Z historie lineární algebry

Matice

In: Jindřich Bečvář (author): Z historie lineární algebry. (Czech). Praha: Matfyzpress, 2007. pp. 119–190.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/400927

IV. MATICE

The theory of matrices had its origin in the theory of determinants, and the latter had its origin in the theory of systems of equations. From Vandermonde and Laplace to Cayley, determinants were cultivated in a purely formal manner. The early algebraists never successfully explained what a determinant was, and indeed they were not interested in exact definitions.

It was Cayley who seems first to have noticed that "the idea of matrix precedes that of determinant". More explicitly, we can say that the relation of determinant to matrix is that of the absolute value of a complex number itself, and it is no more possible to define determinant without the previous concept of matrix or its equivalent than it is to have the feline grin without the Cheshire cat.

([MacDuffee, 1942], str. v)

Za zrod teorie matic budeme považovat zveřejnění Cayleyova článku *A memoir on the theory of matrices* v časopise Philosophical Transactions of the Royal Society of London roku 1858.

Četné podněty ke vzniku a rozvoji teorie matic dávala zejména problematika soustav lineárních rovnic, teorie determinantů, teorie bilineárních a kvadratických forem a teorie invariantů. Velmi inspirativní byla různá zkoumání lineárních transformací, substitucí a permutací a otázky eliminace. Důležité problémy, které dnes řadíme do teorie matic (vlastní čísla, vlastní vektory, kanonické tvary, spektrální teorie atd.), se objevovaly při zkoumání soustav diferenciálních rovnic, a to hlavně v nebeské mechanice.

Vznik teorie matic spadá do období, kdy se rodila algebra struktur. V polovině 19. století se řada matematiků zabývala otázkami rozšiřování číselných oborů, tj. problematikou, která vedla k rozvoji teorie hyperkomplexních čísel, z níž ve 20. století vznikla teorie algeber. Ve stejné době se intenzivně rozvíjel vektorový počet, stále větší roli hrály v matematice permutace, substituce a transformace. Ukázalo se, že aritmetické operace a jejich základní vlastnosti, které byly dosud vnímány pouze v souvislosti s číselnými obory, mají daleko obecnější význam, leží v základech důležitých pojmů, jež se ve druhé polovině 19. století postupně vytvářely. Jedná se o pojmy grupa, okruh, obor integrity, těleso, lineární asociativní algebra a vektorový prostor, tj. o pojmy, na nichž stojí algebra 20. století.

O vzniku a vývoji teorie matic byla již napsána řada prací. Uveďme jen následující:

J. Tvrdá: *Vznik teorie matic* (1968),

J. Tvrdá: *On the Origin of the Theory of Matrices* (1971),

T. Hawkins: *The Theory of Matrices in the 19th Century* (1974),

T. Hawkins: *Cauchy and the Spectral Theory of Matrices* (1975),
T. Hawkins: *Weierstrass and the Theory of Matrices* (1977),
T. Hawkins: *Another Look at Cayley and the Theory of Matrices* (1977),
I. Grattan-Guinness, W. Ledermann: *Matrix theory* (1994).

1. Prehistorie teorie matic

Do prehistorie teorie matic zcela jistě patří čínský algoritmus *Fang čcheng* užívaný k řešení soustav lineárních rovnic s regulární čtvercovou maticí, o němž jsme již pojednali v jedné z předcházejících kapitol. Podstatnou složkou tohoto algoritmu byly úpravy tabulky obsahující koeficienty dané soustavy lineárních rovnic, které byly vykonávány na počítací desce. Viděli jsme, že nešlo o nic jiného než o sloupcové úpravy matice, jež jsou obdobné úpravám, které provádíme při tzv. Gaussově eliminačním algoritmu s řádky rozšířené matice uvažované soustavy rovnic.

Čínskými postupy prováděnými na počítací desce byl v 17. století motivován japonský matematik Takakazu Šinsuke Seki Kōwa (1642–1708), který je patrně autorem algoritmu popisujícího výpočet řešení soustavy rovnic z jejích koeficientů zanesených do tabulky umístěné na počítací desce; ve zmíněném algoritmu lze vidět výpočty determinantů. I tyto početní postupy je možno zcela oprávněně zařadit do prehistorie teorie matic a determinantů.

Zajímavé je, že vznik teorie determinantů (1750) předchází vzniku teorie matic (1858) o více než sto let. Poměrně dlouho trvalo, než byly příslušné prvky, z nichž byl determinant počítán, sestaveny do čtvercového schématu, tj. do matice, a než byla tato matice chápána jako samostatný a plnohodnotný matematický objekt. Rozvíjející se teorie determinantů byla zdrojem řady podnětů, které ke zrodu a vývoji teorie matic přispěly. Inspirativní byly různé metody výpočtu determinantů založené na úpravách řádků a sloupců, věta o násobení determinantů, v níž je skryto násobení matic, věta o reciprokém determinantu, v níž figuruje (až na násobek) inverzní matice apod.

Leonhard Euler

L. Euler (1707–1783) byl jedním z nejvýznamnějších a nejplodnějších matematiků všech dob. V letech 1727 až 1741 pracoval v Petrohradě, potom do roku 1766 v Berlíně, a pak opět v Petrohradě. Zabýval se matematikou, fyzikou, astronomií a nejrůznějšími aplikacemi matematiky.

V práci *Problema algebraicum ab affectiones prorsus singulares memorabile* z roku 1771 (Opera (1) VI., str. 287–315) vyšetřoval „čtverce“, tj. vlastně matice třetího a čtvrtého řádu, v souvislosti s úvahami o magických čtvercích. Studoval – v dnešní terminologii – ortogonální matice, které odpovídají transformacím kartézských souřadnic. Podmínku ortogonality vyjadřoval vypsáním všech podmínek pro skalární součiny řádků matice se sloupci matice transponované.

Carl Friedrich Gauss

Německý matematik, fyzik, geodet a astronom C. F. Gauss (1777–1855) studoval v letech 1795 až 1798 na univerzitě v Göttingen. Přijal zde místo profesora astronomie a ředitele hvězdárny a zastával je až do smrti. Zasáhl takřka do všech oblastí exaktních věd, zabýval se hlavně algebrou, teorií čísel, diferenciální a neeukleidovskou geometrií, geodézií, elektřinou a magnetismem, nebeskou mechanikou a teoretickou astronomií.

Ve svém proslulém díle *Disquisitiones arithmeticae* z roku 1801 dospěl při skládání lineárních transformací kvadratických forem s celočíselnými koeficienty k maticovému násobení.

Ternární kvadratickou formu

$$f(x, y, z) = axx + a'x'x' + a''x''x'' + 2bx'x'' + 2b'xx'' + 2b''xx'$$

reprezentoval symbolem

$$\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix}$$

a přiřadil jí výraz

$$D = abb + a'b'b' + a''b''b'' - aa'a'' - 2bb'b'' \ ;$$

v dnešní řeči jde o záporně vzatý determinant matice

$$M = \begin{pmatrix} a, & b'', & b' \\ b'', & a', & b \\ b', & b, & a'' \end{pmatrix}$$

formy f, tzv. diskriminant. K formě f uvažoval tzv. adjungovanou formu

$$F = \begin{pmatrix} A, & A', & A'' \\ B, & B', & B'' \end{pmatrix} \ ;$$

její maticí je až na znaménko reciproká[1] matice k matici M; je složena ze záporně vzatých algebraických doplňků prvků matice M, tj.

$$A = bb - a'a'' \ , \qquad B = ab - b'b'' \ , \qquad A' = b'b' - aa'' \qquad \text{atd.}$$

C. F. Gauss uvedl, že k formě F je adjungovanou formou forma

$$D \cdot f = \begin{pmatrix} aD, & a'D, & a''D \\ bD, & b'D, & b''D \end{pmatrix} \ .$$

[1] Někdy se též nazývá *adjungovaná*.

Dále využil substituci (s celočíselnými koeficienty)

$$\begin{aligned} x &= \alpha y \;\; + \beta y' + \gamma y'', \\ x' &= \alpha' y \;\, + \beta' y' + \gamma' y'', \\ x'' &= \alpha'' y + \beta'' y' + \gamma'' y'', \end{aligned}$$

které přiřadil čtvercové schéma (S) jejích koeficientů

$$\begin{matrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{matrix}$$

a hodnotu

$$k = \alpha\beta'\gamma'' + \beta\gamma'\alpha'' + \gamma\alpha'\beta'' - \gamma\beta'\alpha'' - \alpha\gamma'\beta'' - \beta\alpha'\gamma'' \ .$$

Touto substitucí dostal z formy f s diskriminantem D formu g s diskriminantem $E = kkD$.

Uvažoval též substituci opačnou (která rovněž převádí formu f ve formu g) a substituci reciprokou se schématem

$$\begin{matrix} \beta'\gamma'' - \beta''\gamma', & \gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha', & \alpha'\beta'' - \alpha''\beta' \\ \beta''\gamma - \beta\gamma'', & \gamma''\alpha - \gamma\alpha'', & \alpha''\beta - \alpha\beta'' \\ \beta\gamma' - \beta'\gamma, & \gamma\alpha' - \gamma'\alpha, & \alpha\beta' - \alpha'\beta \end{matrix} \ ,$$

která převádí formu F ve formu G. Složením výchozí substituce a substituce reciproké dostal substituci popsanou schématem

$$\begin{matrix} k, & 0, & 0 \\ 0, & k, & 0 \\ 0, & 0, & k \end{matrix} \ .$$

Studoval rovněž substituce dané transponovanou maticí.

Skládání obecných substitucí a odpovídajících schémat (tj. násobení matic) popsal takto (Werke I., str. 304–305):

Si forma ternaria f formam ternariam f' implicat, atque haec formam f'': implicabit etiam f ipsam f''. Facillime enim perspicietur, si transeat

f in f' per substitutionem | *f' in f'' per substitutionem*

$$\begin{matrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{matrix} \quad\Bigg|\quad \begin{matrix} \delta, & \varepsilon, & \zeta \\ \delta', & \varepsilon', & \zeta' \\ \delta'', & \varepsilon'', & \zeta'' \end{matrix}$$

f transmutatum iri per substitutionem

$$\begin{matrix} \alpha\delta + \beta\delta' + \gamma\delta'', & \alpha\varepsilon + \beta\varepsilon' + \gamma\varepsilon'', & \alpha\zeta + \beta\zeta' + \gamma\zeta'' \\ \alpha'\delta + \beta'\delta' + \gamma'\delta'', & \alpha'\varepsilon + \beta'\varepsilon' + \gamma'\varepsilon'', & \alpha'\zeta + \beta'\zeta' + \gamma'\zeta'' \\ \alpha''\delta + \beta''\delta' + \gamma''\delta'', & \alpha''\varepsilon + \beta''\varepsilon' + \gamma''\varepsilon'', & \alpha''\zeta + \beta''\zeta' + \gamma''\zeta'' \end{matrix} \ .$$

V následujících paragrafech pracoval C. F. Gauss se substitucemi kvadratických forem, které vyjadřoval maticemi. Teoretické partie prokládal řadou konkrétních příkladů.

Zajímavé je, že nedospěl k reprezentaci kvadratické formy symetrickou maticí (ačkoliv formě přiřadil – až na znaménko – determinant této matice) a nedospěl proto ani k maticovému vyjádření transformace kvadratické formy lineární substitucí s maticí S (přechod od matice M k matici $S^T MS$), ačkoliv složení lineárních substitucí maticově vyjádřil.

Ferdinand Gotthold Max Eisenstein

Německý matematik F. G. Eisenstein (1823–1852) studoval na univerzitě v Göttingen, kde byl žákem C. F. Gausse. Od roku 1847 pracoval na berlínské univerzitě, krátce před smrtí se stal členem berlínské akademie věd. Zabýval se zejména teorií binárních a ternárních kvadratických a kubických forem, teorií čísel a teorií eliptických a abelovských transcendentních funkcí. Jeho jméno nese kritérium nerozložitelnosti polynomu s celočíselnými koeficienty nad tělesem racionálních čísel.

Ve čtyřicátých letech 19. století se v Eisensteinových pojednáních z teorie forem objevily základní myšlenky maticového počtu. F. G. Eisenstein se zabýval lineárními substitucemi, které sčítal, odčítal, skládal a invertoval. Během doby se v jeho pracích termín užívaný pro tyto objekty postupně proměňoval (*lineare System*, *Substitution*, *Substitutions-System*, ...), vyvíjela se i symbolika. V žádném případě však nelze říci, že by F. G. Eisenstein usiloval o vytvoření nějaké nové teorie, teorie substitucí.

Roku 1844 se F. G. Eisenstein v práci *Untersuchungen über die cubischen Formen mit zwei Variabeln* věnoval teorii binárních kubických forem s celočíselnými koeficienty. Pracoval zde mimo jiné s lineárními substitucemi, které reprezentoval čtvercovými schématy sestavenými z jejich koeficientů (Werke I., str. 11):

Wendet man auf die cubische Form

$$f = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$$

die Substitution

$$x = \alpha x' + \beta y' \ , \qquad y = \gamma x' + \delta y' \qquad \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$$

an, und ordnet das Resultat nach den neuen Variabeln x' und y', so erhält man die neue cubische Form

$$f' = a'x'^3 + 3b'x'^2y' + 3c'x'y'^2 + d'y'^3 \ ,$$

deren Coëfficienten a', b', c', d' auf folgende Art durch die alten Coëfficienten a, b, c, d ausgedrückt werden können ...

Die Transformation $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$ *heisst eine eigentliche oder uneigentliche Transformation, je nachdem* $\alpha\delta - \beta\gamma$*, welches durch* ε *bezeichnet sein mag, positiv oder negativ ist. …*
Ist daher

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \varepsilon = \pm 1 \ ,$$

so hat man zugleich eine Transformation von f' *in* f*, nämlich die folgende:*

$$\begin{pmatrix} \delta \ , & -\beta \\ -\gamma \ , & \alpha \end{pmatrix} \ .$$

F. G. Eisenstein se dále věnoval skládání a invertování substitucí a velmi úspěšně využíval symboliku čtvercových schémat.

… Angenommen also, es gingen die Formen f *und* f' *durch die beiden verschiedenen Transformationen*

$$\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix} = t_1 \ , \qquad \begin{pmatrix} \alpha', & \beta' \\ \gamma', & \delta' \end{pmatrix} = t_2$$

in einander über. Man bilde die reciproke Transformation von t_1*, nämlich*

$$t_3 = \begin{pmatrix} \delta, & -\beta \\ -\gamma, & \alpha \end{pmatrix} \ ,$$

durch welche f' *in* f *übergeht, und verbinde sie mit* t_2*, so erhält man die neue Transformation*

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} \alpha'\delta - \beta'\gamma \ , & -\alpha'\beta + \beta'\alpha \\ \gamma'\delta - \delta'\gamma \ , & -\gamma'\beta + \delta'\alpha \end{pmatrix} \ ,$$

durch welche f *in* f*, d. h.* f *in sich selbst übergeht. Auf der andern Seite bilde man die reciproke Transformation von* t_2 *und verbinde sie mit* t_1*, so erhält man wiederum eine Transformation*

$$\tau_2 = \begin{pmatrix} \alpha\delta' - \beta\gamma' \ , & -\alpha\beta' + \beta\alpha' \\ \gamma\delta' - \delta\gamma' \ , & -\gamma\beta' + \delta\alpha' \end{pmatrix} \ ,$$

durch welche f *in sich selbst übergeht. Da sich zu diesen beiden Transformationen* τ_1 *und* τ_2 *noch die evidente*

$$\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 \ , & 0 \\ 0 \ , & 1 \end{pmatrix}$$

gesellt, so würde man also drei verschiedene Transformationen haben, durch welche f *in sich selbst übergehen könnte …* (Werke I., str. 17)

V práci *Allgemeine Untersuchungen über die Formen dritten Grades mit drei Variabeln, welche der Kreistheilung ihre Entstehung verdanken* z let 1844 a 1845 pracoval F. G. Eisenstein s lineárními substitucemi ternárních kubických forem s celočíselnými koeficienty. Tyto substituce chápal jako samostatné objekty, označoval je čísly nebo písmeny, aby se na ně mohl snadno odvolávat. Vzhledem k tomu, že uvažoval substituce ternárních forem, jednalo se o čtvercová schémata sestavená z devíti koeficientů (Werke I., str. 193):

$$\left\{\begin{array}{l} u = \alpha\mathrm{u} + \alpha'\mathrm{v} + \alpha''\mathrm{w}\ , \\ v = \beta\mathrm{u} + \beta'\mathrm{v} + \beta''\mathrm{w}\ , \\ w = \gamma\mathrm{u} + \gamma'\mathrm{v} + \gamma''\mathrm{w}\ , \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lll} \alpha, & \alpha', & \alpha'' \\ \beta, & \beta', & \beta'' \\ \gamma, & \gamma', & \gamma'' \end{array}\right\}.$$

Při skládání substitucí se tato schémata násobí jako matice, objevuje se inverzní substituce, a tedy i inverzní schéma apod. F. G. Eisenstein např. uvedl, že se systém

$$\left\{\begin{array}{ccc} 1\ , & K\ , & L \\ 0\ , & K'\ , & L' \\ 0\ , & K''\ , & L'' \end{array}\right\} = T$$

dá rozložit následujícím způsobem (Werke I., str. 206–207):

$$\left\{\begin{array}{ccc} 1\ , & 0\ , & 0 \\ 0\ , & K'\ , & L' \\ 0\ , & K''\ , & L'' \end{array}\right\} \times \left\{\begin{array}{ccc} 1\ , & K\ , & L \\ 0\ , & 1\ , & 0 \\ 0\ , & 0\ , & 1 \end{array}\right\}.$$

Jedním z problémů, kterými se F. G. Eisenstein zabýval, je otázka, kdy daná forma přechází nějakou substitucí sama v sebe. Tuto formu opět reprezentoval čtvercovým schématem, jak je vidět z následujícího krátkého úryvku:

Wenn die Form F durch die Substitution

$$\left\{\begin{array}{lll} \alpha, & \alpha', & \alpha'' \\ \beta, & \beta', & \beta'' \\ \gamma, & \gamma', & \gamma'' \end{array}\right\}$$

in sich selbst übergeht … (Werke I., str. 235)

S lineárními substitucemi neboli lineárními systémy pracoval F. G. Eisenstein i v šesté části rozsáhlého pojednání *Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen* z roku 1847 (Werke I., str. 377, 387, 439) a v práci *Anhang zu der „Tabelle der reducirten positiven ternären quadratischen Formen, etc.“* z roku 1851 (Werke II., str. 691, 694, 698, 699).

F. G. Eisenstein byl pod výrazným vlivem Gaussových *Disquisitiones arithmeticae.* Stejně jako on vyjadřoval lineární substituce čtvercovými schématy a stejným způsobem zapisoval i kvadratické formy.

Roku 1844 označil kubickou binární formu

$$f = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$$

čtveřicí jejích koeficientů ve tvaru $f = (a, b, c, d)$ (Werke I., str. 10). Ve stejném roce v práci *Transformations remarquables de quelques séries* zapisoval kvadratickou formu (Werke I., str. 39)

$$f = ax^2 + a'x'^2 + a''x''^2 + 2bx'x'' + 2b'xx'' + 2b''xx'$$

dvouřádkovým schématem

$$f = \begin{pmatrix} a\,, & a'\,, & a'' \\ b\,, & b'\,, & b'' \end{pmatrix}$$

a tohoto označení se ve svých dalších pracích držel. V článku *Neue Theoreme der höheren Arithmetik* z roku 1847 však poznamenal, že *determinant* (tj. diskriminant) takovéto formy je determinantem systému (Werke I., str. 483–484)

$$\begin{pmatrix} a\,, & b''\,, & b' \\ b''\,, & a'\,, & b \\ b'\,, & b\,, & a'' \end{pmatrix}\,.$$

Této matici dnes říkáme matice formy f.

V práci *Über die Vergleichung von solchen ternären quadratischen Formen, welche verschiedene Determinanten haben* z roku 1852 zkoumal F. G. Eisenstein mimo jiné lineární substituce kvadratických forem. Chápal je jako plnohodnotné objekty, označoval je písmeny, skládal je atd. Čtvercová schémata utvořená z koeficientů uvažovaných substitucí uzavíral kulatými závorkami, stejně jako pozdější matice.

Charles Hermite

Francouzský matematik Ch. Hermite (1822–1901) působil od roku 1848 na École Polytechnique, v letech 1862 až 1869 na École Normale Supérieure v Paříži a od roku 1869 na Sorbonně. Věnoval se zejména matematické analýze, algebře a teorii čísel.

V krátké práci *Remarque sur un théorème de M. Cauchy* z roku 1855 použil při úvahách o reálnosti vlastních čísel hermitovské matice čtvercové schéma prvků (Oeuvres I., str. 479):

$$\Theta = \left\{ \begin{array}{llll} a_{1,1}-\theta & a_{2,1} & \ldots & a_{n,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2}-\theta & \ldots & a_{n,2} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & \ldots & a_{n,3} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \ldots & a_{n,n}-\theta \end{array} \right\}\,.$$

2. Zrod pojmu a termínu „matice“ v letech 1841 až 1855

Pojem matice i příslušný termín se postupně rodil v letech 1841 až 1855 v pracích anglických matematiků A. Cayleyho a J. J. Sylvestera. V následujících odstavcích přiblížíme nejdůležitější pasáže z jejich prací.

Arthur Cayley a James Joseph Sylvester

Anglický matematik A. Cayley (1821–1895) studoval na Trinity College v Cambridge. Po ukončení studií a krátkém pedagogickém působení se v Londýně živil jako právník, advokát a notář. Již v době vysokoškolských studií ho zaujala matematika, které se po celý život intenzivně věnoval, zpočátku však jako amatér. Teprve roku 1863 se stal profesorem matematiky na univerzitě v Cambridge (*Sadlerian Chair for Mathematics*). Pracoval především v algebraické geometrii, projektivní geometrii a algebře, ale i v oblasti diferenciálních rovnic, eliptických funkcí, sférické astronomii a astrofyzice. Jeho sebrané spisy nazvané *The Collected Mathematical Papers* mají (bez dodatků) třináct svazků.

J. J. Sylvester (1814–1897) absolvoval svá vysokoškolská studia v Londýně a na St. John's College v Cambridge. Krátce pracoval jako advokát, od roku 1838 působil v Londýně jako profesor přírodní filozofie, v letech 1841 až 1843 jako profesor matematiky ve Virginii v USA. Po návratu do Londýna se živil jako pojišťovací matematik a advokát.

V letech 1855 až 1870 byl profesorem matematiky na vojenské akademii ve Woolwich, v té době redigoval časopis *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, o jehož vznik se zasloužil. V letech 1877 až 1884 působil na Johns Hopkins University v Baltimore v USA, jeho zásluhy o rozvoj americké matematiky jsou velké; roku 1878 založil časopis *American Journal of Mathematics*, který vychází dodnes. Roku 1884 se stal profesorem matematiky v Oxfordu (*Savilian Chair of Geometry*), o deset let později byl penzionován. Jeho nejdůležitější práce jsou z algebry (matice, kvadratické formy, kanonické tvary), teorie čísel (elementární dělitelé kvadratických forem), z teorie pravděpodobnosti, mechaniky a matematické fyziky.

J. J. Sylvester byl rovněž významným tvůrcem matematické symboliky a terminologie. Byl proslulý svým vtipem, skládal básně, kolovaly o něm nejrůznější, pravdivé i nepravdivé historky. Je autorem spisu *The Laws of Verse* (1870) pojednávajícím o zákonech verše.

Roku 1850 se Arthur Cayley a James Joseph Sylvester poznali a spřátelili.

Cayleyovy práce z let 1841 až 1845

Roku 1841 zavedl A. Cayley v práci *On a theorem in the geometry of position* dnešní symbol determinantu, tj. čtvercové schéma prvků sevřené dvěma svislými rovnými čarami (Papers I., str. 1). Tento symbol úspěšně užíváme dodnes.

Let the symbols

$$|\,\alpha\,|\ ,\qquad \begin{vmatrix} \alpha, & \beta \\ \alpha', & \beta' \end{vmatrix}\ ,\qquad \begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{vmatrix}\ ,\quad \&c.$$

denote the quantities

$$\alpha,\ \alpha\beta' - \alpha'\beta,\ \alpha\beta'\gamma'' - \alpha\beta''\gamma' + \alpha'\beta''\gamma - \alpha'\beta\gamma'' + \alpha''\beta\gamma' - \alpha''\beta'\gamma,\ \&c.$$

Pro determinanty druhého a třetího řádu uvedl v této nové symbolice rozvoj podle prvního sloupce (lze jej chápat i jako rekurentní definici determinantu) a s takto zapisovanými determinanty dále pracoval. Svoji novou symboliku využil při zkoumání vztahů mezi vzdálenostmi pěti bodů v prostoru, mezi vzdálenostmi čtyř bodů v rovině a tří bodů na přímce, resp. mezi vzdálenostmi pěti bodů na sféře a vzdálenostmi čtyř bodů na kružnici.

Roku 1843 uvažoval A. Cayley v článku *Chapters in the analytical geometry of (n) dimensions* takovéto obdélníkové schéma prvků o $q+1$ řádcích a n sloupcích ($q < n$):

$$\begin{matrix} x_1, & x_2 & \dots & x_n \\ A_1, & A_2 & \dots & A_n \\ \vdots & & & \vdots \\ K_1, & K_2 & \dots & K_n \end{matrix}\ .$$

Tvořil z něj determinanty řádu $q+1$ a pro všechny takto vzniklé determinanty zavedl označení, které dnes často představuje matici (Papers I., str. 55).

The system of determinants so obtained will be represented by the notation

$$\left\| \begin{matrix} x_1, & x_2 & \dots & x_n \\ A_1, & A_2 & \dots & A_n \\ \vdots & & & \vdots \\ K_1, & K_2 & \dots & K_n \end{matrix} \right\|$$

and the system of equations, obtained by equating each of these determinants to zero, by the notation

$$\left\| \begin{matrix} x_1, & x_2 & \dots & x_n \\ A_1, & A_2 & \dots & A_n \\ \vdots & & & \vdots \\ K_1, & K_2 & \dots & K_n \end{matrix} \right\| = 0\ .$$

Ve stejném roce publikoval A. Cayley delší práci *On the theory of determinants*, v níž využíval symboliku, kterou pro determinant zavedl roku 1841. Věta o násobení determinantů se zde objevila v podobě, kdy se řádky jedné matice skalárně násobí řádky druhé matice, stejně jako ve výše zmíněné práci z roku 1841.

Roku 1845 A. Cayley v práci *On the theory of linear transformations* zopakoval definici symbolu $||\dots||$, který zavedl roku 1843; při násobení matic násobil sloupce první matice sloupci druhé matice.[2]

[2] Uvědomme si, že z hlediska teorie determinantů je zcela lhostejné, zda skalárně násobíme řádky první matice s řádky druhé matice, nebo řádky první matice se sloupci druhé matice apod. Ve větě o násobení determinantů to nehraje žádnou roli, protože determinanty navzájem transponovaných matic se rovnají. Jakmile však chápeme matice jako substituce, vynutí si skládání substitucí současnou definici násobení matic.

Sylvesterovy práce z let 1850 až 1853

J. J. Sylvester užil roku 1850 v práci *On the intersections, contacts, and other correlations of two conics expressed by indeterminate coordinates* Cayleyův čtvercový zápis determinantu. Ve stejném roce se tento zápis objevil i v Sylvesterově článku *On a new class of theorems in elimination between quadratic functions* a často se objevoval i v jeho dalších pracích.[3]

Roku 1850 J. J. Sylvester zavedl pojem (obdélníkové) matice a termín *matrix* v článku *Additions to the articles "On a new class of theorems", and "On Pascal's theorem"*. Věnoval se zejména problematice subdeterminantů takovéto matice a otázkám jejich nulovosti a nenulovosti. Pojem *hodnosti* (resp. *nulity*) matice, který je možno pomocí nulovosti a nenulovosti subdeterminantů jednotlivých řádů vyslovit, mu však byl v té době ještě hodně vzdálen:

For this purpose we must commence, not with a square, but with an oblong arrangement of terms consisting, suppose, of m lines and n columns. This will not in itself represent a determinant, but is, as it were, a Matrix out of which we may form various systems of determinants by fixing upon a number p, and selecting at will p lines and p columns, the squares corresponding to which may be termed determinants of the pth order. (Papers I., str. 150)

O rok později J. J. Sylvester v článku *On the relation between the minor determinants of linearly equivalent quadratic functions* uvedl (hned na první stránce) čtvercové schéma prvků opatřených dvěma indexy, dále však užíval označení determinantu (*in a compact form*) velmi blízké symbolice Vandermondeově. Napsal zde toto (viz Papers I., str. 247):

I have in previous papers defined a "Matrix" as a rectangular array of terms, out of which different systems of determinants may be engendered, as from the womb of a common parent; … The condensed representation of any such Matrix, according to my improved Vandermondian notation, wil be

$$\left\{ \begin{matrix} a_1, & a_2 & \dots & a_n \\ \alpha_1, & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{matrix} \right\} .$$

Cayleyův zápis determinantu však J. J. Sylvester hojně využíval v řadě svých prací a patrně tak výrazně přispěl k jeho rozšíření.

V rozsáhlém Sylvesterově článku *On a theory of the syzygetic relations of two rational integral functions, comprising an application to the theory of Sturm's functions, and that of the greatest algebraical common measure* z roku 1853 je pojem matice užíván na řadě míst; je to čtvercové schéma prvků bez jakýchkoli závorek. V závěru tohoto pojednání je připojen slovníček pojmů – *Glossary of new or unusual terms, or of terms used in a new or unusual sense, in the preceding memoir*. J. J. Sylvester v něm vysvětlil mimo jiné pojem matice,

[3] Poznamenejme, že čtvercové schéma prvků bez jakéhokoli ohraničení závorkami užil J. J. Sylvester již roku 1840 v práci *A method of determining by mere inspection the derivatives from two equations of any degree.*

subdeterminantu atd. Pojem matice uvedl do úzké souvislosti s pojmem lineární substituce:

Matrix. – A square or rectangular arrangement of terms in lines and columns.

Minor Determinant. – Any determinant retained represented by a square group of terms arbitrarily chosen out of a matrix is a minor determinant thereto. The simple terms of the matrix are the last minors, and of course if the matrix is a square, it will itself in its totality represent a single complete determinant.

Substitution (linear, similar or contrary). – A linear substitution is said to be impressed upon a system of variables when each variable is replaced by a linear conjunctive of all the variables. The matrix formed by the coefficients of substitution arranged in regular order is called the Matrix of Substitution, and is of course a square. When two substitutions (impressed on two systems of variables) have the same matrix, they are said to be similar, and contrary when their matrices are contrary, that is mutually inverse to each other. … (Papers I., str. 583–585)

V letech 1851 až 1853 se pojem matice objevil v několika dalších Sylvesterových pracích. Nehraje tam však důležitou roli, je to jen pomocný pojem, který se někdy hodí, zejména při vyšetřování vlastností subdeterminantů.[4]

Cayleyova práce z roku 1855

A. Cayley užil roku 1855 v práci *Remarques sur la notation des fonctions algébriques* pro matici stejné značení, jako roku 1841 pro determinant, tj. rovné svislé čáry ohraničující čtvercové schéma prvků, a termín *matrice.* Svůj článek začal těmito slovy (Papers II., str. 185–186):

Je me sers de la notation

$$\begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma, & \dots \\ \alpha', & \beta', & \gamma', & \dots \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'', & \dots \\ \vdots & & & \end{vmatrix}$$

pour représenter ce que j'appelle une matrice; savoir un système de quantités rangées en forme de carré, mais d'ailleurs tout à fait indépendantes (je ne parle pas ici des matrices rectangulaires). Cette notation me parait très commode pour la théorie des équations linéaires; j'écris par example

[4] *An enumeration of the contacts of lines and surfaces of the second order* (1851), *On Staudt's theorems concerning the contents of polygons and polyhedrons, with a note on a new and resembling class of theorems* (1852), *On a theorem concerning the combination of determinants* (1853), *On the conditions necessary and sufficient to be satisfied in order that a function of any number of variables may be linearly equivalent to a function of any less number of variables* (1853), *On a remarkable modification of Sturm's theorem* (1853).

$$(\xi,\eta,\zeta,\dots) = (\begin{vmatrix} \alpha\,, & \beta\,, & \gamma\,, & \dots \\ \alpha', & \beta', & \gamma', & \dots \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'', & \dots \\ \vdots & & & \end{vmatrix})(x,y,z,\dots)$$

pour représenter le système des équations

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha x + \beta y + \gamma z \dots, \\ \eta &= \alpha' x + \beta' y + \gamma' z \dots, \\ \zeta &= \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z \dots, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Soustavou rovnic zde mínil spíše lineární závislost veličin $\xi,\eta,\zeta,\dots$ na veličinách $x,y,z,\dots$, jak vyplývá ihned z dalšího textu:

On obtient par là l'équation:

$$(x,y,z,\dots) = (\begin{vmatrix} \alpha\,, & \beta\,, & \gamma\,, & \dots \\ \alpha', & \beta', & \gamma', & \dots \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'', & \dots \\ \vdots & & & \end{vmatrix}^{-1})(\xi,\eta,\zeta,\dots),$$

qui représente le système d'équations qui donne $x,y,z,\dots$ *en termes de* $\xi,\eta,\zeta,\dots$, *et on se trouve ainsi conduit à la notation*

$$\begin{vmatrix} \alpha\,, & \beta\,, & \gamma\,, & \dots \\ \alpha', & \beta', & \gamma', & \dots \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'', & \dots \\ \vdots & & & \end{vmatrix}^{-1}$$

de la matrice inverse. Les termes de cette matrice sont des fractions, ayant pour dénominateur commun le déterminant formé avec les termes de la matrice originale; les numérateurs sont les déterminants mineurs formés avec les termes de cette même matrice en supprimant l'une quelconque des lignes et l'une quelconque des colonnes.

Dále se A. Cayley věnoval skládání lineárních transformací, a došel tak k násobení matic. Oproti svým předcházejícím článkům zde již násobil řádky první matice se sloupci druhé matice, tj. tak, jak dnes násobíme matice my. Dobře si uvědomil význam matic, hovořil již o teorii matic, která by podle jeho názoru měla předcházet teorii determinantů (Papers II., str. 187):

... Il faut faire attention, dans la composition des matrices, de combier les lignes de la matrice à gauche avec les colonnes de la matrice à droide, pour former les lignes de la matrice composée. Il y aurait bien des choses à dire sur cette théorie de matrices, laquelle doit, il me semble, précéder la théorie de Déterminants.

V závěru článku využil A. Cayley matice k reprezentaci forem. Kvadratickou formu několika proměnných zapsanou výrazem

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy \ \ldots \ ,$$

vyjádřil ve tvaru

$$(\left|\begin{matrix} a, & h, & g, & \ldots \\ h, & b, & f, & \ldots \\ g, & f, & c, & \ldots \\ \vdots & & & \end{matrix}\right|)(x, y, z, \ldots)^2 \ ;$$

tento zápis ho patrně inspiroval k úvaze o obecnějších maticích (viz nejasná poznámka v jeho práci *A memoir on the theory of matrices* z roku 1858), jak o tom svědčí následující odstavec (Papers II., str. 187):

Je remarque qu'en général je représente une fonction rationnelle et intégrale, homogène et des degrés m, m', &c., par rapport aux indéterminées x, y, &c., x', y', &c., de la manière suivante:

$$(\ \diamondsuit\ )(x, y, \ldots)^m (x', y', \ldots)^{m'} \ \ldots \ .$$

Une fonction rationnelle et intégrale, homogène et du degré m par rapport aux deux indéterminées x,y sera donc représentée par

$$(\ \diamondsuit\ )(x, y)^m \ .$$

Roku 1855 publikoval A. Cayley další dva články, v nichž se objevily matice. Jedná se o práce *Sur la transformation d'une fonction quadratique en elle-même par des substitutions linéaires* a *Recherches sur les matrices dont les termes sont des fonctions linéaires d'une seule indéterminée.* Byly otištěny, stejně jako předchozí Cayleyova stať *Remarques sur la notation des fonctions algébriques*, v časopise Journal für die reine und angewandte Mathematik. Z hlediska teorie matic nepřinesly mnoho nového. Znovu však připomněly pojem matice, maticové vyjádření kvadratické formy, inverzní matici apod.

3. Cayleyův A memoir on the theory of matrices z roku 1858

Pojem matice

Ve své slavné práci z roku 1858 nazvané *A memoir on the theory of matrices* charakterizoval A. Cayley matici jako … *a set of quantities arranged in the form of a square* … (Papers II., str. 475), zavedl termín *matrix* (mn. č. *matrices*) a téměř současný symbol – kulaté závorky u prvního řádku, které pokračují svislými čarami u řádků ostatních.

Zavedení nového pojmu motivoval problematikou soustav lineárních rovnic; nehomogenní soustavu lineárních rovnic zapsal „maticově“ – matice vynásobená vektorem neznámých dává vektor pravých stran.

Matice prezentoval jako nové, samostatné objekty, s nimiž lze provádět aritmetické operace (*… matrices … comport themselves as single quantities; they may be added, multiplied or compounded together …* – Papers II., str. 475–476), které splňují aritmetické zákony. Často je označoval velkými tiskacími písmeny latinské abecedy.

Prvky matic nejsou v práci specifikovány; nikde není řečeno, zda se jedná o racionální, reálná či komplexní čísla nebo o nějaké jiné veličiny. Předpokládá se však, že je lze sčítat a násobit a že tyto dvě operace mají „rozumné vlastnosti“. Definice maticových operací totiž spočívají na operacích s výchozími veličinami a vlastnosti maticových operací se odvozují od vlastností operací s výchozími veličinami.

Definice a tvrzení podal A. Cayley většinou jen pro matice druhého nebo třetího řádu, zdůraznil však jejich obecnou platnost:

… the matrices … will in general be of the order 3, but it is to be understood that the definitions, reasonings, and conclusions apply to matrices of any degree whatever. (Papers II., str. 476)

Velká část práce se týká čtvercových matic (*square matrix*). Teprve na necelých třech posledních stránkách se A. Cayley věnoval maticím obdélníkovým; tuto partii je však možno považovat za jakýsi nepříliš významný dodatek, který žádné závažné výsledky nepřináší.

Zajímavé je, že A. Cayley hned v první větě své práce naznačil, že by matice bylo možno chápat obecněji, nic bližšího zde však neuvedl (snad to souvisí s jeho zápisem forem v článku *Remarques sur la notation des fonctions algébriques* z roku 1855):

The term matrix might be used in a more general sense, but in the present memoir I consider only square and rectangular matrices, and the term matrix used without qualification is to be understood as meaning a square matrix … (Papers II., str. 475)

Maticové operace

A. Cayley zavedl nulovou a jednotkovou matici 0, 1 (*matrix zero, matrix unity*). Definoval sčítání matic, tuto operaci motivoval sčítáním lineárních substitucí; uvedl její základní vlastnosti (komutativita, asociativita, existence opačné matice). Rovněž definoval násobení matice skalárem a ukázal vazbu zavedených operací:

$$m(L + M) = mL + mM \ .$$

Násobení matic motivoval skládáním lineárních substitucí. Uvedl, že násobení matic je nekomutativní, zmínil násobení nulovou a jednotkovou maticí a platnost asociativity ($L \cdot MN = LM \cdot N = LMN$), důkaz však neuvedl.

Vzápětí definoval mocninu matice, uvedl rovnost $L^p \cdot L^q = L^{p+q}$ a poznamenal, že mocniny téže matice spolu komutují. Definici mocniny pak rozšířil i pro nulový a záporný exponent (pokud existuje inverzní matice – *inverse or reciprocal matrix*).

Napsal, že je obecně známo (*It is well known ...*), že

$$\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\nabla} \begin{pmatrix} \partial_a \nabla, & \partial_{a'} \nabla, & \partial_{a''} \nabla \\ \partial_b \nabla, & \partial_{b'} \nabla, & \partial_{b''} \nabla \\ \partial_c \nabla, & \partial_{c'} \nabla, & \partial_{c''} \nabla \end{pmatrix}$$

a poznamenal, že ... *the notion of the inverse or reciprocal matrix fails altogether when the determinant vanishes: the matrix is in this case said to be indeterminate,* ... (Papers II., str. 481)

Cayleyovo označení algebraických doplňků pomocí symbolu pro parciální derivaci je vtipné. Např. algebraický doplněk k prvku a, tj. $b'c'' - b''c'$, totiž získáme jako parciální derivaci determinantu

$$\nabla = ab'c'' + a'b''c + a''bc' - a''b'c - ab''c' - a'bc''$$

uvažované matice podle a.

Je trochu překvapivé, že se A. Cayley v práci, která zavádí matice a „zakládá“ teorii matic, zmínil o dobré znalosti inverzní matice. Tato poznámka se patrně vztahuje k tehdy obecně známým poznatkům o reciprokém determinantu. Připomeňme ještě, že o inverzní matici A. Cayley psal již ve výše zmíněné práci z roku 1855.

A. Cayley rovněž poznamenal (v dnešní řeči), že okruh čtvercových matic daného řádu má netriviální dělitele nuly, kterými mohou být jen singulární matice:

... *the product of two matrices may be zero, without either of the factors being zero, if only the matrices are one or both of them indeterminate.* (Papers II., str. 481)

Cayleyova-Hamiltonova věta

Nejzávažnějším výsledkem Cayleyovy práce *A memoir on the theory of matrices* z roku 1858 je známá Cayleyova-Hamiltonova věta, kterou dnes vyslovujeme v několika ekvivalentních formulacích:

– Každá matice je kořenem svého charakteristického polynomu.
– Charakteristický polynom matice M je jejím anulujícím polynomem.
– Charakteristický polynom matice M je násobkem jejího minimálního polynomu.

A. Cayley si byl vědom významu této věty, neboť ji charakterizoval slovy *general theorem*, resp. *remarkable theorem.* Uvedl ji v této formulaci:

… the determinant, having for its matrix a given matrix less the same matrix considered as a single quantity involving the matrix unity, is equal to zero. (Papers II., str. 482)

Tento fakt zapsal symbolicky ve tvaru

$$\mathrm{Det.}(\widetilde{1} \cdot \mathrm{M} - \widetilde{\mathrm{M}} \cdot 1) = 0,$$

z něhož je vidět, jak velký měl smysl pro symetrii.

Důkaz této důležité věty však A. Cayley ve svém memoáru provedl pouze pro $n = 2$. Pro matici

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

vypočetl takovýmto „podivným“ způsobem determinant

$$\begin{vmatrix} a - M & b \\ c & d - M \end{vmatrix} = M^2 - (a+d)M^1 + (ad - bc)M^0 = \cdots = 0 \ .$$

Zkráceně pak provedl výpočet pro $n = 3$ a připojil, že nepociťuje potřebu podat obecný důkaz:

… I have not thought it necessary to undertake the labour of a formal proof of the theorem in the general case of a matrix of any degree. (Papers II., str. 483)

Jak již bylo řečeno, A. Cayley si uvědomil hloubku Cayleyovy-Hamiltonovy věty.[5] Svědčí o tom i následující citát:

… every rational and integral function, or indeed every rational function of a matrix, can be expressed as a rational and integral function of an order at most equal to that of the matrix, less unity. (Papers II., str. 483)

Užití tohoto teorému ukázal A. Cayley při výpočtu druhé odmocniny matice. K matici $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ hledal matici L, pro niž je $L^2 = M$. Při výpočtu použil Cayleyovu-Hamiltonovu větu a došel k výsledku

$$L = \begin{pmatrix} \frac{a+Y}{X} & \frac{b}{X} \\ \frac{c}{X} & \frac{d+Y}{X} \end{pmatrix} \ ,$$

kde $Y = \sqrt{ad - bc}$ a $X = \sqrt{a + d + 2Y}$. Volbou znamének odmocnin získal čtyři řešení, tj. $\sqrt{M}$ dává čtyři hodnoty. Počítal rovněž matici L, pro kterou je $L^2 = M^2$.

Pro výše uvedenou matici M druhého řádu vypočetl s pomocí Cayleyovy-Hamiltonovy věty druhou a třetí mocninu matice M ve tvaru

$$M^2 = (a+d)M - (ad - bc) \ ,$$

[5] Hamiltonovo jméno věta nese proto, že W. R. Hamilton dokázal obdobné tvrzení pro kvaterniony.

$$M^3 = \left[(a+d)^2 - (ad-bc)\right]M - (a+d)(ad-bc) \ ;$$

z této úvahy vyplývá, že každá mocnina matice M je lineární kombinací matice M a matice jednotkové. Obdobně A. Cayley vyjádřil k matici M i matici M^{-1} a zmínil se i o záporných mocninách:

... and the other negative powers of M can then be obtained by successive multiplications with M^{-1}. (Papers II., str. 492)

Další výsledky

A. Cayley řešil ve výše uvedeném memoáru o teorii matic některé další problémy.

K dané matici M druhého řádu hledal všechny matice L, které s ní komutují ($LM = ML$); matice M, L v takovémto případě nazýval *convertible.* V komentáři k tomuto problému, jenž lze převést na řešení homogenní soustavy čtyř lineárních rovnic o čtyřech neznámých, nacházíme zajímavý postřeh:

... these equations cannot be all independent, for it is clear that if L be any rational and integral function of M ..., then L will be convertible with M ... (Papers II., str. 488)

Výsledkem jsou všechny matice tvaru $L = \alpha M + \beta$.

K dané matici M hledal dále matici L, pro niž je $LM = -ML$; matice M a L nazval v tomto případě *skew convertible.* Došel k podmínce

$$(a+d)^2(ad-bc) = 0 \ .$$

Pokud je matice M regulární, tj. $ad - bc \neq 0$, vycházejí vztahy

$$a + d = 0 \ , \quad a' + d' = 0 \ , \quad aa' + bc' + b'c + dd' = 0 \ .$$

Transponování matic (*transposition*) zavedl A. Cayley opět pro matice druhého řádu a vyjádřil základní vlastnosti této operace v takovémto tvaru:

$$(\mathrm{tr.}\, M)^p = \mathrm{tr.}\,(M^p) \ , \quad (\mathrm{tr.}\, M)^{-1} = \mathrm{tr.}\,(M^{-1}) \ , \quad \mathrm{tr.}\,(LM) = \mathrm{tr.}\, M \,.\, \mathrm{tr.}\, L \ \ldots$$

A. Cayley rovněž definoval symetrické a antisymetrické matice (*symmetrical, skew symmetrical*) a napsal, že každá matice se dá vyjádřit jako součet symetrické a antisymetrické matice (Papers II., str. 490):

... any matrix whatever may be expressed as the sum of a symmetrical matrix, and a skew symmetrical matrix; thus the form

$$\begin{pmatrix} a & h+\nu & g-\mu \\ h-\nu & b & f+\lambda \\ g+\mu & f-\lambda & c \end{pmatrix} \ .$$

Ukázal, že matice $M.\mathrm{tr.}\, M$ je symetrická, že M a $\mathrm{tr.}\, M$ nejsou záměnné, počítal matice $\mathrm{tr.}\, M \,.\, M \,.\, \mathrm{tr.}\, M$ a $\mathrm{tr.}\, M \,.\, M \,.\, \mathrm{tr.}\, M \,.\, M$ atd.

A. Cayley studoval (v dnešní terminologii) charakteristický polynom matice M, její vlastní čísla apod.; podrobněji se věnoval případu, kdy pro matici M platí vztah $M^n - E = 0$ (E je jednotková matice).

Reprezentace kvaternionů

Často se uvádí, že A. Cayley sestrojil v práci *A memoir on the theory of matrices* z roku 1858 první reprezentaci jedné algebraické struktury ve struktuře druhé. Tato informace se vztahuje k následujícímu krátkému odstavci jeho práce, k němuž již žádný další komentář není:

It may be noticed in passing, that if L, M are skew convertible matrices of the order 2, and if these matrices are also such that $L^2 = -1$, $M^2 = -1$, *then putting* $N = LM = -ML$, *we obtain*

$$\begin{array}{lll} L^2 = -1\ , & M^2 = -1\ , & N^2 = -1\ , \\ L = MN = -NM\ , & M = NL = -LN\ , & N = LM = -ML\ , \end{array}$$

which is a system of relations precisely similar to that in the theory of quaternions. (Papers II., str. 491)

Položme

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\ , \qquad M = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\ , \qquad N = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\ .$$

Přiřadíme-li každému kvaternionu $a + bi + cj + dk$ lineární kombinaci komplexních matic $aE + bL + cM + dN$, přiřadíme tomuto kvaternionu komplexní matici

$$\begin{pmatrix} a + di & b + ci \\ -b + ci & a - di \end{pmatrix}\ .$$

Toto zobrazení je izomorfismem tělesa kvaternionů na množinu (těleso) komplexních matic příslušného tvaru, tj. jedná se o bijekci, která zachovává binární sčítání, binární násobení, násobení skalárem, a navíc je norma kvaternionu rovna determinantu odpovídající matice.

Obdélníkové matice

V závěru svého memoáru o teorii matic zavedl A. Cayley obdélníkové matice, rozlišil matice „široké“ (*broad*) a „hluboké“ (*deep*). Velmi stručně uvedl, že je možno uvažovat nulovou matici, ale nikoli matici jednotkovou. Sčítat a odčítat lze jen matice stejného typu, je možno násobit matice skalárem, ale nelze libovolné dvě matice násobit. Přesně popsal, kdy to možné je, a uvedl příklady (matice typu 2×3 a 3×4, resp. typu 3×2 a 2×4). Zdůraznil, že pro obdélníkové matice nemají rozumný smysl tyto pojmy: záměnnost matic, inverzní matice, mocnina matice, symetrická matice, antisymetrická matice.

Není vyloučeno, že hlavním důvodem zavedení obdélníkových matic byla možnost chápat vektor, tj. n-tici prvků, jako matici typu $1 \times n$; pak lze zapsat soustavu n lineárních rovnic o m neznámých pomocí součinu matice typu $n \times m$ a matice typu $m \times 1$ apod. A. Cayley totiž mimo jiné ukázal, jak lze vyjádřit skalární součin vektorů jako součin dvou matic (Papers II., str. 496):

$$\big(a,\ b,\ c\big)\mathrm{tr.}\big(a',\ b',\ c'\big)\ .$$

4. Další Cayleyovy práce o maticích

Ve stejném roce, v němž vyšel Cayleyův memoár o teorii matic, byla publikována i jeho práce *A memoir on the automorphic linear transformation of a bipartite quadric function*.

A. Cayley v ní mimo jiné prezentoval maticové vyjádření bilineární formy a zabýval se jeho transformací danou nějakou lineární transformací. Tento problém se v dnešní řeči popíše poměrně jednoduše: jestliže je A matice bilineární formy na prostoru V vzhledem ke dvojici bází K, K', potom je $B^T AC$ matice této formy vzhledem k bázím L a L', kde B a C jsou matice přechodu mezi bázemi K, L, resp. K' a L'.

A. Cayley řešil tento problém pro ternární bilineární formy a poznamenal:

For convenience, the number of variables is in the analytical formulae taken to be 3, but it will be at once obvious that the formulae apply to any number of variables whatever. (Papers II., str. 497)

A. Cayley propagoval matice i v anglické encyklopedii. V pátém svazku *English Cyclopaedia* z roku 1860 vysvětlil v hesle nazvaném *Mathematics, recent terminology in* řadu pojmů a termínů, které se v jeho době začaly v matematice užívat (grupa, determinant, matice, rezultant, invariant, kovariant, lineární transformace atd.). V úvodním odstavci napsal (Papers IV., str. 594):

… in a system of simple equations, if the coefficients arranged in the natural square order are considered apart by themselves, this leads to the theory of matrices, a theory which indeed might have preceded that of determinants; the matrix, is, so to speak, the matter of a determinant …

Heslo *Matrix* začíná takto (Papers IV., str. 601):

The term might be used to denote any arrangement of terms, but in a restricted sense it denotes a square or rectangular arrangement of terms, and it is thus employed in the theory of determinants.

Zavedení tohoto pojmu motivoval problematikou soustav lineárních rovnic a užitím inverzní matice pro řešení soustavy s regulární maticí; krátce se zmínil o operacích s maticemi a ukázal maticový zápis kvadratické formy.

Po roce 1860 se A. Cayley již maticím příliš nevěnoval. Roku 1866 publikoval *A supplementary memoir on the theory of matrices*, který však nové myšlenky nepřinesl.

V práci *On the matrix* $\binom{a,\ b}{c,\ d}$, *and in connexion therewith the function* $\frac{ax+b}{cx+d}$ z roku 1880 rozvíjel vztah mezi lineárními substitucemi a maticemi druhého řádu. Využil Cayleyovu-Hamiltonovu větu a ukázal, že n-tá mocnina matice M je lineární kombinací matice M a jednotkové matice ($M^n =$ *a linear function of* M) a snažil se ji vyjádřit pomocí vlastních čísel α a β a jejich poměru λ (Papers XI., 252–257).

Roku 1885 řešil ve dvou článcích rovnici $qQ - Qq' = 0$, kde q a q' jsou dané kvaterniony, resp. matice, a Q je neznámý kvaternion, resp. neznámá matice. Současně poukázal na blízký vztah matic a kvaternionů: *… the question for matrices is equivalent to that for quaternions.* (Papers XII., str. 311)

V rozsáhlé práci *On multiple algebra* z roku 1887 spadající do teorie hyperkomplexních čísel se na několika místech A. Cayley zmínil i o maticích, které však značil stejně jako determinanty:

The separate terms $x, y, \ldots,$ *whatever be their number, may always without loss of generality be arranged in a line; but it may be convenient to arrange them in a different form, for instance, in that of a square; we may have for instance symbols* $\begin{vmatrix} x, & y \\ z, & w \end{vmatrix}$ *with the laws of combination*

$$\begin{vmatrix} x, & y \\ z, & w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x', & y' \\ z', & w' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x + x', & y + y' \\ z + z', & w + w' \end{vmatrix} ,$$

$$\begin{vmatrix} x, & y \\ z, & w \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x', & y' \\ z', & w' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} xx' + yz', & xy' + yw' \\ zx' + wz', & zy' + ww' \end{vmatrix} ,$$

where observe that the multiplication is not commutative. …

I call to mind that a binary matrix may be regarded as a quaternion; viz. writing

$$\begin{vmatrix} a, & b \\ c, & d \end{vmatrix} = (a + d) - \lambda(a - d)i + (b - c)j - \lambda(b + c)k ,$$

where i, j, k *are the quaternion imaginaries, and* λ *is written to denote the* $i = \sqrt{(-1)}$ *of ordinary analysis, then we at once deduce the equation … for the product of two matrices.* (Papers XII., str. 462, 479)

V krátké poznámce *Note on a theorem in matrices* z roku 1891 A. Cayley studoval reálné symetrické matice, které mají dvojnásobné nulové vlastní číslo.

5. Šedesátá léta 19. století

Charles Lutwidge Dodgson

Některé maticové úvahy rozvíjel i C. L. Dodgson (Lewis Carroll, 1832–1898) v knize *Elementary treatise on determinants …* z roku 1867. Ve druhé kapitole nazvané *Analysis of determinants* začal s definicí *bloků.*

If mn quantities be so placed as to form m rows and n columns: they are said to form a **Block***; and the mn quantities are called the* **Elements** *of such a Block.*

A square Block of n^2 Elements is said to be **of the n^{th} degree**.

An oblong Block containing m rows and n columns, or m columns and n rows, where m is greater than n, is said to be **of the length** *m, and* **of the breadth** *n. ...*

If, in a given Block, any rows, and as many columns, be selected: the square Block formed of their common Elements is called a **Minor** *of the given Block.* ([Dodgson, 1867], str. 6–7)

C. L. Dodgson tedy tvořil subdeterminanty z obdélníkové matice (*Minor of the Block*), dále definoval determinant čtvercové matice (*Determinant of the Block*). Matice zapisoval jako čtvercová schémata sevřená z obou stran závorkami – svorkami, determinanty značil svislými čarami podle A. Cayleyho. Prvky determinantů popisoval pomocí dvou indexů $1\backslash 2$. V té době byl takovýto přístup velmi řídký.

If a square Block be such that its Determinant vanishes, or if an oblong Block be such that the Determinant of every one of its principal Minors vanishes: in either case the Block is said to be **evanescent**. ([Dodgson, 1867], str. 9)

Základní vlastnosti determinantů vyslovoval C. L. Dodgson pomocí matic (bloků), jak jsme viděli v předchozí kapitole věnované vývoji teorie determinantů.

Edmond Nicolas Laguerre

Francouzský matematik E. N. Laguere (1834–1886) studoval na École Polytechnique v Paříži, od roku 1854 působil deset let ve vojenské sféře, poté se stal profesorem na École Polytechnique a od roku 1883 vyučoval matematickou fyziku na Collége de France v Paříži. Věnoval se především diferenciální a projektivní geometrii a diferenciálním rovnicím.

Roku 1867 publikoval práci *Sur le calcul des systèmes linéaires*, v níž rozvinul základní myšlenky maticového počtu; maticím říkal *lineární systémy.* Cayleyův *A memoir on the theory of matrices* z roku 1858 patrně neznal, neboť na něj nijak nereagoval.

J'appelle, suivant l'usage habituel, système linéaire le tableau des coefficients d'un système de n équations linéaires à n inconnues. Un tel système sera dit système linéaire d'ordre n et, sauf une exception dont je parlerai plus loin, je le représenterai toujours par une seule lettre majuscule, réservant les lettres minuscules pour désigner spécialement les éléments du système linéaire.

Ainsi, par exemple, le système linéaire

$$\begin{matrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{matrix}$$

sera représenté par la seule lettre majuscule A. (Oeuvres I., str. 221)

E. N. Laguerre definoval sčítání a násobení matic, skalární matice (*systèmes simples*), transponované matice (*systèmes inverses*), symetrické a antisymetrické matice (*systèmes symétrique, systèmes gauche*), reciprokou matici (*système réciproque*) a uvedl některé vlastnosti těchto svých lineárních systémů.

Ve druhém svazku Cayleyových sebraných spisů z roku 1889 je otištěna zajímavá Cayleyova poznámka k jeho memoáru o maticích z roku 1858, která se týká Laguerreovy práce.

The next later memoir on the theory of Matrices, so far as I am aware is that by Laguerre, "Sur le Calcul des Systèmes Lineaires", Jour. Ec. Polyt. t. XXV. (1867), pp. 215–264. A "système linéaire" is what I called a matrix, and the mode of treatment is throughout very similar to that of my memoir; in particular we have in it my theorem of the equation satisfied by a matrix of any order. The memoir contains a theorem relating to the integral functions of two matrices A, B of the same order, viz. this is expressible in the form $m + pA + qB + rAB$. *...* (Papers II., str. 604)

Lineární systémy se objevily i v Laguerreově práci *Recherches analytiques sur la surface réciproque de la surface de Steiner* z let1872 a 1873. Mimo jiné zde nacházíme transformaci rovnice plochy třetího stupně v maticové podobě (Oeuvres II., str. 281–283):

Soient a, b, c, d *et* e *cinq fonctions linéaires des coordonnées cartésiennes* x, y, z; *...*

... la surface du troisième ordre $\mathcal{H}$, *dont l'équation est*

$$j = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix} = 0 \; .$$

Il est facile de voir qu'en réalité les considérations précédentes nous conduisent à la détermination complète des lignes asymptotiques de $\mathcal{H}$.

Considérons le système linéaire numérique

$$\begin{matrix} p & q & r \\ p' & q' & r' \\ p'' & q'' & r'' \end{matrix} \; ,$$

dont, pour plus de simplicité, je supposerai le déterminant égal à l'unité, et le système composé suivant

$$\begin{matrix} p & p' & p'' \\ q & q' & q'' \\ r & r' & r'' \end{matrix} \times \begin{matrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{matrix} \times \begin{matrix} p & q & r \\ p' & q' & r' \\ p'' & q'' & r'' \end{matrix} = \begin{matrix} a' & b' & c' \\ b' & c'' & d' \\ c' & d' & e' \end{matrix} \; .$$

Si l'on choisit les nombres $p, q, r, \ldots$ *de telle sorte que l'on ait* $c'' = c'$, *il est clair que l'on aura*

$$\begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ b' & c' & d' \\ c' & d' & e' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix} ,$$

et l'équation de $\mathcal{H}$ s'obtiendra en égalant à zéro l'une ou l'autre de ces deux expressions; mais l'on n'aura pas en général

$$a'e' - 4b'd' + 3c'^2 = ae - 4bd + 3c^2 ,$$

c'est-à-dire

$$i' = i .$$

L'équation $i' = 0$ représentera donc une nouvelle quadrique coupant $\mathcal{H}$ suivant une de ses lignes asymptotiques, et la question qui s'offre à nous est la suivante:

Les nombres $p, q, r, \ldots$ étant choisis de telle sorte que la relation $c'' = c'$ soit satisfaite, trouver les différentes valeurs que peut prendre l'expression

$$i' = a'e' - 4b'd' + 3c'^2 .$$

Poznamenejme, že E. N. Laguerre užil násobení lineárních systémů druhého řádu i v práci *Sur la méthode de Monge pour l'intégration des équations linéaires aux différences partielles du second ordre* z roku 1876.

6. Hodnost matice

William Kingdon Clifford

Anglický matematik W. K. Clifford (1845–1879) studoval na Trinity College v Cambridge, roku 1871 se stal profesorem aplikované matematiky a mechaniky na univerzitě v Londýně. Věnoval se algebře (hyperkomplexní čísla, algebry), neeukleidovské a projektivní geometrii a popularizaci matematiky a fyziky. Byl jedním z prvních, kdo pochopil a ocenil Lobačevského práce.

Roku 1882, v posmrtně publikované Cliffordově stati *A fragment on matrices*, která pochází patrně z roku 1875, nacházíme náznak cesty k pojmu *hodnost* matice. Singulární matice třetího řádu jsou zde klasifikovány jako matice *indeterminate in the first degree* a matice *indeterminate in the second degree.* K tomuto rozlišování vede sledování nulovosti a nenulovosti subdeterminantů. V komentáři k tomuto článku je uvedeno:

… An indeterminate matrix (or more definitely, a matrix indeterminate in the first degree) is a matrix the determinant of which vanishes, but for which the first minors do not all of them vanish … A matrix indeterminate in the second degree is a matrix for which all the first minors vanish, or what is the same thing, one for which the second and third rows are mere multiples of the first row. (Papers, str. 337)

Georg Ferdinand Frobenius

G. Frobenius (1849–1917) studoval na berlínské univerzitě, byl žákem Ernsta Eduarda Kummera (1810–1893), Leopolda Kroneckera (1823–1891) a K. T. Weierstrasse (1815–1897), studia ukončil roku 1870. V letech 1875 až 1892 byl profesorem matematiky na polytechnice v Curychu, od roku 1892 pak na berlínské univerzitě. Věnoval se zejména algebře (kvadratické formy, hyperkomplexní čísla, teorie algeber konečné dimenze, maticový počet, teorie grup atd.).

Ve většině pramenů o vývoji teorie matic se můžeme dočíst, že pojem hodnosti matice zavedl v roce 1879 G. Frobenius. Někdy je připomínán i Sylvesterův pojem nulity z roku 1882.

Je třeba zdůraznit, že G. Frobenius začal používat maticovou řeč a symboliku poměrně pozdě, až roku 1896, a to poprvé v práci *Über vertauschbare Matrizen.* V úvodu tohoto článku napsal:

Ich werde mich daher hier der symbolischen Bezeichnung für die Zusammensetzung der Matrizen (Formen) bedienen, die ich in meiner … Arbeit Über lineare Substitutionen und bilineare Formen … auseinandergesetzt habe. (Abhandlungen II., str. 705)

Podobnou poznámku najdeme i v jeho práci *Über Gruppencharaktere*, která vyšla rovněž roku 1896:

Mit Hülfe der Sätze über die Matrizen (linearen Systeme), die ich in meiner Arbeit Über lineare Substitutionen und bilineare Formen … entwickelt habe, … (Abhandlungen III., str. 18)

Do té doby se v jeho publikacích matice neobjevily; řadu výsledků zařazovaných dnes do teorie matic publikoval ve svých předchozích pracích v řeči bilineárních a kvadratických forem, resp. determinantů. Týká se to i pojmu hodnost, který definoval ve dvou článcích z roku 1879.

V práci *Über homogene totale Differentialgleichungen* nalezneme tuto definici hodnosti determinantu:

Wenn in einer Determinante alle Unterdeterminanten $(m+1)$*ten Grades verschwinden, die* m*ten Grades aber nicht sämmtlich Null sind, so nenne ich* m *den Rang der Determinante.* (Abhandlungen I., str. 435)

V rozsáhlém pojednání *Theorie der linearen Formen mit ganzen Coefficienten* z roku 1879 zavedl G. Frobenius stejný pojem na počátku prvního paragrafu v trochu obecnější podobě; hovoří zde o hodnosti obdélníkového systému prvků:

Gegeben sei ein endliches System $\mathbb{A}$ *von Grössen* $a_{\alpha\beta}$ $(\alpha = 1, \dots m;\ \beta = 1, \dots n)$*, die nach Zeilen und Colonnen geordnet sind. Wenn in demselben alle Determinanten* $(l+1)$*ten Grades verschwinden, die* l*ten Grades aber nicht sämmtlich Null sind, so heisst* l *den Rang des Systems.*
(Abhandlungen I., str. 484)

Podstata věci je téměř stejná; v první definici je skryta hodnost čtvercové matice, ve druhé hodnost matice obdélníkové.

Roku 1911 se G. Frobenius k pojmu hodnost vrátil v článku *Über den Rang einer Matrix*, v němž citoval kromě prací K. Hensela (1861–1941) rovněž práce L. Karsta,[6] E. Netta (1846–1919), K. T. Weierstrasse, J. J. Sylvestera, C. Jordana (1838–1922), L. Schlesingera (1864–1933), L. Stickelbergera (1850–1936) a Eduarda Weyra (1852–1903). V té době se však již pojem hodnosti objevoval v řadě prací a byl plodně využíván.

James Joseph Sylvester

J. J. Sylvester dospěl nezávisle na G. Frobeniovi k pojmu nulita, kterým je možno pojem hodnosti nahradit. Pro čtvercovou matici je totiž součet hodnosti a nulity roven jejímu řádu.

Roku 1882 zveřejnil v práci *On the properties of a split matrix* větu o nulitě součinu matic. Nejprve definoval nulitu matice:

… the nullity of a matrix of the order ω being regarded as unity, when its determinant simply is zero, as 2 when each first minor simply is zero, as 3 when each second minor is zero … as $(\omega - 1)$ when each quadratic minor is zero and as ω (or absolute) when every element is zero. …
(Papers III., str. 646)

Potom zformuloval zcela zásadní výsledek o nulitě součinu matic, který bývá často spojován s jeho jménem: nulita součinu matic je větší nebo rovna nulitě každého z činitelů a menší nebo rovna jejich součtu. každého

… If any number of matrices of the same order be multiplied together, the nullity of their product is not less than the nullity of any single factor and not greater than the sum of the nullities of all the several factors. (Papers III., str. 646)

Max Koecher (1924–1990) uvedl ve své knize *Lineare Algebra und analytische Geometrie* z roku 1983 výše zmíněné nerovnosti (přeformulované pro „hodnost“) jako Sylvesterovy vzorce (viz [Koecher, 1983], str. 61).

V práci *On involutants and other allied species of invariants to matrix systems* z roku 1884 znovu uvedl výše uvedený výsledek a odkazoval se na něj jako na *The Law of Nullity* (Papers IV., str. 133, 134, 136, 141). O nulitě se zmínil i v práci *Sur l'équation en matrices* $px = xq$ ze stejného roku (Papers IV., str. 177).

Roku 1884 J. J. Sylvester v práci *Lectures on the principles of universal algebra* vysvětlil mimo jiné základní pojmy týkající se matic. Začal pojmem matice, objasnil maticové násobení, pojem nulity atd. Připomněl v té souvislosti i Cliffordovu snahu o rozlišování „míry“ singularity matice:

A MATRIX of a quadrate form historically takes its rise in the notion of a linear substitution performed upon a system of variables or carriers; regarded apart from the determinant which it may be and at one time was almost exclusively used to represent, it becomes an empty schema of operation, …
(Papers IV., str. 208)

[6] Ludwig Karst: *Lineare Funktionen und Gleichungen* – viz [Karst, 1909].

... Thus $(\lambda l)mn$ *denoting the term in* mn *of latitude* λ *and longitude* l*, we have the equation*

$$(\lambda l)mn = \lambda m \times ln\ ,$$

where, of course, λm *means the* λ*th parallel of latitude, and* ln *the* l*th parallel of longitude, in* m *and* n *respectively. ...*

Any other definition of multiplication of matrices, such as the rule for multiplying lines by lines, or columns by columns, sins against good method, as being incompatible with the law of consociation, and ought to be inexorably banished from the text-books of the future. (Papers IV., str. 211)

... if its content, that is, its determinant, vanishes without any other special relation existing between its elements, the nullity will be called 1; if all the first minors vanish, 2; and, in general and more precisely, if all the minors of order $\omega - i + 1$ *vanish, but the minors of order* $\omega - i$ *do not all vanish, the nullity will be said to be* i*: as an example, if the elements are not all zero, but every minor of the second order vanishes, the nullity is* $\omega - 1$.

... Clifford, who goes a step further in distinguishing the several degrees of indeterminateness from one another. (Papers IV., str. 212)

Leopold Kronecker

K šíření pojmu hodnost matice přispěl také L. Kronecker. Například v práci *Näherungsweise ganzzahlige Auflösung linearer Gleichungen* z roku 1884 definoval pojem hodnosti systému reálných čísel.

Es sei (a_{ik}) *für* $i = 1, 2, \dots\ p$ *und* $k = 1, 2, \dots\ q$ *ein System reeller Grössen, und* r *sei die grösste Zahl von der Beschaffenheit, dass nicht sämmtliche aus den Elementen* a_{ik} *zu bildenden Determinanten* r^{ter} *Ordnung verschwinden. Alsdann ist* r *die „Stufenzahl" oder der „Rang" des aus den* q *linearen Functionen von* p *Variabeln* $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \dots \mathfrak{R}_p$ *gebildeten Divisorensystems:*

$$\Big(\ \sum_i a_{i1}\mathfrak{R}_i,\ \sum_i a_{i2}\mathfrak{R}_i,\ \dots\dots\ \sum_i a_{iq}\mathfrak{R}_i\ \Big) \qquad\qquad (i = 1, 2, \dots\ p)\ ,$$

und soll auch ... als der Rang des Grössensystems (a_{ik}) *selbst bezeichnet werden.* (Werke III.1, str. 67)[7]

Poznamenejme na tomto místě, že Kronecker zavedl roku 1866 v práci *Über bilineare Formen* symbol δ_{ih}, který dnes nese jeho jméno – tzv. *Kroneckerovo delta.*

Determinante, welche für die bilinearen Formen von besonderer Bedeutung ist, lässt übrigens noch mannichfache Umformungen zu, von denen ich nur eine

[7] Viz též Kroneckerova práce *Die Periodensysteme von Functionen reeller Variabeln*, v níž je rovněž pojem hodnosti zaveden; v poznámce pod čarou jsou připomenuti G. Frobenius a J. Molk. Viz Werke III.1, str. 43.

hier hervorheben will. Bezeichnet man nämlich mit α_{ik} die Coefficienten des dem Substitutionssysteme a_{ik} entgegengesetzten Systems, so wird:

$$\sum_k a_{ik}\alpha_{kh} = \delta_{ih} \ ,$$

wenn, wie von jetzt ab stets geschehen soll, $\delta_{ik} = 1$ oder $\delta_{ik} = 0$ genommen wird, je nachdem die Indices i und k einander gleich oder von einander verschieden sind. (Werke I., str. 150)

V delším pojednání *Bemerkungen zur Determinanten-Theorie*, které je výtahem z Kroneckerova dopisu Richardu Baltzerovi (1818–1887), je symbol δ_{ik} znovu připomenut:

Dabei werde ich durchweg von einigen bequemen Bezeichnungen Gebrauch machen … nämlich erstens die Determinante von n^2 Grössen: a_{ik} einfach durch das Zeichen:

$$|a_{ik}|$$

darstellen und zweitens:

$$\delta_{ik} \ \ \textit{gleich Eins oder gleich Null}$$

setzen, je nachdem die beiden Indices i und k einander gleich oder von einander verschieden sind. (Werke I. str. 235)

Eduard Weyr

Ed. Weyr (1852–1903) studoval na německé reálce a na pražské polytechnice, doktorát získal roku 1873 v Göttingen. Habilitoval se roku 1874 na české polytechnice, o dva roky později získal habilitaci i na pražské univerzitě, od roku 1876 působil na české polytechnice jako mimořádný a od roku 1881 jako řádný profesor. V letech 1890 až 1903 byl navíc suplujícím profesorem na české univerzitě. Spolu s bratrem Emilem (1848–1894) sepsal třídílnou knihu *Základové vyšší geometrie*. Je autorem dalších dvou učebnic, *Projektivní geometrie* (1898, 1911) a *Počet differenciálný* (1902). Podrobně o jeho životě a díle viz [Bečvář, 1995].

Eduard Weyr publikoval roku 1885 práci *Sur la théorie des matrices*, v níž zveřejnil, patrně nezávisle na J. J. Sylvesterovi, odhad nulity součinu dvou matic.

En étudiant la nullité des matrices, j'ai trouvé que «le degré de nullité d'un produit de matrices est au plus égal à la somme des degrés de nullité des facteurs, et au moins égal au plus petit de dec degrés». La seconde partie de ce théorème a été par M. Sylvester … [Weyr, 1885]

V pojednání *O theorii forem bilinearných* z roku 1889 a v jeho německé verzi z následujícího roku se Ed. Weyr rovněž věnoval otázkám nulity matice; v této souvislosti citoval práce Sylvesterovy.

Weyrovy výsledky o nulitách matic citoval roku 1911 G. Frobenius ve výše zmíněném článku *Über den Rang einer Matrix*. Max Koecher v knize *Lineare*

Algebra und analytische Geometrie uvedl tzv. Weyrovy-Frobeniovy nerovnosti týkající se nulit; čtenáře odkázal na výše zmíněnou Frobeniovu práci z roku 1911 (viz [Koecher, 1983], str. 88).

Otakar Borůvka (1899–1995) podal roku 1936 v práci *Sur les matrices singulières* nový důkaz jednoho Weyrova tvrzení, které se týká nulity matic. Zmínil se o tom i Günter Pickert (nar. 1917) roku 1953 v přehledovém článku *Normalformen von Matrizen* (viz [Pickert, 1953], str. 47).

7. Cayleyova-Hamiltonova věta

Viděli jsme, že Cayleyova-Hamiltonova věta byla otištěna bez obecného důkazu v Cayleyově memoáru o teorii matic z roku 1858.

V knize K. H. Parshallové *James Joseph Sylvester. Life and Work in Letters* je uveřejněn zajímavý dopis, který napsal A. Cayley 19. listopadu 1857 J. J. Sylvesterovi. Začíná slovy *I have just obtained a theorem which appears to me very remarkable.* A. Cayley v něm uvedl svůj důkaz Cayleyovy-Hamiltonovy věty pro matici druhého řádu a ukázal dokonce zobecnění tohoto tvrzení:

A more general theorem is if P, Q are any two convertible (tj. komutující, resp. záměnné) *matrices* $P = \begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$ $Q = \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$ *then the determ*[inan]*t*

$$\begin{vmatrix} Qa - P\alpha, & Qb - P\beta \\ Qc - P\gamma, & Qd - P\delta \end{vmatrix}$$

is equal to the matrix $\begin{pmatrix} 0, & 0 \\ 0, & 0 \end{pmatrix}$. ... ([Parshall, 1998], str. 96)

Podrobněji se věnoval této problematice Tony Crilly v článku *Cayley's anticipation of a generalised Cayley-Hamilton theorem* (viz [Crilly, 1978]).

Pro kvaterniony dokázal odpovídající tvrzení W. R. Hamilton v monografii *Lectures on quaternions* z roku 1853 (viz [Hamilton, 1853], str. 566–567); toto tvrzení však znal již roku 1846, jak se o tom zmínil v krátkém článku *On the existence of a symbolicand biquadratic equation which is satisfied by the symbol of linear or distributive operation on a quaternion* uveřejněném v časopise Philosophical Magazine and Journal of Science:

As early as the year 1846, I was led to perceive the existence of a certain symbolic and cubic equation, of the form

$$0 = m - m'\phi + m''\phi^2 - \phi^3 \ ,$$

in which ϕ is used as a symbol of linear and vector operation on a vector, so that $\phi\rho$ denotes a vector depending on ρ, such that

$$\phi(\rho + \rho') = \phi\rho + \phi\rho' \ ,$$

if ρ and ρ' be any two vectors; while m, m', and m'' are three scalar constants, depending on the particular form of the linear and vector function $\phi\rho$, or on the (scalar or vector) constants which enter into the composition of that function. (Papers III., str. 350)

B. L. van der Waerden (1903–1996) uvedl v knize *A history of algebra*, že první důkaz Cayleyovy-Hamiltonovy věty podal E. N. Laguerre roku 1867 v práci *Sur le calcul des systèmes linéaires* (viz [Waerden, 1985], str. 190); ten však toto tvrzení prověřil obdobným způsobem jako A. Cayley. Ani Frobeniův důkaz uvedený v pojednání *Über lineare substitutionen und bilineare formen* z roku 1878 není z dnešního hlediska v pořádku.

Arthur Buchheim (1859–1888) publikoval obecný důkaz Cayleyovy-Hamiltonovy věty v krátkém příspěvku nazvaném *An identity in the theory of matrices*, který byl otištěn roku 1883/1884 v časopise Messenger of Mathematics v rubrice Mathematical Notes. Napsal, že modifikoval důkaz, který podal roku 1867 Peter Guthrie Tait (1831–1901) ve své monografii *Elementary treatise on quaternions*.

A. Buchheim využil reciprokou matici k charakteristické matici a vyjádření polynomiální matice jako maticového polynomu. V mírně modifikované podobě se tento důkaz objevuje dodnes v učebnicích lineární algebry a teorie matic.

Ve stejném ročníku stejného časopisu se této problematice věnoval Andrew Russell Forsyth (1856–1942) v práci *Proof of a theorem by Cayley in regard to matrices*. Zahájil ji těmito slovy:

In a memoir on the Theory of Matrices ... Prof. Cayley enunciates (but without proof for the general case) the theorem "that any matrix whatever satisfies an algebraical equation of its own order, the coefficient of the highest power being unity and those of the other powers functions of the terms of the matrix, the last coefficient being in fact the determinant". A proof of this is easily obtained as follows. ([Forsyth, 1884], str. 139)

V dalším textu prezentoval svůj obecný důkaz pro matici M třetího řádu. Popsal rekurentně prvky matice M^n, přičemž využil vztahu $M^{n+1} = M \cdot M^n$. Tyto matice pak dosadil do charakteristického polynomu a tvrzení Cayleyovy-Hamiltonovy věty prověřil. Nakonec poznamenal:

It is evident that the above work could be reproduced line by line with n^2 constituents instead of 3^2, and that it would then furnish for the most general matrix a proof of Cayley's theorem. ([Forsyth, 1884], str. 142)

J. J. Sylvester roku 1884 v časopise Nature již hovoří o tomto významném matematickém výsledku jako o Hamiltonově-Cayleyově větě:[8]

To my gratified surprise my faith met with its reward, for I soon found an easy proof of the remarkable theorem which I have ventured, in emulation of a phrase of Cauchy, to call a "pulcherrima regula", which will appear in the number of the Comptes Rendus next forthcoming after this date, and which

[8] Viz též Sylvesterova práce *On Hamilton's quadratic equation and the general unilateral equation in matrices*, Papers IV., str. 231–235.

may be summed up approximately in the following words: – Every latent root of every root of a given unilateral function in matrices of any order, is an algebraical root of the determinant of that function taken as if the unknown were an ordinary quantity, and conversely every algebraical root of the determinant so taken is a latent root of one of the roots of the given function. This constitutes a marvellous extension (to a matrix implicitly given by a unilateral equation) of the already no-little-marvellous Hamilton-Cayley theorem of the identical equation to a matrix given explicitly. ([Sylvester, 1884], str. 36)

Obecný důkaz Cayleyovy-Hamiltonovy věty znali roku 1884 dva pražští matematici, Ludvík Kraus (1857–1885) a Eduard Weyr.

Ed. Weyr vystoupil 25. dubna 1884 na zasedání Královské české společnosti nauk s přednáškou *O základní větě v theorii matric*, která se týkala Cayleyovy-Hamiltonovy věty. Odvolal se na výsledky svého přítele L. Krause:

Hleděl jsem tuto větu obecně dokázati, však se mi to nepodařilo, neboť cesta, která v jednoduchých poměrně případech $n = 2, 3$ *vedla k cíli, se v obecném případu stávala neschůdnou. Obrátil jsem se k svému příteli p. Dr. L. Krausovi, priv. docentu na zdejší české universitě, s prosbou, aby se pokusil o důkaz; byl jsem nemálo potěšen, obdržev ihned, čeho jsem si přál.* ([Weyr, 1884], str. 150)[9]

Ed. Weyr nejprve uvedl Krausův důkaz a potom svoji modifikaci tohoto důkazu. Zajímavé je, že o Weyrově důkazu věděl již roku 1884 J. J. Sylvester. V práci *Sur la résolution générale de l'équation linéaire en matrices d'un ordre quelconque* napsal:

C'est dans les Lectures, publiées en 1844, que pour la premiére fois a paru la belle conception de l'équation identique appliquée aux matrices du troisième ordre, enveloppées dans un langage propre à Hamilton après lui mise à nu par M. Cayley dans un très important Mémoire sur les matrices dans les Philosophical Transactions pour 1857 ou 1858, et étendue par lui aux matrices d'un ordre quelconque, mais sans démonstration; cette démonstration a été donnée plus tard per feu M. Clifford ..., par M. Buchheim ..., par M. Ed. Weyr, par nousmême, et probablement par d'antres; mais les quatre méthodes citées plus haut paraissent être tout à fait distinctes l'une de l'autre.
(Papers IV., str. 202)

Problematiku Cayleyovy-Hamiltonovy věty Ed. Weyr vyložil ve spise *O theorii forem bilinearných* a v jeho německé verzi *Zur Theorie der bilinearen Formen* publikované v časopise Monatshefte für Mathematik und Physik roku 1890.

Moritz Pasch (1843–1930) zveřejnil roku 1891 v poslední, páté části svého pojednání *Ueber bilineare Formen und deren geometrische Anwendung* základní myšlenku důkazu Cayleyovy-Hamiltonovy věty, kterou později využil G. Frobenius.

Ten roku 1896 uvedl v práci *Über vertauschbare Matrizen* exaktní důkaz Cayleyovy-Hamiltonovy věty, který využil obdobnou myšlenku jako Buchheimův důkaz. Připojil tento komentář:

---

[9] Podrobněji viz [Bečvář, 1995], str. 91–93.

Dieser Fundamentalsatz der Formentheorie ist von Cayley gefunden und, wie ich glaube, zuerst in A Memoir on the Theory of Matrices ... veröffentlicht worden, aber ohne allgemeinen Beweis. In der oben angegebenen Gestalt wurde er von Pasch ... bewiesen. (Abhandlungen II., str. 709–710)

M. Bôcher představil roku 1907 Cayleyovu-Hamiltonovu větu jako *one of the most fundamental theorems in the whole theory of matrices*, hovořil o Hamiltonově-Cayleyově rovnici:

THEOREM 1. If $\mathbf{a}$ *is a matrix, and* $\phi(\lambda)$ *its characteristic function, then*

$$\phi(\mathbf{a}) = 0.$$

This equation is called the Hamilton-Cayley equation. ([Bôcher, 1907], str. 296)

Pro zajímavost zmiňme ještě článek *Ein Beweis des Hauptsatzes der Theorie der Matrizes* z roku 1928, v němž Lothar Schrutka (1881–1945) dokázal Cayleyovu-Hamiltonovu větu sedmdesát let po jejím zveřejnění v Cayleyově práci *A memoir on the theory of matrices.* Poznamenal, že čtenář získá potřebné bibliografické informace k tématu v německé a francouzské matematické encyklopedii ([EMW], [ESM]) a v Pascalově kompendiu *Repertorium der höheren Mathematik* [Pas2].

Problematika Cayleyovy-Hamiltonovy věty je stále živá, jak z matematického, tak z historického hlediska. Po celé 20. století se objevují články, které jsou tomuto zajímavému tématu věnovány. Připomeňme např. práce [Phillips, 1919], [Mitchell, 1933], [Ko, Lee, 1940], [Feldman, 1962], [Decell, 1965], [Barker, 1971], [Deeds, 1971], [Klarner, 1976], [Crilly, 1978], [Greenberg, 1984], [Formanek, 1989], [Chisala, 1998].

8. Zakladatel teorie matic

Arthur Cayley býval často označován za zakladatele teorie matic. Jedním z důvodů této skutečnosti byl vhodně zvolený název jeho práce – *A memoir on the theory of matrices.* Nezanedbatelnou roli patrně sehrála propagace jeho výsledků J. J. Sylvesterem, který byl v matematickém světě velkou autoritou. Ten označil roku 1884 v článku *The genesis of an idea, or story of a discovery relating to equations in multiple quantity* otištěném v časopise Nature Cayleyův memoár o teorii matic z roku 1858 za obrození algebry:

This paper constitutes a second birth of Algebra, its avatar in a new and glorified form.

Podobně se J. J. Sylvester vyjadřoval i na jiných místech. Například v článku *Lectures on the principles of universal algebra* publikovaném roku 1884 napsal:

... This step was, as far as I know, first made by Cayley in his Memoir on Matrices, in the Phil. Trans. 1858, wherein he may be said to have laid the foundation-stone of the science of multiple quantity. That memoir indeed (it seems to me) may with truth be affirmed to have ushered in the reign of

Algebra the 2nd; just as Algebra the 1st, in its character, not as mere art or mystery, but as a science and philosophy, took its rise in Harriot's Artis Analyticae Praxis, published in 1631, ... Much as I owe in the way of fruitful suggestion to Cayley's immortal memoir ... (Papers IV., str. 209)

Sylvesterův názor kritizoval již roku 1891 Josiah Willard Gibbs (1839–1903) v článku *Quaternions and the "Ausdehnungslehre"* publikovaném v časopise Nature; zdůraznil, že klíč k teorii matic leží v prvním vydání Grassmannovy knihy *Ausdehnungslehre*:

The key to the theory of matrices is certainly given in the first "Ausdehnungslehre", and if we call the birth of matricular analysis the second birth of algebra, we can give no later date to this event than the memorable year of 1844.

J. W. Gibbs považoval rok 1844 za opravdu významný, jak uvedl hned na začátku svého výše zmíněného článku:

The year 1844 is memorable in the annals of mathematics on account of the first appearance on the printed page of Hamilton's "Quaternions" and Grassmann's "Ausdehnungslehre".

Zcela jiný názor zastával P. G. Tait; podle něho A. Cayley pouze modifikoval Hamiltonovy myšlenky. Zajímavá výměna názorů je zachycena v korespondenci P. G. Taita a A. Cayleyho (viz [Knott, 1911]).[10]

Dne 5. března 1872 P. G. Tait napsal A. Cayleymu.

It is a most singular fact that you seem to have been working simultaneously with Hamilton in 1857–8, just as I found you had been in a very much earlier year ... I have had but time for a hurried glance at your paper on Matrices – and I see that it contains (of course in a very different form) many of Hamilton's properties of the linear and vector function ... I send you a private copy of my little article, by which you will see how closely the adoption of Hamilton's method has led me to anticipate almost every line of your last note ... There is one point of Hamilton's theory to which I do not see anything analogous in your paper. ([Knott, 1911], str. 153)

O 22 let později, dne 19. června 1894, P. G. Tait napsal A. Cayleymu následující slova:

I should like to know at your convenience when and how the notion of the Matrix came to you: – and whether Hamilton's simple case of it was an anticipation or an application of the general theory. ([Knott, 1911], str. 164)

A. Cayley poslal P. G. Taitovi svůj článek *Coordinates versus Quaternions* s touto poznámkou:

... I do not know what has made me write it just now, but it puts on record the views which I have held for many years past and which have not been before published. ([Knott, 1911], str. 164)

Obdobný názor jako P. G. Tait vyslovil roku 1890 i Henry Taber (1860–1936) v úvodu svého rozsáhlého článku *On the theory of matrices.*

[10] Viz též úvod třetího vydání Taitovy knihy *An Elementary Treatise on Quaternions.*

Before Cayley's memoir appeared, Hamilton had investigated the theory of such a symbol of operation as would convert three vectors into three linear functions of those vectors, which he called a linear vector operator. Such an operator is essentially identical with a matrix as defined by Cayley; ... Hamilton must be regarded as the originator of the theory of matrices, as he was the first to show that the symbol of a linear transformation might be made the subject-matter of a calculus. Cayley makes no reference to Hamilton, and was of course unaware that results essentially identical with some of his had been obtained by Hamilton; and, on the other hand, Hamilton's results related only to matrices of the third and fourth order, while Cayley's method was absolutely general. ([Taber, 1890], str. 337–338)

Sylvesterův názor podpořil roku 1895 A. R. Forsyth v rozsáhlém Cayleyově nekrologu otištěném též v osmém svazku Cayleyových sebraných spisů:

Another subject, of which he must be regarded as the creator, is the theory of matrices. ... A couple of isolated results had been obtained by Hamilton in 1852 through the methods of quaternions; but they were unknown to Cayley at the time of his memoir, and, owing to the connexion in which they occur, they have an entirely detached aspect. ... Cayley was the first to discuss the theory of such symbols as subjects of functional operation and to dispense ... he replaces the notion of substitutional operation by the notion of a new class of quantity. (Papers VIII., str. xxxii)

Thomas John I. Bromwich (1873–1929) se v recenzi Muthovy monografie *Muth's Elementartheiler* zmínil o otázce zakladatele teorie matic; krátký odstavec uzavřel takto:

I am unable to give any opinion on this point; nor do I know the extent of Grassmann's results. ([Bromwich, 1901], str. 311)

V německé matematické encyklopedii napsal Eduard Study (1862–1930) tato slova:

... Cayley muss daher wohl als Begründer dieser Theorie angesehen werden. Nach Cayley haben viele Mathematiker sich derselben Begriffsbildungen bedient. ([EMW], díl I.1; [Study, 1898], str. 169)

O problému zakladatele teorie matic se ještě delší dobu diskutovalo.

Cyrus Colton MacDuffee, autor jedné z prvních monografií věnovaných maticím, se o zdrojích teorie matic a jejích nejvýznamnějších tvůrcích roku 1943 vyslovil takto:

The branch of mathematics which is now called the algebra of matrices had four sources. W. R. Hamilton [3] first presented it under the title of "Linear and vector functions". Cayley [4] considered a matrix as a single quantity, defined sum, product and scalar product, and stated that "square matrices are of greater importance than rectangular". E. Laguerre [5] also laid the foundations of matric algebra, and remarked that "the calculus of matrices gives a simple interpretation of ordinary complex numbers, of quaternions, of the algebraic clefs of Cauchy, of the imaginaries of Galois". G. Frobenius [6] encountered *matric algebra in the guise of biliner form theory. In the awkward notation of the composition of forms, he discovered many of the fundamental theorems of matric theory. The abstract point of view of Cayley, and Sylvester's term matrix, gradually became standard.* ([MacDuffee, 1943], str. 360)

V sedmdesátých letech 20. století se otázkami vzniku a vývoje teorie matic velmi podrobně zabýval Thomas Hawkins. Na toto téma sepsal sérii zasvěcených článků ([Hawkins, 1974], [Hawkins, 1975], [Hawkins, 1977], [Hawkins, 1977]). V příspěvku *The theory of matrices in the 19th century* předneseném na Mezinárodním kongresu matematiků ve Vancouveru roku 1974 ukázal, že Cayleyův memoár o maticích z roku 1858 sehrál ve vývoji této disciplíny podstatně menší roli, než se soudilo, a že závažnější problematiku této teorie řešili jiní matematici. Ocitujme ze závěru jeho článku *Another look at Cayley and the theory of matrices* následující odstavec.

During the thirty-year period 1852–1882 the idea of matrix algebra was conceived, more or less independently, by no less than five mathematicians: Eisenstein, Cayley, Laguerre, Frobenius and Sylvester. We have seen that there were great differences in what each did with the idea, differences which reflect differences in motivation and in professional training and attitudes. Although it has been argued that in no meaningful historical sense did Cayley's 1858 memoir constitute the foundation stone of the theory of matrices, I have also shown that Cayley occupies a special place in the history of that theory by virtue of his work relating to the Cayley-Hermite problem. During the 19th century that problem was one of the principal reasons for the introduction and development of the symbolical algebra of matrices. Hermite's role was therefore also important. To him we owe the formulation of the problem, and the form of his solution proved conducive to the introduction of matrix algebra. An important role was also played throughout by research activity in the theory of numbers. Thus we have emphasized the influence of Gauss' Disquisitiones arithmeticae and indicated the centrality of number-theoretic considerations to Eisenstein, Hermite and Laguerre. In particular arithmetical research motivated Hermite's formulation of the Cayley-Hermite problem and Bachmann's revival of interest in the problem in the 1870s, through which it was brought to the attention of Frobenius. Finally, Frobenius' contribution must be stressed, for it was in his memoir of 1878 that the two basic components of the theory of matrices, matrix algebra and spectral theory, were united and the advantages of such a union convincingly demonstrated.
([Hawkins, 1977], str. 108)

9. Matice v osmdesátých a devadesátých letech 19. století

Cayley's memoir was ignored for many years. It may be that, with a few notable exceptions, mathematicians of his generation, or even one or two subsequent generations, were reluctant to accept mathematical objects that could neither be seen (geometry) nor computed (algebra and

> *analysis). At best, most mathematicians paid lip-service to vectors and matrices by regarding them as convenient abbreviations for certain sets of numbers which must be brought into play if concrete results are to be achieved.*
>
> (Grattan-Guinness, Ledermann, [Grat], str. 779)

V posledních dvou desetiletích 19. století teorie matic stále ještě bojovala o svoji existenci. V maticové řeči psalo některé své práce jen několik matematiků, zejména A. Cayley, J. J. Sylvester, A. Buchheim, H. Taber, A. R. Forsyth, T. Muir, A. Kumamoto[11] a George Brunel (1856–1900). Řada matematiků, které dnes počítáme k výrazným tvůrcům maticového počtu, v té době ještě maticovou řeč nepřijala. Do jisté míry se stále ještě projevovala určitá izolace britské matematiky od matematiky kontinentální Evropy. Teprve koncem devadesátých let začali někteří matematici publikovat své výsledky v maticové podobě. Jedním z nich byl G. Frobenius, jehož první prací využívající maticovou formulaci je článek *Über vertauschbare Matrizen* z roku 1896. V devadesátých letech přibylo k výše uvedeným matematikům několik málo dalších, kteří některé své práce napsali již „maticově“: T. B. Wettum, L. van Elfrinkhof, J. Brill, L. Ravut, J. B. Shaw.

Mezitím pracovala řada matematiků v teorii bilineárních a kvadratických forem. Zkoumaná problematika se týkala hlavně lineárních transformací, kanonických tvarů, vlastních čísel a vlastních vektorů, hodnosti a nulity. Jiný proud prací byl věnován teorii hyperkomplexních čísel; velká role matic ve strukturní teorii algeber se ukázala až později.

Jedním z prvních matematiků, kteří přijali maticový počet a propojili teorii matic s teorií bilineárních a kvadratických forem, byl český matematik Eduard Weyr. S maticemi pracoval velmi brzy, již krátce před polovinou osmdesátých let. Svou první práci týkající se matic vydal roku 1884, během šesti let publikoval sedm prací, které se matic bezprostředně týkaly. V rozvíjení problematiky teorie matic (v maticové podobě) ho proto musíme zařadit hned za A. Cayleyho, J. J. Sylvestera a A. Buchheima.

Eduard Weyr

Weyrův zájem o matice vzbudil patrně jeho mladší kolega a přítel Ludvík Kraus, který čtyři semestry v Berlíně navštěvoval Weierstrassovy a Kroneckerovy přednášky a některé jejich myšlenky přinesl do Prahy. Ed. Weyr pracoval s maticemi jako s plnohodnotnými, samostatnými objekty. Ukazoval jejich roli a využití v teorii bilineárních a kvadratických forem, demonstroval jejich bezprostřední vztah k lineárním transformacím. První jeho prací týkající se matic je článek *O základní větě v theorii matric* z roku 1884, o němž již bylo výše referováno.

---

[11] Viz [Kumamoto, 1888].

V následujícím roce publikoval články *Sur la théorie des matrices* a *Repartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces*, o nichž bude řeč v následující kapitole této monografie, stejně jako o práci *Sur la réalisation des systèmes associatifs de quantités complexes à l'aide des matrices* z roku 1887.

Roku 1887 vydal Ed. Weyr čtyřicetistránkovou práci *O binarných matricích.* Nepřinesla původní výsledky, neboť byla napsána zejména pro popularizaci teorie matic. Chtěla ukázat užitečnost tohoto nového matematického kalkulu a bezprostřední vztah matic a hyperkomplexních čísel, zejména kvaternionů. Českým čtenářům jistě otevřela nové obzory. V úvodu Ed. Weyr napsal:

V jedné ze svých úvah o matricích … vytknul Sylvester výslovně totožnost theorie binarných matric s theorií kvaternionů; ale již Cayley … byl k souvislosti obou theorií poukázal.

Theorie kvaternionů založena Hamiltonem vzhledem k zamýšleným applikacím na úvahách geometrických; avšak nebude zajisté nezajímavo přihlédnouti k ní se stanoviska ryze počtářského, zaujatého v theorii matric.

Následující, arci velice elementárné úvahy obsahují základy theorie binarných matric a tím i základy theorie kvaternionů. ([Weyr, 1887], str. 358)

Binarnými matricemi rozuměl Ed. Weyr matice druhého řádu. V prvních osmi paragrafech své práce (*Addice a subtrakce*, *Multiplikace*, *Divise*, *Reciproká matrice*, *Skalarné matrice*, *Celistvá a lomená funkce matrice*, *Základní rovnice dané matrice a redukce racionálných funkcí*, *O kořenech matrice*) uvedl základní fakta o maticích druhého řádu a o operacích s nimi. Matice a maticové operace přitom dal do souvislosti s problematikou lineárních transformací. Ukázal, že na základě Cayleyovy-Hamiltonovy věty je možno redukovat celistvou i racionální funkci φ matice M na lineární funkci tvaru $\alpha M + \beta E$, kde skaláry α, β je možno vyjádřit pomocí vlastních čísel matice M.

V několika dalších paragrafech se Ed. Weyr věnoval otázkám souvisejícím s vlastními čísly a kanonickými tvary; o nich bude pojednáno v následující kapitole.

V paragrafu *O komplanarných matricích* ukázal, že všechny matice komplanární s maticí M, tj. matice tvaru $\alpha M + \beta E$, jsou též komplanární navzájem a tvoří množinu uzavřenou na sčítání a násobení (které je komutativní) a na tvoření celistvé a racionální funkce; jestliže je

$$X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_n E = M \ ,$$

pak je X komplanární s M atd. Pro matici

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

je $M^2 = -E$, *pročež system komplanarných matric $\alpha M + \beta$ podléhá těmže početním zákonům, jako system obyčejných komplexních kvantit $\alpha\sqrt{-1} + \beta$* ([Weyr, 1887], str. 387).

V 17. paragrafu *Zavedení čtyr základních matric* Ed. Weyr ukázal, že po zvolení čtyř lineárně nezávislých matic J_1, J_2, J_3, J_4 můžeme každou matici M vyjádřit ve tvaru

$$M = \varrho_1 J_1 + \varrho_2 J_2 + \varrho_3 J_3 + \varrho_4 J_4$$

a matice druhého řádu pokládat za systém hyperkomplexních čísel se čtyřmi základními jednotkami. Zavedl i tzv. strukturní konstanty, pomocí nichž se v tomto systému hyperkomplexních čísel násobí ([Weyr, 1887], str. 393–394):

Položme tedy

$$J_k J_h = \sum_{(j)} \varepsilon_j^{(k,h)} J_j \ ; \qquad (j = 1, 2, 3, 4)$$

i obdržíme pak součin každých dvou čísel našeho systemu opět ve tvaru čísla tohoto systemu

$$\sum_{(k)} \varrho_k J_k \cdot \sum_{(k)} \varrho'_k J_k = \sum_{(k,h)} \varrho_k \varrho'_h J_k \cdot \sum_{(j)} \varepsilon_j^{(k,h)} J_j \ .$$

Ed. Weyr uvedl jako jednoduchý příklad volbu následujících základních matic:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad J_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

V posledních dvou paragrafech (*Hamiltonův system kvaternionů*, *Pokračování*) položil

$$J_1 = 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a nalezl matice

$$J_2 = i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ J_3 = j = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}, \ J_4 = k = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix},$$

pro něž je $J_2 J_2 = J_3 J_3 = -J_1$ a $J_2 J_3 = -J_3 J_2 = J_4$. Tuto skutečnost komentoval takto:

Nyní jest patrné, že theorie matric jest totožná s theorií kvaternionů; stačí libovolnou matrici

$$M = \begin{Bmatrix} a & b \\ c & d \end{Bmatrix}$$

uvést do tvaru $w + xi + yj + zk$, kde w, x, y, z jsou skalary, t. j. do tvaru kvaternionu, aby ona shoda byla patrna. ([Weyr, 1887], str. 397)

Královská česká společnost nauk vydala roku 1889 Weyrův spis *O theorii forem bilinearných.* Ed. Weyr v něm vyložil základní partie teorie matic a uvedl je do souvislosti s teorií bilineárních forem a jejich transformací. Podal obecnější výklad než v předchozí stati *O binarných matricích* z roku 1887. Popularizoval rovněž výsledky několika svých odborných prací publikovaných cizojazyčně.

V tomto pojednání již Ed. Weyr užil termínu *matice*, oproti termínům *matrice*, resp. *matrix*, které užíval v předchozích letech.

Německá verze tohoto Weyrova spisu vyšla roku 1900 v časopise Monatshefte für Mathematik und Physik pod názvem *Zur Theorie der bilinearen Formen.* Nejedná se o doslovný překlad; některé partie byly mírně redukovány, některé naopak rozvedeny. Vynechána byla celá dvanáctá kapitola, patrně proto, že její výsledky byly v obecnější formě publikovány již v článku *Note sur la théorie des quantités complexes formées avec n unités principales.*

Thomas Muir (1844–1934) o Weyrově práci napsal:

The title of the paper might thus well have been The theory of matrices with an application to bilinear forms and an application to linear differential equations. ([Muir, 1930], str. 3–4)

V prvních osmi kapitolách Ed. Weyr vyložil základní fakta o maticích, operacích s maticemi, o lineární závislosti n-tic, o soustavách lineárních rovnic atd. Uvedl zde i svůj výsledek odhadu nulity součinu dvou matic, který navíc doplnil takovýmto zobecněním: jsou-li φ a ψ nesoudělné polynomy, potom nulita součinu matic $\varphi(M)$ a $\psi(N)$ je rovna součinu nulit těchto matic.

Hlavním cílem uvedeného Weyrova spisu však byla prezentace teorie kanonických tvarů matic, resp. bilineárních forem; tomuto tématu věnoval následující tři kapitoly své práce.

10. Matice v učebnicích a monografiích koncem 19. století

V tomto odstavci se pokusíme ukázat, jak pomalu a opatrně pronikaly matice na přelomu 19. a 20. století do učebních textů, kompendií a monografií.

Ernesto Pascal

Italský matematik E. Pascal (1865–1940) studoval v Neapoli, dva roky potom strávil na studijních pobytech v Pise a v Göttingen. Po návratu do Itálie pracoval v Pavii, od roku 1907 působil na univerzitě v Neapoli. Z jeho díla připomeňme jen *Esercizi e note critiche di calcolo infinitesimale* (1895), *Repertorio di matematiche superiori (Definizioni – Formole – Teoremi – Cenni bibliografici* (1898–1900) a *I miei integrafi per equazioni differenziali* (1913–1914).

Pascalova kniha *I determinanti. Teoria ed applicazioni* z roku 1897, která vyšla o tři roky později v německém překladu Hermanna Leitzmanna, již s maticemi intenzivně pracuje. Pojem matice je již na 3. straně:

L'assieme degli n^2 elementi disposti in quadrato forma ciò che si suol chiamare la matrice quadrata. ([Pascal, 1897], str. 3)

Matice prostupují celým textem knihy. Jejich násobení je definováno „po řádcích“, hodnost matice je zavedena pomocí subdeterminantů. Pokud je vůbec matice značena, tak dvěma dvojicemi svislých čar, někdy je zapsána i bez nich. V 54. paragrafu se setkáme i s kubickými maticemi. Ve věcném rejstříku německého vydání je heslu *Matrix* věnováno 20 řádků.

Eugen Otto Erwin Netto

Německý matematik E. Netto (1848–1919) působil na univerzitě v Giessenu, je autorem řady učebnic. V jeho velmi úspěšném textu *Substitutionentheorie und ihre Anwendungen auf die Algebra* z roku 1882, který byl přeložen do italštiny (1885) a angličtiny (1892), se ještě matice nevyskytují.

V prvním díle jeho další učebnice *Vorlesungen über Algebra* z roku 1896 již na pojem matice narazíme, ale jen zcela okrajově.[12] V paragrafu *Die quadratische Formen* sice najdeme maticově vyjádřenou transformaci kvadratické formy, nehovoří se však ještě o maticích, ale o determinantech:

... erhalten wir die transformirte, quadratische Form

$$g(y) = \sum_{\lambda,\mu} d_{\lambda\mu} y_\lambda y_\mu \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots n) \; ,$$

$$d_{\kappa\lambda} = \sum_{\mu,\nu} a_{\kappa\mu} a_{\lambda\nu} c_{\mu\nu} \qquad (\kappa, \lambda, \mu, \nu = 1, 2, \ldots n) \; ,$$

wobei dann auch wieder $d_{\kappa\lambda} = d_{\lambda\kappa}$ *sein wird.*

Man erkennt sofort die Richtigkeit der Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_{11} & \ldots & d_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{n1} & \ldots & d_{nn} \end{vmatrix}$$

oder kürzer

$$A \cdot C \cdot A = D \; ,$$

aus der hervorgeht, dass C und D gleichzeitig Null oder gleichzeitig von Null verschieden sind. ([Netto, 1896], díl I., str. 184)

Na následující stránce se již matice objevuje; chvíli se však hovoří o hodnosti matice, chvíli o hodnosti determinantu. Je vidět, jak těžce získával pojem matice samostatnou existenci.

Ist irgend eine Matrix vorgelegt, so sagen wir, dieselbe besitze den Rang r*, wenn alle in ihr enthaltenen Determinanten der Ordnung* $(r+1)$ *verschwinden, dagegen nicht alle der Ordnung* r*. Das giebt dann für unseren Fall, mit Hinblick auf das soeben Bewiesene: Die Determinanten C und D der ursprünglichen und der transformirten quadratischen Form haben denselben Rang.*

Hat die Determinante einer quadratischen Form den Rang r*, so sagen wir, die Form selbst sei vom Range* r*.* ([Netto, 1896], díl I., str. 185)

---

[12] Jedná se o 29 přednášek; v indexu se heslo „matice" nevyskytuje.

Ve druhém díle této Nettovy učebnice, který vyšel roku 1900, se opět definuje pojem hodnosti, tentokrát však v souvislosti s řešením soustav lineárních rovnic.[13]

Es sei ein System constanter Grössen a_{ik} gegeben ($i = 1, 2, \ldots p$; $k = 1, 2, \ldots q$), welche in p Zeilen und q Spalten angeordnet sind; r sei die grösste Zahl, für welche nicht alle Determinanten verschwinden, deren Elemente durch die Schnitte von r Zeilen und r Spalten des Systems geliefert werden. Dann heisst r der Rang des Systems. ([Netto, 1896], díl II., str. 188)

Zajímavé je, že se E. Netto při definici hodnosti systému odvolává na Kroneckerovu práci *Näherungsweise ganzzahlige Auflösung linearer Gleichungen* z roku 1884, v níž je pojem hodnost zaveden (viz výše). O Frobeniově definici hodnosti z roku 1879 patrně tehdy ještě nevěděl.

Heinrich Weber

Německý matematik H. Weber (1842–1913) po vysokoškolských studiích (Heidelberg a Lipsko) vystřídal větší počet působišť: Königsberg, Heidelberg (habilitace r. 1866, mimořádný a řádný profesor 1869, resp. 1870), Curych, Königsberg, Berlin-Charlottenburg, Marburg, Göttingen, Strassburg. Spolu s J. Wellsteinem (1869–1919) vydal rozsáhlé a úspěšné dílo *Enzyklopädie der Elementarmathematik* (1903–1907). Je autorem významné dvoudílné učebnice *Lehrbuch der Algebra*, jejíž první vydání je z let 1895 až 1896, druhé z let 1898 až 1899 a dotisk z roku 1912.

V prvním vydání se pojem matice zcela okrajově objevuje na několika místech prvního dílu v partiích o determinantech a soustavách lineárních rovnic (str. 82, 83, 86, 87, 96), v souvislosti s lineárními transformacemi a invarianty se nevyskytuje. Ve druhém dílu se sice zápisy matic (v současné podobě) objevují, ale termín matice nepadne, hovoří se pouze o substitucích. V rejstříku obou dílů prvního vydání je u hesla matice pouze jediný odkaz týkající se následující pasáže:

Ein solches Schema[14], das für sich noch keine numerische Bedeutung hat, heisst eine Matrix, insofern es als Quelle einer grösseren Anzahl von Determinanten betrachtet wird. ([Weber, 1895], díl I., str. 82)

Ve druhém vydání prvního dílu se matice objevují jen výjimečně (str. 97, 99, 101, 102, 103, 108, 114). Ve druhém vydání druhého dílu byl původní 6. oddíl *Gruppen linearen Substitutionen* (str. 151–183), který se o maticích vůbec nezmiňoval, výrazně upraven a rozšířen na oddíly dva (str. 163–243):

6. *Gruppen linearen Substitutionen*,
7. *Gruppeninvarianten.*

Některá místa prvního vydání byla pro druhé vydání nepatrně upravena tak, aby problematika substitucí byla dána do souvislosti s maticemi. Jedna z takto provedených úprav vypadá takto:

---

[13] Jedná se o 30. až 68. přednášku; v indexu heslo „matice“ opět není.

[14] Jedná se o matici sestavenou z koeficientů soustavy lineárních rovnic.

1. vydání: *Man benutzt zuweilen auch zur Bezeichnung einer Substitution einen einfachen Buchstaben, etwa A, und setzt dann ...*
([Weber, 1895], díl II., 1. vydání, str. 151–152)

2. vydání: *Man bezeichnet die Substitution also durch eine quadratische Matrix, für die man auch einen einzelnen Buchstaben, etwa A, braucht, und setzt dann ...* ([Weber, 1895], díl II., 2. vydání, str. 163)

Na jiném místě byl do původního textu prvního vydání vložen tento odstavec:

2. vydání: *Statt von der Zusammensetzung der Substitutionen können wir auch von der Zusammensetzung der Matrices reden, für die dieselben Gesetze gelten.* ([Weber, 1895], díl II., 2. vydání, str. 166)

Některé odstavce i celé paragrafy druhého vydání druhého dílu jsou však zcela nové a odrážejí postupně sílící teorii matic. Např. paragrafy

42. *Normalform linearer Substitutionen*,

43. *Vertauschbare Matrices*

na stranách 171–180 s maticemi výrazně pracují.

V partiích, které přepracovány nebyly, se autor o maticích vůbec nezmiňuje, vše zůstává prezentováno v řeči substitucí nebo transformací, i když se k jejich zápisu matice užívají:

Wir müssen ... noch die binären Collineationen

$$(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} (x_1, x_2)$$

betrachten ... wir beide Arten von Substitutionen übereinstimmend durch ein Symbol wie

$$\Theta = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

bezeichnen ... ([Weber, 1895], díl II., 2. vydání, str. 265–266)

Peter Muth

P. Muth (1860–1907) studoval v Heidelbergu a Giessenu, pak těžce onemocněl. Přesto se mu podařilo roku 1890 v Giessenu promovat. O devět let později vydal velké dílo o teorii elementárních dělitelů.

Monografie P. Mutha nazvaná *Theorie und Anwendung der Elementartheiler* se o maticích výslovně nezmiňuje. Je věnována důležité teorii kanonických tvarů bilineárních forem a příbuzným tématům; celou tuto problematiku jsme dnes zvyklí vnímat v maticovém tvaru.

Muthova monografie je postavena zejména na Weierstrassově teorii elementárních dělitelů, na výsledcích Kroneckerových, Frobeniových, Cauchyových, Sylvesterových atd.

V Muthově monografii se pracuje s bilineárními formami a se čtvercovými číselnými schémata, s jejich determinanty, se substitucemi apod. V indexu knihy se nevyskytuje termín „matice“, nejsou vůbec zmíněna jména Cayley, Hamilton. Užití pojmu systém, jeho vztah k bilineární formě i příslušnou symboliku vidíme v následujících krátkých ukázkách.

Es bedeute

$$|a_{ik}| \qquad (i, k = 1, 2, \dots\ n)$$

die Determinante eines Systems von n^2 *Elementen*

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{array} \quad ;$$

diese Elemente seien jetzt entweder ganze Zahlen – die Null mit eingeschlossen – oder ganze Funktionen einer oder mehrerer Variabelen.
([Muth, 1899], str. 4–5)

… Dieses System von n^2 *Elementen fassen wir mit Frobenius im Bilde einer bilinearen Form*

$$A = \sum a_{ik} x_i y_k \qquad (i, k = 1, 2, \dots\ n)$$

zusammen, deren Koefficientensystem eben jenes System der a_{ik} *vorstellt, deren Determinante also mit der Determinante*

$$|a_{ik}| \qquad (i, k = 1, 2, \dots\ n)$$

identisch ist. ([Muth, 1899], str. 20)

T. J. I. Bromwich se v recenzi divil, že P. Muth nepřijal maticovou řeč:

In §2 will be found a good account of the theory of "multiplying" bilinear forms; the author follows Frobenius in preference to Cayley, and introduces a matrix only as a picture (Bild) of the bilinear form.[15]
([Bromwich, 1901], str. 314)

Alfred North Whitehead

A. N. Whitehead (1861–1947) působil na Trinity College v Cambridge, na univerzitě v Londýně a od roku 1924 jako profesor filozofie na Harvardské univerzitě v Cambridge (Massachusetts). Věnoval se matematice, logice, fyzice a filozofii; je autorem knih *The axioms of descriptive geometry* (1907), *An introduction to mathematics* (1911) atd. Spolu s Bertrandem Russellem (1872–1970) sepsal v letech 1910 až 1913 slavné třísvazkové dílo *Principia mathematica.*

---

[15] V poznámce pod čarou připojil: *It is somewhat remarkable that Dr. Muth nowhere refers to Cayley – not even in his historical account of the subject.*

A. N. Whitehead je rovněž autorem významné učebnice *Treatise on universal algebra*, která vyšla roku 1898. Objevily se v ní i partie o determinantech, maticích a tenzorech. Její pojetí bylo ovlivněno díly několika významných matematiků 19. století, jakými byli hlavně Hermann Günther Grassmann (1809–1877), W. R. Hamilton a George Boole (1815–1864), ale i A. Buchheim a J. J. Sylvester.

Moje první kniha, Pojednání o obecné algebře, vyšla v únoru 1898. Začal jsem na ní pracovat v lednu 1891. Její myšlenky se do značné míry opíraly o dvě knihy Hermanna Grassmanna, Ausdehnungslehre z r. 1844 a Ausdehnungslehre z 1862. První z nich je daleko závažnější. Bohužel, když vyšla, nikdo jí nerozuměl; předběhla svou dobu o století. Skoro stejný vliv na mé myšlení mělo také dílo sira Williama Rowana Hamiltona Quaternions z r. 1853, spolu s předběžnou publikací z 1844, a Boolova Symbolická logika z r. 1859. Celé moje pozdější dílo o matematické logice je vyvozeno z těchto pramenů. … Pojednání o obecné algebře způsobilo, že jsem byl r. 1903 zvolen do Královské akademie. ([Whitehead, 1970], str. 13–14)

Whiteheadova monografie se dělí na sedm knih, které se dále člení na kapitoly; kniha je velmi rozsáhlá, celkem má 586 stran. Výklad postupuje od obecných principů, přes algebru symbolické logiky, četné geometrické partie až k vektorům. Matice jsou předmětem šesté kapitoly čtvrté knihy (články 140 až 153 na stranách 248–269); pojem matice je zaveden v úzkém vztahu k pojmu operátor.

The operator ϕ – called by Grassmann a quotient – may be identified with Cayley's matrix. For assume

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha_{11}e_1 + \alpha_{21}e_2 + \cdots + \alpha_{\nu 1}e_\nu \ , \\ a_2 &= \alpha_{12}e_1 + \alpha_{22}e_2 + \cdots + \alpha_{\nu 2}e_\nu \ , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_\nu &= \alpha_{1\nu}e_1 + \alpha_{2\nu}e_2 + \cdots + \alpha_{\nu\nu}e_\nu \ . \end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned} \phi x = (&\alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \cdots + \alpha_{1\nu}\xi_\nu)e_1 \\ &+ \ (\alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \cdots + \alpha_{2\nu}\xi_\nu)e_2 \\ &+ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \ (\alpha_{\nu 1}\xi_1 + \alpha_{\nu 2}\xi_2 + \cdots + \alpha_{\nu\nu}\xi_\nu)e_\nu \ . \end{aligned}$$

Hence if we put $\phi x = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \cdots + \eta_\nu e_\nu$, then the usual notation for matrices,

$$(\eta_1, \eta_2 \ \ldots \ \eta_\nu) = \left(\begin{vmatrix} \alpha_{11}\ , & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21}\ , & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2\nu} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{\nu 1}\ , & \alpha_{\nu 2} & \ldots & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix} \between \xi_1, \xi_2 \ \ldots \ \xi_\nu \right) \ .$$

Thus we may identify ϕ with the matrix $||a_{\varrho\sigma}||$. ([Whitehead, 1898], str. 249)

Na dalších stranách je rozvíjena teorie matic od elementárních poznatků o maticových operacích, o nulitě apod. až k charakteristické rovnici, vlastním číslům a jejich vlastnostem, symetrickým a antisymetrickým maticím. Matice se však objevují i v dalších kapitolách Whiteheadovy knihy.

11. Encyklopedie, přehledové práce, bibliografie

Zajímavý obraz o vztahu matematiků k maticím a o postupné recepci teorie matic získáme z německé a francouzské matematické encyklopedie ([EMW], [ESM]), které byly vytvářeny od konce 19. století až do třicátých let 20. století. K nim můžeme přiřadit fundované italské *Repertorio di matematiche superiori (Definizioni – Formole – Teoremi – Cenni bibliografici)* [Pas1] z let 1898 a 1900 nesoucí jméno matematika Ernesta Pascala a německou verzi tohoto díla nazvanou *Repertorium der höheren Mathematik* [Pas2] z let 1900 a 1902 a její druhé, přepracované a rozšířené vydání z let 1910 až 1929. Rovněž je možno vzít v úvahu italskou encyklopedii [EME] z let 1930 až 1932. Cenné informace získáme i z prvních bibliografických přehledů prací o maticích, které zpracovali Thomas Muir a Joseph Henry Maclagan Wedderburn (1882–1948).

Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften

Rozsáhlá německá matematická encyklopedie nazvaná *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen* vycházela v letech 1898 až 1935. Je vybavena podrobnými rejstříky, které umožňují pohodlné vyhledávání témat i osob. S pojmem matice se však v této encyklopedii téměř nesetkáme.

V článku I.A.2 *Kombinatorik* z roku 1898 se E. Netto o maticích zmínil v partii věnované determinantům jen na 14 řádcích ([EMW], díl I.1; [Netto, 1898], str. 45–46).

V rozsáhlé, téměř čtyřicetistránkové stati I.A.4 *Theorie der gemeinen und höheren complexen Grössen*, kterou sepsal ve stejném roce E. Study, jsou čtvercové matice dány do vzájemně jednoznačného vztahu s lineárními transformacemi a bilineárními formami v partii nazvané *Specielle Systeme mit n^2 Einheiten. Bilineare Formen* ([EMW], díl I.1; [Study, 1898], str. 168–171); jsou značeny symbolem $||a_{i\kappa}||$, ale příliš se s nimi nepracuje.

V pojednání I.B.1b *Rationale Funktionen mehrerer Veränderlichen* z roku 1899 definoval E. Netto v souvislosti s řešením soustav lineárních rovnic hodnost systému, ale o maticích se nezmínil:

Liegen die pq Grössen a_{ik} $(i = 1, 2, \dots p;\ k = 1, 2, \dots q)$ vor, so heisst das System der a_{ik} vom Range r, wenn r die grösste Zahl ist, für welche nicht alle aus r Zeilen und r Spalten der a_{ik} gebildeten Determinanten verschwinden. ([EMW], díl I.1; [Netto, 1898], str. 269)

V článku I.B.2 *Invariantentheorie* z roku 1899 od Friedricha Wilhelma Franze Meyera (1856–1934) se rovněž s pojmem matice téměř nesetkáme; zmíněn je Cayleyův maticový přístup z roku 1855 ([EMW], díl I.1; [Meyer, 1899], str. 329, 361).

V příspěvku I.C.2 *Arithmetische Theorie der Formen* z roku 1900 definuje Karl Theodor Vahlen (1869–1945) hodnost systému koeficientů lineárních forem, ale termín matice se tu opět neobjevuje ([EMW], díl I.2; [Vahlen, 1900], str. 582–583).

V rozsáhlém pojednání III.AB.11 *Systeme geometrischer Analyse* (1916 až 1923) od Hermanna Rothe (1882–1923), Alfreda Lotze (1882–1964) a Ch. Betsche, které se týká barycentrického počtu, metody ekvipolencí, kvaternionů a jejich zobecnění a Grassmannovy teorie, se sice s maticemi setkáme, ale rovněž jen zcela okrajově ([EMW], díl III.1.2; [Rothe, Lotze, Betsch, 1916]).

Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées

Francouzská matematická encyklopedie vycházela v letech 1904 až 1916. Některé její články vznikaly jako volné, více či méně přepracované a doplněné překlady statí z encyklopedie německé, některé vznikaly samostatně. Není zdaleka tak rozsáhlá, jako encyklopedie německá.

Ve francouzské encyklopedii se s maticemi nesetkáváme častěji než v encyklopedii německé.

V článku I.2 *Analyse combinatoire et theorie des déterminants* z roku 1904, který je přepracovaným a rozšířeným překladem Nettovy stati z encyklopedie německé – autorem je Henry Gustav Vogt (1864–?) – se už o maticích okrajově hovoří v odstavcích

24. *Relations entre les mineurs d'un déterminant ou d'une matrice. Généralisations*,
26. *Rang d'un déterminant ou d'une matrice. Déterminants bordés* ([ESM], díl I.1; [Netto, Vogt, 1904], str. 103–106, 107–108).

Článek I.9 *Les fonctions rationelles* z roku 1907 je překladem a rozšířením druhé Nettovy stati z německé encyklopedie; autor R. Le Vavasseur se o hodnosti matice nesměle zmiňuje v 11. paragrafu *Équations linéaires homogènes* ([ESM], díl I.2; [Netto, Vavasseur, 1907], str. 36–38).

V článku I.16 *Théorie arithmétique des formes* z roku 1906, který napsali K. T. Vahlen a E. Cahen, se s maticemi setkáváme pouze v souvislosti se soustavami lineárních rovnic, ale opět jen okrajově – hodnost matice, řešitelnost soustavy lineárních rovnic ([ESM], díl I.3; [Vahlen, Cahen], str. 80–82).

Repertorio di matematiche superiori
Repertorium der höheren Mathematik

V letech 1898 a 1900 vyšlo ve dvou svazcích italské *Repertorio di matematiche superiori* E. Pascala nesoucí podtitul *Definizioni – Formole – Teoremi*

– *Cenni bibliografici.* O maticích v něm najdeme jen malé zmínky ve třetí kapitole *Teoria dei determinanti* ([Pas1], str. 53–72) – uvedeny jsou tyto pojmy: čtvercová, resp. obdélníková matice, subdeterminant; násobení dvou obdélníkových matic téhož typu se děje „po řádcích“.

Roku 1910 vyšlo druhé, podstatně rozšířené německé vydání prvního svazku kompendia *Repertorium der höheren Mathematik. Algebra, Differential- und Integralrechnung.* O maticích je pojednáno v druhé kapitole *Kombinatorik, Determinanten und Matrices* ([Pas2], str. 43–167), kterou zpracoval Alfred Loewy (1873–1935). S pojmy čtvercová, resp. obdélníková matice a hodnost matice se čtenář setká již v druhém paragrafu této kapitoly *Historisches und Allgemeines über Determinanten.* Další poznatky o maticích jsou v šestém paragrafu *Das Rechnen mit Matrices. Zusammenhang zwischen Matrices, linearen Substitutionen und bilinearen Formen.* Mimo jiné je zde rozvíjen vztah mezi hodností matice a lineární závislostí řádků, resp. sloupců.

Matice prostupují celým textem, jsou zde již provázány s teorií bilineárních a kvadratických forem a jejich transformací, s otázkami kanonických tvarů, s teorií elementárních dělitelů, s ortogonálními substitucemi atd. Celý text je na mnoha místech doplněn řadou bibliografických informací. Jen okrajově jsou matice zmíněny na stranách 403–405 v páté kapitole nazvané *Invariantentheorie* ([Pas2], str. 358–420), kterou zpracoval Heinrich Emil Timerding (1873–1945).

Enciclopedia delle matematiche elementari

V letech 1930 a 1932 vyšel dvousvazkový první díl italské matematické encyklopedie, kterou editovali Luigi Berzolari (1863–1949), Giulio Vivanti (1859–1949) a Duilio Gigli (1878–1933). Obsahuje řadu zajímavých statí.

V přehledném Berzolariově článku *Determinanti* (30 stran) se od samého počátku velmi úspěšně prolíná látka o maticích s látkou o determinantech. Článek je doplněn velkým množstvím bibliografických odkazů a četnými historickými poznámkami, které je možno velmi úspěšně využít při podrobnějším bádání o vývoji teorie determinantů a matic.

V článku *Sostituzioni lineari, forme lineari, bilineari, quadratiche* (27 stran) téhož autora se však matice objevují jen okrajově.

Bibliografie T. Muira a J. H. M. Wedderburna

Ve druhé polovině 19. století se ještě málo matematiků věnovalo přímo maticím. Poměrně dobrou představu o velikosti tehdejší matematické produkce v teorii matic si můžeme udělat ze dvou bibliografických přehledů, které sestavil Thomas Muir.

Prvním je *List of writings on the theory of matrices*, apendix Muirovy práce *A reinvestigation of the problem of the automorfic linear transformation of* *a bipartite quadric* z roku 1898.[16] Uvádí 50 prací třinácti autorů vydaných v období 1858 až 1894 (J. J. Sylvester 20, A. Buchheim 7, H. Taber 6, A. Cayley 5, W. H. Metzler 3, Ed. Weyr 2, E. Laguerre 1, B. Peirce 1, C. S. Peirce 1, W. Spottiswoode 1, G. Frobenius 1, A. R. Forsyth 1, T. Muir 1); Muirovým cílem bylo sestavit *a first approximation to a complete list of writings on Matrices.*

Druhý Muirův soupis *The literature of Cayleyan matrices* z roku 1930 uvádí pro období 1854 až 1894 dalších 18 prací o maticích (přibylo osm autorů). Následuje 106 titulů z období 1895 až 1928; z nich však pouze 14 je z období 1895 až 1900 (G. Frobenius, J. Brill, L. Ravut). Celkem je v tomto druhém přehledu uvedeno 172 titulů.

Joseph Henry Maclagan Wedderburn uvedl v závěru své monografie *Lectures on matrices* z roku 1934 v chronologickém uspořádání 549 prací věnovaných maticím, z toho 127 pro období do roku 1894, 186 prací do roku 1900 a 440 prací do roku 1928 (včetně). Pečlivým srovnáním bibliografických soupisů T. Muira a J. H. M. Wedderburna lze zjistit, jak se jejich pohledy na vymezení teorie matic liší. Poznamenejme, že v dalším vydání Wedderburnovy knihy je bibliografický přehled doplněn o dalších 129 titulů z let 1903 až 1936.

12. Učebnice a monografie teorie matic po roce 1900

> *Many modern writers have based their definitions of a determinant on the existence of a square matrix. ... From this point of view a determinant does not exist without its square matrix, and, judging from many of the textbooks on elementary mathematics, it is likely that many students consider the square matrix as an essential part of a determinant, so that the term determinant conveys to them a dual concept composed of a square matrix and a certain polynomial associated therewith. When they speak of the rows and columns of a determinant they naturally are thinking of its matrix and when they speak of the value thereof they are naturally thinking of the polynomial implied by the term determinant.*
>
> ([Miller, 1930], str. 216)

Počátkem 20. století se matice postupně dostávají do povědomí matematiků, maticová řeč se šíří a je stále více užívána a uznávána. Důležité výsledky teorie bilineárních a kvadratických forem jsou postupně překládány do maticové řeči. Jedná se zejména o problematiku kanonických tvarů, o výsledky týkající se vlastních čísel a vlastních vektorů (spektrální teorie matic). Současně jsou v maticové řeči stále častěji vyjadřovány substituce a transformace.

[16] V první části práce se T. Muir zabýval otázkou, jakými lineárními transformacemi přechází kvadratická forma sama v sebe.

První učebnice a monografie, v nichž hrají matice nezanedbatelnou roli, postupně vznikají až ve druhém desetiletí 20. století. Prezentují matematiku efektivním, moderním způsobem, přinášejí nové pohledy, upevňují maticovou terminologii, ovlivňují další rozvoj matematiky a jejích nejrůznějších aplikací.

V následujících odstavcích se pokusíme podat podrobnější nástin toho, jaké místo matice zaujímaly v první polovině 20. století v některých významnějších učebnicích a monografiích. Pozornost budeme věnovat i prvním učebnicím a monografiím teorie matic. Budeme sledovat vítězné tažení teorie matic knižní matematickou literaturou, a to zejména v prvních třech desetiletích 20. století.

Leopold Kronecker

Kroneckerovy univerzitní přednášky o teorii determinantů byly vydány v Lipsku roku 1903 pod názvem *Vorlesungen über die Theorie der Determinanten.* Jedná se o 21 kurzovních přednášek sepsaných na základě dlouholetého učitelského působení autora v letech 1883 až 1891. Přednášky o determinantech byly součástí většího celku přednášek o obecné aritmetice.

20. přednáška je věnována základům teorie matic, 21. přednáška široké problematice maticových ekvivalencí (celkem 42 stran). Matice se okrajově vyskytovaly již v předchozích přednáškách; L. Kronecker však hovořil častěji o „systémech“. Zařazení přednášek o maticích zdůvodnil takto:

... wollen wir jetzt Vorschriften für das Rechnen mit Systemen oder Matrizen aufstellen ... die Betrachtung der Matrizen nichts anderes ist als eine Erweiterung der elementaren Arithmetik. ([Kronecker, 1903], str. 348)

Následuje partie o základech maticového počtu, o operacích s maticemi a jejich vlastnostech, o invertování, resp. „dělení“ matic apod. O hodnosti součinu matic uvedl autor následující tvrzení:

Der Rang eines Produktes $D = AB \cdots C$ ist höchstens gleich dem Range desjenigen Faktors, welcher den kleinsten Rang hat. ([Kronecker, 1903], str. 353)

Pro záměnné matice A, B zformuloval následující větu:

Sind also B und A vertauschbare Systeme, und ist $|A| \lesseqgtr 0$, so gibt es ein und nur ein System $\frac{B}{A}$, für welches die beiden Gleichungen

$$A \cdot \frac{B}{A} = \frac{B}{A} \cdot A = B$$

erfüllt sind. ([Kronecker, 1903], str. 355)

O transponování součinu matic uvedl následující tvrzení:

Ist also $C = AB \cdots D$ ein Produkt beliebig vieler Systeme, so ist das konjugierte System $\overline{C}$ gleich dem Produkte der konjugierten Faktoren, aber in umgekehrter Reihenfolge. ([Kronecker, 1903], str. 359)

O invertování součinu regulárních matic uvedl takovéto tvrzení:

Ist ein System von nicht verschwindender Determinante aus mehreren Faktoren zusammengesetzt, so ist das reziproke System aus den reziproken

Systemen der Faktoren, aber in der umgekehrten Reihenfolge zusammengesetzt. ([Kronecker, 1903], str. 360)

V závěru 20. přednášky věnoval L. Kronecker pozornost maticím, jejichž prvky jsou racionální funkce, celistvé, resp. racionální.

Conrad Gustav Bauer

G. Bauer (1820–1906) studoval na univerzitách v Erlangen, v Berlíně a na polytechnice ve Vídni. Působil na univerzitě v Mnichově jako soukromý docent (od r. 1857), jako mimořádný a řádný profesor matematiky (od r. 1865, resp. 1869).[17] Jeho rozsáhlá učebnice algebry vznikla z přednášek proslovených na univerzitě v Mnichově v období 1870 až 1897. K tisku ji připravil *Mathematische Verein München*, který G. Bauer zakládal. Předmluvy k prvnímu až třetímu vydání (1903, 1910, 1921) napsal Karl Doehlemann (1864–1926), profesor mnichovské univerzity. Třetí vydání z roku 1921 přepracoval L. Bieberbach – čtvrté vydání je z roku 1928, páté z roku 1933.

V Bauerově učebnici *Vorlesungen über Algebra* z roku 1903 se matice vyskytují jen zcela okrajově; objevují se v kapitole o determinantech, a to až na straně 280 – v souvislosti s problematikou soustav lineárních rovnic.[18] Pojem hodnosti není zaveden pro matice, ale pro determinanty a kvadratické formy. Matice se vyskytují pouze jako schémata, z nichž jsou tvořeny subdeterminanty. O determinantech matic se píše až ve 28. kapitole (str. 314–318), při násobení determinantů se násobí navzájem řádky odpovídajících matic (str. 294).

Eugen Otto Erwin Netto

V Nettově textu *Elementare Algebra. Akademische Vorlesungen für Studierende der ersten Semestr* z roku 1904 se s pojmem matice setkáváme již v 11. paragrafu (matice $2 \times m$, z níž se tvoří determinanty druhého řádu).[19] V kapitole o determinantech nacházíme již matice typu $m \times n$, zaveden je též pojem hodnosti matice (pomocí subdeterminantů). Matice jsou užívány v partii o soustavách lineárních rovnic (matice soustavy).

V Nettově knížce *Gruppen- und Substitutionentheorie* z roku 1908 se matice nevyskytují.

V knize *Die Determinanten* z roku 1910 věnoval E. Netto maticím jednu z dvanácti kapitol (*Matrizen, Rang einer Matrix, Rang einer Determinante, Matrizen mit gleichem Range, Komposition von Matrizen*; str. 58–63).[20] Index však odkazuje čtenáře pouze na hesla *Matrix, – konjugierte, – orthogonale, – quadratische, – transponierte* s uvedením stran 58, 60, 62, 102 a 107.

---

[17] Viz A. Voss: *Zur Erinnerung an Gustav Bauer*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 16(1907), 54–75.

[18] V indexu je u hesla „matice“ jediný odkaz – právě na str. 280.

[19] V indexu je již heslo „matice“, ale jen se dvěma odkazy – str. 10, 123.

[20] V indexu jsou u hesla „matice“ čtyři položky: *konjugierte, orthogonale, quadratische, transponierte.*

V Nettově učebnici *Algebra* z roku 1915 nacházíme exaktní definici obdélníkové matice již na 18. straně (s odkazem na Cayleyovu práci *Remarques sur la notation des fonctions algébriques* z roku 1855):

Unter einer Matrix von $m \cdot n$ Elementen x_{ik} verstehen wir ein in Form eines Rechtecks angeordnetes Elementensystem von m Zeilen und n Spalten

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix} = \big(x_{ik} \big) \qquad (i = 1, 2, \dots, m; \quad k = 1, 2, \dots, n)$$

([Netto, 1915], str. 18). Následuje definice hodnosti matice (pomocí nulovosti a nenulovosti subdeterminantů) s odkazem na Frobeniovu práci *Theorie der linearen Formen mit ganzen Coefficienten* z roku 1879.

Stále však převládá terminologie z teorie determinantů. Ještě před definicí matice je totiž ukázána nekomutativita maticového násobení a komentována takto:

Man überzeugt sich leicht davon, daß im allgemeinen

$$\big|x_{ik}\big| \cdot \big|\xi_{ik}\big| \neq \big|\xi_{ik}\big| \cdot \big|x_{ik}\big|$$

hinsichtlich der Form der Produktdeterminante ist, während natürlich der numerische Wert beider Seiten der gleiche ist. Für die Produktbildung von Determinanten ist also das Kommutationsgesetz nicht gültig.
([Netto, 1915], str. 18)

S maticemi se v této knize setkáváme ještě v souvislosti s řešitelností soustavy lineárních rovnic ([Netto, 1915], str. 79–99).

Salvatore Pincherle

S. Pincherle (1853–1936) studoval v Pise (Scuola Normale Superiore), ve školním roce 1877/1878 poslouchal v Berlíně přednášky E. E. Kummera, L. Kroneckera a K. T. Weierstrasse. Po krátkém působení na univerzitě v Palermu přednášel od roku 1881 na univerzitě v Bologni. Je jedním z tvůrců funkcionální analýzy.

Ve dvojdílném učebním textu *Lezioni di algebra complementare* z let 1906 a 1909 (3. vydání je z let 1924 a 1926) zavedl v partii o determinantech nejprve pojem matice, a teprve potom definoval determinant:

Lo specchio così formato da questi mn numeri, in cui è pertanto essenziale l'ordine dei numeri stessi, si dice matrice. …

… il quale viene chiamato determinante corrispondente alla matrice.
([Pincherle, 1906], díl II., vydání 1926, str. 48–49)

Zajímavé je, že ještě roku 1926 jsou v jeho učebním textu zavedeny čtyři druhy násobení matic – *moltiplicazione per linee*, *per colonne* atd. Při každém druhu násobení musí odpovídajícím způsobem „souhlasit“ typy obou matic.

... dati due determinanti di uguale ordine, il loro prodotto si può fare indifferentemente per linee o per colonne, e poichè è lecito ... mutare le linee in collone, al determinante prodotto si possono dare quattro forme diverse.
([Pincherle, 1906], díl II., vydání 1926, str. 76)

Hodnost matice (*caratteristica*, *rango*) je zavedena pomocí subdeterminantů.

Con caratteristica s'intende l'ordine del determinante non nullo di ordine massimo che si possa estrarre dalla matrice.
([Pincherle, 1906], díl II., vydání 1926, str. 92)

Maxime Bôcher

Americký matematik M. Bôcher (1867–1918) studoval v letech 1883 až 1888 na univerzitě v Cambridge, v letech 1888 až 1891 v Göttingen, byl žákem Benjamina Osgooda Peirceho (1854–1914), Felixe Kleina (1849–1925) a Hermanna Amanduse Schwarze (1843–1921). Od roku 1904 byl profesorem matematiky na Harwardu v USA. Věnoval se teorii potenciálu, teorii funkcí, diferenciálním rovnicím, trigonometrickým řadám, diferenciálním operátorům a matematické fyzice. V letech 1909 až 1910 byl prezidentem Americké matematické společnosti; každých pět let je na jeho počest udělována cena M. Bôchera.

Roku 1907 vyšla Bôcherova učebnice *Introduction to higher algebra*, která věnuje velkou pozornost právě maticím. Byla velmi úspěšná, její další vydání či reprinty jsou z let 1922, 1924, 1933, 1938, 1949, ..., 1964, 2004. Již roku 1910 vyšla německy jako *Einführung in die höhere Algebra* v překladu Hanse Becka (předmluvu k německému vydání napsal M. Bôcher a úvodní slovo E. Study; další německá vydání jsou z let 1925 a 1932). Roku 1933 vyšel ruský překlad pod názvem *Vvedenie v vysšuju algebru.*

Podstatnou část Bôcherovy učebnice tvoří – z dnešního pohledu – lineární algebra, velká pozornost je věnována maticím, jež prostupují celým textem knihy. Druhá kapitola, která je nazvána *A few properties of determinants*, začíná vysvětlením pojmu matice a jeho exaktní definicí. Z této pasáže je vidět, že pojem determinantu byl tehdy zcela běžný, zatímco pojem matice bylo třeba podrobně objasnit ([Bôcher, 1907], str. 20–21).

We assume that the reader is familiar with the determinant notation, and will merely recall to him that by a determinant of the nth order

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

we understand a certain homogeneous polynomial of the nth degree in the n^2 *elements* a_{ij}. *By the side of these determinants it is often desirable to consider the system of the* n^2 *elements arranged in the order in which they stand in* *the determinant, but not combined into a polynomial. Such a square array of n^2 elements we speak of as a matrix. In fact, we will lay down the following somewhat more general definition of this term:*

DEFINITION 1. *A system of mn quantities arranged in a rectangular array of m rows and n columns is called a matrix. If $m = n$, we say that we have a square matrix of order n.*

Determinant označil M. Bôcher jednoduchými svislými čarami, matici dvojitými svislými čarami; uvedl však rovněž označení matice kulatými závorkami, které je dnes asi nejběžnější. Zdůraznil rozdíl mezi maticí a determinantem, objasnil, jak se na matice dívat:

Even when a matrix is square, it must be carefully noticed that it is not a determinant. In fact, a matrix is not a quantity at all, but a system of quantities. ([Bôcher, 1907], str. 21)

V tomto okamžiku autor odkázal čtenáře na 21. paragraf své knihy, kde jsou již matice chápány jako nové objekty, které jsou hodny samostatné existence.

A matrix of m rows and n columns being merely a set of mn quantities … arranged in a definite order, is, … a complex quantity with mn components; and it is only a special application of the theory of complex quantities … ([Bôcher, 1907], str. 61)

Bôcherova kniha se věnuje lineární závislosti, soustavám lineárních rovnic, lineárním transformacím a jejich maticovému vyjádření, invariantům, lineárním, bilineárním a kvadratickým formám, teorii ekvivalencí forem, kanonickým tvarům atd. Nacházíme zde klasickou definici hodnosti matice i nutnou a postačující podmínku řešitelnosti soustavy lineárních rovnic:

DEFINITION 3. *A matrix is said to be of rank r if it contains at least one r-rowed determinant which is not zero, while all determinants of order higher than r which the matrix may contain are zero.*

A matrix is said to be of rank 0 if all its elements are zero.

([Bôcher, 1907], str. 22)

THEOREM 1. *A necessary and sufficient condition for a system of linear equations to be consistent is that the matrix of the system have the same rank as the augmented matrix.* ([Bôcher, 1907], str. 46)

Bôcherova kniha sehrála velmi důležitou roli při šíření teorie matic a podstatnou měrou přispěla k jejímu všestrannému uznání.

Cuthbert Edmund Cullis

C. E. Cullis (?–1954) studoval nejprve v Anglii, potom v Jeně a v Berlíně, kde byl v kontaktu s G. Frobeniem. Řadu let působil na univerzitě v Kalkatě.

Cullisova třídílná monografie *Matrices and determinoids* je snad první knihou, která má slovo „matice“ ve svém názvu. Jednotlivé díly vycházely postupně v letech 1913, 1918 a 1925. C. E. Cullis sepsal toto rozsáhlé dílo na základě svých přednášek, které měl na univerzitě v Kalkatě. Podrobně shrnul celou teorii matic a determinantů, a to od výsledků Cayleyových a Sylvesterových až po práce Frobeniovy. Navíc rozšířil teorii determinantů na obdélníkové matice. V úvodu prvního dílu (xii + 430 stran) uvedl:

Its chief feature is that it deals with rectangular matrices and determinoids as distinguished from square matrices and determinants, the determinoid of a rectangular matrix being related to it in the same way as a determinant is related to a square matrix. An attempt is made to set forth a complete and consistent theory or calculus of rectangular matrices and determinoids.
([Cullis, 1913], str. v)

Obsah prvního dílu dobře charakterizuje jeho náplň i celkovou koncepci:

I. *Introduction of rectangular matrices and determinoids.*

II. *Affects of the elements and derived products of a matrix or determinoid.*

III. *Sequences and the affects of derived sequences.*

IV. *Affects of derived matrices and derived determinoids.*

V. *Expansions of a determinoid.*

VI. *Properties of a product formed by a chain of matrix factors.*

VII. *Determinoid of a product formed by a chain of matrix factors.*

VIII. *Matrices of minor determinants.*

IX. *Rank of a matrix and connections between the rows of a matrix.*

X. *Matrix equations of the first degree.*

XI. *Solution of any system of linear algebraic equations.*

K označení matice použil C. E. Cullis hranaté závorky:

$$A = [a]_m^n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} .$$

Druhý díl Cullisovy monografie *Matrices and determinoids* vyšel roku 1918 (xxiv + 555 stran), první část třetího dílu roku 1925 (xviii + 681 stran), druhá část třetího dílu zůstala v rukopise. Cullisovu monografii podrobně recenzoval James Byrnie Shaw v časopise Bulletin of the American Mathematical Society v letech 1920 a 1927.[21] Ve své první recenzi diskutoval mimo jiné chápání pojmu matice:

Further it should be noticed that a matrix of m *long rows and* n *short rows is as much an assemblage of* m *vectors in an* n*-dimensional space, or of* n *vectors in an* m*-dimensional space, as it is of* mn*-elements. A matrix may be looked upon as a linear homogeneous substitution, which converts certain variables into others, or it may be considered as a linear vector operator which converts all vectors from the origin into others from the origin, or it may be considered as a dyadic, the sum of several dyads, – all useful definitions and yielding very*

[21] Viz též A. C. Bose: *Cullis's matrices and determinants*, Bull. Calcutta Math. Soc. 10(1920), 243–256, 11(1921), 51–82.

important results. As a linear vector operator the particular elements entering the matrix are not of so much importance as other features of the matrix. ([Shaw, 1920], str. 225–226)

V závěru své první recenze J. B. Shaw napsal:

The treatment is quite detailed, with numerous numerical examples, rather loose in its development, and lacking in synthesis, so that the reader becomes bewildered with the multitudinous formulas and other details. A synopsis of it would be useful. ([Shaw, 1920] str. 233)

Cullisovo rozsáhlé dílo o maticích nemělo velký ohlas. Ani T. Muir jeho výsledky dostatečně neocenil.

H. W. Turnbull vzpomínal, že do vydání Cullisovy monografie neměl o maticích hlubší znalosti, že v té době ještě nebyl význam maticového počtu dostatečně rozpoznán.[22] Poznamenal rovněž, že C. E. Cullis užíval terminologii, která nebyla jednoduchá a ztěžovala proto přístupnost tématu.

Leonard Eugene Dickson

Významný americký matematik L. E. Dickson (1874–1954) studoval na univerzitách v Texasu a Chicagu, působil nejprve v Texasu, a potom v Chicagu. Byl velkým specialistou na teorii čísel a algebru, na teorii grup a teorii konečných těles, zabýval se i algebraickou geometrií a teorií invariantů. Slavná a stále široce využívaná je jeho třídílná monografie *History of the theory of numbers* z roku 1934.

Dicksonova monografie *Algebras and their Arithmetics* z roku 1923 je proslulá. Roku 1927 vyšla v německém přepracování J. J. Burckhardta a E. Schubartha pod názvem *Algebren und ihre Zahlentheorie*; doplněna byla závěrečnou kapitolou *Idealtheorie in rationalen Algebren*, jejímž autorem je Andreas Speiser (1885–1970). S maticemi se setkáváme v této knize již ve 3. paragrafu *Matrices*, jejich zavedení je motivováno prací s lineárními transformacemi. Matice a maticové algebry hrají v této knize významnou roli.

I v německé verzi této monografie je maticový aparát hojně využíván, s pojmem matice se čtenář setká v souvislosti s lineárními transformacemi již v první kapitole nazvané *Körper, Polynome, Matrizen*, a to v 8. paragrafu *Matrizen.* Ve druhé kapitole nazvané *Einführung in die Algebren* je v 18. paragrafu *Vollständige Matrixalgebren* zavedena tzv. úplná maticová algebra.

Roku 1926 vydal L. E. Dickson knihu *Modern algebraic theories*, která vznikla z jeho přednášek. V úvodu uvedl:

The book develops the theories which center around matrices, invariants, and groups, which are among the most important concepts in mathematics. ([Dickson, 1926], str. iii)

Matice se v této knize objevují ve třetí kapitole nazvané *Matrices, bilinear forms, linear equations* (str. 39–63), která začíná těmito slovy:

[22] H. W. Turnbull: *Cuthbert Edmund Cullis*, The Journal of the London Mathematical Society 30(1955), 252–255.

Chapters III–VI, which are independent of I–II, give a new exposition of the subject usually called higher algebra. We first develop Cayley's calculus of matrices, and the essentially equivalent subject of bilinear forms. The main theorems on the solution of systems of linear equations are not presupposed, but are deduced as corollaries. ([Dickson, 1926], str. 39)

L. E. Dickson matice zavedl v souvislosti s popisem souboru m lineárních forem o n proměnných, resp. s popisem lineárních transformací. Definoval maticové operace, charakteristickou rovnici matice, hodnost matice (pomocí subdeterminantů). Matice využil k popisu bilineárních forem a k formulaci základních výsledků z teorie soustav lineárních rovnic. Předpokládal znalost základních poznatků o determinantech; determinanty se totiž objevily v jeho knize bez jakéhokoli vysvětlení již v prvním paragrafu.
V dalších kapitolách L. E. Dickson využíval maticový aparát v partiích o kvadratických a bilineárních formách, o lineárních transformacích, kanonických tvarech, podobnosti atd.

Poznamenejme, že Dicksonovu knihu *Modern algebraic theories* přeložil do němčiny Ewald Bodewig; vyšla roku 1929 pod názvem *Höhere Algebra.*

Rudolf Hans Heinrich Beck

H. Beck (1876–1942) působil na univerzitě v Bonnu. Do němčiny přeložil výše uvedenou Bôcherovu učebnici *Introduction to higher algebra.* Je autorem krásné a moderně napsané učebnice *Einführung in die Axiomatik der Algebra.*

Celou touto Beckovou knihou z roku 1926 prostupují matice, dvě kapitoly z dvanácti jsou jim plně věnovány:

IV. *Matrizes* (str. 31–40),

IX. *Proportionalität der Matrizes* (str. 111–126).

Matice v této knize předcházejí determinantům, kterým je věnována až desátá kapitola. I z připojeného indexu je vidět, jaký význam autor maticím přikládal (např. ve srovnání s determinanty). Hodnost matice již zde není definována pomocí determinantů. Autor zavedl ekvivalentní soustavy lineárních rovnic, kterým odpovídají ekvivalentní matice.

Eine n-reihige Matrix heißt nicht singulär oder vom Range n, sobald sie der Einheitsmatrix äquivalent ist ... ([Beck, 1926], str. 55)

Die Zahl r der in der Normalform einer Matrix auftretenden Einsen heißt der Rang der Matrix. ([Beck, 1926], str. 64)

Hodnost matice je dále dána do souvislosti s lineární závislostí a nezávislostí vektorů.

Die k Vektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ sind dann und nur dann linear unabhängig, wenn ihre Matrix den Rang k hat. ([Beck, 1926], str. 74)

Der Rang einer Matrix ist die Dimensionszahl des aus ihren Vektoren aufgebauten linearen Vektorgebildes, oder also die Anzahl ihrer linear unabhängigen Vektoren. ([Beck, 1926], str. 81)

Věta vyjadřující hodnost matice pomocí determinantů se v knize objeví daleko později.

Notwendig und hinreichend dafür, daß eine Matrix den Rang r hat, ist, daß alle ihre $(r + 1)$-reihigen, nicht aber alle r-reihigen Determinanten verschwinden. ([Beck, 1926], str. 142)

Násobení matic je v této knize definováno již tak, jak je dnes známe, tj. řádky první matice se skalárně násobí se sloupci druhé matice. ([Beck, 1926], str. 33)

Oscar Perron

Německý matematik O. Perron (1880–1975) byl v letech 1922 až 1951 profesorem na univerzitě v Mnichově. Pracoval hlavně v teorii integrálu (Perronův integrál), v teorii potenciálu a matematické fyzice.

Roku 1927 vyšel první díl Perronovy učebnice *Algebra*, který je věnován úvodním partiím této disciplíny, o čemž svědčí i podtitul *Die Grundlagen*. O maticích se základní informace dočteme ve třetí kapitole *Determinanten*, a to v souvislosti s problematikou soustav lineárních rovnic, větou o násobení determinantů a reprezentací bilineárních, kvadratických a hermitovských forem. Matice se značí dvěma dvojicemi svislých čar, násobí se „po řádcích" (násobí se tedy matice stejného typu), hodnost je definována pomocí subdeterminantů.[23]

Ludwig Bieberbach

Německý matematik L. Bieberbach (1886–1982) studoval v Heidelbergu a v Göttingen, v letech 1913 až 1915 byl profesorem v Basileji, v letech 1915 až 1921 ve Frankfurtu nad Mohanem a v letech 1921 až 1945 v Berlíně. Od roku 1936 do roku 1942 redigoval časopis *Deutsche Mathematik*. Pracoval zejména v analýze a v geometrii, je autorem několika knih.

Roku 1928 vydal učebnici *Vorlesungen über Algebra*, která vznikla podstatným přepracováním třetího vydání stejnojmenné Bauerovy knihy z roku 1921. Matice se v ní objevují v souvislosti s determinanty ve druhé části nazvané *Theorie und Anwendung der Determinanten* (str. 41–98). S maticemi se však setkáváme až od strany 58 (obdélníková matice, subdeterminanty, hodnost zavedená pomocí subdeterminantů, souvislost s problematikou soustav lineárních rovnic atd.). Násobení obdélníkových systémů je zavedeno až na straně 69 (po odstavci o násobení determinantů) – tyto systémy se zde násobí „po řádcích". Definována je reciproká matice (*adjungierte Matrix*) a uvedena věta o jejím determinantu:

Die aus der Matrix der A gebildete Determinante ist folglich die $(n - 1)$-te Potenz der ursprünglichen Determinante R.
([Bauer, 1903], vydání 1928, str. 71)

[23] Druhý díl Perronovy učebnice vyšel téhož roku s podtitulem *Theorie der algebraischer Gleichungen.* Druhé vydání Perronovy dvoudílné učebnice je z let 1932 a 1933.

Maticové násobení – již přesně v dnešní podobě – je zavedeno až v kapitole *Quadratische und bilineare Formen* v odstavci *Matrizenkalkül* ([Bauer, 1903], vydání 1928, str. 78):

$$p_{ik} = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=m} a_{i\sigma} b_{\sigma k} \ .$$

Ukázána je asociativita a nekomutativita násobení matic, matice jsou využívány v teorii bilineárních a kvadratických forem, definována je inverzní matice, hodnost matice (pomocí subdeterminantů), kvadratické formy jsou transformovány na kanonický tvar, prezentován je Sylvesterův zákon o setrvačnosti, rozlišovány jsou pozitivně definitní a negativně definitní formy, zkoumány ortogonální transformace (též tzv. *Hauptachsentransformation*), zavedena vlastní čísla matice atd. Pokud jsou matice vůbec značeny, tak dvěma dvojicemi svislých rovných čar.

Roku 1933 se objevilo další vydání této učebnice. Má stejnou strukturu jako verze z roku 1928, v některých pasážích je mírně upravena a je přehlednější. Matice jsou většinou značeny kulatými závorkami, někde však ještě zůstalo značení z předchozího vydání. Na řadě míst je na matice položen větší důraz než v předchozím tisku.

Herbert Westren Turnbull

Anglický matematik H. W. Turnbull (1885–1961) studoval na Trinity College v Cambridge. Po absolutoriu prošel řadu míst (Cambridge, Liverpool, Hong Kong, Repton, Oxford), od roku 1921 do roku 1950 pracoval na St. Andrews University. Jeho hlavním zájmem byla algebra, hlavně teorie invariantů, ale i historie matematiky, zajímal se o matematické dílo I. Newtona, připravil k vydání dva svazky jeho korespondence. Byl skvělý klavírista (hrál v komorním orchestru) a vášnivý alpinista (Alpine Club).[24]

H. W. Turnbull vydal roku 1939 velmi oblíbenou knížku *Theory of equations*, která vyšla v řadě vydání (1944, 1946, 1947, 1957, 1963). Jejím základem byly autorovy přednášky na univerzitě St. Andrews.

Velmi úspěšnou učebnicí teorie matic, determinantů a invariantů byla Turnbullova kniha nazvaná *The theory of determinants, matrices and invariants* z roku 1928 (další vydání: 1945, 1948, 1950, 1960). Je to patrně druhá kniha, která má v názvu slovo matice. Byla sepsána na základě přednášek proslovených autorem roku 1926 na univerzitě St. Andrews. V úvodu autor uvedl:

… It was the aim of those lectures to present in outline the salient features of the Invariant Theory, from its origins in the early forties of last century to the present day. …

… I have followed the method of Salmon in opening with an account of determinants. This also made it desirable to introduce the rudiments of another

---

[24] Viz A. C. Aitken: *Herbert Westren Turnbull, 1885–1961*, Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society 8(1962), 149–158.

great department of algebra – the theory of matrices. These will chiefly be found in the first seven chapters, which have been written mainly with a view to their applications in what follows. ... ([Turnbull, 1928], str. v)

Tato Turnbullova kniha je do značné míry postavena na pojmu matice. Dokládá to již její krátká první kapitola *Matrices and determinants* (12 stran), která má sedm paragrafů:

1. *Notation.*
2. *Definition of matrix.*
3. *The transposed matrix.*
4. *System of linear equations.*
5. *Linear combinations of rows or columns. Number field. Rank.*
6. *Linear equations which are not homogeneous.*
7. *Condition of solubility.*

Kniha má celkem 21 kapitol (celkem 334 stran), navíc je připojen index. Kromě matic a determinantů jsou vyšetřovány lineární, bilinární i multilineární formy, lineární transformace, lineární rovnice a invarianty. Velká pozornost je věnována zásadním výsledkům, s nimiž přišli zejména Siegfried Heinrich Aronhold (1819–1884), Paul Albert Gordan (1837–1912), David Hilbert (1862–1943), Rudolf Friedrich Alfred Clebsch (1833–1872) a Jórgen Pedersen Gram (1850–1916).

Aurel Friedrich Wintner

A. F. Wintner (1903–1958) vystudoval matematiku a astronomii v Budapešti a Lipsku, pracoval na Johns Hopkins University v Baltimore. Zabýval se nebeskou mechanikou, pohybem Měsíce, spektrální teorií lineárních operátorů v souvislostech s kvantovou mechanikou, diferenciální geometrií a počtem pravděpodobnosti. Je mimo jiné autorem významné monografie *The analytical foundations of celestial mechanic*, která vyšla roku 1941.

Poměrně speciální charakter má jeho monografie *Spektraltheorie der unendlichen Matrizen* z roku 1929, jež nese podtitul *Einführung in den analytischen Apparat der Quantenmechanik*. Úvod (2 strany) k ní napsal Leon Lichtenstein (1878–1933), Wintnerův učitel z univerzity v Lipsku.

Monografie je rozdělena na šest kapitol a dodatek, kapitoly se dále člení na paragrafy (celkem 120 paragrafů, 272 stran):

I. *Algebraische und formale Grundlagen.*

II. *Analytische Hilfsmittel.*

III. *Die beschränkten unendlichen Matrizen.*

IV. *Theorie der Spektralmatrix.*

V. *Spektraltheorie der beschränkten Matrizen.*

VI. *Hermitesche nicht beschränkte Matrizen.*

Anhang. Skizze einer Spektraltheorie der fastperiodischen Funktionen.

Wintnerova monografie je ukončena zhuštěným osmistránkovým komentovaným přehledem pramenů a další literatury, který je rozdělen na čtyři odstavce: *Endliche Matrizen*, *Stieltjessche Integrationstheorie u. dgl.*, *Unendliche Matrizen*, *Radonsche Integrale und normale Spektraltheorie.*

Bohumil Bydžovský

Bohumil Bydžovský (1880–1969) vyučoval v letech 1903 až 1918 na středních školách, roku 1909 se habilitoval na pražské univerzitě a o dva roky později na pražské technice. Od roku 1917 byl mimořádným profesorem a v letech 1921 až 1957 řádným profesorem Univerzity Karlovy. Je autorem několika středoškolských a vysokoškolských učebnic z analytické a algebraické geometrie.

Do roku 1930 vyšlo jen velmi málo knih, které by v názvu měly slovo matice. Pro nás je tedy zajímavé, že se roku 1930 objevila na našem matematickém knižním trhu půvabná knížka *Základy teorie determinantů a matic a jich užití* od Bohumila Bydžovského.[25] V předmluvě autor mimo jiné napsal:

Od běžných učebnic jednajících o determinantech se liší tato tím, že obsahuje základy počtu maticového; je to odůvodněno velkou důležitostí, které nabyl tento počet v posledních letech svou účinnou a hospodárnou symbolikou.
([Bydžovský, 1930], Předmluva)

Teorie determinantů však v Bydžovského knížce dominuje; je jí věnováno jedenáct paragrafů (str. 1–140), základy teorie matic jsou až v následujících paragrafech (str. 141–196). Připojen je historický přehled a bibliografické poznámky (str. 196–206). Zde B. Bydžovský mimo jiné uvedl, že čtenář najde základní poučení o determinantech a jejich užití v každé učebnici algebry a připojil: *Buďtež zde uvedeny jen dvě z nich, jež obsahují zároveň poučení o počtu maticovém* ([Bydžovský, 1930], str. 204). Těmito dvěma učebnicemi jsou výše uvedené knihy M. Bôchera (2. vydání německého překladu) a H. Becka.

Herbert Westren Turnbull a Alexander Craig Aitken

A. C. Aitken (1895–1967) pocházel z Nového Zélandu, kde získal univerzitní vzdělání (University of Otago, Dunedin) a poté působil čtyři roky jako učitel. Roku 1925 získal doktorát na univerzitě v Edinburghu a začal tam pracovat, roku 1946 byl jmenován profesorem. Věnoval se převážně statistice a aplikacím maticového počtu ve statistice. Je autorem několika učebnic.

Mimořádně úspěšnou monografií o maticích byla kniha *An introduction to the theory of canonical matrices* od H. W. Turnbulla a A. C. Aitkena. Poprvé vyšla v Londýně roku 1932; její další vydání jsou z let 1945, 1948, 1950, 1952, …, 1961, 2005. Stala se velmi brzy klasickým textem o kanonických tvarech.

A. C. Aitken vydal roku 1939 učebnici *Determinants and matrices.* Byla velmi oblíbená, svědčí o tom její četná další vydání (2. vydání: 1942, 7. vydání:

[25] Její druhé vydání vyšlo roku 1947 pod mírně změněným názvem *Úvod do teorie determinantů a matic a jich užití.*

1951, 8. vydání: 1954, 9. vydání: 1958, německý překlad: 1969). Vyniká elegantním podáním, zdůrazňuje sílu teorie matic a její význam pro ostatní matematické disciplíny. Hlavním tématem jsou soustavy lineárních rovnic, okrajově je zachycena problematika vlastních čísel a vlastních vektorů. Ukázáno je však užití matic ve statistice. Zajímavé je, že v jeho učebnici *Statistical mathematics* z roku 1939 není o maticích nic.

O Aitkenově přínosu k teorii matic napsal roku 1997 R. W. Farebrother článek *A. C. Aitken and the Consolidation of Matrix theory*; najdeme v něm četné další užitečné odkazy.

Otto Schreier a Emanuel Sperner

Německý matematik O. Schreier (1901–1929), žák Emila Artina (1898–1962) a Emmy Noetherové (1882–1935), se věnoval zejména teorii grup, teorii těles a teorii čísel.

Německý matematik E. Sperner (1905–1980) se zabýval algebrou, topologií a teorií dimenze, jeho jméno se v matematice dodnes objevuje (Spernerovo lemma, Spernerova algebra, Spernerovy prostory).

Roku 1931 byl vydán učební text O. Schreiera a E. Spernera nazvaný *Einführung in die analytische Geometrie und Algebra* jako první díl většího plánovaného díla.[26] Matice jsou v něm zavedeny v souvislosti se soustavami lineárních rovnic. Hodnost matice je definována jako maximální počet lineárně nezávislých sloupců; vzápětí je ukázáno, že hodnost matice je rovna maximálnímu počtu lineárně nezávislých řádků. Matice v této knížce předcházejí determinantům, oba tyto pojmy jsou hojně využívány při výkladu analytické geometrie.

Na úvod do analytické geometrie a algebry O. Schreiera a E. Spernera navázala jejich útlá učebnice *Vorlesungen über Matrizen* z roku 1932; má jen 133 stran.[27]

Stručný obsah této učebnice dobře vystihuje její náplň i charakter:

1. *Das Rechnen mit linearen Transformationen.*
2. *Das Rechnen mit Matrizen.*
3. *Minimalpolynom. Invariante Teilgebilde.*
4. *Die Diagonalgestalt.*
5. *Die Normalform.*
6. *Einige Anwendungen der Theorie.*

Poznamenejme, že knížku připravoval do tisku jen E. Sperner, neboť O. Schreier byl již v té době po smrti. E. Sperner v předmluvě napsal:

---

[26] Poznamenejme pro zajímavost, že již roku 1934 vyšel ruský překlad (G. Ol'šanskij) pod názvem *Vvedenie v linejnuju algebru v geometričeskom izloženii* (210 stran).

[27] Ruský překlad vyšel roku 1936 pod názvem *Teorija matric*, anglický překlad *Modern algebra and matrix theory* je z roku 1955.

Dieses Bändchen enthält die Vorlesungen Otto Schreiers (†) über Elementarteilertheorie. Die Auswahl des Stoffes ist im wesentlichen dieselbe, wie sie Otto Schreier für die Veröffentlichung geplant hatte. Anordnung und Beweisführung dagegen habe ich teilweise geändert, wodurch ich hoffe, noch einige Vereinfachungen erreicht zu haben. ([Schreier, Sperner, 1932], str. 3)

Cyrus Colton MacDuffee

Americký matematik C. C. MacDuffee (1895–1961) obhájil roku 1922 po svých vysokoškolských studiích (Colgate University, University of Chicago) disertační práci o neasociativních algebrách vedenou L. E. Dicksonem. Nejprve pracoval jako instruktor a asistent (Princeton), resp. jako asistent, docent a profesor (Ohio State University), od roku 1935 působil jako profesor na univerzitě ve Wisconsinu. Věnoval se zejména algebře, napsal mnoho prací a několik monografií a učebnic. Zastával významné funkce, vychoval řadu doktorandů.

Jeho útlá monografie *The theory of matrices* vydaná roku 1933 ve známé edici Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (další vydání: 1946, 1959, 1960, 2004) je stručným, ale značně obsažným a hutným textem o teorii matic. V úvodu autor objasnil, z jakých okruhů problémů se teorie matic zrodila:

Matric algebra is a mathematical abstraction underlying many seemingly diverse theories. Thus bilinear and quadratic forms, linear associative algebra (hypercomplex systems), linear homogeneous transformations and linear vector functions are various manifestations of matric algebra. Other branches of mathematics as number theory, differential and integral equations, continued fractions, projective geometry etc. make use of certain portions of this subject. Indeed, many of the fundamental properties of matrices were first discovered in the notation of a particular application, and not until much later recognized in their generality. ([MacDuffee, 1933], str. iii)

V 57 paragrafech (110 stran) obsahuje MacDuffeeho monografie velké množství materiálu a mnoho bibliografických údajů v poznámkách pod čarou; pro poznání vývoje teorie matic a jejího stavu kolem roku 1930 je tento text stále velmi cenný. Tématické zaměření knížky lze dobře odhadnout z jejího stručného obsahu:

I. *Matrices, Arrays and Determinants.*

II. *The Characteristic Equation.*

III. *Associated Integral Matrices.*

IV. *Equivalence.*

V. *Congruence.*

VI. *Similarity.*[28]

VII. *Composition of Matrices.*

[28] 40. paragraf se jmenuje *Weyr's characteristic.*

VIII. *Matric Equations.*

IX. *Functions of Matrices.*

X. *Matrices of Infinite Order.*

Připojme ještě, že roku 1940 vydal C. C. MacDuffee učebnici *An introduction to abstract algebra*, v níž je algebra prezentována jako nauka o strukturách (grupy, okruhy, obory integrity, tělesa, lineární algebry). I tato kniha byla velmi úspěšná, její další vydání jsou z let 1948, 1956, 1959, 1966.

Předposlední, sedmá kapitola této knihy pojednává o maticích (str. 203–250), osmá o lineárních asociativních algebrách (str. 251–296). Matice jsou v této knize chápány zejména jako prvky tzv. algebry matic:

A mathematical system $\mathfrak{M}$ *whose elements are* $n \times n$ *arrays which are subject to the additional operation of multiplication … is called a total matric algebra over* $\mathfrak{R}$ *of order* n^2. *A matrix is an element of a total matric algebra.* ([MacDuffee, 1940], str. 214)

Poměrně efektivně jsou v knize prezentována základní fakta: charakteristický polynom, Cayleyova-Hamiltonova věta, elementární dělitelé, podobnost matic, Jordanův kanonický tvar apod.

C. C. MacDuffee je autorem další úspěšné knížky *Vector and matrices*, která vyšla roku 1943 (další vydání: 1947, 1949, 1953, 1961, 1966).[29] Knížka malého formátu má 203 stran, devět kapitol, které se dělí na 65 paragrafů. Pojem matice je zaveden již v 9. paragrafu (str. 23), algebra matic je chápána jako systém hyperkomplexních čísel (viz 18. paragraf *Matrices as hypercomplex numbers*).

Poznamenejme na okraj, že C. C. MacDuffee publikoval roku 1943 v časopise The American Mathematical Monthly článek *What is a matrix?*, v němž objasnil pojem matice a zdůraznil jeho dva důležité aspekty:

To define a matrix as a rectangular array of numbers is as inadequate as to define a single particle of matter or a single complex number. A matrix is a number of a total matrix algebra.

A matrix over a field F may be defined as an endomorphism of a vector space V over F or, alternatively, as the operator which produces this endomorphism. ([MacDuffee, 1943], str. 361, 364)

Joseph Henry Maclagan Wedderburn

Americký matematik skotského původu J. H. M. Wedderburn (1882–1948) studoval v Edinburghu, Lipsku, Berlíně a Chicagu, působil potom v Edinburghu a Princetonu. Zabýval se teorií diferenciálních rovnic, abstraktní teorií těles, problematikou lineárních asociativních algeber, hyperkomplexních čísel, algeber a matic. Dokázal, že každé konečné těleso je komutativní (tzv. Wedderburnova věta). Připomeňme např. jeho článek *Note on the rank of a symmetrical Matrix*

[29] V seznamu 26 titulů literatury je uvedena práce Karla Petra *Rationale kanonische Form einer linearen Substitution* z roku 1940, 55. paragraf knížky je nazván *The Weyr charakteristic*, o Weyrově charakteristice je zmínka i v úvodu.

(1913/14) a jeho stejně nazvané pokračování (1914/15) a práci *The absolute value of the product of two matrices* (1925).

Roku 1934 vydal učebnici o maticovém počtu nazvanou *Lectures on matrices*. Byla velmi úspěšná, dodnes patří ke klasickým učebnicím (její další vydání jsou z let 1949, 1960, 1964, 2005). Autor ji sepsal na základě přednášek, které od roku 1920 konal na univerzitě v Princetonu.

Ve srovnání s předchozím MacDuffeeovým textem je Wedderburnova kniha obšírnější; v deseti kapitolách (168 stran) jsou podány základy teorie matic a jejího užití. O koncepci i obsahu si lze udělat velmi dobrou představu ze stručného obsahu:

I. *Matrices and vectors.*

II. *Algebraic operations with matrices. The characteristic equation.*

III. *Invariant factors and elementary divisors.*

IV. *Vector polynomials. Singular matric polynomials.*

V. *Compound matrices.*

VI. *Symmetric, skew, and hermitian matrices.*

VII. *Commutative matrices.*

VIII. *Functions of matrices.*

IX. *The automorphic transformation of a bilinear form.*

X. *Linear associative algebras.*

Jak již bylo výše poznamenáno, Wedderburnova učebnice obsahuje velkou bibliografii teorie matic (549 prací z let 1853 až 1933), v dalším vydání je tento soupis doplněn.

Abraham Adrian Albert

A. A. Albert (1905–1972) studoval na univerzitě v Chicagu, jeho učitelem byl L. E. Dickson, pod jehož vedením získal roku 1927 doktorát, roku 1928 se habilitoval. Jeden rok strávil v Princetonu u J. H. M. Wedderburna, od roku 1931 působil na univerzitě v Chicagu. Věnoval se hlavně algebře, zejména algebrám nejrůznějších typů, ale i algebraické geometrii, je autorem knihy *Structure of algebras*. Přispěl rovněž k formalizaci kvantové mechaniky.

Albertova monografie *Modern higher algebra* z roku 1937 věnuje maticím velkou pozornost, a to ve čtyřech z dvanácti kapitol (29 + 21 + 30 + 34 stran):

III. *Matrices.*

IV. *Similarity of square matrices.*

V. *Symmetric and skew matrices.*

X. *Algebras of matrics.*

Partie o determinantech, lineárních rovnicích a bilineárních formách je součástí třetí kapitoly.

Text této knihy je sepsán velmi moderním způsobem, výklad je stručný, jasný a efektivní, značně však již narostla abstraktnost prezentované látky, jak je vidět i z autorových slov v úvodu:

... in Chapters III, IV, and V with the theory of matrices with elements in a completely general field. Recent trends in algebraic investigation have made it important to know the extent of the validity of the classical theorems on matrices. It is no more difficult to carry out the proofs, where they are valid, for general fields instead of the classical case of subfields of the field of all complex numbers. But it is true that the proofs and results of the classical theory are not always valid. This is brought out clearly in Chapter V, where it is necessary to restrict the types of fields considered. ...

The theory of linear associative algebras is a fundamental, if quite advanced, branch of modern algebra. It is natural, however, to introduce this subject from the matrix point of view and we do so in Chapter X. Many quite abstract notions are made concrete by such a treatment, and quite adequate introduction to the theory is made in this way without going at all deeply into the abstract structure theorems on algebras. ([Albert, 1937], str. vii–viii)

13. Učebnice a monografie teorie matic vydané po roce 1950

Ve druhé polovině 20. století již byla teorie matic plně uznávanou disciplínou rozpracovanou do hloubky i do šířky, navíc byla využívána v řadě dalších oblastí. Není proto divu, že byla v té době vydávána řada učebnic a monografií zčásti nebo úplně věnovaných teorii matic. Některé učebnice byly zcela elementární, některé velmi rozsáhlé a důkladné, mnohdy doplněné obsáhlými přehledy literatury a důkladnými rejstříky. Speciální otázky teorie matic byly předmětem řady významných monografií. Uveďme zde jen několik titulů, které považujeme z hlediska vývoje teorie matic a jejího užití za důležité; v žádném případě si netroufáme tvrdit, že je tento přehled v jakémkoli smyslu úplný, že postihuje ty nejvýznamnější monografie apod.[30]

S. Perlis: *Theory of matrices* (1952, 1958),

F. R. Gantmacher: *Teorija matric* (1954, 1966, 1967, anglicky: 1959, 1998, francouzsky: 1966, německy: 1958, 1959, 1965, 1966),

E. Bodewig: *Matrix calculus* (1956, 1959),

R. Bellman: *Introduction to matrix analysis* (1960, 1970, 1995, 1997, rusky: 1969, 1976),

R. S. Varga: *Matrix iterative analysis* (1962, 1963),

F. E. Hohn: *Elementary matrix algebra* (1958, 1964, 1973, 2002),

A. S. Householder: *The theory of matrices in numerical analysis* (1964, 1975),

[30] Je třeba si též uvědomit, že se matematika nevyvíjí ve všech oblastech světa stejně, že jsou v různých regionech využívány odlišné monografie, důraz je kladen na odlišné aspekty teoretické i praktické apod.

M. Marcus, H. Minc: *A survey of matrix theory and matrix inequalities* (1964, rusky: 1972),

D. T. Finkbeiner: *Introduction to matrices and linear transformation* (1960, 1966),

P. Lancaster: *Theory of matrices* (1969, 1985, rusky: 1978, 1982),

M. Fiedler: *Speciální matice a jejich použití v numerické matematice* (1981),

E. Seneta: *Non-negative matrices* (1973, 1981),

R. A. Horn, C. R. Johnson: *Matrix analysis* (1985),

H. Lütkepohl: *Handbook of matrices* (1996),

D. Serre: *Matrices. Theory and applications* (2002).

14. Matice a fyzika

> *... diffusion and education of matrix theory was slow; for example, when, in the mid-1920s, the creators of quantum mechanics were looking for techniques, matrix theory was still not widely known ...*
>
> (Grattan-Guinness, Ledermann, [Grat], str. 784)

Ve fyzice se matice objevují poměrně pozdě. Například Gustav Adolf Mie (1868–1957) je okrajově užil v letech 1912 a 1913 ve svých pracích z nelineární elektrodynamiky *Grundlagen einer Theorie der Materie* publikovaných v časopise Annalen der Physik (viz např. [Mie, 1912], str. 525, [Mie, 1913], str. 34). Max Born (1882–1970) pracoval s maticí koeficientů algebraické formy ve své stati *Über elektrostatische Gitterpotentiale* z teorie krystalových mřížek, která byla roku 1921 otištěna v časopise Zeitschrift für Physik (viz např. [Born, 1921], str. 129). Matice byly v té době chápány víceméně jako tabulky prvků; maticové operace, zejména násobení matic, se v těchto pracích neobjevilo.

Kvantová mechanika se postupně rodila počátkem 20. století v pracích Maxe Karla Ernsta Ludwiga Plancka (1858–1947), Arnolda Johannesa Wilhelma Sommerfelda (1868–1951), Ernsta Rutherforda (1871–1937), Alberta Einsteina (1879–1955) a Nielse Henrika Davida Bohra (1885–1962). Do roku 1925 byly všechny problémy kvantové mechaniky řešeny jazykem klasické fyziky, kinematiky a dynamiky.

Roku 1925 publikoval Werner Karl Heisenberg (1901–1976) v časopise Zeitschrift für Physik práci *Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen.* Oprostil se od dosavadního popisu pohybu jazykem klasické fyziky, který byl reprezentován pojetím N. Bohra, a zaměnil jej popisem pomocí pozorovatelných veličin. Zvolil zcela nový přístup, který vedl ke vzniku maticové mechaniky, první formulace pozdější kvantové mechaniky. Jeho práci doporučili Wolfgang Pauli (1900–1958) a M. Born, k otištění byla přijata 29. července 1925.

Heisenbergův článek byl roku 1926 referován bez většího porozumění v časopise Science Abstracts (pouze 9 řádků) a o rok později v časopise Physikalische Berichte jen jedinou větou:

Verf. versucht, Grundlagen für eine quantentheoretische Mechanik zu gewinnen, die ausschließlich auf Beziehungen zwischen prinzipiell beobachtbaren Größen basiert ist.[31]

Heisenbergův neobvyklý přístup přinášející nové výsledky a nový matematický aparát tedy nebyl v referativních časopisech zdůrazněn. N. Bohr však tuto Heisenbergovu práci ocenil již na šestém Skandinávském matematickém kongresu v Kodani v srpnu roku 1925. Ještě více však zaujala M. Borna.

W. Heisenberg totiž překvapivým způsobem reprezentoval fyzikální veličiny pomocí souborů komplexních čísel závisejících na čase a zavedl velmi účelné pravidlo násobení těchto souborů. M. Born později vzpomínal, že ho Heisenbergovo pravidlo pro násobení souborů komplexních čísel velmi zaujalo. Po delších úvahách si uvědomil, že se jedná o násobení matic. Rozpomněl se totiž na svá studia:

Meine Lehrer waren Rosanes und London, … Rosanes … war Schüler von Kronecker und ein Freund des berühmten Frobenius. Seine Vorlesungen über analytische Geometrie der Ebene und des Raumes waren brillant, ebenso die über Algebra. Er führte uns sehr früh in die Ideen der Gruppentheorie und der Matrizenrechnung ein, und ich verdanke ihm mein Wissen über diese vielseitig verwendbare Methode, die ich später erfolgreich auf physikalische Probleme anwendete, zuerst in der Theorie der Kristallgitter und dann in der Quantenmechanik. ([Born, 1975], str. 86)

Nachdem ich Heisenbergs Arbeit zur Veröffentlichung an die ≫Zeitschrift für Physik≪ gesandt hatte, begann ich, über seine symbolische Multiplikation nachzugrübeln, und bald war ich so davon gefesselt, daß ich den ganzen Tag darüber nachdachte und nachts kaum noch schlafen konnte. Denn ich hatte das Gefühl, daß etwas Grundsätzliches dahintersteckte und daß es das Ziel unserer Bemühungen vieler Jahre war. Eines Morgens, etwa am 10. Juli 1925, sah ich plötzlich Licht: Heisenbergs symbolische Multiplikation war nichts anderes als das Matrizenkalkül, das mir seit meinen Studententagen aus Rosanes Vorlesungen in Breslau bekannt war. ([Born, 1975], str. 299)

M. Born v té době velmi intenzivně uvažoval o budování matematických základů kvantové mechaniky a hledal vhodného spolupracovníka; W. Pauli jeho nabídku odmítl. M. Born na to později vzpomínal:

Doch statt des erwarteten Interesses erhielt ich eine kühle und sarkastische Absage: ≫Ja, ich weiß, Sie sind ein Anhänger solch langwieriger und komplizierter Formalismen. Sie werden Heisenbergs physikalische Ideen mit Ihrer unnützen Mathematik zerstören≪, usw. ([Born, 1975], str. 300)

[31] Posuzovatel podepsaný jako *Güntherschulze* pouze opsal Heisenbergův abstrakt ([Heisenberg, 1925], str. 879): *In der Arbeit soll versucht werden, Grundlagen zu gewinnen für eine quantentheoretische Mechanik, die ausschließlich auf Beziehungen zwischen prinzipiell beobachtbaren Größen basiert ist.*

Bornovým spolupracovníkem se stal jeho žák Ernst Pasqual Wilhelm Jordan (1902–1980), který byl s moderní matematikou velmi dobře seznámen. Teorii matic studoval zejména z Bôcherovy učebnice a maticový aparát velmi dobře ovládal. Pomáhal rovněž se závěrečnými úpravami prvního dílu knihy *Methoden der mathematischen Physik* (1924), který připravoval k tisku Richard Courant (1888–1972) na základě přednášek a prací Davida Hilberta (1862–1943). V tomto svazku byly mimo jiné obsaženy právě ty partie algebry a matematické analýzy, které rodící se kvantová mechanika potřebovala.[32]

Plodná spolupráce M. Borna a P. Jordana vedla velmi rychle k sepsání společné práce *Zur Quantenmechanik*, která byla přijata k otištění v časopise Zeitschrift für Physik 27. září 1925, tj. již dva měsíce po práci Heisenbergově. Má čtyři kapitoly, v první z nich, která se nazývá *Matrizenrechnung* (7 stran), je vyložen potřebný matematický aparát týkající se teorie nekonečných matic. V poznámce pod čarou jsou odkazy na Beckův německý překlad Bôcherovy učebnice nazvaný *Einführung in die höhere Algebra* (1910) a na první díl monografie R. Couranta a D. Hilberta *Methoden der mathematischen Physik* (1924). V úvodu autoři píší:

Die mathematische Grundlage der Heisenbergschen Betrachtung ist das Multiplikationsgesetz der quantentheoretischen Größen, das er durch eine geistreiche Korrespondenzbetrachtung erschlossen hat. Die Ausgestaltung seines Formalismus, die wir hier geben, beruht auf der Bemerkung, daß diese Regel nichts ist, als das den Mathematikern wohlbekannte Gesetz der Multiplikation von Matrizen. Das nach zwei Seiten unendliche, quadratische Schema (mit diskreten oder kontinuierlich laufenden Indizes), die sogenannte Matrix, ist der Repräsentant einer physikalischen Größe, die in der klassischen Theorie als Funktion der Zeit angegeben wird. Die mathematische Methode der neuen Quantenmechanik ist daher gekennzeichnet durch Benutzung einer Matrizenanalysis an Stelle der gewöhnlichen Zahlenanalysis.
([Born, Jordan, 1925], str. 859)

Tato společná práce M. Borna a P. Jordana podala první exaktní formulaci maticové mechaniky; původní Heisenbergův maticový přístup byl podstatně rozšířen.

V polovině listopadu roku 1925 vznikla další významná práce – *Zur Quantenmechanik II*, kterou sepsali M. Born, W. Heisenberg a P. Jordan.[33] Otištěna byla v následujícím roce opět v časopise Zeitschrift für Physik. Přinesla obecnou metodu řešení úloh kvantové mechaniky a ukázala souvislosti mezi matematickým aparátem maticové mechaniky a výsledky moderní algebry a analýzy. Představovala první podrobný výklad základů tehdejší kvantové

[32] Jedná se zejména o první kapitolu nazvanou *Die Algebra der linearen Transformationen und quadratischen Formen* (31 stran); v literatuře k této kapitole jsou uvedeny dvě učebnice – Bôcherova algebra a Kowalewského determinanty. Poznamenejme ještě, že teorie nekonečných determinantů byla výborně zpracována právě v Kowalewského monografii *Einführung in die Determinantentheorie einschließlich der unendlichen und der Fredholmschen Determinanten* z roku 1909.

[33] M. Born tuto práci nazýval „Drei-Männer-Arbeit“.

mechaniky v její maticové formulaci. Fyzikální problémy byly převedeny na úlohy algebry a analýzy, které měly řešení a které studovala současná matematika.

První kapitola této práce tří autorů začíná objasněním maticové reprezentace kvantové veličiny:

Eine quantentheoretische Größe **a** *– sei es Koordinate oder Impuls oder irgend eine Funktion beider – wird repräsentiert durch die Gesamtheit der Größen*

$$a(nm)e^{2\pi i\nu(nm)t}$$

oder auch unter Weglassung des für alle zum System gehörigen Größen gleichen (nur von den Indizes n und m abhängigen) Faktors $e^{2\pi i\nu(nm)t}$ *durch die Gesamtheit der Zahlen*

$$a(nm)\ .$$

Wir können also von einer (übrigens unendlichen) „Matrix“ a sprechen. ([Born, Heisenberg, Jordan, 1925], str. 561)

P. Jordan v knize *Die Physik des 20. Jahrhunderts* píše:

Das mathematische Darstellungsmittel, dessen sich diese Theorie bedient, ist die sogenannte Matrizentheorie, ein Kapitel der Mathematik, das von den Mathematikern schon seit langem um seiner selbst willen gepflegt worden war, ohne daß man die Bedeutung ahnte, welche dieses Kapitel der Mathematik einmal für die Atomphysik gewinnen sollte. ([Jordan, 1936], 3. vydání, str. 98)

Roku 1926 publikoval Erwin Schrödinger (1887–1961) ve čtyřech částech v časopise Annalen der Physik rozsáhlou práci *Quantisierung als Eigenwertproblem*. Zveřejnil v ní své nové představy o kvantové teorii; jeho práce obsahuje i slavnou Schrödingerovu rovnici. Na práci tří autorů, W. Heisenberga, M. Borna a P. Jordana, reagoval ve stejném roce článkem *Über das Verhältnis der Heisenberg-Born-Jordanschen Quantenmechanik zu der meinen*.

Schrödingerovy výsledky byly ovlivněny prací Louise de Broglieho (1892–1987) z roku 1924, v níž připsal pohybu částice vlnu, jejíž vlnovou délku je možno vypočítat z hybnosti částice pomocí Planckovy konstanty h. E. Schrödinger nalezl pro tuto vlnu parciální diferenciální rovnici obdobnou vlnové rovnici a pomocí vhodných okrajových podmínek získal diskrétní množinu energetických stavů; pro atom vodíku vypočetl stejné energetické hladiny, jaké dávala Bohrova teorie.

Myšlenku vln tak propojil s částicovými představami, zavedl novou teorii – vlnovou mechaniku a odvodil známou Schrödingerovu vlnovou rovnici, pomocí níž odstranil slabá místa Bohrova modelu. Navíc ukázal, že jeho vlnová mechanika je ekvivalentní Heisenbergově maticové mechanice, vytvořil tedy druhou formu kvantové mechaniky.

Uveďme pro zajímavost ještě jeden citát z Jordanovy knihy *Die Physik des 20. Jahrhunderts*:

Schrödinger konnte nun zeigen, daß mit der Lösung des von ihm in seiner Weise formulierten mathematischen Problems gleichzeitig auch die *mathematische Lösung für das scheinbar ganz andere mathematische Problem gewonnen war, welches durch die Quantenmechanik in Gestalt der Matrizentheorie formuliert war. Man kann also, wenn man nach den Anweisungen der Schrödingerschen „Wellenmechanik“ ein Problem gelöst hat, durch eine mathematische Umrechnung daraus auch die Resultate der „Quantenmechanik“ betreffs dieses Problems gewinnen. Dieser mathematische Zusammenhang beider Theorien, der zunächst ungeheuer überraschend erscheinen mußte angesichts der völligen Verschiedenheit der beiden Wege, die hier zum gleichen Ziele führten, gab nun auch die sichere Unterlage für die physikalisch-begriffliche Deutung der Schrödingerschen Wellen. ...*

... die Schrödingerschen Wellen sind nämlich in diesen Fällen gar nicht mehr Wellen im gewöhnlichen dreidimensionalen Raume, sondern sind lediglich eine mathematische Konstruktion, die sich der Mathematiker als Wellen in Räumen von mehr als drei Dimensionen „veranschaulichen“ kann.
([Jordan, 1936], 3. vydání, str. 98–99)

Roku 1926 přenesl Fritz London (1900–1954) maticovou teorii transformací na vlnovou mechaniku Schrödingerovu v práci *Über die Jacobischen Transformationen der Quantenmechanik* otištěné v časopise Zeitschrift für Physik.

W. Pauli ukázal roku 1926 v práci *Über das Wasserstoffspectrum von Standpunkt der neuen Quantenmechanik*, že abstraktní formalismus maticové mechaniky dává správná přiblížení k atomové teorii řešící problém struktury atomu vodíku, tj. ústřední problém atomové teorie.

Ve třicátých letech se rozvoji kvantové mechaniky věnovala řada autorů, zejména Ernst Pasqual Wilhelm Jordan, John von Neumann (1903–1957), Eugene Paul Wigner (1902–1995), Abraham Adrian Albert, George David Birkhoff (1884–1944) a další.

Nedlouho po zveřejnění výše uvedených prací obsahujících významné výsledky kvantové teorie se objevily důležité monografie shrnující dosažené poznatky; byly postaveny na potřebných matematických základech. Podstatnou roli začala hrát hlavně teorie grup a maticový počet.

Matematické základy kvantové mechaniky byly roku 1928 shrnuty v monografii *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, kterou sepsal Hermann Weyl (1885–1955), a pak zejména v knize M. Borna a P. Jordana z roku 1930 nazvané *Elementare Quantenmechanik*.

Kniha W. Heisenberga *Die physikalischen Prinzipien der Quantentheorie* z roku 1930 již s maticemi pracuje, a to v celé závěrečné části nazvané *Der mathematische Apparat der Quantentheorie* (str. 78–113).

Již jsme připomněli monografii *Spektraltheorie der unendlichen Matrizen. Einführung in den analytischen Apparat der Quantenmechanik* A. Wintnera z roku 1929, jež tehdy fyzikům poskytovala důležitý matematický aparát.

Úplný výklad obecného formalismu kvantové mechaniky v axiomatickém pojetí, který byl založen na prvotních pojmech „pozorovatelná veličina“ a „stav“, podal roku 1930 Paul Adrien Maurice Dirac (1902–1984) v monografii *Principles of Quantum Mechanics*, která byla vydána prakticky současně i německy

(*Die Prinzipien der Quantenmechanik*). Měla velký úspěch, vyšla v několika vydáních a překladech. I tato kniha pracuje s maticemi.

Matematická podpora kvantové teorie byla vyjádřena i v knize J. von Neumanna *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* z roku 1932, která vyšla i v anglickém a ruském překladu. Velmi dobře doplňovala výše uvedenou Diracovu monografii.

Základní poučení o kvantové mechanice a jejích matematických základech lze najít např. v učebnici

R. H. Dicke, J. P. Wittke: *Introduction to quantum mechanics* (1960).[34]

O historii této velmi zajímavé problematiky se lze dočíst např. v následujících knihách:

R. Dugas: *A history of mechanics* (1957),

M. Jammer: *The conceptual development of quantum mechanics* (1966),

F. Hund: *Geschichte der Quantentheorie* (1967),

E. MacKinnon: *Heisenberg and Matrix Mechanics* (1977),

J. Mehra, H. Rechenberg: *The historical development of quantum theory* (1982–2001),

M. Beller: *Matrix theory before Schrödinger. Philosophy, Problems, Consequences* (1983),

M. Born, W. Heisenberg, P. Jordan: *Zur Begründung der Matrizenmechanik* (1962).

Poznamenejme na závěr, že diferenciální a integrální počet byl jazykem klasické dynamiky a tenzorový počet jazykem teorie relativity. Pro kvantovou teorii se velmi brzy jako vhodný aparát ukázala funkcionální analýza, vektory v Hilbertově prostoru, komplexní funkce, kvaterniony, nekonečné matice a nekonečné soustavy lineárních rovnic, zobecněné ortogonální transformace, transformace k hlavním osám při nekonečném počtu proměnných, diferenciální a integrální rovnice apod.

Ve výše zmíněné knize W. Heisenberga *Die physikalischen Prinzipien der Quantentheorie* je na počátku čtvrté kapitoly srovnán matematický aparát kvantové fyziky a teorie relativity:

Es ist lehrreich, den mathematischen Apparat der Quantentheorie mit dem der Relativitätstheorie zu vergleichen. In beiden Fällen handelt es sich um die Anwendung der linearen Algebra; man kann also die Matrizen der Quantentheorie vergleichen mit den symmetrischen Tensoren der speziellen Relativitätstheorie; als die wesentlichsten Unterschiede muß man hervorheben, daß der Raum, der zu den quantentheoretischen Tensoren gehört, unendlich viele Dimensionen hat; ferner, daß dieser Raum nicht reell ist, an Stelle der orthogonalen Transformationen treten die sog. unitären Transformationen. ([Heisenberg, 1930], str. 42)

[34] 11. kapitola je nazvaná *Matrix representations* (str. 176–188).

15. Závěr

Je pozoruhodné, jak dlouho trvalo přijetí maticové řeči. Britská a americká matematická obec maticový počet akceptovala poměrně bez problémů během druhé poloviny 19. století, patrně pod výrazným vlivem A. Cayleyho a J. J. Sylvestera. Matematici kontinentální Evropy maticový aparát přijali až na přelomu 19. a 20. století. Výraznou výjimkou byl Eduard Weyr, který s maticemi pracoval již v polovině osmdesátých let.

Rovněž je zajímavé, jak dlouho trvalo, než se ustálila definice násobení matic. Negativně působilo sepětí teorie determinantů a rozvíjející se teorie matic, zejména věta o násobení determinantů; vzhledem k tomu, že determinanty navzájem transponovaných matic se rovnají, není pro obsah tohoto matematického poznatku důležité, zda čtvercové matice násobíme po řádcích, po sloupcích nebo v dnešním smyslu, řádky první matice se sloupci druhé matice. (Ještě v Pincherleově textu z roku 1926 se uvažují čtyři typy násobení matic.) Teprve hlubší pochopení maticové reprezentace bilineárních a kvadratických forem (zejména maticový popis lineárních transformací těchto forem) přispělo k ukončení nejasností souvisejících se zavedením maticového násobení.

Pojem hodnosti matice byl zaveden rovněž značně pozdě. Dosti dlouho byla hodnost matice definována pomocí nulovosti a nenulovosti subdeterminantů. Pochopení role, kterou hrají lineární závislosti a nezávislosti sloupců, resp. řádků matice, nepřišlo okamžitě, ani snadno.

Velmi zajímavou partií historie matematiky je proniknutí teorie matic do fyziky, do tzv. maticové mechaniky, ve dvacátých letech 20. století.

Ve 20. století se teorie matic začala bouřlivě vyvíjet, jedním z velkých témat byla problematika různých speciálních typů matic. Významné jsou v tomto směru např. Frobeniovy práce o maticích s kladnými či nezápornými prvky – *Über Matrizen aus positiven Elementen*, *Über Matrizen aus positiven Elementen II* z let 1908 a 1909, *Über Matrizen aus nicht negativen Elementen* z roku 1912. Obrovskou roli hrají matice v teorii algeber, v teorii reprezentací apod. Souběžně s teorií nekonečných determinantů se rozvíjela i problematika nekonečných matic; o její historii viz [Bernkopf, 1968].

Vývoj teorie matic, zejména jeho speciální otázky, stále poutají zájem historiků matematiky i matematiků samotných. Viz např. [Wimmer, 1990].