–117)

alternierende und orthogonale Normalformen von Matrizen z roku 1930. Wolfgang Krull (1899–1971) ji roku 1921 rozšířil v práci *Über Begleitmatrizen und Elementarteilertheorie* pro matice nad libovolným tělesem.

Výše uvedený soubor čísel

$$(\alpha_1^1, \ldots, \alpha_{r_1}^1; \alpha_1^2, \ldots, \alpha_{r_2}^2; \ldots; \alpha_1^k, \ldots, \alpha_{r_k}^k)$$

bývá někdy nazýván *Weyrova charakteristika.*[13]

V české matematické obci měla odezva na výše uvedené Weyrovy výsledky značné zpoždění. Roku 1949 na ně reagoval na společném 3. sjezdu československých a 7. sjezdu polských matematiků Miroslav Novotný (nar. 1922); jeho příspěvek *O zobecnění Weyrovy theorie charakteristických čísel matic* byl otištěn v Časopisu pro pěstování matematiky a fysiky roku 1950. O tři roky později zveřejnil M. Novotný článek *Abstraktní jádro Weyrovy konstrukce charakteristických čísel matic.* V úvodu napsal:

Prof. Borůvka mi položil problém, jaká část Weyrovy theorie charakteristických čísel se dá vybudovat v abstraktním prostoru bez zavedení algebraických operací. V této práci se dokazuje, že lineární prostor se dá nahradit t. zv. A-projektivním prostorem a lineární zobrazení t. zv. A-deformací. Tyto dva pojmy postačí k definici charakteristických čísel a tato čísla podrží ty vlastnosti klasické theorie, jež jsou popsány ve větě 1. Na druhé straně se mi nepodařilo nalézti vhodný ekvivalent k pojmu kořen lineárního zobrazení ani zobecnit systémy normálních vektorů. ([Novotný, 1953], str. 41)

V letech 1953 až 1956 publikoval Jiří Čermák tři práce o soustavách diferenciálních a diferenčních rovnic. Nepoužíval klasickou Weierstrassovu teorii elementárních dělitelů, ale Weyrovu teorii charakteristických čísel, typických tvarů matic a normálních soustav. V říjnu 1958 obhájil kandidátskou disertační práci nazvanou *Weyrovy soustavy normálních vektorů a jejich použití v matematické analyse.*[14]

Weyrovy výsledky propagoval ve svých přednáškách i pracích Otakar Borůvka (1899–1995) a upozorňoval na možnosti jejího využití. V článku *Poznámka o použití Weyrovy theorie matic k integraci systémů diferenciálních lineárních rovnic s konstantními koeficienty* publikovaném roku 1954 v Časopisu pro pěstování matematiky napsal:

K integraci systémů diferenciálních lineárních rovnic s konstantními koeficienty se obvykle používá klasické metody Weierstrassovy, spočívající na redukci matice koeficientů na kanonický tvar. ... Ve svých přednáškách o diferenciálních rovnicích, které jsem konal ve stud. roce 1948/49 na přírodovědecké

[13] Weyrova teorie charakteristických čísel, resp. Weyrova charakteristika je připomenuta v některých pracích i monografiích (např. [Frobenius, 1911], str. 479, 481, [Turnbull, Aitken, 1932], str. 80, 187–188, [MacDuffee, 1933], 40. paragraf (str. 73–74) se nazývá *Weyr's characteristic*, [MacDuffee, 1943], 55. paragraf (str. 150–155) se nazývá *The Weyr's characteristic*, [Zurmühl, 1950], str. 212–214, [Pickert, 1953], str. 57).

[14] Viz Časopis pro pěstování matematiky 84(1959), str. 254.

fakultě M. U. v Brně, vyložil jsem integrační metodu založenou na Weyrově theorii matic. Tato metoda se vyznačuje tím, že vede k přehledným explicitním vzorcům pro integrály, vyjadřujícím algebraickou povahu problému. Nedávno uveřejnil M. Kumorowitz práci o integraci systémů diferenciálních lineárních rovnic s konstantními koeficienty, která je s Weyrovou theorií matic v úzké souvislosti. ([Borůvka, 1954], str. 151)

O. Borůvka Weyrovu teorii podrobně vyložil v knížce *Základy teorie matic* z roku 1971. Mimo jiné zde napsal:

Weyrova teorie je obsahově rovnocenná s důležitou teorií elementárních dělitelů ... a svojí průhlednou algebraickou strukturou ji předčí. ...

Nicméně se mně zdá, že Weyrova práce nenalezla ve světové literatuře ono místo, které jí přináleží. Na př. v obsáhlé Wedderburnově knize o maticích z r. 1934 jsou sice v seznamu literatury obě Weyrovy práce uvedeny, avšak v textu není o jejich obsahu zmínky. ([Borůvka, 1971], str. 116, 152)

Weyrova teorie charakteristických čísel je přeložena do moderní řeči endomorfismů vektorových prostorů v jednom z článků publikace *Eduard Weyr 1852–1903* [Bečvář, 1995]. Další podrobnosti lze nalézt ve stati *Eduard Weyr, lineární algebra a teorie hyperkomplexních čísel*, která je otištěna ve stejné knize.

Roku 1999 publikovala Helene Shapiro v časopisu The American Mathematical Monthly článek *The Weyr characteristic*, v němž podala moderní výklad Weyrových výsledků, uvedla některé zajímavé souvislosti a připojila četné bibliografické odkazy. V úvodu napsala:

The Jordan canonical form is a well-known and standard topic in linear algebra. It is thoroughly covered in many texts on linear algebra and abstract algebra. The purpose of this article is to publicize a different approach to the canonical form problem introduced by Eduard Weyr in 1885 ... Several older books ... mention Weyr characteristics but it does not appear in recent linear algebra texts. The basic idea of Weyr's approach is useful in several areas, such as describing algorithms for computing the Jordan form in a stable manner ... and in developing canonical forms for matrices under unitary similarity ..., but Weyr's papers are rarely referenced and the sequence of numbers we call the Weyr characteristic is not named. Thus, while Weyr's work seems to be little known, his basic idea has been rediscovered and used several times.
([Shapiro, 1999], str. 919)

První monografie

Koncem 19. století se objevila první kniha, která byla věnována Weierstrassově teorii elementárních dělitelů jako svému hlavnímu tématu. Její autor, německý matematik Peter Muth (1860–1907), studoval v Heidelbergu a v Gießenu. Vydání monografie *Theorie und Anwendung der Elementartheiler* (1899) se zdrželo kvůli jeho vážné nemoci. Kniha je poměrně rozsáhlá (xvi+236 stran), členěna je na 18 paragrafů. Desetistránkový úvod seznamuje se základními myšlenkami teorie a s přínosem jednotlivých tvůrců, zejména K. T. Weierstrasse, L. Kroneckera, G. Frobenia. Autor poukázal jak na nejstarší zdroje prezentované problematiky, tak na nedávné výsledky:

Sowohl in der Analysis, als auch vornehmlich in der analytischen Geometrie tritt uns häufig das algebraische Problem entgegen, zwei quadratische Formen φ und ψ von je n Variabelen durch eine lineare Substitution gleichzeitig in eine einfache oder kanonische (Normal-) Form überzuführen. ...

Die arithmetischen, auf der Kronecker'schen Reduktion basirenden Methoden wurden namentlich von Hensel weitergebildet; derselbe zieht auch Systeme in Betracht, deren Elemente ganze oder gebrochene Grössen eines Körpers von algebraischen Zahlen oder Funktionen sind, wobei der Begriff „Elementartheiler" abermalige Erweiterung erfahren muss. Die Hauptsätze über Elementartheiler bleiben auch für solche Systeme bestehen ...
([Muth, 1899], str. vii, xv–xvi)

Obšírnou recenzi Muthovy monografie nazvanou *Muth's Elementartheiler* zveřejnil roku 1901 Thomas John I'anson Bromwich (1873–1929), který se již v té době nevyhýbal maticové řeči. Ocenil přínos monografie a mimo jiné též Muthův výklad partie o Jordanově kanonickém tvaru:

Dr. Muth's book is the first published account of the theories which we have sketched above; our thanks are due to the author for having collected so many useful results into one convenient volume. ... § 11 gives a method of reducing a linear substitution to Jordan's canonical form, though it seems to me that the most practical method for reducing any substitution (whose latent roots are known) is that due to Jordan himself. ([Bromwich, 1901], str. 313–314)

Zatímco v kontinentální Evropě byly Weierstrassovy výsledky vnímány poměrně brzy, v Británii byl stručný výtah z jeho teorie elementárních dělitelů otištěn až roku 1904 ve 2. vydání Scottovy učebnice *The theory of determinants and their applications*, které připravil do tisku G. B. Mathews (viz [Scott, 1880]). Podrobný výklad podal až T. J. I'a. Bromwich roku 1906 v monografii *Quadratic forms and their classification by means of invariant factors*, která sehrála pro pochopení a rozšíření teorie kanonických tvarů matic, resp. bilineárních a kvadratických forem důležitou roli. Byla to první anglicky psaná monografie o tomto tématu.

Velký význam pro formulaci problémů souvisejících s kanonickými tvary měla i kniha Harolda Hiltona (1876–1974) nazvaná *Homogeneous linear substitutions* z roku 1914. Jejím hlavním tématem jsou lineární substituce s reálnými a komplexními koeficienty, bilineární formy a invariantní faktory. Ernest Brown Skinner (1863–1935) o ní napsal:

Professor Hilton's book is a welcome addition to the textbook literature on the subject of linear substitutions. ...

The first four chapters, comprising a little more than half of the book, are intended to form an introduction to the whole subject. In the first chapter, which is much the longest in the book, the ordinary method of transforming *the general substitution into the normal and canonical forms by means of the poles is shown and the simpler properties of symmetric, orthogonal, unitary, and Hermitian substitutions are given. In the second the author gives a very brief account of invariant factors … In the third chapter devoted to bilinear forms the Hermitian forms play a prominent part.*

To the student who comes to the subject for the first time the fourth chapter on Applications will be one of the most interesting in the book. Illustrations from the theory of equations, from differential equations, from the theory of maxima and minima, from geometry, and from mechanics serve to show the wide range of application of the subject. ([Skinner, 1916], str. 147)

Herbert Westren Turnbull, Alexander Craig Aitken

Významnou monografií věnovanou kanonickým tvarům matic je úspěšná a stále aktuální kniha *An introduction to the theory of canonical matrices* (200 stran), kterou vydali roku 1932 H. W. Turnbull (1885–1961) a A. C. Aitken (1895–1967). Byla hojně studována, dočkala se několika vydání a dotisků (1945, 1948, 1950, 1952, 1961, 2005). Původně byla zamýšlena jako pokračování oblíbené Turnbullovy knihy *The theory of determinants, matrices, and invariants* z roku 1928 (též 1945, 1948, 1950, 1960), nakonec však byla koncipována jako zcela samostatná kniha, která pokrývá, doplňuje a rozšiřuje mnohá témata předchozí Turnbullovy knihy. V první větě úvodu je zcela jasně vymezen její cíl:

This book has been written with the object of giving an account of the various ways in which matrices of finite order can be reduced to canonical form under different important types of transformation. ([Turnbull, Aitken, 1932], str. v)

Již v úvodu se autoři odkázali na Muthovu knihu *Theorie und Anwendung der Elementartheiler* (1899), na Bromwichovu knihu *Quadratic forms and their classification by means of invariant factors* (1906), na Bôcherovu učebnici *Introduction to higher algebra* (1907), na Cullisovu trojdílnou monografii *Matrices and determinoids* z let 1913, 1918 a 1925, na Hiltonovu knihu *Homogeneous linear substitutions* (1914) a na Dicksonovu knihu *Modern algebraic theories* (1926).

Uveďme nyní názvy všech jedenácti kapitol Turnbullovy a Aitkenovy monografie, které dobře charakterizují její obsah:

I. *Definitions and fundamental properties of matrices.*

II. *Elementary transformations. Bilinear and quadratic forms.*

III. *The canonical reduction of equivalent matrices.*

IV. *Subgroups of the group of equivalent transformations.*

V. *A rational canonical form for the collineatory group.*

VI. *The classical canonical form for the collineatory group.*

VII. *Congruent and conjuctive transformations: quadratic and hermitian forms.*

VIII. *Canonical reduction by unitary and orthogonal transformations.*

IX. *The canonical reduction of pencils of matrices.*

X. *Applications of canonical forms to solution of linear matrix equations. Commutants and invariants.*

XI. *Practical applications of canonical reduction.*

Jednotlivé kapitoly jsou dále členěny na kratší články; poslední článek každé kapitoly obsahuje historické poznámky.

V úvodu první kapitoly je výstižně nastíněna problematika, které je kniha věnována:

The theory of canonical matrices is concerned with the systematic investigation of types of transformation which reduce matrices to the simplest and most convenient shape. The formulation of these various types is not merely useful as a preliminary to the deeper study of the properties of matrices themselves; it serves also to render the theory of matrices more immediately available for numerous applications to geometry, differential equations, analytical dynamics, and the like. Quite early, for example, in co-ordinate geometry, when the equation of a general conic is simplified by reference to principal axes, or again when two general conics are referred to their common self-conjugate triangle, the procedure involved is really equivalent to the canonical reduction of a matrix. ([Turnbull, Aitken, 1932], str. 1)

Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften

Roku 1950 začala vycházet druhá, zcela přepracovaná verze německé matematické encyklopedie pod názvem *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen* [EMW'] (první verze [EMW] je z let 1898 až 1935). Projekt však nebyl úspěšný, během devíti let vyšel jen malý počet sešitů.

Günther Pickert (nar. 1917) publikoval roku 1953 v této encyklopedii dvě přehledové statě věnované lineární algebře. První je nazvána *Lineare Algebra* (43 stran), druhá *Normalformen von Matrizen* (29 stran). Druhé pojednání je rozděleno na osm článků:

1. *Das charakteristische Polynom einer Matrix.*
2. *Teilbarkeit von Matrizen.*
3. *Elementarteiler.*
4. *Ähnlichkeit.*
5. *Äquivalenz von Matrixpaaren.*
6. *Kongruenz.*
7. *Kongruenz von Matrixpaaren.*
8. *Unitäre Ähnlichkeit und normale Matrizen.*

Kromě základní literatury citované v úvodu tohoto pojednání (17 titulů) je řada pramenů, zejména časopiseckých, uvedena ve 155 poznámkách pod čarou.[15]

Pickertova stať *Normalformen von Matrizen* je pojata značně obecně a abstraktně, je psána stručným a efektivním matematickým jazykem. Na jejím charakteru se pochopitelně projevil vliv moderní algebry, která se v první polovině 20. století intenzivně rozvíjela. Je to vidět např. z následující pasáže, kterou začíná třetí článek nesoucí název *Elementarteiler*.

$\mathfrak{K}$ sei ein Ring mit Einselement 1. *Die (m,n)-Matrizen A, B heißen äquivalent, wenn es invertierbare Matrizen $P \in (\mathfrak{K})_m$, $Q \in (\mathfrak{K})_n$ mit*

$$B = PAQ \tag{2}$$

gibt, d. h. also, wenn sie als Matrizen ein- und derselben linearen Abbildung aufgefaßt werden können. Verzichtet man in (2) *auf die Invertierbarkeit von P und Q, so hießt A ein Teiler von B, und B ein Vielfaches von A. Ist $\mathfrak{K}$ kommutativ, so wird das von den Minoren i-ten Grades der Matrix A erzeugte Ideal $\mathfrak{d}_i$ als das i-te Determinantenideal von A bezeichnet, und es gilt $\mathfrak{d}_1 \supseteqq \mathfrak{d}_2 \supseteqq \cdots \supseteqq \mathfrak{d}_r \supseteqq \mathfrak{d}_{r+1} = \cdots = 0$ mit r als dem Rang von A.*
([Pickert, 1953], str. 51–52)

Čtvrtý článek *Ähnlichkeit* začíná definicí podobných matic; bezprostředně navazuje na definici, kterou jsme v předchozím citovali.

Setzt man in (2) *$P = Q^{-1}$, d. h. können $A, B \in (\mathfrak{K})_n$ als Matrizen $M(\sigma; \mathfrak{E}, \mathfrak{E})$, $M(\sigma; \mathfrak{E}, \mathfrak{E})$ ein und desselben Endomorphismus σ aufgefaßt werden, so nennt man A, B ähnlich.* ([Pickert, 1953], str. 55)

Najdeme zde např. nutnou a postačující podmínku podobnosti dvou matic (totožný soubor elementárních dělitelů), Jordanův kanonický tvar, Weyrovu charakteristiku i tzv. Segreovu charakteristiku. Zmíněny jsou výsledky Eduarda Weyra a Karla Petra.[16] Informace o Weyrových výsledcích jsou převzaty z knihy *The theory of matrices*, jejímž autorem je C. C. MacDuffee; původní Weyrovy práce *Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espéces* (1885) a *Zur Theorie der bilinearen Formen* (1890) citovány nejsou.

Pátý článek věnovaný ekvivalenci párů matic začíná takto:

$\mathfrak{K}$ sei ein Schiefkörper. Das Paar der (m,n)-Matrizen A, B heißt äquivalent zum Paar der (m,n)-Matrizen A_1, B_1, wenn es invertierbare Matrizen $P \in (\mathfrak{K})_m$, $Q \in (\mathfrak{K})_n$ mit

$$A_1 = PAQ\ , \qquad B_1 = PBQ \tag{4}$$

[15] V prvním článku je citována práce O. Borůvky (*Sur les matrices singulières*, Comptes Rendus 203(1936), 600–602, 762) podávající nový důkaz jedné Weyrovy věty o nulitách, která byla publikována v práci *Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces* [Weyr, 1885].

[16] *O racionálném kanonickém tvaru lineární substituce*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 9(1940), 9–22.

gibt. Ist $m = n =$ Rang von A, so folgt aus (4) *die Gleichung* $B_1A_1^{-1} = P(BA^{-1})P^{-1}$ *und daraus umgekehrt* (4) *mit* $Q = A^{-1}P^{-1}A_1$*; die Äquivalenz der Paare* A, B *und* A_1, B_1 *bedeutet also dasselbe wie die Ähnlichkeit von* BA^{-1} *und* $B_1A_1^{-1}$ … ([Pickert, 1953], str. 59)

V šestém článku se jedná o tzv. kongruentní matice, tj. o matice A, B, pro něž

$$B = PAQ\ , \quad \text{přičemž} \quad P = \overline{Q}^{\mathrm{T}} = Q^*.$$

Autor předpokládal, že $\mathfrak{K}$ je okruh s jednotkovým prvkem a tzv. involutorním antiautomorfismem.[17]

Pro zajímavost uveďme Pickertovu formulaci jednoho z hlavních výsledků.

… *Zu jeder hermiteschen Matrix gibt es im Falle* $\mathfrak{K} \neq \mathfrak{K}_0$ *eine hermitesch kongruente Diagonalmatrix und ebenso zu jeder symmetrischen nichtalternierenden Matrix eine kongruente Diagonalmatrix.* ([Pickert, 1953], str. 63)

Speciální případ pochopitelně nastane, když se jedná o těleso reálných čísel a ortogonální matice. V tomto článku je citována práce B. Bydžovského.[18]

Sedmý článek je věnován kongruenci párů matic, osmý článek unitární podobnosti, která je vymezena takto:

Die hermitesche Kongruenz der Matrixpaare E_n, A *und* E_n, B *bedeutet … daß es eine unitäre Matrix* Q *mit* $B = Q^{-1}AQ$ *gibt. Man bezeichnet in diesem Fall* A, B *als unitär ähnlich, bei* $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_0$ *insbesondere als orthogonal ähnlich.* ([Pickert, 1953], str. 69)

5. Spektrální teorie

Not least because such different objects as atoms, operators and algebras all possess spectra, the evolution of spectral theory is one of the most informative chapters in the history of contemporary mathematics.

([Steen, 1973], str. 359)

Jedním z výsledků moderní spektrální teorie je skutečnost, že určité lineární operátory vektorových prostorů nekonečné dimenze mohou být převedeny na diagonální tvar.

Tato problematika se původně objevila v případě konečné dimenze, jednalo se o tzv. převedení kuželosečky a kvadriky k hlavním osám, resp. o převedení kvadratické formy na součet čtverců. Koncem 19. století začaly být intenzivně zkoumány prostory nekonečné dimenze, nejprve ve spojení s problematikou soustav nekonečně mnoha lineárních rovnic o nekonečně mnoha neznámých.

[17] Prvku x je přiřazen prvek označený $\overline{x}$, přičemž platí: $\overline{\overline{x}} = x$, $\overline{x+y} = \overline{x} + \overline{y}$, $\overline{xy} = \overline{y}\,\overline{x}$. Je-li $\mathfrak{K}$ těleso, pak symbolem $\mathfrak{K}_0$ značíme podtěleso tvořené všemi prvky, pro něž $\overline{x} = x$. Každý involutorní antiautomorfismus okruhu čtvercových matic přiřazuje matici X matici $S\overline{X}^{\mathrm{T}}S^{-1}$.

[18] *Sur les matrices orthogonales symétriques*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 65(1936), 189–194.

Nekonečné soustavy lineárních rovnic byly vyšetřovány již v 18. a 19. století v souvislosti s řešením diferenciálních rovnic metodou neurčitých koeficientů. Neznámé funkce byly totiž reprezentovány nekonečnými řadami a diferenciální rovnice se tak redukovala na soustavu nekonečně mnoha rovnic o nekonečně mnoha neznámých.

S problémem řešení soustavy nekonečně mnoha lineárních rovnic o nekonečně mnoha neznámých se potýkal již francouzský matematik a fyzik Jean-Baptiste-Joseph de Fourier (1768–1830) roku 1822 v práci *Théorie analytique de la chaleur*, v níž se pokoušel reprezentovat funkce trigonometrickými řadami. Soustavu nekonečně mnoha rovnic o nekonečně mnoha neznámých se snažil řešit tak, že uvažoval podsystém $n \times n$ (n rovnic o n neznámých), a poté nechal číslo n neomezeně růst.

Až po několika desetiletích se problematika nekonečných soustav lineárních rovnic opět ukázala jako aktuální. Věnovali se jí Ernst Theodor Kötteritzsch v práci *Über die Auflösung eines Systems von unendlich vielen linearen Gleichungen* z roku 1870 a americký astronom George William Hill (1838–1914) v monografii *On the Part of the Motion of the Lunar Perigee which is a Function of the Mean Motions of the Sun and the Moon* z roku 1877 a v článku s obdobným názvem, který byl publikován roku 1886 v časopisu Acta Mathematica.

G. W. Hill využil metody známé z teorie konečných soustav lineárních rovnic pro studium soustav nekonečných. Zavedl nekonečné determinanty a aplikoval na ně pravidla platná pro determinanty konečné. Jeho výsledky sice souhlasily s realitou, ale správnost užitých matematických postupů nebyla zcela jasná.

Francouzský matematik a fyzik Paul Emile Appell (1855–1930) užil obdobnou metodu jako J.-B.-J. de Fourier v článku *Sur une méthode élémentaire pour obtenir les développements en série trigonométrique des fonctions elliptiques* uveřejněném roku 1885 v časopisu Bulletin de la Société mathématique de France.

Vyšetřování nekonečných soustav lineárních rovnic vedlo ke studiu nekonečných matic a nekonečných determinantů. Tyto otázky zkoumal v letech 1885 až 1886 Henri Poincaré (1854–1912). V pracích *Remarques sur l'emploi de la méthode précédente* a *Sur les déterminants d'ordre infini* do jisté míry navázal na Hillovy a Appellovy výsledky, pochopil sporná místa jejich postupů a pokusil se pro ně vybudovat pevné základy. V této souvislosti rozpracoval exaktní teorii determinantů nekonečného řádu.

Stejnou problematikou se o několik let později zabýval Helge von Koch (1870–1924), který byl inspirován zejména Hillovými a Poincaréovými pracemi. Studoval užití nekonečných determinantů v teorii lineárních diferenciálních rovnic, roku 1891 publikoval o tomto tématu práce *Sur une application des déterminants infinis à la théorie des équations différentielles linéaires* a *Sur les déterminants infinis et les équations différentielles linéaires*. Roku 1910 vydal práci *Sur les systèmes d'une infinité d'équations linéaires à une infinité d'inconnues*, v níž mimo jiné komentoval předchozí Hillovy, Poincaréovy a Appellovy výsledky. Stručně, jasně a výstižně charakterizoval například Hillův přístup k problému:

... la notion de déterminant infini:

Etant donnée la suite double

$$\begin{array}{lll} A_{11}, & A_{12}, & \dots \\ A_{21}, & A_{22}, & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{array}$$

on forme le déterminant d'ordre n:

$$\Delta^{(n)} = \begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix};$$

si ce déterminant tend vers une limite finie et déterminée Δ (pour $n = \infty$) M. Hill convient de dire que le déterminant des A_{ik} converge et a pour valeur Δ.

M. Hill ne démontre pas que le déterminant de son système est convergent mais cela ne l'empêche pas à opérer sur ce déterminant tout comme c'était un déterminant ordinaire, et une intuition heureuse le guide à de très beaux résultats numériques qui semblent justifier l'hardiesse du calcul.
([Koch, 1910], str. 44)

Brzy se ukázalo, že zobecnění teorie ortogonálních transformací kvadratických forem na případ nekonečně mnoha proměnných hraje velkou roli nejen při řešení diferenciálních rovnic, ale i v teorii rovnic integrálních.

Jedním z prvních, který si tuto skutečnost uvědomil, byl německý matematik David Hilbert (1862–1943). V letech 1904 až 1910 publikoval v časopisu Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen šest pojednání se společným názvem *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen.* Jejich souhrn byl roku 1912 vydán v nakladatelství Teubner v Lipsku jako monografie.

D. Hilbert zavedl v této rozsáhlé práci fundamentální pojmy spektrální teorie, prezentoval její hlavní výsledky a položil základy teorie Hilbertových prostorů. Mimo jiné rozšířil pojem vlastního čísla pro nekonečné symetrické bilineární, resp. kvadratické formy a teorém o hlavních osách pro symetrické omezené lineární transformace.

Připomeňme na tomto místě, že Ernst Hellinger (1883–1950) a Otto Toeplitz (1881–1940) publikovali roku 1927 v německé matematické encyklopedii rozsáhlý přehledový článek nazvaný *Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten*, který podrobně pojednává, zejména ve své třetí části *Eigenwerttheorie*, o spektrální teorii.

Ještě lze uvést monografii Aurela Friedricha Wintnera (1903–1958) *Spektraltheorie der unendlichen Matrizen* (xii+280 stran) z roku 1929, která je již zcela důsledně napsána v maticové řeči. Její podtitul *Einführung in den analytischen Apparat der Quantenmechanik* naznačuje její hlavní cíl.[19]

V závěru této kapitoly se zmiňme ještě o dvou zajímavých přehledových pracích.

Podstatná část článku *The spectral theorem* Edgara R. Lorcha (1907–1990) z roku 1962 otištěného v 1. svazku edice The Mathematical Association of America, Studies in Mathematics, je věnována problematice, kterou dnes řadíme do funkcionální analýzy. Cílem autora bylo prezentovat základní myšlenky spektrální teorie.

První paragraf nazvaný *Preliminary example* má úvodní charakter. Pojednává o strukturních otázkách endomorfismů komplexních vektorových prostorů konečné dimenze, na nichž je dán skalární součin, a je proto možno hovořit o kolmosti. V jeho závěru je zformulován a dokázán spektrální teorém v tomto tvaru:

THE SPECTRAL THEOREM (simple form): *Let $\mathfrak{E}_n$ be complex n-dimensional space and let H be a symmetric linear transformation of $\mathfrak{E}_n$ into itself. Then there exists a finite number of distinct real numbers $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ and of closed linear manifolds $\mathfrak{M}_{\lambda_1}, \ldots, \mathfrak{M}_{\lambda_t}$ having nonzero dimensionality with the properties:*

1. *In $\mathfrak{M}_{\lambda_i}$, $H = \lambda_i I$. That is, the vectors of $\mathfrak{M}_{\lambda_i}$ are eigenvectors corresponding to the eigenvalue λ_i.*
2. *If $i \neq j$, $\mathfrak{M}_{\lambda_i} \perp \mathfrak{M}_{\lambda_j}$, meaning that every vector in one manifold is orthogonal to every vector in the other.*
3. *The manifolds $\mathfrak{M}_{\lambda_i}$ span $\mathfrak{E}_n$ in the following sense: If x is a vector in $\mathfrak{E}_n$, then there exist unique vectors x_i in $\mathfrak{M}_{\lambda_i}$, such that*

$$x = x_1 + \cdots + x_t \ .$$

The numbers λ_i and the manifolds $\mathfrak{M}_{\lambda_i}$ are uniquely determined by H.
([Lorch, 1962], str. 98)

Další obsah Lorchova článku jen naznačíme výčtem názvů zbývajících paragrafů, neboť se již výrazně vzdaluje od klasické lineární algebry: 2. *Hilbert space*, 3. *Linear transformations*, 4. *Completely continuous transformations*, 5. *Bounded transformations*, 6. *Unbounded transformations*, 7. *Some extensions.*

Pohled do historie spektrální teorie podal roku 1973 Lynn Arthur Steen v rozsáhlém článku *Highlights in the history of spectral theory* otištěném v časopisu The American Mathematical Monthly. V úvodu napsal:

Today every student of mathematics encounters the spectral theorem not later than his first course in functional analysis and often as early as his first

[19] Vývoji problematiky související s nekonečnými maticemi se podrobně věnoval Michael Bernkopf v práci *A history of infinite matrices* z roku 1968.

course in linear algebra. Usually he studies one specimen of the spectral theorem, plucked out of historical context and imbedded in the logical context of his particular course. Although this scheme is pedagogically efficient and logically aesthetic, it does often obscure the fact that the spectral theorem was (and perhaps still is) an evolving species. Its evolution is an outstanding example of the counterpoint between pure and applied mathematics, for while the motive force in its evolution was the attempt to provide adequate mathematical theories for various physical phenomena, the forms throught which it evolved precisely those which have marked the development of modern abstract analysis.
([Steen, 1973], str. 360)

Steenova práce se bezprostředně týká funkcionální analýzy, najdeme v ní však řadu myšlenek, které se vztahují i k lineární algebře. Obsahuje bohatou bibliografii (z let 1637 až 1971) k tématu, o němž pojednává.

6. Závěr

V předchozím textu jsme viděli, že důležité partie teorie matic, tj. problematika charakteristického a minimálního polynomu, vlastních čísel a vlastních vektorů, otázky kanonických tvarů a s nimi souvisejících (ortogonálních) transformací, se v matematice objevily podstatně dříve, než vůbec teorie matic vznikla, byla rozšířena a přijata. Bylo to již v 18. století, kdy byly zejména v geometrii a v nebeské mechanice vyšetřovány transformace symetrické bilineární, resp. kvadratické formy na kanonický tvar (součty čtverců) a kdy byla diskutována otázka reálnosti příslušných vlastních čísel (L. Euler, J. L. Lagrange, C. G. J. Jacobi, P. S. Laplace a další).

V 19. století byla postupně tato vyšetřování bilineárních a kvadratických forem stavěna na pevnější základy, matematické závěry byly dokazovány matematickými prostředky, dřívější nejasná fyzikálně filozofická argumentace byla opuštěna. Exaktní důkaz reálnosti vlastních čísel reálné symetrické, resp. hermitovské formy podali A.-L. Cauchy, resp. Ch. Hermite. V polovině 19. století byl zformulován a dokázán Sylvesterův zákon o setrvačnosti.

Ve druhé polovině 19. století sehrály v této oblasti velmi důležitou roli výsledky K. T. Weierstrasse, L. Kroneckera a C. Jordana. Teorie elementárních dělitelů a exaktní zpracování převodu bilineárních, resp. kvadratických forem a lineárních substitucí na kanonické tvary dnes tvoří základy jedné z nejdůležitějších partií lineární algebry. K důkladnému pochopení celé této problematiky a k jejímu modernímu vyjádření významně přispěly rozsáhlé práce G. Frobenia.

Teprve koncem 19. století začaly být všechny tyto výsledky formulovány v maticové řeči; jedním z prvních matematiků kontinentální Evropy, který maticovou řeč přijal již v osmdesátých letech, byl Ed. Weyr. Jeho pojetí převodu matice na kanonický tvar (se současným nalezením transformační matice) je mimořádně zdařilé a velmi moderní.

Na přelomu 19. a 20. století došlo k podstatnému zobecnění výsledků předcházejících desetiletí. Intenzivní výzkum nekonečných determinantů, soustav nekonečně mnoha lineárních rovnic s nekonečně mnoha neznámými a nekonečných matic otevřel cestu k funkcionální analýze, zejména v souvislosti s počínajícím studiem lineárních transformací prostorů nekonečné dimenze. Postupně se konstituovala spektrální teorie.

V první polovině 20. století se partie o kanonických tvarech, vlastních číslech a vlastních vektorech objevila v učebnicích a monografiích, zejména v souvislosti s rozšířením a všeobecným uznáním teorie matic. Klasickou monografií věnovanou kanonickým tvarům je dodnes užívaná kniha H. W. Turnbulla a A. C. Aitkena.