III. DETERMINANTY

The history of determinants is an unusually interesting part of the history of elementary mathematics in view of the fact that it illustrates very clearly some of the difficulties in this history which result from the use of technical terms therein without exhibiting the definite meaning which is to be given to these terms.

([Miller, 1930], str. 216)

Za zrod teorie determinantů budeme považovat zveřejnění Cramerovy monografie *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* z roku 1750, v níž bylo otištěno tzv. Cramerovo pravidlo pro řešení soustavy lineárních rovnic se čtvercovou regulární maticí a popsán výraz sestavený z koeficientů této soustavy, kterému dnes říkáme determinant. Zveřejněná metoda se poměrně rychle ujala, pozornost matematiků se po krátké době obrátila ke studiu takovýchto kombinatorických výrazů sestavených z koeficientů rovnic.

Podněty ke vzniku a rozvoji teorie determinantů dávalo studium soustav lineárních rovnic, lineárních transformací, různých eliminačních postupů apod. Již koncem 18. století determinanty intenzivně pronikaly do geometrie, teorie čísel a dalších disciplín.

O vzniku a vývoji teorie determinantů již byla publikována řada statí; některé jsou časopisecké, jiné jsou součástí učebnic, encyklopedií nebo konferenčních sborníků. Za velmi zasvěcené lze považovat tyto:

S. Günther: *Lehrbuch der Determinanten-Theorie für Studirende* (1875),

F. J. Studnička: *O původu a rozvoji nauky o determinantech* (1876),

F. J. Studnička: *A.-L. Cauchy als formaler Begründer der Determinanten-Theorie. Eine literarisch-historische Studie* (1876),

E. J. Mellberg: *Teorin för Determinant-kalkylen* (1876),

E. Netto: *Kombinatorik* (1898),

T. Muir: *The theory of determinants in the historical order of development* I, II, III, IV (1890/1906 až 1923),

H. Vogt: *Analyse combinatoire et théorie des déterminants* (1904),

T. Muir: *Contributions to the history of determinants 1900–1920* (1930),

E. Knobloch: *Der Begin der Determinantentheorie …* (1980),

E. Knobloch: *Erste europäische Determinantentheorie* (1990),

E. Knobloch: *From Gauß to Weierstraß: Determinant theory and its historical evaluation* (1994).

Poznamenejme ještě, že ve velkém počtu učebnic teorie determinantů bývaly zařazovány pasáže o vzniku a vývoji této disciplíny.

1. Prehistorie teorie determinantů

Při jisté dávce fantazie bychom mohli dát do souvislosti dva tisíce let starou čínskou metodu *fang čcheng* a determinanty; stačí se podívat na popis výpočtu jednotlivých neznámých z upravené tabulky.[1] Tehdy však ještě nedošlo ke koncipování pojmu determinant.

Gerolamo Cardano (Hieronymus Cardanus, 1501–1576) popsal ve své knize *Practica arithmeticae* z roku 1539 mimo jiné metodu řešení soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých; v naší symbolice se jedná o soustavu

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1\ , \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2\ . \end{aligned}$$

G. Cardano uvedl návod na její řešení, který můžeme v našem značení popsat vzorcem

$$x_1 = \frac{a_{22}\frac{b_1}{a_{12}} - b_2}{a_{22}\frac{a_{11}}{a_{12}} - a_{21}}\ .$$

Opět bychom mohli v tomto Cardanově postupu vidět užití determinantů druhého řádu. V žádném případě však nelze hovořit o tom, že by G. Cardano znal pojem determinantu a Cramerovo pravidlo.

Obdobných příkladů by bylo možno uvést více; téměř v každém postupu na řešení jednoduché soustavy lineárních rovnic je možno „hledat“ a „nacházet“ pojem determinantu.

Jedním z myslitelů, kteří se k pojmu determinant opravdu přiblížili, byl japonský matematik Takakazu Šinsuke Seki Kōwa (1642–1708).[2] Při studiu otázek eliminace dospěl k postupům, během nichž počítal výrazy podobné determinantům. Ve svém díle *Kai Fukudai no Hō* (rukopis z roku 1683) navázal na metody čínských matematiků, kteří zaznamenávali koeficienty soustav rovnic na početní desce a užívali metodu *fang čcheng*. Tyto postupy navíc plodně rozvinul. Viz např. [Mikami, 1913, 1914].

Gottfried Wilhelm Leibniz

Za objevitele determinantů bývá obvykle považován německý matematik, filozof a přírodovědec G. W. Leibniz (1646–1716). Ukázal obecný postup, jak eliminovat n neznámých z $n+1$ nehomogenních lineárních rovnic, a dospěl k výrazu sestavenému z koeficientů rovnic, který dnes nazýváme determinant. K otázkám eliminace se čas od času vracel.

V dopise markýzi G. F. A. l'Hospitalovi (1661–1704) ze dne 28. dubna 1693 vysvětloval též svoji metodu dvojích indexů, tj. způsob, jak je možno koeficienty

---

[1] Viz druhá kapitola této monografie.

[2] Viz např. [Kôsaku Yosida, 1981].

rovnic vyjadřovat pomocí čísel. Jako příklad tohoto postupu uvedl eliminaci dvou neznámých ze soustavy tří lineárních rovnic.[3] Mimo jiné napsal:

Par exemple soyent proposées trois equations simples pour deux inconnues à dessein d'oster ces deux inconnues, et cela par un canon general. Je suppose

$$10 + 11x + 12y = 0 \ (1) \quad \textit{et} \quad 20 + 21x + 22y = 0 \ (2) \quad \textit{et} \quad 30 + 31x + 32y = 0 \ (3)$$

ou le nombre feint estant de deux characteres, le premier me marque de quelle equation il est, le second me marque à quelle lettre il appartient. Ainsi en calculant on trouve par tout des harmonies qui non seulement nous servent de garans, mais encor nous font entrevoir d'abord des regles ou theoremes. Par exemple ostant premierement y par la premiere et la seconde equation, nous aurons:

$$\begin{aligned} &+ 10.22 + 11.22x \\ &- 12.20 - 12.21.. = 0 \qquad (4) \end{aligned}$$

et par la premiere et troisieme nous aurons:

$$\begin{aligned} &+ 10.32 + 11.32x \\ &- 12.30 - 12.31.. = 0 \qquad (5) \end{aligned}$$

ou il est aise de connoistre que ces deux equations ne different qu'en ce que le charactere antecedent 2 est changé au charactere antecedent 3. Du reste, dans un même terme d'une même equation les characteres antecedens sont les mêmes, et les characteres posterieurs font une même somme. Il reste maintenant d'oster la lettre x par la quatrieme et cinquieme equation, et pour cet effect nous aurons

$$\begin{array}{ccc} 1_0 \,.\, 2_1 \,.\, 3_2 & & 1_0 \,.\, 2_2 \,.\, 3_1 \\ 1_1 \,.\, 2_2 \,.\, 3_0 & = & 1_1 \,.\, 2_0 \,.\, 3_2 \\ 1_2 \,.\, 2_0 \,.\, 3_1 & & 1_2 \,.\, 2_1 \,.\, 3_0 \end{array}$$

qui est la derniere equation delivrée de deux inconnues qu'on vouloit oster, et qui porte sa preuve avec soy par les harmonies qui se remarquent par tout, et qu'on auroit bien de la peine à decouvrir en employant des lettres a, b, c sur tout lorsque le nombre des lettres et des equations est grand. …[4]

G. W. Leibniz byl prvním matematikem, který použil dvojí indexy.[5] Závěrečná podmínka, tj. nulovost determinantu rozšířené matice soustavy, je nutnou podmínkou řešitelnosti uvažované soustavy.

---

[3] Poznamenejme, že v následujícím textu čísla 10, 11, 12 atd. znamenají ve skutečnosti koeficienty – v naší současné symbolice je značíme a_{10}, a_{11}, a_{12} atd.

[4] Viz [Muir, 1906], díl I., str. 7–8. Viz též G. W. Leibniz: *Mathematische Schriften* (hrg. C. J. Gerhardt), 1. Abth., Band II., Berlin, 1850 (Verlag von A. Asher & Comp.), str. 236–241, úryvek je na str. 239–240. Viz též [Kowalewski, 1909], úvod.

[5] Poznamenejme, že dvojí indexy použil i v pracích *Pro methodo tangentium specimen* (1694), *Responsio ad Dn. Nic. Fatii Duillerii imputationes*, Acta Eruditorum 1700, 189–208, a v další korespondenci s G. F. A. l'Hospitalem (dopisy 11, 12, 13); viz G. W. Leibniz: *Mathematische Schriften* (viz výše). Použití dvojích indexů však nemělo žádný ohlas.

G. W. Leibniz pak připojil (latinsky) obecné pravidlo, jak ze soustavy lineárních rovnic eliminovat neznámé a jak získat výsledek eliminace:

Datis aequationibus quotcunque sufficientibus ad tollendas quantitates, quae simplicem gradum non egrediuntur, pro aequatione prodeunte, primo sumendae sunt omnes combinationes possibiles, quas ingreditur una tantum coefficiens uniuscujusque aequationis: secundo, eae combinationes opposita habent signa, si in eodem aequationis prodeuntis latere ponantur, quae habent tot coefficientes communes, quot sunt unitates in numero quantitatum tollendarum unitate minuto: caeterae habent eadem signa.[6]

G. W. Leibniz stanovil pravidlo pro znaménka jednotlivých součinů, jeho postup však není příliš praktický; naznačil spíše metodickou cestu.

Velmi podrobně se Leibnizovým eliminačním postupům a jeho myšlenkám souvisejícím s pojmem determinant věnoval Eberhard Knobloch (nar. 1943). Studoval Leibnizovy rukopisy z let 1678 až 1713 věnované právě těmto problémům. Viz [Knobloch, 1980, 1990].

2. Cramerovo pravidlo

Rozvoj teorie determinantů začal krátce po zveřejnění Cramerova pravidla, které podalo jednoduchou a srozumitelnou metodu pro řešení soustavy lineárních rovnic se čtvercovou regulární maticí. Publikoval je roku 1750 švýcarský matematik G. Cramer (1704–1752). Teprve roku 1966 bylo poprvé poukázáno na to, že Cramerovo pravidlo publikoval již roku 1748 C. Maclaurin (1698–1746). Ve stejné době se při studiu eliminačních postupů přiblížil Cramerovu pravidlu i Leonhard Euler (1707–1783).

Colin Maclaurin

Skotský matematik Colin Maclaurin studoval na univerzitě v Glasgow a potom vyučoval matematiku v Aberdeenu (Marischal College). Roku 1719 vzbudil svým spisem *Geometria organica* zájem I. Newtona, vzápětí byl jmenován členem Royal Society. Roku 1725 se stal profesorem na univerzitě v Edinburghu, přednášel tam matematiku, fyziku a astronomii. Roku 1745 řídil obranu Edinburghu, po jeho obsazení se uchýlil do Anglie. Získal dvě ceny pařížské akademie, byl považován za nejlepšího britského matematika první poloviny 18. století. Roku 1745 vydal ve dvou svazcích práci *Treatise of fluxions*, v níž navázal na Newtonovy myšlenky týkající se matematické analýzy. Další jeho významný spis, *A treatise of algebra*, vyšel až posmrtně, k tisku jej připravil Patrick Murdoch. Byl vydán roku 1748, patrně ještě ne zcela v tom tvaru, jaký by si byl C. Maclaurin představoval. Přesto byl v 18. století v Británii

[6] Viz [Muir, 1906], díl I., str. 8. Viz též G. W. Leibniz: *Mathematische Schriften* (viz výše), str. 236–241, citovaný úryvek je na str. 240. Podobnými myšlenkami se G. W. Leibniz zabýval již dříve, někdy mezi lety 1678 a 1693 – viz např. [Gerhardt, 1891].

jedním z nejpopulárnějších textů o algebře, jeho šesté vydání je z roku 1796, francouzská verze vyšla již roku 1753 pod názvem *Traité d'algebra*.

V knize *A treatise of algebra* se C. Maclaurin mimo jiné věnuje problematice soustav lineárních rovnic a otázkám eliminace. Nacházíme zde explicitní vyjádření Cramerova pravidla pro soustavu dvou, resp. tří lineárních rovnic o dvou, resp. třech neznámých (viz [Maclaurin, 1748], str. 81–85); autor vysvětluje, jakým způsobem jsou utvořeny zlomky, kterými jsou neznámé veličiny vyjádřeny.

... the Difference of the Products of the opposite Coefficients taken from the Orders that involve the two unknown Quantities.

... of all the Products that can be made of the three opposite Coefficients taken from the Orders that involve the three unknown Quantities.

... the Difference of the Products of the opposite Coefficients in the Orders in which y is not found.

... all the different Products that can be made of three opposite Coefficients taken from the Orders in which z is not found. ([Boyer, 1966], str. 377–378)

C. Maclaurin zdůvodnil předložené pravidlo rutinní eliminací a uvedl několik jednoduchých příkladů. Kapitolu zakončil poznámkou o soustavě čtyř rovnic o čtyřech neznámých.

If four Equations are given, involving four unknown Quantities, their Values may be found much after the same Manner, by taking all the Products that can be made of four opposite Coefficients, and always prefixing contrary signs to those that involve the Products of two opposite Coefficients.
([Boyer, 1966], str. 378)

Ve francouzské verzi z roku 1753 vypadá věta uvádějící Cramerovo pravidlo pro soustavu tří rovnic o třech neznámých takto:

Trois équations & trois inconnues étant données, chaque inconnue sera égale à une fraction dont le numérateur contiendra tous les produits qu'on peut faire de trois coëfficiens opposés, pris dans les ordres où'cette inconnue ne se trouve point, & le dénominateur contiendra les différens produits qu'on peut former de trois coëfficiens opposés, pris dans les ordres qui renferment les trois inconnues.
([Maclaurin, 1748], francouzský překlad z r. 1753, str. 87)

Je zajímavé, že tento Maclaurinův výsledek, přes oblibu jeho učebnice algebry, zůstal bez povšimnutí. Na skutečnost, že C. Maclaurin publikoval tzv. Cramerovo pravidlo již roku 1748, tj. o dva roky dříve než G. Cramer, upozornil až roku 1966 Carl Benjamin Boyer (1906–1976) v krátkém článku *Colin Maclaurin and Cramer's rule*. C. B. Boyer navíc usoudil z dlouhého příspěvku *A second letter from Mr. Colin Maclaurin concerning the roots of equations, with the demonstration of other rules in algebra*, který byl uveřejněn roku 1729 v časopise *Philosophical transactions*, že C. Maclaurin znal patrně tzv. Cramerovo pravidlo již tehdy. C. Maclaurin napsal, že připravuje svoji učebnici algebry, která má být doplňujícím textem k Newtonově knize *Arithmetica universalis*. Maclaurinův příspěvek ke Cramerovu pravidlu popularizoval Morris

Kline (1908–1992) ve své knize *Mathematical thought from ancient to modern times* z roku 1972.

Roku 1999 významně doplnil Boyerovo zjištění Bruce A. Hedman (nar. 1953) v práci *An earlier date for "Cramer's rule"*. V roce 1998 totiž studoval v Edinburghu Maclaurinovy rukopisy, mimo jiné též opis části Maclaurinova díla *A treatise of algebra* pořízený roku 1729 Johnem Russellem. Text tohoto rukopisu je téměř shodný s později vydanou Maclaurinovou učebnicí. V kapitole *Containing general theorems for exterminating the unknown quantities in given equations* je podáno Cramerovo pravidlo ve stejném tvaru jako v Maclaurinově knize.[7]

Zdá se pravděpodobné, že C. Maclaurin dával pracovní verzi své připravované učebnice k dispozici svým studentům. Z objeveného rukopisu vyplývá, že znal Cramerovo pravidlo opravdu již před rokem 1729, jak se domníval C. B. Boyer. Roku 1999 tak B. A. Hedman potvrdil Boyerův názor z roku 1966.

Roku 2001 zveřejnil A. A. Kosinski krátkou poznámku *Cramer's rule is due to Cramer*, v níž do jisté míry zpochybnil Maclaurinovu prioritu. Uvedl, že C. Maclaurin sice popsal řešení soustav dvou a tří rovnic a podal dostatečně jasný předpis na utvoření jmenovatele zlomků popisujících v obecném případě neznámé veličiny, ale nepopsal dostatečně přesně jejich čitatele, zejména znaménka jednotlivých součinů, z nichž čitatelé sestávají. Příčinu můžeme spatřovat v tom, že C. Maclaurin neužíval indexů. Také se nezmínil o tom, co se stane v případě, když bude jmenovatel zlomků popisujících neznámé roven nule (tj. když bude matice uvažované soustavy singulární), což Gabriel Cramer udělal.

Gabriel Cramer

Gabriel Cramer byl významným švýcarským matematikem. Roku 1724 získal spolu s G. L. Calandrinim (1703–1758) stolici matematiky na akademii v Ženevě; zatímco jeden z nich vedl přednášky, mohl druhý cestovat po evropských univerzitách a akademiích. G. Cramer navštívil na svých cestách Paříž, Oxford, Cambridge, Lyon, Bolognu, Montpellier i Holandsko, studoval matematiku a astronomii, spolupracoval s rodinou Bernoulli. Roku 1734 byl v Ženevě jmenován profesorem filozofie, tento post však převzal až roku 1750. Zasloužil se o vydání díla Christiana Wolffa (1679–1754), Johanna I. Bernoulli (1667–1748), Jacoba I. Bernoulli (1654–1705) a korespondence mezi Johannem I. Bernoulli a G. W. Leibnizem.

Roku 1750 vydal G. Cramer v Ženevě velkou monografii o teorii algebraických křivek nazvanou *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, v níž sepsal většinu tehdy známých výsledků algebraické geometrie a své původní výsledky. Zabýval se též problematikou nalezení rovnice algebraické

[7] Stránky 65 a 66 z Russellova opisu Maclaurinovy učebnice, na nichž je Cramerovo pravidlo zachyceno, jsou okopírovány v Hedmanově článku.

křivky, která je určena příslušným počtem bodů. Ve třetí kapitole *Des différents ordres des Lignes algébriques* své monografie hledá rovnici kuželosečky, která je dána pěti body.[8]

Má-li uvažovaná kuželosečka rovnici

$$A + By + Cx + Dyy + Exy + xx = 0$$

a je-li určena body $(\alpha, a), (\beta, b), \ldots, (\varepsilon, e)$, platí pro koeficienty A, B, C, D, E tyto vztahy:

$$A + Ba + C\alpha + Daa + E\alpha a + \alpha\alpha = 0\ ,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A + Be + C\varepsilon + Dee + E\varepsilon e + \varepsilon\varepsilon = 0\ .$$

Je tedy třeba vyřešit soustavu pěti lineárních rovnic o pěti neznámých. G. Cramer na tomto místě poznamenal:

Je crois avoir trouvé pour cela une Régle assez commode & générale, lorsqu'on a un nombre quelconque d'équations & d'inconnuës dont aucune ne passe le prémier degré. On la trouvera dans l'Appendice, N^0. I.
([Cramer, 1750], str. 60)

V Apendixu své knihy (str. 657–659) pak podal návod na řešení soustavy n lineárních rovnic o n neznámých.

Soient plusieurs inconnues z, y, x, v, &c. & autant d'équations

$$\begin{aligned} A^1 &= Z^1 z + Y^1 y + X^1 x + V^1 v + \&c. \\ A^2 &= Z^2 z + Y^2 y + X^2 x + V^2 v + \&c. \\ A^3 &= Z^3 z + Y^3 y + X^3 x + V^3 v + \&c. \\ A^4 &= Z^4 z + Y^4 y + X^4 x + V^4 v + \&c. \\ &\&c. \end{aligned}$$

où les lettres A^1, A^2, A^3, A^4, &c. ne marquent pas, comme à l'ordinaire, les puissances d'A, mais le prémier membre, supposé connu, de la prémiére, seconde, troisiéme, quatriéme, &c. équation. ([Cramer, 1750], str. 657)

Pro $n = 1$ je zřejmě $z = \frac{A_1}{Z_1}$. Je-li $n = 2$, získá se jednoduchou eliminací

$$z = \frac{A_1Y_2 - A_2Y_1}{Z_1Y_2 - Z_2Y_1}\ , \qquad y = \frac{Z_1A_2 - Z_2A_1}{Z_1Y_2 - Z_2Y_1}\ .$$

Pro $n = 3$ dostáváme

$$z = \frac{A_1Y_2X_3 - A_1Y_3X_2 - A_2Y_1X_3 + A_2Y_3X_1 + A_3Y_1X_2 - A_3Y_2X_1}{Z_1Y_2X_3 - Z_1Y_3X_2 - Z_2Y_1X_3 + Z_2Y_3X_1 + Z_3Y_1X_2 - Z_3Y_2X_1}$$

atd.

---

[8] *On peut par le moyen de ces cinq équations trouver les valeurs des cinq coëfficients A, B, C, D, E, ce qui détermine l'eq: $A + By + Cx + Dyy + Exy + xx = 0$ de la Courbe cherchée. Le calcul véritablement en seroit assez long …* ([Cramer, 1750], str. 59)

Z Cramerových vzorců jasně vyplývá, jak se vypočtou neznámé veličiny ze soustavy lineárních rovnic; zcela srozumitelně je uvedeno, jak vypadá výraz ve jmenovateli u všech neznámých a jak se z něj vytvoří čitatelé u jednotlivých neznámých. G. Cramer popsal, jak se stanovují znaménka u jednotlivých členů těchto výrazů. Např. u součinu ZYX je třeba permutovat indexy 123, přičemž každá inverze (*inversio*, *dérangement* – situace, kdy větší index předchází menší) způsobuje změnu znaménka $+$ v znaménko $-$, resp. změnu znaménka $-$ ve znaménko $+$.

L'examen de ces Formules fournit cette Règle générale. Le nombre des équations & des inconnues étant n, on trouvera la valeur de chaque inconnue en formant n fractions dont le dénominateur commun a autant de termes qu'il y a de divers arrangements de n choses différentes. Chaque terme est composé des lettres $ZYXV$ &c. toujours écrites dans le même ordre, mais auxquelles on distribue, comme exposants, les n prémiers chiffres rangés en toutes les maniéres possibles. Ainsi, lorsqu'on a trois inconnues, le dénominateur a [$1 \times 2 \times 3 =$] *6 termes, composés des trois lettres ZYX, qui reçoivent successivement les exposants 123, 132, 213, 231, 312, 321. O donne à ces termes les signes $+$ ou $-$, selon la Règle suivante. Quand un exposant est suivi dans le même terme, médiatement ou immédiatement, d'un exposant plus petit que lui, j'apellerai cela un dérangement. Qu'on compte, pour chaque terme, le nombre des dérangements: s'il est pair ou nul, le terme aura le signe $+$; s'il est impair, le terme aura le signe $-$. Par ex. dans le terme $Z^1Y^2X^3$ il n'y a aucun dérangement: ce terme aura donc le signe $+$. Le terme $Z^3Y^1X^2$ a aussi le signe $+$, parce qu'il a deux dérangements, 3 avant 1 & 3 avant 2. Mais le terme $Z^3Y^2X^1$, qui a trois dérangements, 3 avant 2, 3 avant 1, & 2 avant 1, aura le signe $-$.*

Le dénominateur commun étant ainsi formé, on aura la valeur de z en donnant à ce dénominateur le numérateur qui se forme en changeant, dans tous ses termes, Z en A. Et la valeur d'y est la fraction qui a le même dénominateur & pour numérateur la quantité qui résulte quand on change Y en A, dans tous les termes du dénominateur. Et on trouve d'une maniére semblable la valeur des autres inconnues. ([Cramer, 1750], str. 658)

V závěru apendixu diskutoval G. Cramer případ, kdy je jmenovatel výše uvedených zlomků roven nule. Uvažoval dvě situace: jedna vede na soustavu neřešitelnou, druhá na soustavu, která má nekonečně mnoho řešení.

… si les grandeurs A^1, A^2, A^3, &c. sont telles que les numérateurs soient aussi égaux à zéro, le Problème est indéterminé; car les fractions $\frac{0}{0}$, qui devroient donner la valeur des inconnues, sont indéterminées. Mais si les grandeurs A^1, A^2, A^3, &c. sont telles que, le dénominateur commun étant zéro, les numérateurs ou quelques-uns d'entr'eux ne soient pas zéro, le Problème est impossible, ou du moins les grandeurs inconnues qui peuvent le résoudre sont toutes, ou en partie, infinies. ([Cramer, 1750], str. 659)

Mimo jiné je zde uveden příklad soustavy

$$2 = 3z - 2y \ ,$$
$$5 = 6z - 4y \ ,$$

kdy z Cramerova pravidla vychází

$$z = \frac{2}{0}\,, \qquad y = \frac{3}{0}\,.$$

Jednoduchou eliminací však lze odvodit vztah

$$\frac{2}{3}y + \frac{2}{3} = \frac{4}{6}y + \frac{5}{6}\,,$$

kterému konečnými veličinami nelze vyhovět. Pokud by se však připustily nekonečné veličiny (v poměru 2 : 3), bylo by možno odvozený vztah považovat za správný.

Cramerovo pravidlo bylo zformulováno zcela jasně, proto bylo s nadšením přijato. Inspirovalo matematiky ke zkoumání výrazů, které jsou ve jmenovateli i v čitatelích zlomků vyjadřujících neznámé. Od Cramerova pravidla se postupně odvinula teorie determinantů.

Ve francouzské verzi Eulerovy Algebry vydané roku 1774 pod názvem *Éléments d'algèbre* je poznámka (viz díl I., str. 502), v níž je tento výsledek oceněn a přisouzen G. Cramerovi. Podle K. O. Maye mohla právě tato poznámka přispět k tomu, že je Cramerovo pravidlo spjato s Gabrielem Cramerem. Eulerova Algebra totiž patřila k velmi oblíbeným učebnicím, byla hojně studována a všestranně využívána.

Poznamenejme, že Cramerovo pravidlo stále poutá pozornost, čas od času se objevují jednoduché důkazy tohoto tvrzení, různá zobecnění apod. Viz např. [Ballantine, 1929], [Whitford, Klamkin, 1953], [Klimozak, 1956], [Barr, 1965], [Robinson, 1970], [Baldino, 1978], [Burgstahler, 1983], [Kalman, 1987], [Friedberg, 1988], [Kung, 1988], [Orr, 1989]. Velmi jednoduchý důkaz zobecněného Cramerova pravidla pro soustavu lineárních rovnic se čtvercovou maticí nad komutativním okruhem je v učebnici [Bečvář, 2000].

3. První užití determinantů

Étienne Bézout

Francouzský matematik Étienne Bézout (1730–1783) vyučoval od roku 1763 matematiku v námořní škole a od roku 1768 také ve škole dělostřelecké. Jeho nejdůležitější práce jsou věnovány algebře (soustavy lineárních rovnic, teorie determinantů, eliminace neznámých ze soustav rovnic vyšších stupňů), geometrii (dokázal tzv. Maclaurinovu větu: dvě křivky stupňů m a n se neprotínají ve více než mn bodech) a balistice. Až do poloviny 19. století byla velmi populární jeho šestidílná učebnice matematiky z let 1764 až 1769.

É. Bézout dospěl k determinantům při studiu problematiky soustav lineárních rovnic a otázek eliminace. V práci *Recherches sur le degré des équations* *résultantes de l'évanouissement des inconnues, et sur les moyens qu'il convient d'employer pour trouver ces équations* z roku 1764 předložil rekurentní způsob vytváření kombinatorických výrazů, tzv. rezultantů (výsledek eliminace).

Vyšel od jednoho prvku a, k němu přidal z obou stran prvek b a získal výraz

$$ab - ba \ .$$

Třetí prvek c přidal třemi různými způsoby k součinům ab i ba, a získal tak – při pravidelné změně znamének – výraz

$$abc - acb + cab - bac + bca - cba \ .$$

Čtvrtý prvek přidal obdobným způsobem čtyřmi různými způsoby ke všem součinům předchozího výrazu a získal výraz

$$\begin{aligned} & abcd - abdc + adbc - dabc - acbd + acdb - adcb + dacb + \\ & + cabd - cadb + cdab - dcab - bacd + badc - bdac + dbac + \\ & + bcad - bcda + bdca - dbca - cbad + cbda - cdba + dcba \ . \end{aligned}$$

Nakonec připojil k jednotlivým, výše uvedeným součinům indexy a dostal výrazy

$$a_1 \ ,$$
$$a_1b_2 - b_1a_2 \ ,$$
$$a_1b_2c_3 - a_1c_2b_3 + c_1a_2b_3 - b_1a_2c_3 + b_1c_2a_3 - c_1b_2a_3$$

atd. Ve své práci z roku 1764 napsal:

Soient

$a,\ b,\ c,\ d$ *&c. les coëfficiens de ces inconnues dans la première équation.*
$a',\ b',\ c',\ d'$ *&c. les coëfficiens de mêmes inconnues dans la seconde équation.*
a'', b'', c'', d'' *&c. ceux de la troisième & ainsi de suite.*

Formez les deux permutations ab & ba & écrivez

$$ab - ba \ ;$$

avec ces deux permutations et la lettre c, formez toutes les permutations possibles, en observant de changer de signe toutes les fois que c changera de place dans ab & la même chose à l'égard de ba; vous aurez

$$abc - acb + cab - bac + bca - cba \ .$$

Avec ces six permutations & la lettre d, formez toutes les permutations possibles, en observant de changer de signe à chaque fois que d changera de place dans une même terme; vous aurez

$$\begin{aligned} & abcd - abdc + adbc - dabc \\ - \ & acbd + acdb - adcb + dacb \\ + \ & cabd - cadb + cdab - dcab \\ - \ & bacd + badc - bdac + dbac \\ + \ & bcad - bcda + bdca - dbca \\ - \ & cbad + cbda - cdba + dcba \end{aligned}$$

& ainsi de suite jusqu'à ce que vous ayez épuisé tous les coëfficiens de la première équation.

Alors conservez les lettres qui occupent la première place; donnez à celles qui occupent la seconde, la même marque qu'elles ont dans la seconde équation; à celles qui occupent la troisième, la même marque qu'elles ont dans la troisième équation, & ainsi de suite; égalez enfin le tout à zéro et vous aurez l'équation de condition cherchée.

Kromě rekurentního návodu na vytvoření rezultantu předložil É. Bézout ještě návod obecný: z prvního členu rezultantu, např. $a_1b_2c_3$, se permutováním indexů získají všechny ostatní členy; jejich znaménka určoval pomocí počtu transpozic, které při permutování indexů použil.

Roku 1779 vydal É. Bézout knihu *Théorie générale des équations algébriques*, v níž se rovněž věnoval soustavám lineárních rovnic a determinantům. Tuto problematiku zpracoval v paragrafech 195 až 223 a 252 až 270; citoval zde G. Cramera, A. T. Vandermondea, P. S. Laplace a svoji práci z roku 1764.

Podal návod k řešení soustav n lineárních rovnic o n neznámých, který vede ke Cramerovu pravidlu. Postup vysvětlil pro $n = 2$ a $n = 3$ a demonstroval vzápětí na konkrétních příkladech; jeho návod však má obecný charakter. Pro $n = 2$ tato metoda vypadá takto: Od soustavy

$$\begin{aligned} ax + \ by + \ c &= 0 , \\ a'x + b'y + c' &= 0 \end{aligned}$$

přejdeme k soustavě

$$\begin{aligned} ax + \ by + c\,t &= 0 , \\ a'x + b'y + c't &= 0 \end{aligned}$$

a od součinu xyt záměnou x za a, y za b a t za c k součinu

$$ayt - bxt + cxy$$

a dostáváme tzv. *první řádek*. V každém z členů prvního řádku zaměníme neznámé za koeficienty: x za a', pak y za b' a nakonec t za c'. Ze tří členů tak dostaneme členů šest; tvoří tzv. *druhý řádek*

$$ab't - ac'y - a'bt + bc'x + a'cy - b'cx ,$$

neboli

$$(ab' - a'b)t - (ac' - a'c)y + (bc' - b'c)x .$$

Odtud již

$$x = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b} , \qquad y = \frac{-(ac' - a'c)}{ab' - a'b} .$$

Pro soustavu n lineárních rovnic o n neznámých získáme vyjádření neznámých z n-tého řádku.

Dále se É. Bézout zabývá eliminací $n+1$ neznámých z n homogenních lineárních rovnic a vyjadřuje podmínku pro existenci netriviálního řešení. Přidá-li k matici soustavy libovolný její řádek, získá matici čtvercovou, jejíž determinant je roven nule. V duchu předcházejícího postupu dochází k podmínce nulovosti n-tého řádku.

Pierre Simon Laplace

Francouzský matematik, fyzik a astronom P. S. Laplace (1749–1827) studoval klasické jazyky, literaturu a umění, teologii a filozofii, ale i matematiku a astronomii, měl velmi široké zájmy.

V matematice se věnoval hlavně diferenciálním a integrálním rovnicím, teorii potenciálu, přispěl k rozvoji teorie pravděpodobnosti atd. Ve fyzice se zabýval problematikou vedení tepla, elektrostatikou, hydrodynamikou, kapilaritou, šířením zvuku v různých prostředích atd. Rozpracoval nebeskou mechaniku, studoval zejména pohyb Měsíce a planet, příliv a odliv, tvar Země atd. Jeho nejvýznamnějšími díly jsou *Théorie analytique des probabilités* (1812) a pětidílná *Méchanique céleste* (1798–1825), jejíž hlavní myšlenky byly sepsány již v populárněji pojaté knize *Exposition du système du monde* (1795–1796).

P. S. Laplace se při řešení problémů nebeské mechaniky zabýval hledáním nových metod integrace diferenciálních rovnic. Tak se dostal k problematice soustav lineárních rovnic a k jejich řešení pomocí determinantů, které nazýval *resultanty* stejně jako É. Bézout.

Základní aparát týkající se determinantů rozvinul P. S. Laplace ve čtvrté části své práce *Recherches sur le calcul intégral et sur le système du monde* z roku 1772. Úspěšně zde navázal na Cramerovy a Bézoutovy výsledky, které na několika místech své práce citoval. Připomněl je již v závěru třetí části své práce:

... les géomètres ont donné pour cet objet des règles générales (voir l'Introduction à l'analyse des lignes courbes, de M. Cramer, et les Mémoires de l'Académie pour l'année 1764, p. 292[9]*); mais comme elles ne me paraissent avoir été jusqu'ici démontrées que par induction, et que d'ailleurs elles sont impraticables, pour peu que le nombre des équations soit considérable, je vais reprendre de nouveau cette matière, et donner quelques procédés plus simples que ceux qui sont déjà connus, pour éliminer entre un nombre quelconque d'équations du premier degré.* (Oeuvres VIII., str. 395)

Ve čtvrté části této práce P. S. Laplace vysvětlil Cramerovo pravidlo a Bézoutův způsob rekurentního vytváření rezultantů, pozornost věnoval hlavně znaménkům jednotlivých členů:

Cette règle est due à M. Cramer, mais elle peut être simplifiée par le procédé suivant, que M. Bezout a donné dans l'endroit cité des Mémoires de l'Académie. (Oeuvres VIII., str. 396)

[9] Výše uvedená Bézoutova práce.

Si, au lieu de combiner d'abord la lettre a *avec la lettre* b*, ensuite ces deux-ci avec la lettre* c*, et ainsi de suite, c'est-à-dire si, au lieu de combiner les lettres* $a, b, c, d, e, \ldots$ *dans l'ordre* $a, b, c, d, e, \ldots,$ *on les eùt combinées dans l'ordre* $a, c, b, d, e, \ldots,$ *ou* $a, d, b, c, e, \ldots,$ *ou* $a, e, b, c, d, \ldots,$*ou etc., je dis qu'on aurait toujours eu la même quantité, à la différence des signes près.*

Pour démontrer ce théorème, nommons, en général, résultante la quantité qui résulte de l'une quelconque de ces combinaisons, en sorte que la première résultante soit celle qui vient de la combinaison suivant l'ordre $a, b, c, d, e, \ldots,$ *que la seconde résultante soit celle qui vient de la combinaison suivant l'ordre* $a, c, b, d, e, \ldots,$ *que la troisième résultante soit celle qui vient de la combinaison suivant l'ordre* $a, d, b, c, e, \ldots,$ *et ainsi de suite* ... (Oeuvres VIII., str. 397–398)

Vzápětí uvedl, že výměnou dvou písmen, která užívá pro generování rezultantů, dochází ke změně znaménka rezultantu. Jde vlastně o záměnu dvou řádků nebo sloupců.

Dále vyšetřoval soustavu tří lineárních rovnic o třech neznámých – nejprve homogenní, a pak nehomogenní – a odvodil Cramerovo pravidlo. Pro soustavu

$$\begin{aligned} {}^1p &= {}^1a\mu + {}^1b\mu' + {}^1c\mu'' \ , \\ {}^2p &= {}^2a\mu + {}^2b\mu' + {}^2c\mu'' \ , \\ {}^3p &= {}^3a\mu + {}^3b\mu' + {}^3c\mu'' \end{aligned}$$

uvedl vzorec vyjadřující první neznámou ve tvaru

$$\mu = \frac{{}^1p({}^2b^3c - {}^2c^3b) + {}^2p({}^1c^3b - {}^1b^3c) + {}^3p({}^1b^2c - {}^1c^2b)}{{}^1a({}^2b^3c - {}^2c^3b) + {}^2a({}^1c^3b - {}^1b^3c) + {}^3a({}^1b^2c - {}^1c^2b)} \ ,$$

kde determinanty v čitateli i jmenovateli jsou rozvedeny podle prvního sloupce.

V dalším textu se P. S. Laplace věnoval determinantům druhého, třetího, čtvrtého, pátého a šestého řádu. Nepřijal značení determinantů, které zavedl ve stejné době A. T. Vandermonde, ale užíval svoji poměrně jednoduchou symboliku (Oeuvres VIII., str. 404):

On peut réduire encore de la manière suivante l'équation R *en termes composés de facteurs de trois dimensions; pour cela, je désigne par* (abc) *la quantité*

$$abc - acb + cab - bac + bca - cba \ ,$$

et par (ab) *la quantité* $ab - ba$*, et ainsi de suite; par* $({}^1a^2b^3c)$*, j'indiquerai la quantité* (abc)*, dans les termes de laquelle on donne* 1 *pour indice à la première lettre,* 2 *à la deuxième, et* 3 *à la troisième; par* $({}^1a^2b)$*, je désignerai la quantité* (ab)*, dans les termes de laquelle on donne* 1 *pour indice à la première lettre et* 2 *à la deuxième; et ainsi de suite.*

Je suppose maintenant que vous ayez trois équations, l'équation de condition sera

$$0 = ({}^1a^2b^3c) \ .$$

Při vyšetřování determinantů zformuloval P. S. Laplace speciální případy tvrzení, které dnes nese jeho jméno – Laplaceova věta. Rozvoj determinantu čtvrtého řádu, tj. determinantu $({}^1a^2b^3c^4d)$, uvedl ve tvaru

$$\begin{aligned} &({}^1a^2b - {}^1b^2a)({}^3c^4d - {}^3d^4c) - ({}^1a^3b - {}^1b^3a)({}^2c^4d - {}^2d^4c) + \\ &+ ({}^1a^4b - {}^1b^4a)({}^2c^3d - {}^2d^3c) + ({}^2a^3b - {}^2b^3a)({}^1c^4d - {}^1d^4c) + \\ &- ({}^2a^4b - {}^2b^4a)({}^1c^3d - {}^1d^3c) + ({}^3a^4b - {}^3b^4a)({}^1c^2d - {}^1d^2c)\ . \end{aligned}$$

Je zajímavé, že P. S. Laplace necitoval A. T. Vandermondea, jehož práce věnovaná determinantům vyšla ve stejném roce, ale který referoval o svých výsledcích v pařížské akademii o rok dříve než P. S. Laplace.

Joseph Louis Lagrange

J. L. Lagrange (1736–1813), matematik, fyzik a astronom italsko-francouzského původu, studoval na vojenské škole v Turíně, kde pak od roku 1754 vyučoval matematiku. Jeho práce o šíření zvuku z roku 1759 vzbudila zájem L. Eulera, na jehož doporučení se v témže roce stal členem berlínské akademie věd (v letech 1766 až 1787 byl jejím prezidentem). Od roku 1787 pracoval v pařížské akademii věd (jejím členem byl od roku 1772), byl jedním z organizátorů École Normale a École Polytechnique, na nichž též přednášel. Od roku 1792 se angažoval v propagaci nové metrické soustavy.

Věnoval se algebře, teorii čísel, diferenciálnímu a integrálnímu počtu, variačnímu počtu, geometrii, řešil řadu problémů z nejrůznějších oblastí matematiky, fyziky, nebeské mechaniky, sférické astronomie a kartografie, zabýval se problematikou algebraických rovnic, problémem tří těles, libracemi Měsíce, pohybem Jupiterových měsíčků atd. Jeho slavná *Mécanique analytique* (1788) znamenala výrazný obrat od geometrického chápání mechaniky k pojetí analytickému; ukázala význam a sílu diferenciálních rovnic popisujících pohyb.

Problematikou determinantů se J. L. Lagrange zabýval zejména ve třech pracích z roku 1773.

V práci *Nouvelle solution du problème du mouvement de rotation d'un corps de figure quelconque qui n'est animé par aucune force accélératrice* nacházíme identity, v nichž figurují determinanty (Oeuvres III., str. 580):

Soient neuf quantités quelconques $x, y, z, x', y', z', x'', y'', z''$, je dis qu'on aura cette équation identique

$$\begin{aligned} &(xy'z'' + yz'x'' + zx'y'' - xz'y'' - yx'z'' - zy'x'')^2 \\ &\quad = (x^2 + y^2 + z^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2)(x''^2 + y''^2 + z''^2) \\ &\qquad + 2(xx' + yy' + zz')(xx'' + yy'' + zz'')(x'x'' + y'y'' + z'z'') \\ &\qquad - (x^2 + y^2 + z^2)(x'x'' + y'y'' + z'z'')^2 \\ &\qquad - (x'^2 + y'^2 + z'^2)(xx'' + yy'' + zz'')^2 \\ &\qquad - (x''^2 + y''^2 + z''^2)(xx' + yy' + zz')^2. \end{aligned}$$

Jako jeden z důsledků uvedl autor Cramerovo pravidlo:

Si on prend les trois équations

$$x\xi + y\eta + z\zeta = \beta \ ,$$
$$xx' + yy' + zz' = b'',$$
$$xx'' + yy'' + zz'' = b',$$

et qu'on en tire les valeurs des quantités x, y, z, on aura par les formules connues

$$x = \frac{\beta(y'z'' - z'y'') + b'(\eta z' - \zeta y') + b''(\zeta y'' - \eta z'')}{\xi(y'z'' - z'y'') + \eta(z'x'' - x'z'') + \zeta(x'y'' - y'x'')}$$

...

donc, faisant les substitutions du numéro précédent et supposant, pour abréger,

$$\alpha = a'a'' - b^2 \ ,$$

on aura

$$x = \frac{\beta\xi + (a''b'' - bb')x' + (a'b' - bb'')x''}{\alpha} \ ,$$

... (Oeuvres III., str. 581–582)

V následující práci *Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires* se J. L. Lagrange zabýval zkoumáním různých vlastností čtyřstěnu; pomocným aparátem jeho zkoumání se staly determinanty, právě s jejich pomocí se snažil své výsledky a postupy vyjádřit. Téma této práce však bohužel podstatně omezilo šíři jeho zkoumání – věnoval se pouze determinantům druhého a třetího řádu a vyjádřil některé jejich základní vlastnosti.

J. L. Lagrange zavedl poměrně jednoduchou symboliku, determinant třetího řádu zapisoval ve tvaru

$$\Delta = xy'z'' + yz'x'' + zx'y'' - xz'y'' - yx'z'' - zy'x'' \ .$$

Subdeterminanty tohoto determinantu značil většinou řeckými písmeny ξ, η, ζ, ξ', η', ζ', ξ'', η'', ζ'', znal identity

$$x\xi + x'\xi' + x''\xi'' = \Delta \ , \qquad x\eta + x'\eta' + x''\eta'' = 0 \qquad \text{atd.},$$

dospěl tedy k pojmu reciprokého determinantu a ukázal, že je roven druhé mocnině původního determinantu.[10]

V práci *Recherches d'Arithmetique* z roku 1773 mimo jiné dospěl pomocí substituce

$$y = Ms + Nx \ ,$$
$$z = ms + nx$$

[10] Reciproký determinant regulární matice A řádu n je roven $(n-1)$-ní mocnině determinantu matice A.

od kvadratické formy

$$f = py^2 + 2qyz + rz^2 \qquad \text{k formě} \qquad F = Ps^2 + 2Qsx + Rx^2$$

a ukázal, že

$$PR - Q^2 = (pr - q^2)(Mn - Nm)^2 \ .$$

V následující ukázce tento postup předvedeme (Oeuvres III., str. 723–724).

Étant donnée la formule

$$py^2 + 2qyz + rz^2,$$

dans laquelle y et z sont des nombres indéterminés et p, q, r sont des nombres positifs ou négatifs, déterminés par ces conditions, que

$$pr - q^2 = a$$

(a étant un nombre positif donné) et que $2q$ ne soit ni $> p$ ni $> r$, abstraction faite des signes de p, q et r; trouver si cette formule peut se transformer en une autre de la même espèce et qui soit assujettie aux mêmes conditions.

Comme la transformée doit être analogue à la proposée, il est visible qu'on ne saurait employer d'autres substitutions que celles-ci

$$y = Ms + Nx \ , \qquad z = ms + nx \ ,$$

s et x étant deux nouvelles indéterminées, et M, N, m, n des nombres arbitraires. En effect ces substitutions donneront une transformée de cette forme

$$Ps^2 + 2Qsx + Rx^2 \ ,$$

dans laquelle on aura

$$\begin{aligned} P &= pM^2 + 2qMm + rm^2, \\ Q &= pMN + q(Mn + Nm) + rmn \ , \\ R &= pN^2 + 2qNn + rn^2, \end{aligned}$$

et il ne s'agira que de voir si l'on peut déterminer les nombres M, N, m, n, en sorte que l'on ait

$$PR - Q^2 = a \ ,$$

et que $2Q$ ne soit ni $> P$ ni $> R$.

Pour satisfaire à la première condition je substitue dans la quantité $PR - Q^2$ les valeurs de P, Q, R, et je trouve, en effaçant ce qui se détruit,

$$PR - Q^2 = (pr - q^2)(Mn - Nm)^2 \ ;$$

mais (hypothèse)

$$pr - q^2 = a \ ,$$

donc, pour que $PR - Q^2$ *soit aussi égal à* a, *il faudra que l'on ait*

$$(Mn - Nm)^2 = 1 \ ,$$

et par conséquent

$$Mn - Nm = \pm 1 \ .$$

Diskriminant formy F je tedy roven diskriminantu formy f vynásobenému druhou mocninou determinantu matice uvažované substituce. Tento výsledek je jedním z triviálních poznatků teorie invariantů. V lineární algebře se objevuje při vyjádření bilineární formy vzhledem ke dvěma různým bázím.

Lagrangeovy výsledky podstatně k rozvoji teorie determinantů nepřispěly, měly jen omezený vliv.

4. Teorie determinantů

Počátkem sedmdesátých let 18. století nastala při studiu determinantů kvalitativní změna. Determinanty začaly být chápány jako samostatné objekty zasluhující skutečnou pozornost, objevila se symbolika, která umožnila vyjádřit jejich základní vlastnosti a popsat jejich užití. O něco později začaly být determinanty využívány v jednotlivých matematických disciplínách.

Alexandre Théophile Vandermonde

Francouzský matematik A. T. Vandermonde (1735–1796), který byl od roku 1771 členem pařížské akademie, se později aktivně účastnil Velké francouzské revoluce. Zabýval se hlavně algebrou (problémy eliminace, determinanty, řešitelnost algebraických rovnic).

Jeho práce *Mémoire sur l'élimination* byla dne 12. ledna 1771 čtena v pařížské akademii a v následujícím roce publikována v jejích pojednáních. Obsahuje základy teorie determinantů, nové teorie, v níž se pojem determinantu stal samostatným objektem hodným matematického zkoumání.

První část této Vandermondeovy práce je věnována rovnicím prvního stupně. Autor zde nejprve zavedl dvojí indexy podobně jako G. W. Leibniz; nepsal je však vedle sebe, ale nad sebe.

Je suppose que l'on représente par $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$, &c., $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{2}$, &c., $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{3}$, &c., &c., *autant de différentes quantités générales, dont l'une quelconque soit* $\frac{\alpha}{a}$, *une autre quelconque soit* $\frac{\beta}{b}$, &c., &, *que le produit des deux soit désigné à l'ordinaire par* $\frac{\alpha}{a} \cdot \frac{\beta}{b}$.

Des deux nombres ordinaux α & a, *le premier, par exemple, désignera de quelle équation est pris le coëfficient* $\frac{\alpha}{a}$, & *le second désignera le rang que tient ce coëfficient dans l'équation, comme on le verra ci-après.*
([Muir, 1906], díl I., str. 18)

Pojem, který dnes nazýváme determinantem, definoval A. T. Vandermonde pomocí symbolu

$$\frac{|\ |\ |\ |}{|\ |\ |\ |}\ ,$$

do něhož se vepisovaly (v dnešní řeči) řádkové a sloupcové indexy. Determinant druhého řádu Vandermonde definoval rovností

$$\frac{\alpha|\beta}{a|b} = {}^{\alpha}_{a}\cdot{}^{\beta}_{b} - {}^{\alpha}_{b}\cdot{}^{\beta}_{a}\ ,$$

neboli v naší symbolice

$$\frac{\alpha|\beta}{a|b} = \begin{vmatrix} r_{\alpha a} & r_{\alpha b} \\ r_{\beta a} & r_{\beta b} \end{vmatrix} = r_{\alpha a} r_{\beta b} - r_{\alpha b} r_{\beta a}\ ,$$

a dále rekurentně

$$\frac{\alpha|\beta|\gamma}{a|b|c} = {}^{\alpha}_{a}\cdot\frac{\beta|\gamma}{b|c} + {}^{\alpha}_{b}\cdot\frac{\beta|\gamma}{c|a} + {}^{\alpha}_{c}\cdot\frac{\beta|\gamma}{a|b}\ ,$$

$$\frac{\alpha|\beta|\gamma|\delta}{a|b|c|d} = {}^{\alpha}_{a}\cdot\frac{\beta|\gamma|\delta}{b|c|d} - {}^{\alpha}_{b}\cdot\frac{\beta|\gamma|\delta}{c|d|a} + {}^{\alpha}_{c}\cdot\frac{\beta|\gamma|\delta}{d|a|b} - {}^{\alpha}_{d}\cdot\frac{\beta|\gamma|\delta}{a|b|c}$$

… až do šestého řádu. O symbolech

$$\frac{\alpha|\beta}{a|b}\ , \qquad \frac{\alpha|\beta|\gamma}{a|b|c}\ , \qquad \frac{\alpha|\beta|\gamma|\delta}{a|b|c|d}$$

napsal, že první představuje dva různé členy, jeden kladný a jeden záporný, druhý šest různých členů, tři kladné a tři záporné, a třetí čtyřiadvacet různých členů, dvanáct kladných a dvanáct záporných; počet těchto členů odpovídá počtu permutací dvou, tří, resp. čtyř prvků.

Zavedená symbolika nebyla ideální, neboť s její pomocí nebylo možno zapsat konkrétně zadaný číselný determinant; šlo však stručně a přehledně vyjádřit některé základní vlastnosti determinantů. A. T. Vandermonde s pomocí své symboliky uvedl dvě jednoduchá tvrzení o cyklické záměně, resp. transpozici sloupců:

$$\frac{1|2|3|\dots|m|m+1|\dots|n}{1|2|3|\dots|m|m+1|\dots|n} =$$

$$= \pm\ \frac{1|\quad 2\quad|\dots|\ n-m+1\ |n-m+2|\dots|\quad n}{m|m+1|\dots|\qquad n\qquad|\qquad 1\qquad|\dots|m-1}\ ,$$

$$\frac{1|2|3|\dots|m|m+1|\dots|n}{1|2|3|\dots|m|m+1|\dots|n} = -\ \frac{1|2|3|\dots|m-1|\quad m\quad|m+1|m+2|\dots|n}{1|2|3|\dots|m-1|m+1|\quad m\quad|m+2|\dots|n}\ .$$

S obecnými důkazy si ve své práci příliš starosti nedělal:

Au lieu de démontrer généralement ces deux équations, ce qui exigeroit un calcul embarrassant plutôt que difficile, je me contenterai de développer les exemples les plus simples: cela suffira pour saisir l'esprit de la démonstration. ([Muir, 1906], díl I., str. 19)

Konkrétně ukázal, že

$$\frac{\alpha|\beta}{a|b} = -\frac{\alpha|\beta}{b|a},$$

$$\frac{\alpha|\beta|\gamma}{a|b|c} = \frac{\alpha|\beta|\gamma}{b|c|a} = \frac{\alpha|\beta|\gamma}{c|a|b} = -\frac{\alpha|\beta|\gamma}{b|a|c} = -\frac{\alpha|\beta|\gamma}{a|c|b} = -\frac{\alpha|\beta|\gamma}{c|b|a}$$

atd. až po obdobné identity pro determinanty čtvrtého řádu. Prezentoval též některé vztahy v pozměněné symbolice – místo písmenných indexů použil indexy číselné. Z předchozích výsledků získal další základní vlastnost – determinant se dvěma stejnými řádky je roven nule:

$$\frac{\alpha|\alpha}{a\,|\,b} = 0\ , \qquad \frac{\alpha|\beta\,|\,\beta}{a\,|\,b\,|\,c} = 0\ .$$

Následuje poměrně zajímavé odvození Cramerova pravidla. Z předchozí vlastnosti determinantů vyplývají tyto dvě identity:

$$\frac{1|1|2}{1|2|3} = \tfrac{1}{1}\cdot\frac{1|2}{2|3} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1|2}{3|1} + \tfrac{1}{3}\cdot\frac{1|2}{1|2} = 0\ ,$$
$$\frac{2|1|2}{1|2|3} = \tfrac{2}{1}\cdot\frac{1|2}{2|3} + \tfrac{2}{2}\cdot\frac{1|2}{3|1} + \tfrac{2}{3}\cdot\frac{1|2}{1|2} = 0\ .$$

Z nich ihned dostáváme, že soustava

$$\tfrac{1}{1}\xi_1 + \tfrac{1}{2}\xi_2 + \tfrac{1}{3} = 0\ ,$$
$$\tfrac{2}{1}\xi_1 + \tfrac{2}{2}\xi_2 + \tfrac{2}{3} = 0$$

má řešení vyjádřené vzorci

$$\xi_1 = \frac{\frac{1|2}{2|3}}{\frac{1|2}{1|2}}\ , \qquad \xi_2 = \frac{\frac{1|2}{3|1}}{\frac{1|2}{1|2}}\ .$$

Obdobným způsobem získáme řešení soustavy

$$\tfrac{1}{1}\xi_1 + \tfrac{1}{2}\xi_2 + \tfrac{1}{3}\xi_3 + \tfrac{1}{4} = 0\ ,$$
$$\tfrac{2}{1}\xi_1 + \tfrac{2}{2}\xi_2 + \tfrac{2}{3}\xi_3 + \tfrac{2}{4} = 0\ ,$$
$$\tfrac{3}{1}\xi_1 + \tfrac{3}{2}\xi_2 + \tfrac{3}{3}\xi_3 + \tfrac{3}{4} = 0\ .$$

Má tvar

$$\xi_1 = -\frac{\dfrac{1|2|3}{2|3|4}}{\dfrac{1|2|3}{1|2|3}}\,, \qquad \xi_2 = \frac{\dfrac{1|2|3}{3|4|1}}{\dfrac{1|2|3}{1|2|3}}\,, \qquad \xi_3 = -\frac{\dfrac{1|2|3}{4|1|2}}{\dfrac{1|2|3}{1|2|3}}\,.$$

A. T. Vandermonde dále uvedl rozvoj determinantu čtvrtého a šestého řádu podle prvních dvou řádků. Pro determinant čtvrtého řádu jeho zápis vypadá takto:

$$\begin{aligned}\frac{\alpha\,|\,\beta\,|\,\gamma\,|\,\delta}{a\,|\,b\,|\,c\,|\,d} = {} & \frac{\alpha|\beta}{a|b}\cdot\frac{\gamma|\delta}{c|d} - \frac{\alpha|\beta}{a|c}\cdot\frac{\gamma|\delta}{b|d} + \frac{\alpha|\beta}{a|d}\cdot\frac{\gamma|\delta}{b|c} + \\ & + \frac{\alpha|\beta}{b|c}\cdot\frac{\gamma|\delta}{a|d} - \frac{\alpha|\beta}{b|d}\cdot\frac{\gamma|\delta}{a|c} + \\ & + \frac{\alpha|\beta}{c|d}\cdot\frac{\gamma|\delta}{a|b}\,.\end{aligned}$$

Na závěr první části své práce uvedl formulaci Cramerova pravidla pro soustavu n lineárních rovnic o n neznámých. Cramerovo jméno se však v jeho práci neobjevuje.

Druhá část jeho práce se týká eliminace neznámých ze dvou algebraických rovnic vyšších stupňů. I zde využil A. T. Vandermonde determinanty, zavedl však pro ně zjednodušené označení

$$\overline{a|b} \qquad \text{místo} \qquad \frac{1|2}{a|b}\,.$$

Vandermondeova symbolika umožnila vyjádření základních vlastností determinantů, ale neujala se. T. Muir, velký znalec vývoje této disciplíny, označil A. T. Vandermondea za zakladatele teorie determinantů:

Of the mathematicians whose work has thus far been passed in review, the only one fit to be viewed as the founder of the theory of determinants is Vandermonde. ([Muir, 1906], díl I., str. 24)

Carl Friedrich Gauss

C. F. Gauss (1777–1855) byl jedním z nejvýznamnějších matematiků všech dob. V letech 1795 až 1798 studoval na univerzitě v Göttingen, od roku 1799 pracoval na univerzitě v Braunschweigu, ve svém rodišti, a od roku 1807 na univerzitě v Göttingen, kde byl současně ředitelem univerzitní astronomické observatoře. Zasáhl snad do všech matematických disciplín, do astronomie, matematické i teoretické fyziky, geodézie atd.

Ve svém slavném díle *Disquisitiones arithmeticae* z roku 1801 se C. F. Gauss dotknul i problematiky, kterou dnes řadíme do teorie determinantů (a též do teorie matic a algebraických forem). V páté části tohoto díla nazvané *De formis* *aequationibusque indeterminatis secundi gradus* uvažoval binární kvadratickou formu, kterou zapisoval ve tvaru

$$axx + 2bxy + cyy$$

a symbolicky ji značil (a, b, c). Přiřadil jí číslo $b^2 - ac$, které nazval *determinant.* V dnešní terminologii se jedná o záporně vzatý determinant matice uvažované kvadratické formy, tzv. *diskriminant.*

Formam $axx + 2bxy + cyy$*, quando de indeterminatis* x, y *non agitur, ita designabimus,* (a, b, c). ([Gauss, 1801], str. 121)

Numerum $bb - ac$*, a cuius indole proprietates formae* (a, b, c) *imprimis pendere, in sequentibus docebimus, determinantem huius formae vocabimus.* ([Gauss, 1801], str. 122)

Obdobným způsobem vyšetřoval C. F. Gauss ternární kvadratické formy. Jejich koeficienty zapisoval do obdélníkového schématu o dvou řádcích a třech sloupcích.

Ita

$$axx + a'x'x' + a''x''x'' + 2bx'x'' + 2b'xx'' + 2b''xx'$$

erit forma ternaria rite ordinata, cuius indeterminata prima x*, secunda* x'*, tertia* x''*, coëfficiens primus* a *etc., quartus* b *etc. Sed quoniam ad brevitatem multum conferet, si non semper necesse est, indeterminatas formae ternariae per literas peculiares denotare, eandem formam, quatenus ad indeterminatas non respicimus, etiam hoc modo*

$$\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix}$$

designabimus. ([Gauss, 1801], str. 300)

Výše uvedené ternární kvadratické formě f přiřadil číslo

$$D = abb + a'b'b' + a''b''b'' - aa'a'' - 2bb'b'' \ ,$$

tj. záporně vzatý determinant její matice.

Dále definoval k formě f tzv. adjungovanou (reciprokou) formu F, jejímiž koeficienty jsou čísla

$$\begin{aligned} bb - a'a'' &= A \ , \qquad & b'b' - aa'' &= A' \ , \qquad & b''b'' - aa' &= A'' \ , \\ ab - b'b'' &= B \ , \qquad & a'b' - bb'' &= B' \ , \qquad & a''b'' - bb' &= B'' \ , \end{aligned}$$

což jsou algebraické doplňky jednotlivých prvků matice formy f. K formě F uvažoval opět adjungovanou formu a ukázal, že její koeficienty lze vyjádřit pomocí koeficientů původní formy f a jejího diskriminantu D.

... formae F *adiunctam esse formam*

$$\begin{pmatrix} aD, & a'D, & a''D \\ bD, & b'D, & b''D \end{pmatrix}$$

Numerum D, a cuius indole proprietates formae ternariae f imprimis pendent determinantem huius formae vocabimus; hoc modo determinans formae F fit $= DD$, sive aequalis quadrato determinantis formae f, cui adiuncta est. ([Gauss, 1801], str. 301)

C. F. Gauss dále vyšetřoval substituce forem, kterým přiřazoval čtvercová schémata jejich koeficientů (v dnešní terminologii matici), uvažoval determinant tohoto čtvercového schématu a ukázal vztah mezi diskriminantem D původní formy f, diskriminantem E transformované formy g a determinantem k příslušné substituce. Ukázal, že $E = k^2 \cdot D$.

Si forma aliqua ternaria f determinantis D, cuius indeterminatae sunt x, x', x'' (puta prima $= x$ etc.) in formam ternariam g determinantis E, cuius indeterminatae sunt y, y', y'', transmutatur per substitutionem talem

$$\begin{aligned} x &= \alpha y + \beta y' + \gamma y'' \\ x' &= \alpha' y + \beta' y' + \gamma' y'' \\ x'' &= \alpha'' y + \beta'' y' + \gamma'' y'' \end{aligned}$$

ubi novem coëfficientes α, β etc. omnes supponuntur esse numeri integri, brevitatis caussa neglectis indeterminatis simpliciter dicemus, f transire in g per substitutionem (S)

$$\begin{matrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{matrix}$$

atque f implicare ipsam g, sive g sub f contentam esse. Ex tali itaque suppositione sponte sequuntur sex aequationes pro sex coëfficientibus in g, quas apponere non erit necessarium; hinc autem per calculum facilem sequentes conclusiones evolvuntur:

I. Designato brevitatis caussa numero

$$\alpha\beta'\gamma'' + \beta\gamma'\alpha'' + \gamma\alpha'\beta'' - \gamma\beta'\alpha'' - \alpha\gamma'\beta'' - \beta\alpha'\gamma'' \qquad \textit{per} \quad k$$

invenitur post debitas reductiones $E = kkD$, unde patet, D metiri ipsum E et quotientem esse quadratum. ([Gauss, 1801], str. 301–302)

V předchozích Gaussových výsledcích je obsažena věta o násobení determinantů a věta o reciprokém determinantu; Gaussova tvrzení se však týkají determinantů druhého a třetího řádu.

Jacques Philippe Marie Binet

Francouzský matematik, fyzik a astronom J. P. M. Binet (1786–1856) působil na École Polytechnique a na Collége de France, od roku 1843 byl členem pařížské akademie.

J. P. M. Binet se s problematikou, která souvisí s determinanty, setkal ve fyzikálním kontextu již roku 1811 ve svých článcích *Mémoire sur la théorie* *des axes conjugués et des momens d'inertie des corps* a *Sur quelques formules d'algèbre, et sur leur application à des expressions qui ont rapport aux axes conjugués des corps.* Pomocí současné terminologie bychom mohli říci, že vyjádřil determinant symetrické matice jako součet, resp. lineární kombinaci druhých mocnin jistých determinantů; tyto výsledky považoval za snadno pochopitelné (*facile à saisir*). O rok později na ně navázal třetí prací, v níž již determinanty hrály výraznější roli.

Dne 30. listopadu 1812 prezentovali J. P. M. Binet a A.-L. Cauchy své práce ve Francouzském institutu. Binetův příspěvek byl o rok později publikován pod názvem *Mémoire sur un système de formules analytiques, et leur application à des considérations géométriques* v časopise Journal de l'École Polytechnique.

J. P. M. Binet navázal na Vandermondeovy, Laplaceovy, Lagrangeovy a Gaussovy práce. Zobecnil zejména některé Lagrangeovy výsledky, které byly postaveny na využití determinantů v geometrii. Pro determinant užíval termín resultant (*résultantes à deux lettres, à trois lettres, à quatre lettres* atd.), který před ním propagoval P. S. Laplace.

Binetovo symbolické označení determinantu druhého a třetího řádu, tj. (y', z'') a (x, y', z''), vyjadřuje tyto výrazy

$$y'z'' + y''z' \ , \quad \text{resp.} \quad xy'z'' + x'y''z + x''yz' - zy'x'' - z'y''x - z''yx' \ .$$

Rozvoj determinantu čtvrtého řádu podle jednoho řádku nebo sloupce lze v Binetově symbolice vyjádřit rovností

$$(a_1, b_2, c_3, d_4) = a_1(b_2, c_3, d_4) - a_2(b_3, c_4, d_1) + a_3(b_4, c_1, d_2) - a_4(b_1, c_2, d_3) \ ,$$

rozvoj podle dvou řádků nebo sloupců takto:

$$\begin{aligned}(a_1, b_2, c_3, d_4) = (a_1, b_2)(c_3, d_4) - (a_1, b_3)(c_2, d_4) + (a_1, b_4)(c_2, d_3) + \\ + (a_2, b_3)(c_1, d_4) - (a_2, b_4)(c_1, d_3) + (a_3, b_4)(c_1, d_2) \ .\end{aligned}$$

J. P. M. Binet zkoumal též součty resultantů a uvedl některé zajímavé identity.

Désignons par $S(y', z'')$ une somme de résultantes, telle que

$$(y'_{\prime}, z''_{\prime}) + (y'_{\prime\prime}, z''_{\prime\prime}) + (y'_{\prime\prime\prime}, z''_{\prime\prime\prime}) + \&c.;$$

c'est-à-dire,

$$y'_{\prime}z''_{\prime} - z'_{\prime}y''_{\prime} + y'_{\prime\prime}z''_{\prime\prime} - z'_{\prime\prime}y''_{\prime\prime} + y'_{\prime\prime\prime}z''_{\prime\prime\prime} - z'_{\prime\prime\prime}y''_{\prime\prime\prime} + \&c.;$$

et continuons d'employer la caractéristique Σ pour les intégrales relatives aux accens supérieurs des lettres. ([Muir, 1906], díl I., str. 84)

J. P. M. Binet zformuloval a dokázal větu o násobení determinantů (důkaz je však dlouhý, pracný a nepříliš uspokojivý) a tento svůj výsledek vyjádřil následujícími slovy:

Le produit d'un nombre quelconque de sommes de produits de deux résultantes correspondantes de même ordre, est encore une résultante de cet orde. ([Muir, 1906], díl I., str. 81)

Své výsledky, zejména větu o násobení determinantů, aplikoval v řadě geometrických situací. Rovněž zformuloval vztah reciprokého determinantu k determinantu původnímu. Do jisté míry tak zobecnil tvrzení, která se objevila již u C. F. Gausse. Jeho výsledky, které byly většinou „dokázány neúplnou indukcí“, však byly výrazným způsobem překonány prací, s níž vystoupil současně A.-L. Cauchy.

Augustin-Louis Cauchy

A.-L. Cauchy (1789–1857) studoval na École Polytechnique a na technické škole pro stavbu mostů a cest. Od roku 1815 byl krátce profesorem École Polytechnique, od roku 1816 členem francouzské akademie, v letech 1830 až 1838 cestoval po Evropě. Napsal více než sedm set prací z matematiky (matematická analýza, teorie funkcí, diferenciální rovnice, integrální počet, algebra, geometrie, teorie čísel), matematické fyziky a optiky.

Jak již bylo výše řečeno, dne 30. listopadu 1812 prezentovali J. P. M. Binet a A.-L. Cauchy své práce ve Francouzském institutu. Cauchyův příspěvek vyšel (o dva roky později než Binetův) pod názvem *Mémoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite des transpositions opérées entre les variables qu'elles renferment* v časopise Journal de l'École Polytechnique.

A.-L. Cauchy se věnoval problematice symetrických a alternujících funkcí, uvažoval čtvercové uspořádání prvků podobně jako C. F. Gauss a zavedl determinant jako speciální případ tzv. alternující symetrické funkce.

V první části své práce studoval A.-L. Cauchy tzv. symetrické funkce n proměnných (*fonctions symétriques permanentes*), jejichž hodnota se při permutaci neznámých nemění, a symetrické alternující funkce n proměnných (*fonctions symétriques alternées*), které při jejich permutaci mění pouze znaménka v závislosti na paritě příslušné permutace. Příkladem symetrických funkcí jsou funkce

$$S(a_1b_2) = a_1b_2 + a_2b_1 \ ,$$
$$S^3(a_1b_2) = a_1b_2 + a_2b_3 + a_3b_1 + a_2b_1 + a_1b_3 + a_3b_2 \ ,$$

příkladem alternujících symetrických funkcí jsou funkce

$$S(\pm\, a_1b_2) = a_1b_2 - a_2b_1 \ ,$$
$$S^3(\pm\, a_1b_2) = a_1b_2 + a_2b_3 + a_3b_1 - a_2b_1 - a_3b_2 - a_1b_3 \ ,$$

kde člen v závorce je tzv. hlavní člen (*terme indicatif*).

V té souvislosti se A.-L. Cauchy zabýval též permutacemi, jejich znaménka určoval podle počtu cyklů.

V druhé části výše uvedené práce, která je nazvána *Des fonctions symétriques alternées désignées sous le nom de déterminans*, položil A.-L. Cauchy pevné základy nové teorie a významně ji rozpracoval.

Vyšel z prvků $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, pro něž $a_i \neq a_j$, jestliže $i \neq j$, a vytvořil součin jejich vzájemných rozdílů, kterých je $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$, tj. výraz

$$(a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\dots(a_n - a_1)(a_3 - a_2)\dots(a_n - a_2)\dots(a_n - a_{n-1}) \ ,$$

který označil symbolem

$$S(\pm\, a_1 a_2^2 a_3^3 \dots a_n^n) \ ,$$

kde symbol S naznačuje operaci sčítání – vztahuje se k prvním indexům. Po roznásobení uvedeného součinu všechny exponenty „sesunul dolů“, a získal tak druhé indexy. Výraz

$$S(\pm\, a_{11} a_{22} \dots a_{nn})$$

pak nazval *determinant* – použil termínu, který na počátku 19. století zavedl ve speciálním případě C. F. Gauss.

Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ plusieurs quantités différentes en nombre égal à n. On a fait voir ci-dessus qu'en multipliant le produit de ces quantités, ou

$$a_1 a_2 a_3 \dots a_n \ ,$$

par le produit de leurs différences respectives, ou par

$$(a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\dots(a_n - a_1)(a_3 - a_2)\dots(a_n - a_2)\dots(a_n - a_{n-1}) \ ,$$

on obtenait pour résultat la fonction symétrique alternée

$$S(\pm\, a_1^1 a_2^2 a_3^3 \dots a_n^n) \ ,$$

qui par conséquent se trouve toujours égale au produit

$$a_1 a_2 a_3 \dots a_n$$

$$\times (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\dots(a_n - a_1)(a_3 - a_2)\dots(a_n - a_2)\dots(a_n - a_{n-1}) \ .$$

Supposons maintenant que l'on développe ce dernier produit, et que dans chaque terme du développment on remplace l'exposant de chaque lettre par un second indice égal à l'exposant dont il s'agit, en écrivant par exemple $a_{r,s}$ au lieu de a_r^s, et $a_{s,r}$ au lieu de a_s^r, on obtiendra pour résultat une nouvelle fonction symétrique alternée, qui, au lieu d'être représentée par

$$S(\pm\, a_1^1 a_2^2 a_3^3 \dots a_n^n)$$

sera représentée par

$$S(\pm\, a_{1.1} a_{2.2} a_{3.3} \dots a_{n.n}) \ ,$$

le signe S étant relatif aux premiers indices de chaque lettre. Telle est la forme la plus générale des fonctions, que je désignerai dans la suite sous le nom de déterminans. ([Muir, 1906], díl I., str. 98–99)

Pro malá n je tedy

$$\begin{aligned} S(\pm a_{11}a_{22}) &= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \ , \\ S(\pm a_{11}a_{22}a_{33}) &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - \\ &\quad - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} \ . \end{aligned}$$

A.-L. Cauchy rozmístil n^2 prvků a_{ij} do čtvercového schématu a zavedl další užitečné termíny: prvky determinantu (*terms*), řádek (*suite horizontale*), sloupec (*suite verticale*), prvky hlavní diagonály (*principal terms*), prvky symetricky položené vzhledem k hlavní diagonále (*conjugate terms*), součin prvků hlavní diagonály (*produit principal*) atd.

Ve své symbolice zformuloval řadu základních vlastností determinantů, např. Cramerovo pravidlo udávající formule pro řešení soustavy lineárních rovnic

$$a_k x_1 + b_k x_2 + \cdots + f_k x_n = m_k \ , \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, n$$

uvedl ve tvaru

$$x_1 = \frac{S(\pm m_1 b_2 c_3 \ldots f_n)}{S(\pm a_1 b_2 c_3 \ldots f_n)} \ .$$

Věta o násobení determinantů je jedním z významných výsledků této Cauchyovy práce; dokázal v obecné podobě to, co bylo známo již C. F. Gaussovi (poznamenejme, že A.-L. Cauchy násobí sloupce první matice se sloupci druhé matice).

Jestliže

$$\begin{aligned} D_n &= S(\pm a_{11}a_{22} \ldots a_{nn}) \ , \\ \delta_n &= S(\pm \alpha_{11}\alpha_{22} \ldots \alpha_{nn}) \ , \\ M_n &= S(\pm m_{11}m_{22} \ldots m_{nn}) \ , \end{aligned}$$

přičemž součet součinů

$$S^n(\alpha_{\nu 1} a_{\nu 1}) = m_{\mu\nu} \ ,$$

potom je

$$M_n = D_n \delta_n \ .$$

Větu o násobení determinantů A.-L. Cauchy vyslovil takto.

Lorsqu'un système de quantités est déterminé symétriquement au moyen de deux autres systèmes, le déterminant du système résultant est toujours égal au produit des déterminans des deux systèmes composans.

… le produit de deux déterminans est encore un déterminans.
([Muir, 1906], díl I., str. 109)

A.-L. Cauchy rovněž zformuloval a dokázal tvrzení popisující vztah reciprokého (adjungovaného) determinantu a determinantu původního, které bylo ve speciálních případech známo již jeho předchůdcům.

K determinantu sestavenému z prvků a_{n1} utvoříme determinant sestavený z algebraických doplňků b_{n1}, užijeme větu o násobení determinantů a získáme vztah

$$S(\pm\, b_{11}b_{22}\dots b_{nn}) = D_n^{n-1}$$

... le déterminant du système $(b_{1.n})$ *adjoint au système* $(a_{1.n})$ *est égal à la* $(n-1)^{me}$ *puissance du déterminant de ce dernier système.*

... étant donné un terme quelconque $a_{\mu\nu}$ *du système* $(a_{1.n})$*, pour obtenir le terme correspondant du système adjoint du second ordre* $(c_{1.n})$ *il suffira de multiplier le terme donné par la* $(n-2)^{me}$ *puissance du déterminant du premier système.* ([Muir, 1906], díl I., str. 110)

Některé Cauchyovy výsledky se shodují s Binetovými; oba došli zhruba současně k větě o násobení determinantů.

M. Binet, dont je me félicite d'être l'ami, avait été conduit aux mêmes résultats par des recherches différentes. De retour à Paris, j'étais occupé de poursuivre mon travail, lorsque j'allai le voir. Il me montra son théorème qui était semblable au mien. Seulement il désignait sous le nom de résultante ce que j'avais appelé déterminant. Il me dit en outre qu'il avait généralisé le theorème dont il s'agit, en substituant au produit de deux résultantes des somme de produits de même espèce.
([Studnička, 1876], str. 36, viz též [Muir, 1906], díl I., str. 93)

Poznamenejme ještě, že A.-L. Cauchy se ve své učebnici *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique* z roku 1821 rovněž věnoval symetrickým alternujícím funkcím, a to ve třetí kapitole nazvané *Des fonctions symétriques et des fonctions alternées. Usage de ces fonctions pour la résolution des équations du premier degré à un nombre quelconque d'inconnues. Des fonctions homogènes.*

Mimo jiné zde vyšetřoval nehomogenní soustavu n lineárních rovnic o n neznámých, koeficienty zapisoval do obdélníkového schématu (rozšířená matice), odvodil Cramerovo pravidlo a vzápětí přiblížil tuto problematiku na soustavě tří rovnic o třech neznámých. Termín determinant se tu však neobjevil, stejně tak Cramerovo jméno.

... Pour montrer une application de cette méthode, supposons qu'il s'agisse de résoudre les équations linéaires

$$\begin{aligned} a_0x + b_0y + c_0z &= k_0 \ , \\ a_1x + b_1y + c_1z &= k_1 \ , \\ a_2x + b_2y + c_2z &= k_2 \ . \end{aligned}$$

On trouvera dans cette hypothèse, pour la valeur symbolique de l'inconnue x,

$$x = \frac{(b-k)(c-k)(c-b)}{(b-a)(c-a)(c-b)}$$

$$= \frac{k^0b^1c^2 - k^0b^2c^1 + k^1b^2c^0 - k^1b^0c^2 + k^2b^0c^1 - k^2b^1c^0}{a^0b^1c^2 - a^0b^2c^1 + a^1b^2c^0 - a^1b^0c^2 + a^2b^0c^1 - a^2b^1c^0} \ ;$$

et par suite, la valeur véritable, de la même inconnue sera

$$x = \frac{k_0b_1c_2 - k_0b_2c_1 + k_1b_2c_0 - k_1b_0c_2 + k_2b_0c_1 - k_2b_1c_0}{a_0b_1c_2 - a_0b_2c_1 + a_1b_2c_0 - a_1b_0c_2 + a_2b_0c_1 - a_2b_1c_0} \ .$$

([Cauchy, 1821], str. 79–80)

A.-L. Cauchy se později problematice determinantů příliš nevěnoval, občas se však v jeho pracích v různé formě objevily. Ustoupil však od termínu determinant, vrátil se k Laplaceovu termínu rezultant; lze odkázat např. na jeho práce *Mémoire sur les fonctions alternées et sur les sommes alternées* a *Mémoire sur les sommes alternées, connues sous le nom de résultantes* z roku 1841. T. Muir ve své bibliografii výstižně poznamenal:

… what were formerly called determinants are made a class of these alternating aggregates; and for the name determinant resultant is substituted. …

… Cauchy's virtual renunciation of his own word "determinant" must be noted, – a renunciation all the more curious when we consider that the word had now been adopted by Jacobi, and had thereby become the recognised term in Germany. It may be that Laplace's word "resultant" had proved more acceptable in France, and that Cauchy merely bowed to the fact; but there is little or no evidence to support this. ([Muir, 1906], díl I., str. 278, 282)

V práci *Mémoire sur quelques propriétés des résultantes à deux termes* z roku 1844, v níž se zabýval determinanty druhého řádu, navázal A.-L. Cauchy na některé Binetovy a Lagrangeovy práce; své výsledky podal ve vybroušené formě.

O rok později sepsal práci *Mémoire sur divers théorèmes d'analyse et de calcul intégral*, ve které pracoval s eliminacemi tří neznámých ze soustavy tří lineárních rovnic.

V článku *Mémoire sur les clefs algébriques* z roku 1847 opět užíval čtvercové schéma prvků a hovořil o rezultantech ([Muir, 1906], díl II., str. 43):

En effet, considérons d'abord la somme alternée s, formée avec les quatre termes du tableau

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array} \right.$$

et fournie par l'équation

$$s = S(\pm a_1 b_2) = a_1 b_2 - a_2 b_1 \ .$$

Symbolickými faktory rezultantu s rozuměl funkce

$$\lambda = a_1\alpha + b_1\beta \ ,$$
$$\mu = a_2\alpha + b_2\beta \ .$$

Carl Gustav Jacob Jacobi

Německý matematik C. G. J. Jacobi (1804–1851) studoval na berlínské univerzitě filozofii u G. W. F. Hegela (1770–1831) a klasické jazyky u A. Böckha (1785–1867), matematikou se zabýval z vlastního zájmu. V letech 1826 až 1842 působil na univerzitě v Královci (Königsberg, Kaliningrad), od roku 1842 v akademii věd v Berlíně. Od roku 1827 byl členem Berlínské akademie, od roku 1832 členem Londýnské královské společnosti, od roku 1833 členem Petrohradské akademie věd, od roku 1848 členem Vídeňské akademie věd atd.

Je autorem dvou monografií a asi 170 prací, je považován za jednoho ze zakladatelů teorie eliptických funkcí; studoval též theta-funkci a některé typy transcendentních funkcí. Významné jsou i jeho výsledky v teorii čísel, v lineární algebře, variačním počtu a v teorii diferenciálních rovnic.

S determinanty pracoval C. G. J. Jacobi zhruba od roku 1826. Své první práce, v nichž využíval determinanty, publikoval roku 1827 ve druhém ročníku Crelleova časopisu Journal für die reine und angewandte Mathematik: *Ueber die Hauptaxen der Flächen der zweiten Ordnung*, *De singulari quadam duplicis Integralis transformatione*, *Ueber die Pfaffsche Methode, eine gewöhnliche lineäre Differential-gleichung zwischen* $2n$ *Variabeln durch ein System von* n *Gleichungen zu integriren* (viz Werke III., str. 45–53, III., str. 55–66, IV., str. 17–29). Determinanty pro něho byly významným nástrojem zejména ke studiu geometrických problémů a různých otázek matematické analýzy.

Během dalších let sepsal C. G. J. Jacobi řadu prací, které se více či méně determinantů dotýkaly. Ovlivněn byl zejména Cauchyovou prací *Mémoir sur les fonctions …* publikovanou roku 1815, znal však rovněž výsledky G. Cramera, É. Bézouta, P. S. Laplace, A. T. Vandermondea, C. F. Gausse a J. P. M. Bineta. V determinantech spatřoval velký a užitečný prostředek, a to hlavně pro studium funkcí.

Roku 1841 publikoval C. G. J. Jacobi ve 22. ročníku Crelleova časopisu (str. 285–371, resp. Werke III., str. 355–452) tři významné práce, kterými problematiku determinantů do značné míry završil. Napsány jsou latinsky, již od konce 19. století je však máme k dispozici v německém překladu. Roku 1896 je totiž vydal Paul Gustav Stäckel (1862–1919) ve známé edici Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften.

C. G. J. Jacobi svými třemi pracemi z roku 1841 podstatně přispěl k dalšímu rozvoji teorie determinantů, k jejímu všeobecnému rozšíření a uznání. Jeho přístup k determinantům byl elegantnější než Cramerův a srozumitelnější než těžko čitelné práce Cauchyovy, a proto bylo Jacobiho dílo vhodnější ke studiu. Rovněž působení jeho žáků mělo pozitivní vliv na vývoj této teorie.

První z těchto tří Jacobiho prací se nazývá *De formatione et proprietatibus Determinantium*, v německé verzi *Ueber die Bildung und die Eigenschaften der Determinanten.* Lze ji chápat i jako úvodní stať k jeho následujícím dvěma pracím.

C. G. J. Jacobi si uvědomil, že dosud neexistuje stručný a logicky uspořádaný výklad teorie determinantů, který by byl pro matematiky dobře čitelný a srozumitelný. Rozhodl se proto, že takový text sepíše sám. Vyšel zejména z Cauchyovy práce publikované roku 1815, definici determinantu podal více méně v Cauchyově duchu a zachoval v zásadě i jeho symboliku. Velkou pozornost věnoval permutacím a hlavně jejich znaménkům.

Proponatur productum conflatum ex omnibus $\frac{n(n+1)}{2}$ *differentiis* $n+1$ *quantitatum* $a_0, a_1, \ldots, a_n$,

$$\begin{array}{rll} P = (a_1 - a_0)(a_2 - a_0) & (a_3 - a_0)...(a_n - a_0) & \\ (a_2 - a_1) & (a_3 - a_1)...(a_n - a_1) & \\ & (a_3 - a_2)...(a_n - a_2) & \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ & & (a_n - a_{n-1}) \ ; \end{array}$$

quod productum omnimodis permutando quantitates a_i *valorem absolutum mutare non potest, sed aut valorem eundem servat aut in oppositum abit. Vocemus eas indicum* $0, 1, \ldots, n$ *Permutationes, pro quibus* P *valorem eundem servat, positivas, eas, pro quibus* P *valorem oppositum induit, negativas; sive priores dicamus pertinere ad classem positivam Permutationum, posteriores ad classem negativam.* (Werke III., str. 357–358)

Pojem determinantu i příslušný termín zavedl C. G. J. Jacobi až ve 4. článku své práce. Vyšel z $(n+1)^2$ veličin $a_k^{(i)}$, vytvořil $(n+1)!$ součinů

$$aa_1'a_2'' \ldots a_n^{(n)} \ ,$$

permutoval dolní i horní indexy, znaménko určoval obdobně jako A.-L. Cauchy:

Propositis $(n+1)^2$ *quantitabus*

$$a_k^{(i)},$$

in quibus indices et superiores i *et inferiores* k *valores omnes* $0, 1, 2, \ldots, n$ *induant, producatur terminus*

$$aa_1'a_2'' \ldots a_n^{(n)} \ ;$$

ex eoque numerus $1.2.3 \ldots (n+1)$ *terminorum similium formetur indices aut superiores aut inferiores omnimodis inter se permutando. Singulis deinde terminis signum aut positivum aut negativum praefigatur, prout Permutationes, quibus e termino* $aa_1'a_2'' \ldots a_n^{(n)}$ *obtinentur, positivae aut negativae sunt, omniumque* $1.2.3 \ldots (n+1)$ *terminorum suis signis acceptorum fiat Aggregatum, quod designabo per*

$$R = \sum \pm \ aa_1'a_2'' \ldots a_n^{(n)} \ .$$

Eiusmodi Aggregatum R praeunte Ill. Gauss aliisque Determinans appellabo, ipsas quantitates $a_k^{(i)}$ *Determinantis elementa, et cum ipsius R terminus quilibet e* $n+1$ *elementis producatur, ipsum R dicam Determinans* $(n+1)^{ti}$ *gradus.* (Werke III., str. 361)

V dalším textu studoval základní vlastnosti determinantů, mimo jiné problematiku soustav lineárních rovnic, soustav diferenciálních rovnic, vlastnosti determinantů, jejich rozvoje, násobení determinantů apod. Věta o násobení determinantů, která se objevila již v pracích jeho předchůdců, má v Jacobiho práci tento tvar (Werke III., str. 383):

Datis binis quibuscunque eiusdem gradus Determinantibus eorum productum exhiberi potest ut eiusdem gradus Determinans, cuius elementa sunt expressiones rationales integrae elementorum Determinantium propositorum; videlicet posito

$$c_k^{(i)} = \alpha^{(i)} a^{(k)} + \alpha_1^{(i)} a_1^{(k)} + \cdots + \alpha_n^{(i)} a_n^{(k)}$$

atque

$$R = \sum \pm\, a a_1' \ldots a_n^{(n)}\,, \qquad \mathrm{P} = \sum \pm\, \alpha \alpha_1' \ldots \alpha_n^{(n)}\,, \qquad P = \sum \pm\, c c_1' \ldots c_n^{(n)}\,,$$

fit

$$P = \mathrm{P} R\,.$$

Druhou závěrečnou Jacobiho prací o determinantech je rozsáhlý článek *De Determinantibus functionalibus*, v němž C. G. J. Jacobi zavedl zcela nový pojem, tzv. funkcionální determinant, jehož prvky jsou parciální derivace funkcí více proměnných. V úvodu své práce napsal:

Statuendo enim, ipsas

$$f, f_1, f_2, \ldots, f_n$$

esse functiones lineares variabilium $x, x_1, \ldots, x_n$,

$$f_k = a_k x + a_k' x_1 + a_k'' x_2 + \cdots + a_k^{(n)} x_n$$

tit

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_i} = a_k^{(i)}\,,$$

ideoque Determinans, ad systema elementorum $a_k^{(i)}$ *quodcunque pertinens, haberi potest pro Determinante ad systema differentialium partialium*

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_i}$$

pertinente sive pro Determinante functionali. (Werke III., str. 395)

K vlastní definici nového pojmu přikročil až v 5. paragrafu (Werke III., str. 403).

Propositis variabilium $x, x_1, \ldots, x_n$ *functionibus totidem*

$$f, f_1, f_2, \ldots, f_n \;,$$

formentur omnium differentialia partialia omnium variabilium respectu sumta, unde prodeunt $(n+1)^2$ *quantitates*

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} \;.$$

Determinans ad harum quantitatum systema pertinens

$$\sum \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

voco Determinans functionale vel, magis diserte, Determinans ad functiones $f, f_1, \ldots, f_n$ *variabilium* $x, x_1, \ldots, x_n$ *pertinens sive functionum* $f, f_1, \ldots, f_n$ *Determinans variabilium* $x, x_1, \ldots, x_n$ *respectu formatum.*

V 6. a 7. paragrafu pak studoval vztah nulovosti, resp. nenulovosti funkcionálního determinantu funkcí $f, f_1, \ldots, f_n$ a jejich lineární závislosti, resp. nezávislosti.

In limine quaestionum de Determinantibus functionalibus se offert Propositio, functionum a se non independentium evanescere Determinans, functiones, quarum Determinans evanescent, non esse a se independentes.
(Werke III., str. 404)

V dalším textu se zabýval různými vlastnostmi následujícího funkcionálního determinantu v souvislosti s teorií funkcí více proměnných, se soustavami diferenciálních rovnic atd. Jedná se o následující determinant definovaný pro funkce $f_1, \ldots, f_n$ neznámých $x_1, \ldots, x_n$:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} .$$

Poznamenejme ještě, že George Salmon (1819–1904) a James Joseph Sylvester (1814–1897) nazvali počátkem padesátých let 19. století funkcionální determinant, který C. G. J. Jacobi zavedl a studoval, na jeho počest *Jacobiánem.*

Termín *Jacobian* užil J. J. Sylvester ve své práci *On a theory of the syzygetic relations of two rational integral functions, comprising an application* *to the theory of Sturm's functions, and that of the greatest algebraical common measure* z roku 1853 – použil též termín *Functional Determinant of Jacobi* (Papers I., str. 506); ve slovníčku důležitých pojmů, který ke své práci připojil, je uvedeno rovněž heslo *Jacobian*:

The Jacobian to n *homogeneous functions of* n *variables is the determinant represented by the symmetrical collocation in a square of the* n *differential coefficients of each of the* n *functions.* (Papers I., str. 583)

Stručný přehled hlavních vlastností funkcionálních determinantů uvedl C. G. J. Jacobi ve své knize *Vorlesungen über Dynamik*, která vznikla z jeho přednášek ve školním roce 1842/1843. Vyšla roku 1866, tj. až po autorově smrti, její 2. vydání je z roku 1884. Partie o funkcionálních determinantech je obsahem 13. přednášky, která se výstižně nazývá *Functionaldeterminanten. Ihre Anwendung zur Aufstellung der partiellen Differentialgleichung für den Multiplicator.* Uveďme několik stručně a poměrně jasně formulovaných partií, které jsou (i díky němčině) podstatně srozumitelnější než původní, latinsky psaná Jacobiho práce *De Determinantibus functionalibus.* Celá pasáž začíná definicí funkcionálního determinantu.

Determinanten der Form

$$\sum \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

werden von mir Functional-Determinanten, von Cauchy, welcher in den Comptes rendus der Pariser Akademie einige Sätze darüber gegeben hat, „fonctions différentielles alternées“ genannt. Functional-Determinanten werden also aus den n^2 *partiellen Differentialquotienten* $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ *von* n *Functionen* $f_1, f_2, \ldots f_n$ *gebildet, deren jede von den* n *Grössen* $x_1, x_2, \ldots x_n$ *abhängt. …*
([Jacobi, 1866], 2. vydání, str. 100)

V následujících bodech jsou zformulovány základní vlastnosti tohoto pojmu, které jsou důležité v teorii funkcí více proměnných; autor je prezentoval v souvislosti s jednorozměrným případem.

1. Ist f *Function von* φ *und* φ *Function von* x, *so ist* $\frac{df}{dx} = \frac{df}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx}$. *Dem entspricht für* n *Variable der Satz: Sind* $f_1, f_2, \ldots\ f_n$ *Functionen von* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots\ \varphi_n$ *und diese wiederum Functionen von* $x_1, x_2, \ldots\ x_n$, *so ist*

$$\sum \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \Big(\sum \pm \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_1} \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_2} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial \varphi_n}\Big)\Big(\sum \pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}\Big).$$

2. Dies kann in anderer Gestalt auch so ausgedrückt werden: Sind f *und* φ *Functionen von* x, *so ist*

$$\frac{df}{d\varphi} = \frac{\frac{df}{dx}}{\frac{d\varphi}{dx}}\,.$$

Hierzu hat man für n Variable den analogen Satz: Sind $f_1, f_2, \ldots\ f_n$ und $\varphi_1, \varphi_2, \ldots\ \varphi_n$ Functionen von $x_1, x_2, \ldots\ x_n$, so ist

$$\sum \pm \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_1} \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_2} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial \varphi_n} = \frac{\sum \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}}{\sum \pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}} ,$$

und daher, wenn man $f_1 = x_1, f_2 = x_2, \ldots f_n = x_n$ setzt,

$$\sum \pm \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_1} \frac{\partial x_2}{\partial \varphi_2} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial \varphi_n} = \frac{1}{\sum \pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}} .$$

3. Aus der Gleichung

$$\Pi(x, y) = 0$$

ergiebt sich:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{d\Pi}{dx}}{\frac{d\Pi}{dy}} .$$

Hierzu hat man folgende Analogie: Aus den n Gleichungen zwischen 2n Variablen

$$\begin{aligned} \Pi_1(y_1, y_2, \ldots\ y_n, x_1, x_2, \ldots\ x_n) &= 0 , \\ \Pi_2(y_1, y_2, \ldots\ y_n, x_1, x_2, \ldots\ x_n) &= 0 , \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad &\vdots \\ \Pi_n(y_1, y_2, \ldots\ y_n, x_1, x_2, \ldots\ x_n) &= 0 \end{aligned}$$

ergiebt sich:

$$(-1)^n \sum \pm \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial y_n}{\partial x_n} = \frac{\sum \pm \frac{\partial \Pi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \Pi_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial \Pi_n}{\partial x_n}}{\sum \pm \frac{\partial \Pi_1}{\partial y_1} \frac{\partial \Pi_2}{\partial y_2} \cdots \frac{\partial \Pi_n}{\partial y_n}} .$$

4. Damit die Gleichung $Fx = 0$ zwei gleiche Wurzeln habe, muss zugleich $F'x = 0$ sein. Hierzu giebt es folgende Analogie: Damit die Gleichungen

$$F_1(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0 , \quad F_2(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0 , \ \ldots\ F_n(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$$

zwei zusammenfallende Systeme von Wurzeln haben, muss zugleich

$$\sum \pm \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial x_n} = 0$$

sein.

5. Wenn für alle Werthe von x der Differentialquotient $\frac{\partial F}{\partial x}$ verschwindet, so folgt hieraus $F = Const.$ Hierzu hat man die Analogie: Sobald für alle Werthe von $x_1, x_2, \dots x_n$

$$\sum \pm \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \dots \frac{\partial F_n}{\partial x_n} = 0$$

ist, muss zwischen den n Functionen $F_1, F_2, \dots F_n$ eine Gleichung

$$\prod (F_1, F_2, \dots F_n) = 0$$

bestehen, in welcher die Variablen $x_1, x_2, \dots x_n$ nicht explicite vorkommen. Dies giebt für $n = 1$ auch in der That $\Pi(F) = 0$, also $F = Const.$, wie es sein muss. ([Jacobi, 1866], 2. vydání, str. 100–102)

Třetí závěrečnou Jacobiho prací o determinantech je *De functionibus alternantibus earumque divisione per productum e differentiis elementorum conflatum*, v německé verzi *Ueber die alternirenden Functionen und ihre Theilung durch das Product aus den Differenzen der Elemente.* Autor se v této práci věnoval mimo jiné speciálnímu typu determinantů, tzv. *alternantům.* Text začíná připomenutím tzv. Vandermondeova determinantu, který mezi tyto determinanty patří:

Eleganter olim observavit Cl. Vandermonde, proposito Determinante

$$\sum \pm a^{(0)} a_1' a_2'' \dots a_n^{(n)} ,$$

si mutentur indices in exponentes, provenire Productum conflatum ex omnibus elementorum

$$a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad \dots, \quad a_n$$

differentiis,

$$\begin{aligned} P = (a_1 - a_0)(a_2 - a_0)(a_3 - a_0)...(a_n - a_0) \\ (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)...(a_n - a_1) \\ (a_3 - a_2)...(a_n - a_2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ (a_n - a_{n-1}). \end{aligned}$$

Quod sic demonstratur. (Werke III., str. 441)

Autor dále studoval Laplaceův rozvoj a tzv. alternující funkce, s nimiž pracoval již A.-L. Cauchy.

Poznamenejme, že C. G. J. Jacobi využíval determinanty při různých příležitostech i po roce 1841. Např. v rozsáhlé práci *Theoria novi multiplicatoris systemati aequationum differentialium vulgarium applicandi*, která byla uveřejněna v letech 1844 a 1845 ve třech částech v Crelleově časopisu (viz též

Werke III., str. 317–509), resp. v práci *Ueber die Darstellung einer Reihe gegebener Werthe durch eine gebrochene rationale Function*, která byla otištěna roku 1846 ve stejném časopisu (viz též Werke III., str. 479–511).

Rekapitulace

Vývoj evropské matematiky neinspirovala ani čínská metoda *fang čcheng*, ani japonská teorie determinantů. Leibnizovy myšlenky obsahující ideu determinantu a využití dvojích indexů zůstaly nepublikovány a matematické myšlení své doby rovněž neovlivnily. Pojem determinantu se u G. W. Leibnize, C. Maclaurina a G. Cramera objevil jen jako vedlejší produkt při řešení určitých algebraických úloh, zejména otázek eliminace.

É. Bézout již vytvořil pojem determinantu, zveřejnil rekurentní i obecný způsob vytváření determinantů, chyběl mu však vhodný termín a rozumná symbolika. Zásadní změnu znamenal přístup A. T. Vandermondea, který pro determinant zavedl symbolické označení. Důležitá byla pro něho teorie; eliminační otázky a postupy užívané pro řešení rovnic a jejich soustav chápal jako aplikaci získaných teoretických poznatků. Svým přístupem tak položil základy nové matematické teorie.

P. S. Laplace razil termín *resultant* (užívaný již při eliminaci), ale nevytvořil téměř žádnou symboliku. J. L. Lagrange a C. F. Gauss se zabývali zejména determinanty třetího řádu.

S výjimkou A. T. Vandermondea zůstaly pojmy velmi vágní; terminologie ani symbolika nedoznaly větší vývoj. Dále pokročil až J. P. M. Binet, který položil určité základy obecné teorie. Teprve A.-L. Cauchy vybudoval formálně samostatnou teorii, v hlavních bodech ukončenou a uzavřenou. Zavedl vhodnou symboliku, vytvořil novou terminologii, která se v dalších letech postupně ujala. Ani jeho práce publikovaná roku 1815 však neměla velký ohlas.

V první polovině 19. století, před vydáním Jacobiho prací, využívalo determinanty ještě poměrně málo matematiků. Např. Franz Xaver Moth (1802–1879) uváděl roku 1829 ve své knize *Die Lagrange'schen Relationen und ihre Anwendung zur Ableitung aller Gleichungen der sphärischen Trigonometrie* velké množství vzorců ze sférické trigonometrie, které vyplývají z věty o násobení determinantů.

K zásadnímu obratu v rozšíření determinantů došlo až pod vlivem Jacobiho prací; velký vliv měly hlavně jeho tři statě z roku 1841. Od čtyřicátých letech 19. století pak determinanty rychle a úspěšně pronikaly do nejrůznějších matematických disciplín a staly se součástí základního matematického aparátu. Současně se ustálila většina termínů.

V prvním svazku *Elementare Algebra und Analysis* úspěšného díla Heinricha Webera (1842–1913) a Josefa Wellsteina (1869–1919) *Encyklopädie der Elementar-mathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende* z roku 1903 je oceňován Jacobiho přínos k teorii determinantů. V souvislosti s problematikou eliminace neznámých řešení soustav lineárních rovnic autoři píší:

Die rechnerische Durchführung wird aber um so komplizierter und die allgemeinen Gesetze um so weniger durchsichtig, je größer die Anzahl der Unbekannten und der Gleichungen ist. Diesem Übelstand wird durch den von Jacobi geschaffenen Algoritmus der Determinantentheorie begegnet, durch den diese allgemeinen Gesetze einen sehr eleganten Ausdruck finden.
(EEM I., str. 125–126)

Zakladatel teorie determinatů

František Josef Studnička (1836–1903), velký propagátor teorie determinantů, zdůraznil ve své literárně historické studii *A.-L. Cauchy als formaler Begründer der Determinanten-Theorie* z roku 1876, že teprve A.-L. Cauchy může být považován za skutečného zakladatele této disciplíny. Uvažoval však teorii vybudovanou nejen v základech, ale podstatně rozpracovanou do hloubky i do šířky.

... die genannte Abhandlung Cauchy's eine systematische Entwickelung der Determinanten-Theorie und kann daher als erste besondere Schrift über diesen Gegenstand angesehen werden; Cauchy selbst erscheint hiedurch als Begründer dieser neuen Theorie auch in formaler Beziehung, zumal seine Terminologie und Symbolik zur massgebenden geworden ist und heutzutage allgemain herrscht, trotz mancher Versuche eine andere einzubürgern. ...

... die Vorgänger Cauchy's wohl viele Determinantensätze gefunden, dass aber keiner von ihnen an eine selbstständige Entwickelung einer Disciplin gedacht, in welcher sie ihre naturgemässe Stellung hätten finden können. Erst nachdem der neue Gesichtspunkt der symmetrisch alternirenden Funktionen gewonnen worden war, von dem aus die Einzelnheiten sich nach bekannten Methoden deduciren liessen, konnte von einer Theorie selbst die Rede sein; und da dies durch Cauchy, wie eben gezeigt wurde, formell wie sachlich durchgeführt wurde, muss die eigentliche Geschichte der Determinanten mit Cauchy als Begründer beginnen. ([Studnička, 1876], str. 38–39)

Ve stejném roce F. J. Studnička publikoval v Časopise pro pěstování mathematiky a fysiky článek *O původu a rozvoji nauky o determinantech*, v němž rovněž vysoce ocenil Cauchyův přínos pro tuto teorii:

... vyvinul Cauchy na nové, velmi jednoduché cestě nejdůležitější poučky determinantní a zavedl zároveň tak vhodnou symboliku, že podnes se jí s prospěchem užívá; zároveň tu lze poznati, že považoval determinanty za samostatné výrazy a upotřebení jich při řešení rovnic lineárních jen co vítaný předmět, aby se prospěšnost jich osvědčila. Nauka o determinantech stala se tu i formálně samostatnou, takže vším právem možná nazvati tohoto výtečníka mathematického tvůrcem nauky o determinantech, klade-li se patřičná váha na tyto všechny okolnosti. ([Studnička, 1876], str. 199)

Studničkův názor převzal Ernesto Pascal (1865–1940), který v krátkém náčrtu vývoje teorie determinantů, jímž zahájil německou verzi své učebnice *Die Determinanten*, napsal:

Aber Cauchy war der Ruhm vorbehalten, das Erbe seiner Vorgänger zusammen zu fassen und einen so ansehnlichen Beitrag dazu zu liefern, dass er gewissermassen der wahre Begründer der Determinantenlehre geworden ist. ([Pascal, 1897], německý překlad, str. xv)

Se Studničkovým názorem však nesouhlasil T. Muir. V prvním díle své rozsáhlé bibliografie teorie determinantů uvedl:

It is, no doubt, impossible to call him, as some have done, the formal founder of the theory. This honour is certainly due to Vandermonde, who, however, erected on the foundation comparatively little of a superstructure. Those who followed Vandermonde contributed, knowingly or unknowingly, only a stone or two, larger or smaller, to the building. Cauchy relaid the foundation, rebuilt the whole, and initiated new enlargements; the result being an edifice which the architects of to-day may still admire and find worthy of study.
([Muir, 1906], díl I., str. 131)

David Eugene Smith (1860–1944), známý historik matematiky, zaujal poměrně smířlivé stanovisko. K otázce zakladatele teorie determinantů se ve své knize *History of modern mathematics* z roku 1896 vyjádřil takto:

On the same day (Nov. 30, 1812) that Binet presented his paper to the Academy, Cauchy also presented one on the subject. In this he used the word "determinant" in its present sense, summarized and simplified what was then known on the subject, improved the notation, and gave the multiplication theorem with a proof more satisfactory than Binet's. He was the first to grasp the subject as a whole; before him there were determinants, with him begins their theory in its generality. ([Smith, 1896], str. 27)

Zajímavé poznámky k úvahám o zakladateli teorie determinantů uvádí v širších souvislostech E. Knobloch (nar. 1942) – viz [Knobloch, 1994].

5. Učebnice teorie determinantů ve druhé polovině 19. století

Ve čtyřicátých letech 19. století se determinanty postupně stávaly obecně známým matematickým nástrojem. Pronikaly do řady disciplín a byly čím dále, tím více využívány.

Základní práce C. G. J. Jacobiho a dalších autorů však nebyly určeny k úvodnímu studiu. Proto začala být zhruba v polovině 19. století silně pociťována potřeba sepsání vhodné základní učebnice. Zrod prvních učebnic každé teorie je všeobecně považován za vnější znak skutečnosti, že se tato teorie stává klasickou. V polovině 19. století se stala klasickou právě teorie determinantů.

Monografie, učebnice i další texty o determinantech hodnotil ve své několikadílné monografii Thomas Muir. Z jeho díla [Muir, 1906] budeme v následujících odstavcích na řadě míst citovat.

První učebnicí teorie determinantů je šedesátistránková kniha Williama Spottiswoodea (1825–1883)[11] nazvaná *Elementary theorems relating to determinants* z roku 1851. Je to nepříliš rozsáhlý spis poměrně elementárního charakteru s účelně uspořádanou látkou a poměrně dobrým výběrem příkladů, který však ještě obsahuje drobné nepřesnosti. Jeho druhé vydání se objevilo roku 1853 v Crelleově časopisu Journal für die reine und angewandte Mathematik; původní text byl částečně přepracován, korigován a podstatně rozšířen.

W. Spottiswoode: *Elementary theorems relating to determinants*, London, 1851, viii+63 stran, 2. vydání: Journal für die reine und angewandte Mathematik 51(1853), 209–271, 328–381.

Thomas Muir charakterizoval ve své rozsáhlé bibliografii teorie determinantů první vydání Spottiswoodeovy knížky těmito slovy:

This is noteworthy as being the first separately-published elementary work on the subject, the author explaining that he had been led to write it because determinants had come to be in frequent use, and there was no accessible text-book to which students could be referred. ([Muir, 1906], díl II., str. 54)

V úvodu druhého vydání svého učebního textu W. Spottiswoode napsal:

The variety of problems to which the Theory of Determinants has recently been applied renders it desirable that this branch of analysis should be made generally accessible. But although the principal theorems are familiar to the more advanced mathematicians, there has hitherto been no elementary work upon the subject, to which reference can be readily made by the student. ([Spottiswoode, 1851], 2. vydání, str. 209)

Další dvě učebnice věnované determinantům byly obsáhlejší a podstatně náročnější; mají již do značné míry charakter vědecké monografie. Velmi pozitivně ovlivnily další vývoj této disciplíny.

Druhou učebnicí teorie determinantů je kniha *La teorica dei determinanti e le sue principali applicazioni* italského matematika Francesca Brioschiho (1824–1897)[12] z roku 1854; je sepsána s výbornou znalostí věci, obsahuje velké množství materiálu. Rychle dosáhla uznání, brzy vyšla francouzsky a německy. V úvodu autor stručně rekapituloval vznik a vývoj teorie determinantů, připomněl i předchozí učební text W. Spottiswoodea.

---

[11] William Spottiswoode, anglický matematik, člen Královské londýnské společnosti (prezident v letech 1880 až 1883), zabýval se matematikou, astronomií, fyzikou a historií matematiky.

[12] Francesco Brioschi, italský matematik, profesor na univerzitě v Pavii, později profesor matematiky, hydrauliky a ředitel polytechniky v Miláně, je autorem řady prací z algebry (teorie determinantů, algebraické formy, algebraické rovnice), z teorie eliptických a hyperbolických funkcí a z teorie obyčejných diferenciálních rovnic. Roku l858 založil časopis *Annali di matematica pura ed applicata*, jehož cílem bylo soupeřit s tehdy velmi známými a uznávanými časopisy, jež pod obdobnými názvy vydávali August Leopold Crelle (1780–1855) v Německu a Joseph Liouville (1809–1882) ve Francii. Crelleův časopis *Journal für die reine und angewandte Mathematik* byl založen roku 1826, Liouvilleův časopis *Journal de mathématiques pures et appliquées* roku 1836.

F. Brioschi: *La teorica dei determinanti e le sue principali applicazioni*, Pavia, 1854, viii+116 stran; francouzsky (Combescure): *Théorie des déterminants et leurs principales applications*, Paris, 1856, ix+216 stran; německy (Schellbach): *Theorie der Determinanten und ihre hauptsächlichen Anwendungen*, Berlin, 1856, vii+102 stran.

T. Muir tuto knihu ve své bibliografii charakterizoval takto:

This, the second separately-published text-book on determinants, is mainly on the same lines as the first, but is marked by greater attention to verbal and logical accuracy. It consists of an historical preface and eleven short chapters or sections, seven of the latter being devoted to determinants in general, and the remaining four to special forms. ([Muir, 1906], díl II., str. 87)

Třetí učebnicí teorie determinantů je kniha německého autora Richarda Baltzera (1818–1887)[13] z roku 1857 nazvaná *Theorie und Anwendung der Determinanten mit Beziehung auf die Originalquellen.* R. Baltzer v úvodu své monografie napsal, že po vydání Brioschiovy knihy v němčině měl odvahu své dílo dokončit jen proto, že se odlišovalo jak pojetím, tak provedením. Vyjádřil to těmito slovy:

Meine Arbeit war fast zum Abschluss gebracht, als mir Brioschi la teorica dei determinanti, Pavia 1854, bekannt wurde. Dieses Werk, hervorgerufen durch das auf vielen Seiten gefühlte Bedürfniss einer elementaren Anleitung zur Kenntniss der Determinanten, ist, wenn auch in den Elementen nicht immer streng, doch mit vorzüglicher Sachkenntniss geschrieben und enthält einen reichen Schatz trefflichen Materials, wodurch es schnell in weiten Kreisen Eingang und Anerkennung sich verschafft hat. Die jüngst in Berlin erschienene deutsche Uebersetzung dieses wertvollen Buches ist ohne Zweifel den deutschen Mathematikern sehr willkommen. Dass ich den Muth hatte, meine Schrift über denselben Gegenstand zu vollenden, gründet sich hauptsächlich auf die Verschiedenheit in der Anlage und Ausführung meiner Arbeit.
([Baltzer, 1857], str. iv)

V první části nazvané *Theorie der Determinanten* podal R. Baltzer základní vlastnosti determinantů, a to jako ucelenou teorii. Ve druhé části nazvané *Anwendungen der Determinanten* se věnoval jejich využití v teorii soustav lineárních rovnic, v analýze i v geometrii. Kniha byla mimořádně úspěšná, vyšla v pěti vydáních a ve francouzském překladu. Obsahuje četné citace časopiseckých prací a historické poznámky, výběrem látky i metodou výkladu byla určena pro zkušenějšího čtenáře. Rozsah knihy v dalších vydáních poněkud narůstal, text některých partií byl postupně upravován a vylepšován.

R. Baltzer: *Theorie und Anwendung der Determinanten, mit Beziehung auf die Originalquellen*, Leipzig, 1857, vi+129 stran, 2. vydání: Leipzig, 1864,

[13] Heinrich Richard Baltzer, německý matematik, pedagog, profesor matematiky na univerzitě v Giessenu, propagoval neeukleidovskou geometrii, práce N. I. Lobačevského a J. Bólyaie. Jeho učebnice věnované základům matematiky, geometrii a teorii determinantů byly proslulé.

vi+224 stran, 3. vydání: Leipzig, 1870, vi+241 stran, 4. vydání: Leipzig, 1875, vii+247 stran, 5. vydání: Leipzig, 1881, vi+279 stran; francouzsky (J. Hoüel): *Théorie et applications des déterminants, avec l'indication des sources originelles*, Paris, 1861, xii+235 stran.

V padesátých letech 19. století vyšly ještě dva elementární učební texty o teorii determinantů. Autorem prvního je Giusto Bellavitis (1803–1880) známý svou teorií ekvipolencí, druhý napsal kněz Giuseppe Janni. Měly pouze regionální význam, celkový vývoj podstatně neovlivnily.

G. Bellavitis: *Sposizione elementare della teorica dei determinanti*, Memorie del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti 7(1857), 67–144.

G. Janni: *Saggio di una teorica elementare de' determinanti*, Napoli, 1858, 40 stran.

Koncem padesátých let se elementární výklad teorie determinantů objevil v prvních třech kapitolách Salmonovy učebnice *Lessons introductory to the modern higher algebra*. G. Salmon vyučoval od roku 1841 matematiku na Trinity College v Dublinu, od roku 1866 tam byl profesorem teologie a od roku 1888 tuto kolej vedl. Jeho učebnice, zejména analytické geometrie a teorie invariantů, byly velmi oblíbené a užívané, ať už v originále, nebo v německém přepracování Wilhelma Fiedlera (1832–1912).

G. Salmon: *Lessons introductory to the modern higher algebra*, Dublin, 1859, xii+147 stran, 2. vydání: Dublin, 1866, viii+296 stran, 3. vydání: Dublin, 1876, xx+318 stran; německy (W. Fiedler): *Vorlesungen zur Einführung in die Algebra der linearen Transformationen*, Leipzig, 1863, viii+271 stran, 2. vydání: Leipzig, xiv+477 stran; francouzsky (H. Bazin[14]): *Leçons d'algèbre supérieure*, Paris, 1868, xii+247 stran.

V šedesátých a sedmdesátých letech 19. století se postupně objevovaly další a další učebnice věnované determinantům. Některé byly elementární, obsahovaly pouze základy teorie a sloužily k prvnímu seznámení s determinanty. Některé však měly charakter obšírných monografií; prezentovaly teorii determinantů v celé šíři, od základů až po speciální otázky a aplikace, velmi často byly doplněny historickými poznámkami a četnými odkazy na časopisecké práce. Determinanty se rovněž v rostoucí míře začaly objevovat v učebnicích algebry, geometrie, analýzy, v obšírnějších učebnicích matematiky, v knihách o teorii invariantů apod.

Připomeňme nyní několik titulů monografií i elementárních učebních textů z šedesátých a sedmdesátých let 19. století, jež patřily k těm významnějším, k těm, které ovlivnily vývoj samotné teorie. Obdobný charakter jako knihy F. Brioschiho a R. Baltzera měla kniha, kterou napsal Nicola Trudi (1811–1884), profesor na univerzitě v Neapoli.

N. Trudi: *Teoria de' determinanti e loro applicazioni*, Napoli, 1862, xii+268 stran.

[14] Henri Bazin (1829–1917).

V úvodu se autor odvolal na současný význam teorie determinantů a zdůraznil potřebnost sledování pokroku vědeckého bádání.

Le applicazioni de'determinanti a solenni questioni di analisi, di geometria, e di meccanica, che da ogni parte e da più anni si andavano pubblicando da'dotti negli Atti delle Accademie, e nei giornali scientifici, facevano desiderare che la parte elementare della teorica di queste interessanti funzioni passasse nel campo della ordinaria istituzione, affin di porre la gioventù studiosa in istato di conoscere e seguire i progressi della Scienza.
([Trudi, 1862], str. v)

Velmi zajímavý text o determinantech a soustavách lineárních rovnic publikoval roku 1867 Charles Lutwidge Dodgson (Lewis Carroll, 1832–1898).[15]

C. L. Dodgson: *An elementary treatise on determinants, with their application to simultaneous linear equations and algebraical geometry*, London, 1867, viii+143 stran.

T. Muir ocenil ve své bibliografii teorie determinantů Dodgsonův text následujícími slovy:

This is a text-book quite unlike all its predecessors. Professedly its main aim is logical exactitude. In pursuance thereof all definitions, conventions, axioms, propositions and corollaries are carefully formulated, labelled and numbered: every step in a train of reasoning is kept scrupulously separate from its antecedent and consequent, and in order to guard against possible contamination of the reasoning illustrative examples are relegated to the footnotes. ([Muir, 1906], díl III., str. 24)

Zajímavou a užitečnou učebnicí z mnoha hledisek byla kniha německého matematika a přírodovědce Adama Wilhelma Siegmunda Günthera (1848–1923), středoškolského a vysokoškolského učitele, který působil v letech 1876 až 1886 v redakci časopisu Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Její první kapitola (str. 1–31) přinesla podrobný výklad vzniku a vývoje teorie determinantů podložený řadou bibliografických údajů.

S. Günther: *Lehrbuch der Determinanten-Theorie für Studirende*, Erlangen, 1875, viii+236 stran, 2. vydání: Erlangen, 1877, xii+209 stran.

T. Muir o Güntherově monografii napsal:

Günther's aim was, like Trudi's, to produce a fairly comprehensive text-book less condensed than Baltzer's and in general more suitable for learners. Like Trudi, therefore, he ended by writing a lengthy book.
([Muir, 1906], díl III., str. 54)

Obsáhlou knihou o teorii determinantů, která obsahuje řadu úloh a cvičení spjatých hlavně s geometrickými aplikacemi, je následující učebnice Georga J. Dostora (1820–?).

---

[15] J. Bečvář: *Matematik Charles Lutwidge Dodgson, spisovatel a fotograf Lewis Carroll a Císařova staronová Alenka*, Učitel matematiky 5(1996), 58–64; J. Bečvář: *Ještě dvakrát Lewis Carroll*, Učitel matematiky 7(1999), 124–128.

G. Dostor: *Éléments de la théorie des déterminants avec application a l'algèbre, la trigonométrie et la géométrie analytique dans le plan et dans l'espace, a l'usage des classes de mathématiques spéciales*, Paris, 1877, xxxi+352 stran, 2. vydání: Paris, 1883, xxxiv+361 stran, dotisk: 1905.

Kniha začíná pětistránkovým úvodem, v němž je zdůrazněn význam determinantů pro jednotlivé matematické disciplíny a stručně připomenut vznik a vývoj této teorie. Je rozdělena na čtyři části, které se dále člení na 14 kapitol; ty jsou ještě dělené na paragrafy sestávající z menších článků. Podrobný obsah knihy je otištěn na 21 stranách.

La Science des Déterminants est l'un des instruments les plus puissants que l'Analyse mette à la dispositions des Géomètres; le mécanisme en est fort simple, les méthodes sont presque élémentaires, les résultats sont d'une fécondité remarquable. ([Dostor, 1877], str. v)

T. Muir ve svém referátu k této monografii poznamenal:

Up till the appearance of Dostor's work no text-book in French had been available for students save the translations of Brioschi and Baltzer. It is consequently the more to be regretted that the new author does not show that great advance upon his predecessors' work which might reasonably have been expected. ([Muir, 1906], díl III., str. 67–68)

Poměrně obsáhlou učebnicí je rovněž kniha *A treatise on the theory of determinants and their applications in analysis and geometry*, kterou napsal Robert Forsyth Scott (1849–1933). V jejím závěru je připojen soupis 92 příkladů (*Examples*, str. 213–241) a *List of memoirs and works relating to determinants* (str. 242–251).[16] Kniha zdůrazňuje souvislosti teorie determinantů a hyperkomplexních čísel. Druhé vydání této knihy připravil George Ballard Mathews (1861–1922), který působil na univerzitách v Bangoru a Cambridge. Soupis literatury z předchozího vydání vynechal, neboť již začala vycházet Muirova bibliografie v časopise Quarterly Journal of Mathematics. Připojil však krátkou historickou poznámku (str. 286–288).

R. F. Scott: *A treatise on the theory of determinants and their applications in analysis and geometry*, Cambridge, 1880, xi+251 stran, 2. vydání (G. B. Mathews): *The theory of determinants and their applications*, Cambridge, 1904, xii+288 stran.

V úvodu své monografie R. F. Scott napsal:

In every case where it was possible I have consulted the original works and memoirs on the subject; a list of those I have been able to see is appended as it may be useful to others pursuing the same line of study. At one time I hoped to make this list exhaustive, supplementing my own researches from the literary notices in foreign mathematical journals, but even with this aid I found that it would be necessarily incomplete. In consequence of this the list has been

[16] Mezi nimi je šest prací F. J. Studničky, dvě práce Františka Hozy (1843–1914) a po jedné Wilhelma Matzky (1798–1891), Martina Pokorného (1836–1900) a Antona Puchty (1851–1903).

restricted to those memoirs which I have seen, the leading results of which are incorporated either in the body of the text or in the examples.
([Scott, 1880], Preface)

6. Determinanty na středních školách

V šedesátých a sedmdesátých letech 19. století se v souvislosti s rostoucím zájmem o teorii determinantů uvažovalo o zavedení základů této teorie do programů učiva středních škol. Tyto tendence byly nejsilnější v Dánsku, Rusku a v německých zemích, kde byly determinanty do výuky na středních školách opravdu zavedeny a kde se základní poznatky o determinantech objevily v požadavcích k maturitním zkouškám z matematiky. V té době byly rovněž poměrně často vydávány elementární učebnice teorie determinantů určené pro studenty středních škol.

Dokladem diskusí o problematice determinantů na středních školách jsou některé články, které byly v této době otištěny. Připomeňme jen některé:

H. Dölp: *Die Determinanten als Gegenstand des Gymnasialunterrichts*, Sch. Progr. Giessen, 1866.

S. Günther: *Didaktische Bemerkungen zur Determinantentheorie*, Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 6(1875), 138–150.

J. Diekmann: *Die Determinanten als Unterricht auf Gymnasien und Realschulen*, Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 6(1875), 1–21, 124–137, 193–211.

Poměrně velká diskuse o výuce determinantů na různých typech škol se v letech 1880 až 1882 odehrála na stránkách časopisu Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschftlichen Unterricht. Zahájil ji redaktor tohoto časopisu J. C. V. Hoffmann, zúčastnili se jí J. Diekmann, Erler, E. Bardey (1828–1897) a Hermann Karl Andreas Gerlach (1826–1903).

J. C. V. Hoffmann a další: *Determinanten oder nicht? Eine Gefahr!*, Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 11(1880), 343–360, 12(1881), 84–85, 95–99, 193–196, 413–417, 425–427, 13(1882), 111–114, 171–186, 356, 442–443.

Články s obdobnou tématikou však lze nalézt ve stejné době i jinde:

G. Dötsch: *Zum Unterricht in der Determinantenlehre*, Blätter für die bair. Gym.-u.-Realschulwesen 16(1880), 25–28.

P. Jenrich: *Beiträge zur Methodik des mathematischen Unterrichts mit Berücksichtigung der Determinantenfrage*, Scg.-Prog., Magdeburg, 1882, 41 stran.

O prospěšnosti uvedení determinantů na střední školy, resp. o jejich oficiálním zakotvení ve středoškolském učivu nacházíme zmínky i v předmluvách některých elementárních učebnic o determinantech. Uveďme jen několik málo textů, které byly určeny přímo pro výuku na středních školách, a tedy i k průpravě k návaznému studiu vědeckých monografií. O jejich úspěšnosti můžeme soudit nejen z počtu vydání, ale i z případných překladů do dalších jazyků.

Velmi úspěšná byla elementární knížka belgického matematika a historika matematiky Paula Mansiona (1844–1919), profesora na univerzitě v Gentu, člena Belgické královské akademie a Královské české společnosti nauk. Vyšla ve více vydáních a navíc ještě v německém překladu.

P. Mansion: *Éléments de la théorie des déterminants avec de nombreux exercices*, Paris, 1875, 3. vydání: 1880, 64 stran, 4. vydání: 1883, iv+80 stran, 6. vydání: 1900, iv+91 stran; německy (S. Günther): *Elemente der Theorie der Determinanten mit vielen Übungsaufgaben*, Teubner, Leipzig, 1878, vi+50 stran, 2. vydání: 1886, xxiv+56 stran, 3. vydání: 1899, 103 stran.

V úvodu této knížky P. Mansion mimo jiné napsal:

Le présent écrit est une introduction aux excellents ouvrages publiés sur la théorie des déterminants par Brioschi, Baltzer, Salmon, Günther, Scott, Muir, Suarez et Gascó. Le lecteur y est conduit, par la voie la plus courte, sinon la plus facile, aux vérités les plus importantes de cette algèbre nouvelle.
([Mansion, 1875], úvod)

P. Mansion je autorem ještě dalšího elementárního textu, který je věnován determinantům.

P. Mansion: *Introduction à la Théorie des Déterminants. À l'usage des établissements d'instruction moyenne*, Gand, 1876, 24 stran, 2. vydání: 1882, 32 stran, 3. vydání: 1899, 40 stran; německy (B. J. Clasen): *Einleitung in die Theorie der Determinanten, für Gymnasien und Realschulen*, Leipzig, 1900.

Ludwig Otto Hesse (1811–1874), řádný profesor na polytechnice v Mnichově, je rovněž autorem elementární knížky o determinantech.

O. Hesse: *Die Determinanten, elementar behandelt*, Leipzig, 1871, 46 stran, 2. vydání: Leipzig, 1872, ii+48 stran; holandsky (F. van Wageningen): S'Gravenhage, 1871, iv+48 stran; polsky (Żdziarski): Warsawia, 1880; italsky (V. Valeriano): *I determinanti, elementarmente esposti*, Giornale di Matematiche di Battaglini 10(1873), 217–229, 325–342.

Předmluva této Hesseovy útlé knížky začíná takto:

Unseren sechs Bayerischen Real-Gymnasien ist durch hohe Ministerial-Verfügung vom 5. October 1870 die Aufnahme der Lehre von den Determinanten in den Kreis der Unterrichts-Gegenstände vorgeschrieben worden.

Wenn auch der begabte Lehrer aus den wissenschaftlichen Arbeiten über Determinanten diejenigen Lehrsätze leicht herausfinden wird, welche sich für einen beschränkten Unterricht eignen, so tritt nach Zusammenstellung des Materials an ihn doch die schwierigere Aufgabe heran, dasselbe zu einem einheitlichen Ganzen zu verschmelzen und die einzelnen Theile in eine organische Verbindung zu bringen. ([Hesse, 1871])

Velmi úspěšnou knížkou o determinantech byl německy psaný text H. Dölpa. Druhé vydání, po autorově předčasné smrti, připravil pro tisk W. Soldan, ředitel vyšší reálky v Giessenu.

H. Dölp: *Die Determinanten nebst Anwendung auf die Loesung algebraischer und analytisch-geometrischer Aufgaben. Elementar behandelt*, Darmstadt, 1873, iv+94 stran, 2. vydání (W. Soldan): 1877, iv+94 stran, 3. až 8. vydání: Darmstadt, 1887, 1893, 1899, 1903, 1908, 1913.

Předmluva prvního vydání Dölpovy knížky začíná takto:

Für Jeden, den seine mathematischen Studien über die Elemente hinausführen, ist die Bekanntschaft mit den Determinanten heute nicht mehr zu entbehren. Hiernach sind entweder die akademischen Studien damit zu beginnen, oder es muss, was nach der Ansicht des Verfassers noch empfehlenswerther sein dürfte, der mathematische Unterricht in der Schule damit abgeschlossen werden. ... Zu wiederholten Malen hat der Verfasser Schülern von 16 bis 18 Jahren die Determinanten vorgetragen und bringt in dem vorliegenden Schriftchen die von ihm eingehaltene Methode in geeigneter Ergänzung zur Kenntniss des mathematischen Publikums. ([Dölp, 1874])

Obdobným textem určeným pro střední školu je útlá knížka F. Reidta.

F. Reidt: *Vorschule der Theorie der Determinanten für Gymnasien und Realschulen*, Leipzig, 1874, vi+66 stran.

Determinanty na našich školách

Prvním česky psaným učebním textem obsahujícím partii o determinantech je knížka Martina Pokorného nazvaná *Determinanty a vyšší rovnice*, v níž je determinantům věnována partie o rozsahu 38 stran.

M. Pokorný: *Determinanty a vyšší rovnice*, Praha, 1865, iv+135 stran.

O pět let později vyšla knížka Františka Josefa Studničky (1836–1903), vzápětí se objevila její ruská a německá verze.

F. J. Studnička: *O determinantech*, Praha, 1870, 64 stran.

F. J. Studnička: *Načal'naja osnovanija teorii Determinantov' ili opred'litelej*, Praga, 1870, 70 stran.

F. J. Studnička: *Einleitung in die Theorie der Determinanten. Für Studierende an Mittelschulen und technischen Anstalten*, Prag, 1871, iv+67 stran.

F. J. Studnička v úvodu své knížky nejprve stručně přiblížil vznik a vývoj teorie determinantů. Potom zasvěceně informoval o nejvýznamnější literatuře o determinantech a poznamenal:

Poněvadž ale žádný z těchto spisů není tak elementárně psán, aby začátečníka pohodlně uvedl do nauky o determinantech, odhodlal jsem se obšírně sestaviti základy, na nichž spočívá theorie tato, aby pak každý s touto propravou obeznámený se mohl prospěšně zanášeti studováním jmenovaných a podobných pojednání. ([Studnička, 1870], str. 5)

Martin Pokorný vydal roku 1874 překlad prvního dílu dvoudílné učebnice *Die Elemente der Mathematik* od Richarda Baltzera z roku 1860 pod názvem *Základové mathematiky.* Její 26. paragraf (10 stran) je věnován determinantům. Opět se tak determinanty dostaly k českému čtenáři.

F. J. Studnička pojal látku o determinantech i do své učebnice *Algebra pro vyšší třídy škol středních* z roku 1877 (2. vydání 1879, německy 1878, 1879), v níž je determinantům věnováno deset stran. V předmluvě k této učebnici napsal:

Že jsem konečně zde dopřál místa i determinantům, dokazuje, jak bedlivě jsem přihlížel k modernímu pokroku algebry. Poněvadž se při řešení rovnic stupně prvního o více neznámých takořka samy do cesty derou a jich užíváním i jinde, zejména v analytické geometrii, více času se uspoří nežli třeba k vyložení toho, co zde jest obsaženo: neváhal jsem aspoň základy a první počátky této nauky sem položiti, maje na mysli, že je může vynechati, komu jsou staré methody milejší. ([Studnička, 1877], předmluva)

Roku 1876 vyšla *Sbírka úloh z algebry pro vyšší třídy středních škol*, kterou sepsali středoškolští profesoři František Hromádko (1831–1911) a Alois Strnad (1852–1911); determinantům je věnováno osm stran. F. J. Studnička tuto sbírku doporučoval jako vhodný doplněk ke své učebnici algebry. V recenzi zveřejněné roku 1876 v Časopise pro pěstování mathematiky a fysiky napsal o zařazení determinantů do této sbírky úloh tato slova:

Co snad mnohému bude viděti se zbytečným býti, jest sbírka úloh determinantů se týkajících, jelikož u nás dosud o nich se jen zřídka na ústavech středních činí zmínka, ač jinde, zejmena v Němcích a Rusích základové této nauky již do středních škol jsou pošinuti. … Snad i u nás se konečně rozšíří program středních škol o několik paragrafů, které s druhé strany tak mnoho prospěchu přinášejí v algebře i v geometrii. (str. 94)

Roku 1877 publikoval F. J. Studnička v Časopise pro pěstování mathematiky a fysiky článek *Počátkové nauky o determinantech*, který byl určen pro žáky středních škol. O významu teorie determinantů zde napsal:

… nyní se nauka tato stala nanejvýš důležitou nejen pro vyšší studium mathematické, nýbrž i pro střední školy, čehož nejlepším důkazem jest uvádění jejích základů do školních knih, jakž na př. Davidov v Rusku, Baltzer v Němcích učinil, aneb prohlášení jich za předmět zkoušky maturitní, jakž v Bavorsku a Dánsku se stalo. A v skutku uznává se čím dále tím více i od těch, kdož považují již nynější program učení mathematického na školách našich za příliš rozsáhlý a studentstvo přetěžující, že nebude na dlouho lze nevšímati si nauky tak všestranně prospěšné, jako jest právě theorie determinantů již v nejjednodušších základech svých; odtud pochází i tolik pokusů učiniti tuto nauku, či vlastně nejpotřebnější poučky její co možná přístupnými i obyčejně jen skrovně připravenému žáku středních škol. (str. 49)

O deset let později, roku 1887, publikoval F. J. Studnička v časopise Krok článek nazvaný *Hodí-li se pojem determinantní do našich středních škol čili* *nic?*[17] Ocitujme z tohoto článku dva odstavce:

Předkládám tedy odborným kollegům svým na středních školách především na uváženou co otázku první: „Hodí-li se pojem determinantní do našich škol čili nic?“ Začínám s ní proto, že i jinde, zejmena v Německu, dlouho již jest předmětem důkladných úvah a rozprav, a jinde, jako v Dánsku a Rusku, namnoze již jest vyřízena a sice příznivě, jakož seznati lze z příslušných knih učebných …

Jsem přesvědčen, že by se v tomto oboru ušetřilo nejméně aspoň tolik času, kolik ho zapotřebí, aby se základní poučky determinantní se zřetelem ke stupni nanejvýše čtvrtému – neb dále obor středních škol obyčejně nesahá – důkladně vyložily. Jak by se tyto výklady měly přispůsobiti ostatnímu vyučování, jest arci otázkou jinou, na niž přijde řada, vyřízena-li bude otázka svrchu položená příznivě.

Na Studničkovu stať reagoval A. Strnad v článku *Determinanty na středních školách*; uveřejněn byl v dalším ročníku časopisu Krok.[18] Velmi podrobně se vyjádřil k řadě otázek souvisejících se zařazením determinantů do osnov středních škol, k existující české literatuře, reagoval i na diskusi, která proběhla před časem v časopise Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht.

Hlasové těch, kteří v příčině algebraického učení i jinde, zvláště ve Francii a Německu, po opravě touží, téměř jednomyslně vyslovují přesvědčení, že ne sice jediným ale též ne posledním požadavkem přispůsobení se mathematického vyučování pokrokům vědy jest přijetí nauky o determinantech do programu škol středních. Nemožno totiž popříti, že vývoj nauky o determinantech znamená skutečný a rozhodný pokrok v algebře; ona jednoduchosť spojená s obecností a elegancí, které moderní algebru (v nejširším slova smyslu) vyznačují, zajisté také má původ v hojném a přiměřeném užívání tohoto tvaru početního. …

… nauka tato není snad dosud nehotova a nevyvinuta; jest to ovoce zcela zralé a škole k požitku se hodící. …

Nemůžeme proto věřiti zprávě, kterou jsme kdysi četli v časopise Hoffmannově „Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht“; praví́ť tam redaktor v poznámce ku článku svému „Determinanten oder nicht?“: „Es wird uns berichtet, dass in Prag mehrere Mittelschulprofessoren vom Landesschulinspector einen Verweis hinnehmen mussten, weil ihre Schüler bei der Inspection die Determinanten nur erwähnt hätten; ja einem der Herren sei es streng untersagt worden, das Wort „Determinante“ in der Schule auch nur – fallen zu lassen.“ (Krok 2(1888), str. 3–4)

A. Strnad se dále věnoval problému, *čemu a jak, kde a kdy vyučováno býti má z tohoto oboru algebry, aby bez přetížení žáků a bez překročení mezí vytknutých školám našim dosaženo bylo cíle žádoucího* (str. 56). Podle jeho názoru se na středních školách mají probírat pouze determinanty druhého a třetího řádu, rozvoj determinantu, ale nikoli věty o násobení determinantů, o reciprokém

[17] Krok 1(1887), 2–3.
[18] Krok 2(1888), 3–4, 56–59.

determinantu a vlastnosti symetrických determinantů. Zavrhoval užití dvojích indexů, dával přednost vypsání prvků do čtvercového schématu.

Spůsob, kterým se o determinantech jednati počne, může býti dvojí. Buď vyjde se od určitého výměru tohoto pojmu algebraického, z toho vyvodí se hlavní vlastnosti a pak ukáže se jeho upotřebení. Aneb vyjde se z obecného řešení rovnic o dvou, třech a více neznámých; tvar determinantu sám sebou se tu vyskytne, i jest pak jen třeba jej podrobněji rozebrati. Cesta prvá jest systematická, druhá genetická a spolu historická, znázorňujíc postupný vývoj této nauky. Který z obou těchto spůsobů pro školu lépe se hodí a doporučuje, netřeba obšírně vyličovati: z nejobyčejnějších pravidel didaktických přijdeme zajisté k přesvědčení, že cesta druhá jest účelům školským přiměřenější. …

Půvabný spísek prof. dra. Studničky „O determinantech" vychází od Cauchyova elegantního sice, začátečníkům však méně přístupného symbolického vytvoření determinantu ze střídavého a souměrného součinu. Zaujímaje v naší literatuře asi podobné místo jako německé Hesseovy „Determinanten, elementar behandelt" …

Německé vydání algebry Studničkovy prohlašuje Hoffmann ve článku již připomenutém za nejlepší německý spis, dle kterého začátečníky determinantům učiti lze. (Krok 2(1888), str. 57)

… neodvážíme se tvrditi, že řešení soustavy rovnic prvého stupně pomocí determinantů může nahradit a zbytečnými činí obvyklé methody: dosazovací, srovnávací a spůsob stejných součinitelů. …

Zvláště však výhodným a téměř neocenitelným jest užití determinantů v geometrii analytické, dodávajíc této zvláštního rázu elegantního a moderního, a to bez ujmy srozumitelnosti. I nejslabšímu žáku zamlouvá se na př. vzorec pro obsah trojúhelníka určeného souřadnicemi vrcholů snadněji a lépe ve formě determinantu než v kterékoli jiné. (Krok 2(1888), str. 58–59)

F. J. Studnička se k otázce zavedení determinantů na střední školy vrátil roku 1894 v článku *O zaokrouhlení mathematického učiva na gymnasiích našich.*[19] Vytrvale se stavěl za zavedení determinantů na střední školy.

Má-li obsah učiva našich gymnasií odpovídati moderním požadavkům, musí býti přiměřeně a účelně zaokrouhlen a nesmí se tedy vyhýbati několika vzorcům odpovídajícím se strany jedné pravidlům determinantním a se strany druhé základ sférické trigonometrie představujícím. … (Krok 8(1894), str. 1)

Uvážíme-li pak podstatu a z ní plynoucí praktickou spůsobilosť pojmu determinantního, vyznáme snadno bez dlouhých rozpaků, že poskytuje sám o sobě jakož i svým využitkováním veliké množství momentů duchocviku výtečně sloužících. … (Krok 8(1894), str. 2)

Ostatně netřeba vykládati dále, že nutno, aby se obsah mathematického učiva na gymnasiích tímto směrem doplnil; skutečnosť tomuto postulátu již hoví měrou dosti značnou, ješto ukazuje, že málo jest u nás takých ústavů, kde by žáci ničeho se nedozvěděli o determinantech instrukcí příslušnou neznaných. …

[19] Krok 8(1894), 1–6.

Potěšitelná zkušenosť tato utvrzuje nás i v pevné naději, že se již dlouho neudrží v rozhodujících kruzích odpor proti determinantům, a že se konečně řádným spůsobem vyhoví moderním požadavkům gymnasiálního vyučování. (Krok 8(1894), str. 4–5)

Determinanty se v této době u nás objevovaly i v dalších učebnicích pro střední školy. Připomeňme např. *Algebru pro vyšší realky* od F. Hozy z roku 1892.

Učební texty o determinantech sepsal rovněž Karel Zahradník (1848–1916), který působil řadu let v Záhřebu:

K. Zahradník: *O determinantih drugoga i trecega stupnja. Za porabu visih srednjih ucilista*, Zagreb, 1878, viii+39 stran.

K. Zahradník: *Prvé počátky nauky o determinantech. Pro vyšší střední školy*, Praha, 1879, 50 stran.

K. Zahradník: *O determinantech*, Brno, 1905, iv+51 stran.

Zatímco první dva texty K. Zahradníka byly určeny pro studenty vyšších středních škol (v Chorvatsku a v českých zemích), třetí knížka byla sepsána pro studenty matematiky na vysoké škole technické v Brně.

Připomeňme ještě německy psanou středoškolskou učebnici, jejímž autorem byl pražský středoškolský profesor Eduard Bartl:

E. Bartl: *Einleitung in die Theorie der Determinanten zum Gebrauche an Mittelschulen sowie zum Selbstunterrichte*, Praha, 1878, iv+96 stran.

O determinantech v české literatuře, zejména v pracích F. J. Studničky, viz [Bečvářová, 1998].

7. Teorie determinantů ve druhé polovině 19. století

Ve druhé polovině 19. století se teorie determinantů stala velmi oblíbenou disciplínou. Rozvíjela se zejména pod vlivem C. G. J. Jacobiho a jeho žáků, jejichž práce ukazovaly velké možnosti mnohostranného využití determinantů při studiu invariantů algebraických forem, při nejrůznějších postupech v analytické geometrii, v matematické analýze, v teorii čísel a dalších oblastech.

Od počátku sedmdesátých let vycházel každoročně velký počet prací věnovaných determinantům. Většinou však již nepřinášely zásadní, nové myšlenky, ale rozpracovávaly teorii do šířky i do hloubky. V té době se studovaly četné speciální otázky, zkoumaly se vlastnosti řady speciálních determinantů, hledaly a rozvíjely se různé aplikace v matematické analýze, v geometrii apod. Na dalším rozšiřování a prohlubování teorie se tehdy podílela velká řada matematiků, a to v obecném směru, v podrobnostech i v zobecněních. Proto je prakticky nemožné nějak stručně postihnout její vývoj od poloviny 19. století. Determinanty pronikly prakticky do všech částí matematiky, literatura o tomto tématu se rozrostla do značných rozměrů. Počet článků i učebnic však v té době již neodpovídal jejich vědeckému přínosu, ale značně jej překračoval; determinanty na sebe v té době poutaly přehnanou pozornost.

Nejvýznamnějšími autory prací z teorie determinantů byli ve druhé polovině 19. století W. Spottiswoode, F. Brioschi, A. Cayley, J. J. Sylvester, K. T. Weierstrass, Ch. Hermite, L. Kronecker, H. Hankel, M. Arnaldi, H. J. S. Smith, G. Frobenius, G. Salmon, O. Hesse, T. Muir; četné výsledky však přinesla řada dalších matematiků. Z českých matematiků se determinantům věnoval nejvíce F. J. Studnička.

Velmi podrobný pohled na vývoj teorie determinantů v posledních čtyřech desetiletích 19. století dává Muirova bibliografie (viz [Muir, 1906], díl III. a IV.).

Determinanty začaly být čím dále, tím více využívány v algebře, geometrii, teorii čísel, teorii forem, v mechanice, teoretické astronomii a v dalších disciplínách. V každé z těchto oblastí se objevily konkrétní typy determinantů, které byly účelné svojí strukturou. Pozornost se proto ve druhé polovině 19. století do značné míry soustřeďovala na výzkum takovýchto speciálních determinantů, i když první speciální determinanty byly zavedeny a studovány již dříve. Pro matematickou analýzu jsou důležité funkcionální determinanty (Jacobiány, Hessiány a Wronskiány), v teorii invariantů a algebraických rovnic se studují determinanty Hankelovy a jejich speciální případy, tzv. cirkulanty, v teorii čísel determinanty Smithovy, v teorii kvadratických forem a v geometrii se využívají ortogonální determinanty atd.

Arthur Cayley (1821–1895) publikoval roku 1851 první anglický příspěvek o determinantech nazvaný *On a theorem in the geometry of position.* Zavedl v něm symbol, který se ujal, čtvercové schéma omezené z obou stran svislou čarou.

Let the symbols

$$|\,\alpha\,|\ ,\qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}\ ,\qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}\ ,\quad \&c.$$

denote the quantities ...

Roku 1843 vydal pojednání *On the theory of determinants*, které začal stručnými poznámkami o vývoji této disciplíny.

The following Memoir is composed of two separate investigations, each of them having a general reference to the Theory of Determinants, but otherwise perfectly unconnected. The name of "Determinants" or "Resultants" has been given, as is well known, to the functions which equated to zero express the result of the elimination of any number of variables from as many linear equations, without constant terms. ...

In the first part of the present paper, I consider the properties of certain derivational functions of a quantity U, linear in two separate sets of variables ...

In the second part, I consider the notation and properties of certain functions resolvable into a series of determinants, but the nature of which can hardly be explained independently of the notation. (Papers I., str. 63)

V Cayleyových pracích se prolíná problematika teorie matic, teorie hyperkomplexních čísel, teorie forem a teorie invariantů, determinanty jsou užitečným nástrojem, kterému se Cayley nevyhýbal. Byl jedním ze zakladatelů teorie invariantů, které nazýval hyperdeterminanty; determinant je totiž jednoduchým invariantem.

J. J. Sylvester používal determinanty v řadě prací, dával však, jako jeden z mála matematiků své doby, přednost maticovým úvahám a maticovým vyjádřením. V práci *On the relation between the minor determinants of linearly equivalent quadratic functions* z roku 1851 napsal:

It is wonderful that a theory so purely analytical should originate in a geometrical speculation. My friend M. Hermite has pointed out to me, that some faint indications of the same theory may be found in the Recherches Arithmétiques of Gauss. The notation which I have employed for determinants is very similar to that of Vandermonde, with which I have become acquainted since writing the above, in Mr Spottiswoode's valuable treatise On the Elementary Theorems of Determinants. Vandermonde was evidently on the right road. I do not hesitate to affirm, that the superiority of his and my notation over that in use in the ordinary methods is as great and almost as important to the progress of analysis, as the superiority of the notation of the differential calculus over that of the fluxional system. For what is the theory of determinants? It is an algebra upon algebra; a calculus which enables us to combine and foretell the results of algebraical operations, in the same way as algebra itself enables us to dispense with the performance of the special operations of arithmetic. All analysis must ultimately clothe itself under this form. (Papers I., str. 246–247)

Georg Salmon přispěl k rozvoji teorie determinantů zejména svými velice úspěšnými učebnicemi. Roku 1852 vydal knihu *A treatise on the higher plane curves* a roku 1859 knihu *Lessons introductory to the modern higher algebra*, která vyšla v dalších vydáních v letech 1866, 1876 a 1885, v německé verzi – přepracována W. Fiedlerem – v letech 1863 a 1877, ve francouzském překladu H. Bazina roku 1868. Je rovněž autorem článků *Exercises in the hyperdeterminant calculus* (1854) a *On the relation which connects the mutual distances of five points in space* (1859), v nichž je aparát teorie determinantů využíván.

Charles Hermite (1822–1901) pracoval s determinanty nejprve v souvislosti s teorií čísel; připomeňme jeho článek *Sur une question relative à la théorie des nombres* z roku 1849, v němž odvodil jistou identitu pro determinanty čtvrtého řádu. S determinanty se později setkával při studiu kvadratických forem a jejich lineárních transformací, při transformaci abelovských funkcí, při práci s homogenními polynomy apod. Připomeňme např. jeho práce *Sur la théorie des formes quadratiques ternaires indéfinies* (1853), *Sur la théorie de la transformation des fonctions abéliennes* (1855), *Sur la théorie des polynomes homogènes du second degré* (1856); některé Hermiteovy výsledky jsou obsaženy i v jeho korespondenci, z níž byly důležité úryvky pravidelně publikovány (např. Hermiteovy dopisy A. Cayleymu v letech 1853 a 1855, F. Brioschimu roku 1863).

Hermann Hankel (1839–1873), který je známý svou monografií *Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Functionen, I. Theorie der complexen Zahlensysteme* z roku 1867, studoval determinanty již ve své disertační práci *Ueber eine besondere Classe der symmetrischen Determinanten* napsané v Göttingen roku 1861, později jim věnoval pozornost např. v článku *Darstellung symmetrischer Functionen durch die Potenzsummen* (1865). Jedním ze speciálních determinantů, které studoval, je determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1a_2 & \dots & a_1a_2\dots a_{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2a_3 & \dots & a_2a_3\dots a_n \\ \hdotsfor{5} \\ 1 & a_n & a_na_{n+1} & \dots & a_na_{n+1}\dots a_{2n-2} \end{vmatrix}.$$

Henry John Stanley Smith (1826–1883) využíval aparát teorie determinantů zejména v teorii čísel. Připomeňme jeho práce *On systems of linear indeterminate equations and congruences* (1861), *Report on the theory of numbers* (1862), *On the arithmetical invariants of a rectangular matrix of which the constituents are integral numbers* (1873), *On systems of linear congruences* (1873) a *On the value of a certain arithmetical determinant* (1876). Smithovým determinantem se obvykle rozumí determinant sestavený z největších společných dělitelů čísel $1, 2, \dots, n$, který má tento tvar (viz Papers, str. 161):

$$\begin{vmatrix} (1,1) & (1,2) & \dots & (1,n) \\ (2,1) & (2,2) & \dots & (2,n) \\ \hdotsfor{4} \\ (n,1) & (n,2) & \dots & (n,n) \end{vmatrix}.$$

Ludwig Otto Hesse se s problematikou determinantů setkával zhruba tři desetiletí. V letech 1843 a 1844 se zabýval problémem eliminace v pracích *Ueber die Bildung der Endgleichung, welche durch Elimination einer Variabeln aus zwei algebraischen Gleichungen hervorgeht und die Bestimmung ihres Grades* a *Ueber die Elimination der Variabeln aus drei algebraischen Gleichungen vom zweiten Grade mit zwei Variabeln*, později ještě v práci *Bemerkungen zu: „Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten. Leipzig, 1857."* z roku 1858, která vyšla o rok později v italské verzi pod názvem *Il determinante di Sylvester ed il risultante di Eulero.*

Determinanty užíval s úspěchem v geometrii, mistrně je uplatnil při užití homogenních souřadnic v teorii algebraických křivek a ploch. Připomeňme jeho práce *Ueber Curven dritter Classe und Curven dritter Ordnung* (1849) a *Ueber Determinanten und ihre Anwendung in der Geometrie, insbesondere auf Curven vierter Ordnung* (1853). V rozsáhlém učebním textu *Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes, insbesondere über Oberflächen zweiter Ordnung* z roku 1861 se objevilo podstatně více algebry, než bylo dříve zvykem.[20]

[20] Leipzig, xv+368 stran, 2. vydání: Leipzig, 1869, xvi+456 stran, 3. vydání: 1876.

O. Hesse studoval rovněž lineární substituce kvadratických forem, problematiku jejich kanonických tvarů, determinanty užíval i v analýze, např. v práci *Ueber die Criterien des Maximums und Minimums der einfachen Integrale* (1857).

Hesseovo jméno nese determinant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_3} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{vmatrix},$$

v němž je f funkce proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Tento determinant byl zaveden roku 1844 v Hesseově článku *Ueber die Elimination der Variabeln aus drei algebraischen Gleichungen vom zweiten Grade mit zwei Variabeln.* Na Hesseho počest jej J. J. Sylvester nazval Hessiánem.[21] V Sylvesterově pojednání *On a theory of the syzygetic relations* ... je v připojeném slovníčku heslo *Hessian*:

Hessian or Hessean, named after Dr Otto Hesse, of Königsberg ..., is the Jacobian to the differential coefficients of a homogeneous function of any number of variables. ... (Papers I., str. 583)

Georg Ferdinand Frobenius (1849–1917) se s determinanty setkával při studiu bilineárních a kvadratických forem, při práci v teorii invariantů, ale i při zkoumání diferenciálních rovnic, eliptických funkcí apod. Připomeňme jeho práce z druhé poloviny sedmdesátých let 19. století: *Ueber homogene totale Differentialgleichungen* (1877), *Zur Theorie der elliptischen Functionen* (s L. Stickelbergerem, 1877), *Ueber die schiefe Invariante einer bilinearen oder quadratischen Form* (1878).

V letech 1873 a 1874 přispěl G. Frobenius významným způsobem k poznání vlastností Wronského determinantu (vztah mezi lineární závislostí funkcí a nulovostí tohoto determinantu) ve dvou pracích – *Ueber den Begriff der Irreductibilität in der Theorie der linearen Differentialgleichungen* a *Ueber die Determinante mehrerer Funktionen einer Variabeln.* V práci *Ueber die Determinante mehrerer Functionen einer Variabeln* vyšetřoval určitý typ funkcionálního determinantu a ukázal jeho důležitou vlastnost:

Sind $y_1, y_2, \ldots y_\lambda$ Functionen einer Veränderlichen x, und ist $y_n^{(\beta)}$ die βte Ableitung von y_n, so nenne ich den Ausdruck

$$\sum \pm y_1 y_2^{(1)} \ldots y_\lambda^{(\lambda-1)} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdot\cdot & y_\lambda \\ y_1^{(1)} & y_2^{(1)} & \cdot\cdot & y_\lambda^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ y_1^{(\lambda-1)} & y_2^{(\lambda-1)} & \cdot\cdot & y_\lambda^{(\lambda-1)} \end{vmatrix}$$

[21] Viz Sylvesterova práce *Sketch of a Memoir on elimination, transformation, and canonical forms* z roku 1851 – Papers I., str. 195.

die Determinante dieser λ Functionen und bezeichne ihn mit $D(y_1, y_2, \dots y_\lambda)$.

Wenn mehrere Functionen unter einander unabhängig sind, so ist ihre Determinante von Null verschieden; wenn sie aber nicht unter einander unabhängig sind, so ist ihre Determinante gleich Null.

In diesem Satze sind, wie es in der Theorie der linearen Differentialgleichungen üblich ist, mehrere Functionen unter einander unabhängig genannt, wenn zwischen ihnen keine homogene lineare Gleichung mit constanten Coefficienten besteht. ([Frobenius, 1874], str. 245–246)

M. Arnaldi podal roku 1896 v práci *Sui determinanti orlati, e sullo sviluppo di un determinante per determinanti orlati* obecnou teorii determinantů vroubených; zvláštní případy byly známy a studovány již dříve.[22] Vroubené determinanty byly užívány v geometrii.

Od poloviny 19. století se teorie determinantů začala velmi intenzivně prolínat se vznikající teorií matic a s teorií invariantů.

Karl Theodor Weierstrass, Leopold Kronecker

K. T. Weierstrass (1815–1897) působil v letech 1842 až 1855 jako středoškolský učitel matematiky, roku 1856 se stal mimořádným a roku 1865 řádným profesorem berlínské univerzity. Své výsledky prezentoval zejména v univerzitních přednáškách. Jeho přednášky byly proslulé, byly navštěvovány matematiky celé Evropy a ovlivnily tak vývoj evropské matematiky. Zabýval se hlavně matematickou analýzou, teorií analytických funkcí, variačním počtem, diferenciální geometrií, mnoho pozornosti věnoval budování exaktních základů matematické analýzy.

L. Kronecker (1823–1891) studoval na berlínské univerzitě, jeho učitelem byl Ernst Eduard Kummer (1810–1893). Studia dokončil roku 1845. Od roku 1861 vyučoval na berlínské univerzitě, od roku 1883 jako profesor. Věnoval se zejména algebře a teorii čísel (kvadratické formy, algebraická čísla, teorie grup), diofantické analýze, teorii eliptických funkcí, prosazoval tzv. aritmetizaci matematiky.

K. T. Weierstrass přednášel v Berlíně o determinantech již v šedesátých letech 19. století. V přednáškách i ve svém semináři užíval axiomatickou definici tohoto pojmu; determinant zavedl (v dnešní řeči) jako alternující n-lineární formu n-složkových vektorů, která jednotkové matici řádu n přiřazuje číslo 1. Weierstrassovu axiomatickou definici často užíval L. Kronecker, snad proto mu byla někdy připisována.

V závěrečné poznámce otištěné v práci *Zur Theorie der linearen Gleichungen* z roku 1905 poznamenal G. Frobenius, že definice determinantu jako funkce n^2 nezávislých proměnných s pomocí charakteristických vlastností pochází

[22] Připojíme-li k danému determinantu nových k sloupců vpravo a nových k řádků dole, přičemž společné prvky přidaných řádků a sloupců jsou nulové, získáváme tzv. vroubený determinant.

od K. T. Weierstrasse, a nikoli od L. Kroneckera, jak je chybně uvedeno ve francouzské matematické encyklopedii:[23]

Diese Definition rührt aber von Weierstraß her, wie alle seine Schüler wissen. Er hat sie schon seit 1864 (oder vielleicht noch früher) im mathematischen Seminar und in seinen Vorlesungen benutzt. Noch 10 Jahre später verhielt sich Kronecker gegen diese funktionentheoretische Definition recht ablehnend. (Abhandlungen III., str. 354)

Poznamenejme pro zajímavost, že k takovémuto omylu došlo i přesto, že v předmluvě K. Hensela (1861–1941) ke Kroneckerovým přednáškám z roku 1903 je Weierstrassovo autorství této definice výslovně uvedeno:

Die beiden charakteristischen Eigenschaften der Determinanten, welche sich hier als eine Folgerung aus der Theorie der linearen Gleichungen ergeben, benutzte Weierstrass schon früher in seinen ersten Vorlesungen über diese Disziplin zur Definition der Determinanten. ([Kronecker, 1903], str. vii)

Weierstrassova definice determinantu se v následujících desetiletích objevovala v nejrůznějších učebnicích algebry, teorie matic a determinantů, lineární algebry apod. Například v nepříliš rozsáhlé knize Fritze Neisse *Determinanten und Matrizen* jsou v úvodu 3. kapitoly nazvané *Determinanten* věnovány dva paragrafy definicím tohoto pojmu. První definice, tzv. permutační, je motivována problematikou soustav lineárních rovnic a je připsána G. W. Leibnizovi. Druhá definice je tzv. Weierstrassova. F. Neiss zde napsal:

Nach Weierstrass wird die Determinante – sie soll mit D_W bezeichnet werden – folgendermaßen definiert:

D_W ist eine ganze rationale Funktion von n^2 Größen a_{ik} $(i, k = 1, 2, \dots, n)$, die in n Zeilen und n Spalten angeordnet sind, und erfüllt die Eigenschaften I, II, III. ([Neiss, 1941], 3. vydání z r. 1948, str. 19)

Vlastnosti I, II, III jsou uvedeny na předcházejících dvou stranách:

I. *D_W is homogen und linear in bezug auf die Elemente einer jeden Zeile.*

II. *D_W wechselt das Zeichen, wenn zwei Zeilen vertauscht werden.*

III. *D_W hat für $a_{ik} = \delta_{ik}$ den Wert* 1.

L. Kronecker využil aparát teorie determinantů v několika svých pracích v souvislostech s problematikou algebraických rovnic, s otázkami eliminace, zkoumal subdeterminanty symetrických, resp. ortogonálních matic apod.; viz

[23] *L. Kronecker, dans ses cours professés à l'Université de Berlin, reprenait l'idée de G. Cramer et définissait un déterminant comme une fonction invariante relativement à la composition des formes linéaires; d'après L. Kronecker, un déterminant est une fonction de n^2 variables qui est caractérisée par les trois propriétés que voici: si l'on dispose les n^2 variables en un carré formé de n lignes et de n colonnes, le déterminant est fonction linéaire et homogène des éléments $a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{nk}$ de chacune des n lignes; cette fonction change seulement de signe lorsqu'on transpose deux quelconques des lignes $a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{nk}$ et $a_{1\lambda}, a_{2\lambda}, \dots, a_{n\lambda}$ de ce carré; elle se réduit à +1 pour $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = 1$ et $a_{ik} = 0$ $(i \lessgtr k)$.* ([ESM], díl I.1; [Netto, Vogt, 1904], str. 90) Německá matematická encyklopedie je daleko stručnější: *… Kronecker legte in seinen Vorlesungen eine funktionentheoretische* [Erklärung] *zu grunde.* ([EMW], díl I.1; [Netto, 1898], str. 36)

např. jeho práce *Bemerkungen zur Determinanten-Theorie* (1869), *Zur Theorie der Elimination einer Variabeln aus zwei algebraischen Gleichungen* (1881), *Die Subdeterminanten symmetrischer Systeme* (1882), *Ueber symmetrische Systeme* (1889) a *Ueber orthogonale Systeme* (1890). Vlastnosti determinantů mnohdy vyvozoval při výkladu problematiky řešení soustav lineárních rovnic.

Jeho 21 univerzitních přednášek věnovaných determinantům vyšlo až roku 1903 pod názvem *Vorlesungen über die Theorie der Determinanten.* Na začátku první přednášky pojednávající o vzniku a vývoji teorie determinantů je uvedeno:

Ursprünglich waren die Determinanten aber wirklich ein Instrument, und in diesem Sinne kann man auch sagen, sie seien nicht wie eine Schöpfung der Natur entdeckt, sondern wie ein wichtiges Werkzeug erfunden worden, und die merkwürdige Geschichte ihrer Entstehung erinnert sehr an diejenige anderer grosser Erfindungen. ([Kronecker, 1903], str. 1)

O Kroneckerových přednáškách píše Thomas Muir ve své bibliografii mimo jiné toto:

In the seventeenth of these lectures (pp. 291–306), which belong to the period 1883–1891, we find ourselves face to face with matter closely analogous to that of Paul Günther's version of a lecture of Weierstrass', published earlier in the same year but also belonging to a period much earlier than the year of publication. The question of priority, however, is not troublesome: there can be little doubt that the original idea of the tripartite definition was Weierstrass': indeed, the editor of the volume now before us says so in effect in his Preface ... . ([Muir, 1930], str. 31–32)

Ve Weierstrassových sebraných spisech je článek *Zur Determinantentheorie* (Werke III., str. 271–287). Není to však skutečná Weierstrassova práce, ale jakási zpráva o jeho přednáškách o teorii a užití bilineárních a kvadratických forem ze školního roku 1886/87; prezentoval ji Paul Günther, jak uvádí krátká závěrečná poznámka (Werke III., str. 287; viz též [Muir, 1930], str. 31).

Poznamenejme, že v souvislosti s determinanty je ještě uváděna Weierstrassova práce *Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen* z roku 1868 (viz [Muir, 1906], díl IV., str. 441–442).

8. Přelom 19. a 20. století

Přehledové práce

Podrobný pohled na stav teorie determinantů na přelomu 19. a 20. století a na její předchozí vývoj můžeme získat pročtením několika článků encyklopedického charakteru, které se objevily již počátkem 20. století.

V rozsáhlé německé matematické encyklopedii – *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen* [EMW] – v článku

Kombinatorik z roku 1898, věnoval Eugen Netto (1848–1919) velkou pozornost teorii determinantů. Determinanty tehdy byly, vzhledem k jejich „závislosti“ na permutacích, často řazeny ke kombinatorice.

Ve francouzské encyklopedii *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées* [ESM] byl roku 1904 otištěn článek *Analyse combinatoire et theorie des déterminants*, který je přepracováním výše zmíněné Nettovy stati o kombinatorice a determinantech. Přeložil ji a podstatně rozšířil Henry Gustav Vogt (1864–?).

Pro italskou, fundovanou encyklopedii *Repertorio di matematiche superiori (Definizioni – Formole – Teoremi – Cenni bibliografici)* [Pas1] nesoucí jméno matematika Ernesta Pascala, která vyšla ve dvou svazcích v letech 1898 a 1900, sepsal partii o determinantech Alfred Loewy (1873–1935). V německém překladu vyšlo toto dílo pod názvem *Repertorium der höheren Mathematik* [Pas2] v letech 1900 a 1902, druhé vydání v letech 1910 a 1929. V tomto druhém německém vydání je rozsáhlý Loewyho článek *Kombinatorik, Determinanten und Matrices* otištěn ve svazku II.1 na stranách 43 až 167.

V letech 1930 a 1932 vyšel ve dvou svazcích první díl italské matematické encyklopedie *Enciclopedia delle matematiche elementari* [EME]. Editory byli Luigi Berzolari (1863–1949), Giulio Vivanti (1859–1949), Duilio Gigli (1878–1933). Druhý svazek obsahuje mimo jiné přehledový článek *Determinanti*, jehož autorem je L. Berzolari. Na třiceti stránkách je zde podán přehled nejdůležitějších výsledků teorie determinantů a velké množství bibliografických odkazů.

Přehledové články takovéhoto druhu naznačují, že se popisovaná teorie pomalu začíná uzavírat, že hlavních výsledků již bylo dosaženo.

Učebnice teorie determinantů na přelomu 19. a 20. století

Na přelomu 19. a 20. století přinesla značné množství materiálu pro hlubší studium teorie determinantů a jejích aplikací učebnice E. Pascala. Je rozdělena na dvě části. V první, nazvané *Fondamenti del calcolo dei determinanti* (48 stran) a určené k úvodnímu studiu, jsou vyloženy pouze základní výsledky této teorie, druhá část, *Ricerce speciali sui determinanti e applicazioni* (282 stran), která je věnována aktuálním otázkám a aplikacím, je doplněna četnými historickými poznámkami a bibliografickými odkazy. Německý překlad z roku 1900 a druhé vydání z roku 1923 doplnil autor krátkým pojednáním o vývoji této disciplíny. Německé vydání obsahuje navíc jmenný a věcný rejstřík.

E. Pascal: *I determinanti. Teoria ed applicationi con tutte le più recenti ricerche*, Hoepli, Milano, 1897, viii+330 stran, 2. vydání: 1923; německy (H. Leitzmann): Teubner, Leipzig, 1900, xvi+266 stran.

T. Muir ocenil mimo jiné i malý formát této Pascalovy knížky:

A very attractive pocket text-book, with pages only a trifle larger than a post-card, but 330 of them, and almost none of them occupied with Geometry. … it

is surprising to find how many comparatively fresh matters are touched on and attributed with fair accuracy to the original writers.
([Muir, 1906], díl IV., str. 94)

Druhý díl univerzitních přednášek L. Kroneckera vydal v letech 1901 a 1903 Kurt Hensel pod názvem *Vorlesungen über Mathematik. Vorlesungen über allgemeine Arithmetik.* První částí jsou přednášky o teorii čísel, druhou částí druhého dílu jsou přednášky o teorii determinantů – 21 univerzitních přednášek z let 1883 až 1891.

L. Kronecker: *Vorlesungen über die Theorie der Determinanten*, Leipzig, 1903, xii+390 stran.

T. Muir ve své monografii poznamenal:

No student who reads it through with care can fail to have his view widened and see his subject in truer perspective than before. ([Muir, 1930], str. 105)

Velmi obsáhlou učebnicí, jejíž první vydání obsahuje podrobně zpracovanou teorii nekonečných determinantů, je kniha Gerharda Kowalewského (1876–1950). Věnuje se mimo jiné aplikacím, zejména aritmetickým, úspěšně přitom využívá maticový počet. Během první poloviny 20. století byla několikrát vydána, byla chápána jako významná monografie.

Autor ji sepsal na základě více než desetileté pedagogické činnosti na univerzitách v Lipsku, Greifswaldu a Bonnu. Její podrobnou recenzi zveřejnil M. Bôcher v časopise Bulletin of the American Mathematical Society roku 1911.

G. Kowalewski: *Einführung in die Determinantentheorie einschließlich der unendlichen und der Fredholmschen Determinanten*, 1909, v+550 stran, 2. vydání: 1925, vi+304 stran, 3. vydání: 1942, vii+320 stran, 4. vydání: 1954, vi+348 stran.

T. Muir o této knize mimo jiné napsal:

The quite unusual size of this textbook is in great part due to the considerable amount of space taken up with applications and to the exceptional treatment of one or two specialized determinants. ([Muir, 1930], str. 110)

Poznamenejme, že determinanty (a též matice) byly již počátkem 20. století podstatnou součástí řady šířeji zaměřených učebnic. Připomeňme např. knihy M. Bôchera, H. Becka, O. Schreiera a E. Spernera (viz [Bôcher, 1907], [Beck, 1926], [Schreier, Sperner, 1931]).

9. Zobecňování determinantů

V souvislosti s rozvojem teorie determinantů se ve druhé polovině minulého století objevila i některá jejich zobecnění. Jednalo se hlavně o determinanty kubické a n-rozměrné, o determinanty nekonečné, o permanenty, determinoidy a determinanty nad nekomutativními tělesy.

Determinanty kubické a n-rozměrné

Na možnost definovat a zkoumat kubické determinanty upozornil jako první už A. T. Vandermonde roku 1771 v práci *Remarques sur les problèmes de situation*; uvažoval uspořádání prvků a_{ijk} do krychle, kde indexy i, j, k nabývají hodnot od 1 do 4.

Součet všech součinů, které vzniknou permutací druhých a třetích indexů takovéhoto krychlového schématu prvků a jsou opatřeny vhodným znaménkem, je tzv. kubický determinant. Tyto determinanty zkoumala ve druhé polovině 19. století řada matematiků. Jedním z prvních byl matematik a astronom Annibale de Gasparis (1819–1892), autor článků *Sur les déterminants dont les éléments ont plusieurs indices* (1861), *Sopra due teoremi dei determinanti a tre indici, ed un altra maniera di formazione degli elementi di un determinante ad m indici* (1868) a *Prodotto di due determinanti a tre indici espresso con un determinante ordinario* (1878).

V šedesátých a sedmdesátých letech 19. století se této problematice věnovali hlavně Gustav Robert Dahlander (1834–1903) v práci *Om en klass funktioner, hvilka ega flera egenskaper analoga med determinanternes* (1863), Angelo Armenante (1844–1878) v článku *Sui determinanti cubici* z roku 1868 otištěném v časopise Giornale di matematiche di Battaglini a Ernesto Padova (1845–1896) ve stejně nazvaném článku, který následoval hned za Armenanteovou prací.

V roce 1877 studoval Giovanni Garbieri (1847–1931) přirozené zobecnění pojmu kubický determinant. V práci *Determinanti formati di elementi con un numero qualunque d'indici* vyšetřoval n-rozměrné determinanty; krátký úvod k tomuto článku sepsal G. Bellavitis, který se o tuto problematiku v té době rovněž zajímal. Podobnými otázkami se roku 1868 zabýval Johann Georg Zehfuss (1832–?) v pojednání *Ueber eine Erweiterung des Begriffes der Determinante*, roku 1878 J. H. Braasch, o rok později Henry-William Lloyd Tanner (1851–1915) a v letech 1879 až 1881 R. F. Scott.

V osmdesátých a devadesátých letech 19. století se této problematice věnovali další matematici. Nejaktivnějším byl Leopold Bernhard Gegenbauer (1849–1903), který v letech 1880 až 1893 sepsal o vícerozměrných determinantech devět prací. Další články o tomto tématu publikovali Wladyslaw Zajaczkowski (1837–1898) roku 1880, Gustav Ritter von Escherich (1849–1935) roku 1880, Leopold Schendel roku 1885, Nikolaus von Szüts v letech 1890 a 1895, John Edward Campbell (1862–1924) roku 1892, Tito Camillo Cazzaniga (1872–1900) roku 1898, Emil Waelsch (1863–1927), profesor matematiky na brněnské technice, roku 1898. Velmi pěkné a zasvěcené pojednání *On three dimensional determinants* napsal Earle Raymond Hendrick (1876–1943) roku 1899.

Poznamenejme, že se problematika kubických a vícerozměrných determinantů objevila jen v knihách S. Günthera (1875), R. F. Scotta (1880) a E. Pascala (1897, 1900). Úplnou bibliografii n-rozměrných determinantů vydal roku 1924 Maurice M.-A. Lecat (1884–?) v apendixu svého rozsáhlého díla *Bibliographie de la relativité*. Je rovněž autorem významného díla *Leçons sur la théorie* *des déterminants à n dimensions avec applications à l'Algébre, à la Géométrie* z roku 1910. Percy Alexander MacMahon (1854–1929) o ní napsal:

I believe that there is no other book which deals exclusively with the subject. In the preface he deplores the extent to which determinants of n dimensions have been overlooked, and the fact that only some twenty mathematicians have been interested. His bibliographical list extends from Cayley (1844) to Calegari (1904). ([MacMahon, 1927], str. 282)

Nekonečné determinanty

Pokud řád determinantu neomezeně roste, přichází v úvahu limitní přechod, a opouštíme tak algebru; dostáváme nekonečné determinanty, které již patří do matematické analýzy. Jsou důležité např. v teorii obyčejných lineárních diferenciálních rovnic. Toto zobecnění se děje na půdě spočetného nekonečna. Lze však obdobným způsobem postupovat „spojitě“ – pak dostaneme tzv. determinanty Fredholmovy, které hrají roli v teorii integrálních rovnic.

K nekonečným determinantům došel roku 1870 Ernst Theodor Kötteritzsch (1841–?) při řešení nekonečně mnoha lineárních rovnic o nekonečně mnoha neznámých, a to v práci *Ueber die Auflösung eines Systemes von unendlich vielen linearen Gleichungen.*

K obdobné problematice dospěl roku 1877 astronom George William Hill (1838–1914) v práci *On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the Sun and Moon.*

Exaktní teorii nekonečných determinantů vybudoval v letech 1884 až 1886 Jules-Henri Poincaré (1854–1912) v pracích *Remarques sur l'emploi de la méthode précédente* a *Sur les déterminants d'ordre infini* a Helge von Koch (1870–1924) v letech 1890 až 1895 v pracích *Om upplösningen af ett system lineära likheter mellan ett oändligt antal obekanta*, *Bidrag till teorin för oändliga determinanter*, *Sur les déterminants infinis, et les équations différentielles linéaires ...*, *Sur la convergence des déterminants d'ordre infini et des fractions continues.* Další práce na toto téma sepsal T. C. Cazzaniga v letech 1897 až 1899.

Bližší poučení o nekonečných determinantech najdeme v prvním vydání Kowalewského knihy *Einführung in die Determinantentheorie einschließlich der unendlichen und Fredholmschen Determinanten.*[24] 17. kapitolu své monografie začal G. Kowalewski takto:

Wir betrachten ein doppelt unendliches Schema von folgender Art:

$$\left\{\begin{array}{llll} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right.$$

[24] Viz podrobná recenze této knihy od M. Bôchera, Bulletin of the American Mathematical Society 17(1911), 120–140.

Wenn die Determinante

$$A_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

bei unendlich zunehmendem n einem Grenzwert A zustrebt, so schreiben wir

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \end{vmatrix}$$

und nennen A eine Determinante von unendlicher Ordnung oder kurz eine unendliche Determinante. Natürlich braucht $\lim A_n$ *nicht zu existieren. …*

Wir wollen jetzt annehmen, daß A existiert und einige Eigenschaften feststellen, die sie mit den endlichen Determinanten teilt.
([Kowalewski, 1909], str. 369–370)

Poznamenejme, že v dalších vydáních Kowalewského knihy byly partie o nekonečných determinantech vynechány. V předmluvě ke třetímu vydání své monografie autor napsal:

Die zweite Auflage meines Determinantenbuches unterschied sich von der ersten hauptsächlich dadurch, daß die Fredholmsche Theorie auf einen etwas engeren Raum beschränkt wurde. Ich habe mich bei der Vorbereitung der dritten Auflage nicht entschließen können, diese Kürzung wieder aufzuheben, zumal inzwischen im gleichen Verlag ein besonderes Buch über Integralgleichungen von mir erschienen ist. …

Die unendlichen Determinanten, deren Theorie, abgesehen von der besonderen Klasse der Kochschen Normaldeterminanten, noch nicht recht geklärt ist, lasse ich auch diesmal beiseite. ([Kowalewski, 1909], 3. vydání, 1942, předmluva)

Permanenty

Jestliže definici determinantu mírně modifikujeme tím, že „vynecháme znaménka“, tj. k jednotlivým součinům prvků jednotlivých řádků a sloupců nepřipojíme znaménka příslušných permutací, dospějeme k pojmu *permanent*. Aplikace teorie permanentů se objevují v kombinatorice, teorii grafů, pravděpodobnosti, ve statistické mechanice, fyzikální chemii atd.

Teorie permanentů má svůj původ ve výše zmíněných pracích J. P. M. Bineta a A.-L. Cauchyho přednesených roku 1812 (a publikovaných roku 1812, resp. 1815), o nichž jsme se zmiňovali v souvislosti s rozvojem teorie determinantů.

J. P. M. Binet podal formule pro počítání permanentů matice typu $m \times n$ pro $m \leq 4$, ale nikoli pro $m > 4$. Permanent takové matice pro $m \leq n$ je součtem všech možných součinů m prvků matice A, z nichž žádné dva nejsou ze stejného řádku a ze stejného sloupce.

V Cauchyově práci se objevil termín *fonctions symétriques permanentes*, který byl použit pro speciální typ symetrické funkce. V dnešním smyslu užil poprvé termín permanent roku l882 Thomas Muir ve své učebnici *A treatise on the theory of determinants with graduated sets of exercises.*

Teorie permanentů se rozvíjela zejména od roku 1855; připomeňme jen tři následující práce:

C. W. Borchardt[25]: *Bestimmung der symmetrischen Verbindungen vermittelst ihrer erzeugenden Function* (1855),

F. Joachimsthal[26]: *De aequationibus quarti et sexti gradus quae in theoria linearum et superficierum secundi gradus occurrunt* (1856),

A. Cayley: *Note sur les normals d'une conique* (1857).

Během 19. století byly publikovány asi dvě desítky prací o permanentech. Byly hledány a nalézány nejrůznější identity, vzorce pro rozvoje permanentů apod. V řadě prací se objevily různé identity, v nichž figurovaly jak permanenty, tak determinanty. Důkazy některých výsledků tohoto typu byly poměrně obtížné.

Na počátku 20. století přišlo určité oživení zájmu o permanenty. Věnovali se jim např. Robert Franklin Muirhead (1860–1941), George Pólya (1887–1985) a Bartel Leendert van der Waerden (1903–1996). Jejich výsledky do značné míry souvisely s aplikacemi teorie permanentů v jiných oblastech matematiky.

T. Muir zachytil ve své bibliografii teorie determinantů (viz [Muir, 1906]) všechny práce o permanentech, které byly publikovány do roku 1920. O problematice permanentů pojednává z určitého nadhledu i článek [MacMahon, 1927].

V letech 1926 až 1959 nebyl o permanenty téměř žádný zájem. Určité oživení nastalo až po roce 1959. Začali se jim věnovat Joel Lee Brenner (1912–1997), Eduardo Renato Caianiello (1921–1993), Jerome Levine (1937–2006), Marvin Marcus (nar. 1927), Dallas W. Sasser, John Clarke Slater a další matematici. V šedesátých a sedmdesátých letech došlo k rozšíření a prohloubení teorie permanentů. Rozvíjelo se studium jejich speciálních vlastností, vyšetřovaly se různé formule, které měly aplikace v kombinatorice.

Problematice permanentů se v šedesátých až osmdesátých letech 20. století intenzivně věnoval zejména Henryk Minc (nar. 1919).[27] Jeho první práce o permanentech je z roku 1961, poslední z roku 1994. Roku 1978 ve své knize *Permanents* uvedl, že od objevu permanentů roku 1812 se jimi zabývalo 155 matematiků, kteří o nich napsali 301 prací; přitom zhruba tři čtvrtiny těchto prací byly napsány v letech 1959 až 1978. V první kapitole nazvané *The*

[25] Carl Wilhelm Borchardt (1817–1880).
[26] Ferdinand Joachimsthal (1818–1861).
[27] Viz např. [Marcus, 2003].

theory of permanents in the historical order of development shromáždil H. Minc základní informace o vývoji této zajímavé disciplíny.

H. Minc spolupracoval s řadou dalších matematiků, zejména s Marvinem Marcusem.[28] Mincovy nejvýznamnější výsledky týkající se permanentů jsou obsaženy v pracích *Recurrence formulas for the permanents of* $(0,1)$*-circulants* a *Permanental compounds of companion matrices and permanents of* $(0,1)$*-circulants* z let 1985 a 1987. Čtenáře je možno odkázat na výše zmíněnou knihu *Permanents* (1978, rusky 1982), případně na následující články:

M. Marcus, H. Minc: *Permanents*[29] (1965),

H. Minc: *Theory of permanents 1982–1985* (1987).

Determinoidy

V letech 1913 až 1926 zobecnil Cuthbert Edmund Cullis (?–1954) pojem determinantu zavedením tzv. *determinoidu.* Determinoid je definován jako součet součinů utvořených z prvků obecně obdélníkové matice podobným způsobem, jako je determinant utvořen z matice čtvercové.

V předmluvě k prvnímu svazku svého rozsáhlého díla nazvaného *Matrices and determinoids* (1913, 1918, 1925) C. E. Cullis napsal:

The present work is an amplification of a course of lectures given for the University of Calcutta in the winter of 1909–10. Its chief feature is that it deals with rectangular matrices and determinoids as distinguished from square matrices and determinants, the determinoid of a rectangular matrix being related to it in the same way as a determinant is related to a square matrix. An attempt is made to set forth a complete and consistent theory or calculus of rectangular matrices and determinoids. ([Cullis, 1913], str. v)

Pojem determinoidu je zaveden v následujících odstavcích.

If as large a number as possible of elements $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ *are selected from the matrix* A *in such a manner that no two of the selected elements occur in the same horizontal row and no two in the same vertical row, their product* $\alpha\beta\gamma\delta\dots$ *will be called a complete derived product belonging to the matrix. The number of elements in each complete derived product is equal to the efficiency of the matrix; and the total number of such products, when the order of arrangement of the factors is disregarded, is*

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1) \quad \textit{or} \quad m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)$$

according as n *is greater or less than* m*.* ([Cullis, 1913], str. 3)

The determinoid of any matrix A *will be defined to be the algebraical sum of all its complete derived products, when each product is provided with a positive or negative sign in accordance with the following rule of signs.*

[28] Viz např. [Grone, 1994].
[29] Tato práce získala cenu – L. R. Ford Memorial Prize.

Rule of Signs. Let $\alpha\beta\gamma\delta\dots$ be any complete derived product, in which the order of the factors is immaterial. In the matrix A count the total number of horizontal and vertical steps from the leading element to the element α; let this number be α'. Strike out in A the horizontal row and the vertical row in which α occurs, and let the matrix formed by the remaining horizontal and vertical rows be called A_1.

In the matrix A_1 count the total number of horizontal and vertical steps from the leading element to the element β. Let this number be β'. Strike out in A_1 the horizontal row and the vertical row in which β occurs, and let the matrix formed by the remaining horizontal and vertical rows be called A_2.

... Then the sign to be attached to the product $\alpha\beta\gamma\delta\dots$ is the same as the sign of $(-1)^{\alpha'+\beta'+\gamma'+\delta'+\dots}$. ... ([Cullis, 1913], str. 12–13)

Cullisova teorie determinoidů se neujala.

Determinanty nad nekomutativními strukturami

Velmi krátce po Hamiltonovu objevu kvaternionů (1843) se objevily úvahy o determinantech matic, jejichž prvky jsou kvaterniony. Situace je však komplikována tím, že násobení kvaternionů není komutativní. Např. pro matici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

nad komutativním tělesem je

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \ ,$$

pro matici A nad nekomutativním tělesem tomu tak být nemusí. Není tedy vůbec jasné, jakým způsobem determinant matice nad nekomutativním tělesem definovat, aby měl tento pojem rozumné vlastnosti.

Několik pokusů, jak zavést determinant matice, jejíž prvky jsou kvaterniony, se objevilo již během 19. století.

Již A. Cayley definoval v práci *On certain results relating to quaternions* z roku 1845 determinant matice druhého řádu nad tělesem kvaternionů rovností

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \ ,$$

která odpovídá rozvoji determinantu podle prvního sloupce. Pro matici třetího řádu je tedy podle Cayleyovy definice

$$\det A = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) \ .$$

Je však nepříjemné, že determinant matice se stejnými řádky je roven nule, ale determinant matice se dvěma stejnými sloupci roven nule být nemusí. Je totiž

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} = ab - ab = 0 \ , \qquad \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} = ab - ba \ .$$

Je pochopitelné, že v nekomutativním případě nemusí být $ab-ba=0$. Podobný problém je s větou o násobení determinantů. Pro matice

$$A=\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{j} & \mathrm{k} \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad B=\begin{pmatrix} \mathrm{k} & \mathrm{j} \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$$

nad tělesem kvaternionů je

$$\det(A\cdot B)=2-2\mathrm{k}\ , \qquad \text{ale} \qquad \det A\cdot\det B=2\mathrm{k}\cdot 0=0\ .$$

Informace o Cayleyho determinantech matic sestavených z kvaternionů je v apendixu druhého vydání Hamiltonovy knihy *Elements of quaternions* (1889), píše o nich též J. M. Peirce v práci *Determinants of quaternions* z roku 1899.

E. Study (1862–1930) se této problematice věnoval roku 1920 v článku *Zur Theorie der linearen Gleichungen.* Matici řádu n transformoval na komplexní matici řádu $2n$ a z té počítal determinant běžným způsobem. Determinanty hermitovských kvaternionových matic zkoumal roku 1922 též americký matematik Eliakim Hastings Moore (1862–1932) v práci *On the determinant of an hermitian matrix with quaternionic elements.*

Problematika determinantů nad tělesem kvaternionů je stále živá. V posledních desetiletích jí byly věnovány např. tyto práce:

F. J. Dyson[30]: *Quaternion determinants* (1972),

Madan Lal Mehta[31]: *Determinants of quaternion matrices* (1974),

P. van Praag: *Sur les déterminants des matrices quaternioniennes* (1989),

P. van Praag: *Sur la norme réduite du déterminant de Dieudonné des matrices quaternioniennes* (1991),

H. Aslaksen[32]: *Quaternionic determinants* (1996),

N. Cohen, S. De Leo[33]: *The quaternionic determinants* (2000).

V posledních dvou článcích je bohatá bibliografie prací zaměřených na aplikace kvaternionů v kvantové mechanice.

Teorii determinantů nad nekomutativním tělesem podal Jean Dieudonné (1906–1992) roku 1943 v práci *Les déterminants sur un corp non-commutatif.* Na ni navázali např. J. L. Brenner článkem *Applications of the Dieudonné determinant* (1968), Paolo Piccinni prací *Dieudonné determinant and invariant real polynomials on* $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{H})$ (1982) a Paul van Praag svými články *L'élimination linéaire dans les corps gauches* (1986) a *Remarques sur l'élimination linéaire dans les corps gauches et le déterminant de Dieudonné* (1986).

---

[30] Freeman John Dyson (nar. 1923).
[31] Madan Lal Mehta (1932–2006).
[32] Helmer Aslaksen.
[33] Nir Cohen, Stefano De Leo.

10. Bibliografie teorie determinantů a její využití

Thomas Muir – bibliografie teorie determinantů

Sir Thomas Muir (1844–1934) se narodil ve Skotsku. V letech 1892 až 1915 byl nejvyšším školským funkcionářem (*Superintendent General of Education*) v Kapském městě v jižní Africe; v této funkci si získal velké zásluhy o vybudování tamního školství. Právem platil za nejlepšího znalce teorie determinantů, napsal učebnici *A treatise on determinants. With graduated sets of exercises. For use in colleges and schools* (London, 1882, viii+240 stran) a velký počet časopiseckých prací o determinantech. Velmi pozorně sledoval veškeré práce týkající se determinantů, od roku 1881 uveřejňoval bibliografické přehledy takovýchto prací.[34]

V předmluvě ke knize *Permanents* [Minc, 1978] napsal M. Marcus tato slova:

In referring to Sir Thomas Muir and his monumental work The Theory of Determinants in the Historical Order of Development, Minc calls him the "master from Edinburg."

První svazek své rozsáhlé bibliografie věnované determinantům vydal Thomas Muir roku 1890. O šestnáct let později vyšel tento svazek doplněný a podstatně rozšířený jako první díl velkoryse koncipovaného díla *The theory of determinants in the historical order of development.* V dalších letech (1911, 1920, 1923) následoval druhý až čtvrtý díl a roku 1930 pátý díl s mírně modifikovaným názvem – *Contributions to the theory of determinants 1900–1920.* V Muirově bibliografii jsou zachyceny prakticky všechny práce o determinantech (v tématickém a chronologickém uspořádání) od roku 1693 (tj. od G. W. Leibnize) až do roku 1920.[35]

U citovaných prací uvedl T. Muir vždy to nejpodstatnější: charakter práce, její stručný obsah, hodnocení, souvislost s jinými pracemi apod. Jeho bibliografie obsahuje na 2500 stranách informace téměř o všech pracích vymezeného období, které se týkají determinantů, a je tak svým způsobem naprosto jedinečná. Publikovanou bibliografii T. Muir neustále doplňoval drobnějšími historickými poznámkami a přehledy.

V předmluvě prvního dílu T. Muir o svém díle napsal:

. . . It is intended for the student who aims at acquiring such a knowledge as can only be got by a study of the subject in the historical order of its development, for the investigator who is specially interested in this branch of mathematics and to become acquainted with the various lines of attack opened up by previous workers, and for the general working mathematician who requires guidebooks and books of reference concerning special domains.
([Muir, 1906], díl I., str. v)

[34] Viz např. [Maritz, 2005].

[35] První díl zahrnuje období 1693 až 1841, druhý díl období 1841 až 1860, třetí díl 1861 až 1880, čtvrtý díl 1880 až 1900 a pátý svazek 1900 až 1920.

Úvod první kapitoly prvního dílu začal T. Muir následující zajímavou poznámkou obecného charakteru:

The way in which the material for a history of the theory of Determinants has been accumulated is quite similar to that which has been observed in the case of other branches of science. ([Muir, 1906], díl I., str. 1)

Kenneth O. May – studium vývoje teorie determinantů

Kenneth O. May (1915–1977), americký matematik a historik matematiky, zakladatel časopisu Historia Mathematica (1974), je autorem užitečných a často využívaných zdrojů *Bibliography and Research Manual of History of mathematics* (1973) a *Index of the American Mathematical Monthly* (1977).[36]

Na základě tak bohaté a kvalitní bibliografie, jakou je rozsáhlé dílo Thomase Muira, je možno provádět různé epistemologické výzkumy týkající se zákonitostí vývoje vědecké disciplíny a vědy vůbec. Dokladem toho je Mayova práce *Growth and quality of the mathematical literature* z roku 1968.[37] K. O. May vyšel z obšírné Muirovy bibliografie, novější údaje získal z referativních časopisů. Hodnotil mimo jiné narůstající celkový počet prací o determinantech a jeho roční přírůstky jako funkce času a srovnával je s obdobnými funkcemi týkajícími se celé matematiky. Tak získal poměrně podrobný pohled na „kvantitativní vývoj“ teorie determinantů v rámci vývoje celé matematiky.

Velmi stručně je možno Mayovy závěry charakterizovat následujícími slovy. Nárůst zájmu o determinanty byl ve druhé polovině 19. století rychlejší než růst zájmu o matematiku. Teorie determinantů se v té době podílela na více než jednom procentu veškeré matematické produkce. Nejvíce prací o determinantech bylo publikováno v sedmdesátých letech 19. století – asi 40 za rok. Následoval pokles zájmu; začátkem devadesátých let bylo o determinantech uveřejněno již jen kolem 25 prací ročně. Po malém oživení na přelomu století (cca 30 prací ročně) již následoval trvalý pokles zájmu o determinanty, který trvá dodnes.

Od kvantitativního hodnocení matematické produkce přešel K. O. May k hodnocení kvalitativnímu. Práce o determinantech rozdělil do šesti kategorií, podle toho, co přinášejí:

1. nové teoretické myšlenky nebo nové výsledky,
2. aplikace nových výsledků v jiné oblasti,
3. logické a historické utřídění dosavadních výsledků (monografie),

[36] Viz *Kenneth O. May, 1915–1977*, *A Memorial Tribute to Kenneth O. May*, Historia Mathematica 5(1978), 1–2, 3–12, A. C. Lewis: *Kenneth O. May and information retrieval in mathematics*, Historia Mathematica 31(2004), 186–195.

[37] K. O. May v ní navázal na svoji předchozí stať *Quantitative growth of the mathematical literature* z roku 1966. Výtah z obou Mayových článků byl otištěn v Pokrocích matematiky, fyziky a astronomie roku 1970 pod názvem *Růst matematické a literární produkce a její kvalita.*

4. metodické a didaktické shrnutí dosavadních výsledků (učebnice),
5. výsledky již známé (ať vědomě, nebo nevědomě),
6. triviality.

Diskutoval nejprve otázky zařazování publikací do těchto kategorií a studoval grafy ročních přírůstků v těchto šesti kategoriích ve srovnání s grafem ročních přírůstků celkové produkce teorie determinantů. Získal tak ještě podrobnější pohled na vývoj teorie determinantů. Jeho závěry je možno stručně shrnout takto: nové výsledky a myšlenky jsou nejstabilnější složkou (v průměru asi tři práce za rok), aplikací bylo nejvíce v počátečním období (největšího růstu dosáhly v období 1830 až 1860), po roce 1860 nastal prudký nárůst učebnicové literatury, nejvíce trivialit a opakovaných výsledků je v období 1860 až 1910, kdy byla teorie determinantů velmi módní disciplínou.

K. O. May studoval na několika konkrétních příkladech problematiku opakovaného publikování již známých výsledků a příčiny tohoto jevu. Zabýval se rovněž otázkou pomalého pronikání nových výsledků do učebnic. Uvedl, že z 227 učebnic teorie determinantů, které vyšly do roku 1920, jen asi šest ukazuje, že jejich autoři měli dokonalý přehled o výsledcích teorie, o níž psali. Svá zkoumání uzavřel konstatováním, že by bylo dobré vychovávat studenty matematiky k soustavné práci s matematickou literaturou, zejména s referativními časopisy.

11. Závěr

Dne 7. června 1927 proslovil P. A. MacMahon, který je považován za klasického algebraika, pokračovatele Cayleyho a Sylvestera, na Univerzitě v Cambridge *Lecture on the Rouse Ball Foundation* nazvanou *The structure of a determinant*, v níž se věnoval determinantům, a zejména permanentům. Svoji řeč zahájil takto:

When I was invited to deliver this lecture I chose as my subject "The structure of a determinant" for several reasons. It makes an appeal to workers in all branches of mathematics pure and applied. To quote M. Lecat: "Aujourd'hui ces déterminants font partie en quelque sorte de l'ABC de la plus belle des sciences; nul ne les ignore, car nul ne doit ni ne peut les ignorer". Also the subject has come much to the fore during the last few years. There have been new developments, and, personally, I have given much thought to them. ([MacMahon, 1927], str. 273)

Koncem dvacátých let 20. století považoval ještě P. A. MacMahon determinanty za základní matematický nástroj.

O sedmdesát let později se objevil diametrálně odlišný názor. Sheldon Axler v patnáctistránkovém článku *Down with determinants!* navrhuje zcela vynechat determinanty ze základního kurzu lineární algebry a nahradit je alternativním postupem. Domnívá se, že partie o determinantech je pro studenty obtížná, mimo jiné proto, že determinanty bývají zaváděny bez motivace. Alternativní přístup demonstruje na problematice vlastních čísel a vlastních vektorů – doporučuje budovat tento celek na pojmu lineární operátor. Tvrdí, že tato cesta vyústí mimo jiné v hlubší porozumění Jordanovu kanonickému tvaru. V úvodu svého článku píše:

This paper will show how linear algebra can be done better without determinants. Without using determinants, we will define the multiplicity of an eigenvalue and prove that the number of eigenvalues, counting multiplicities, equals the dimension of the underlying space. Without determinants, we'll define the characteristic and minimal polynomials and then prove that they behave as expected. Next, we will easily prove that every matrix is similar to a nice upper-triangular one. Turning to inner product spaces, and still without mentioning determinants, we'll have a simple proof of the finite-dimensional Spectral Theorem.

Determinants are needed in one place in the undergraduate mathematics curriculum: the change of variables formula for multi-variable integrals. Thus at the end of this paper we'll revive determinants, but not with any of the usual abstruse definitions. We'll define the determinant of a matrix to be the product of its eigenvalues (counting multiplicities). This easy-to-remember definition leads to the usual formulas for computing determinants. We'll derive the change of variables formula for multi-variable integrals in a fashion that makes the appearance of the determinant there seem natural.

([Axler, 1995], str. 139)

Svůj přístup k výuce lineární algebry prezentoval S. Axler roku 1996 v učebnici *Linear algebra done right*, která hned roku 1997 vyšla v druhém vydání.

Determinanty poutaly a poutají pozornost i z metodického hlediska. Připomeňme např. článek Georgie E. Šilova (1917–1975) *Pokus o výklad theorie determinantů bez theorie permutací* z roku 1951, který prezentuje zajímavé možnosti výkladu teorie determinantů, resp. jejích postavení v matematice.

Poznamenejme ještě, že se k problematice determinantů čas od času někdo z matematiků vrací; příkladem je krátký článek *A characterization of the determinant* od Desmonda Fearnley-Sandera publikovaný roku 1975 v časopisu The American Mathematical Monthly. D. Fearnley-Sander nejprve připomněl Weierstrassovu definici determinantu; teoretický přístup k determinantům – výrazně ovlivněný „moderní dobou“ tzv. strukturní matematiky – charakterizoval v úvodním odstavci své statě těmito slovy:

The standard approach to the study of determinants is to prove the existence, for any n-dimensional vector space $\mathcal{V}$ over the field K, of a non-zero alternating multilinear form $d\colon \mathcal{V}^n \longrightarrow K$, *and then to define the determinant* $\det T$ *of a linear map* $T\colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ *by the requirement that*

$$\det T \cdot d(x_1, x_2, \ldots, x_n) = d(Tx_1, Tx_2, \ldots, Tx_n)$$

for all $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{V}^n$*; these conditions determine* d *modulo a scalar multiple and hence completely determine the function* $\det\colon \mathcal{L}(\mathcal{V}) \longrightarrow K$*, where* $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ *is the algebra of all vector space endomorphisms of* $\mathcal{V}$*. At an elementary level one is chiefly interested in the function* det *defined on linear maps, rather than in the related function* d *defined on* n*-tuples. It is natural to ask for a characterization of* det *which is intrinsic in the sense that the characterizing properties refer to the action of* det *on linear maps.*

([Fearnley-Sander, 1975], str. 838)