O VÝZNAME ZÁKLADNÉHO POĽA V GEOMETRII

alebo

Nie je rovina ako rovina[1]

Ján Čižmár

V rutinnej pedagogickej praxi a niekedy aj v písomných prejavoch rozličného druhu sa donedávna hojne objavovali a občas sa ešte aj dnes vyskytnú úlohy, ktoré bez doplnenia a upresnenia základných údajov sú neúplne určené a neposkytujú riešiteľovi dostatočné podklady na korektnú odpoveď. Tak napr. otázka o typoch kužeľosečiek nemá zmysel, ak sa explicitne neurčí rovina, pre ktorú sa má klasifikácia typov urobiť; a tu nestačí len údaj o druhu roviny, teda či je rovina projektívna, afinná ap., ale treba poznať i základnú algebrickú štruktúru, nad ktorou je rovina vybudovaná. (Bežná znalosť projektívnej geometrie dáva dostatok základných informácií o súvislostiach postupne doplňovanej axiomatiky projektívneho priestoru a algebrickej štruktúry (okruhu, telesa, poľa atď.), nad ktorou je priestor koordinatizovateľný.)

Iný druh nejasností sa často objavuje v postupoch riešenia niektorých úloh v reálnych priestoroch, keď sa v priebehu riešenia dospeje k algebrickým rovniciam stupňa $n \geq 2$, ktoré nemajú všetky korene reálne. Spravidla bez náležitého vysvetlenia sa geometrické objekty prislúchajúce k týmto koreňom interpretujú ako imaginárne, pričom základný predpoklad tejto interpretácie – *komplexifikácia reálneho priestoru* – zostáva veľmi často zamlčaný. Na problémy tohto druhu narážame už v elementárnych partiách geometrie v takých základných úlohách, ako je zisťovanie vzájomnej polohy priamky a kužeľosečky (prípadne algebrickej krivky vyššieho stupňa) v rovine, vzájomnej polohy roviny a kvadriky (prípadne algebrickej plochy vyššieho stupňa) v priestore, hľadanie samodružných prvkov geometrických transformácií, singulárnych, resp. inflexných bodov reálnej rovinnej algebrickej krivky a pod.

Pozornosť takýmto problémom – triviálnym a dávno vybaveným z pohľadu dnešného stavu teórie – je významná z hľadiska metodiky stredoškolskej a vysokoškolskej výučby geometrie. V nej ide o to, aby každý študent, ktorý sa učí matematiku – bez ohľadu na to, či ako súčasť špecializácie alebo predmet širšej teoretickej prípravy – sa oboznamoval s kľúčovými pojmami na úrovni podľa možnosti *exaktnej*, zodpovedajúcej stavu poznania na prelome 20. a 21. storočia, a nie na úrovni nejasného chápania príznačného v tejto oblasti pre 19. storočie. Z tohto hľadiska je dôležité, aby v prvom rade vysokoškolský učiteľ geometrie mal ujasnené obsahové poznatky o štandardných a vo výučbe

[1] Původně otištěno v Proceedings SCG'96 Volume 5, Slovak Technical University, Bratislava, September 1996, Kočovce, str. 52–61.

frekventovaných priestoroch a ich geometrii a aby mal spoľahlivý metodický prehľad v problematike korektného budovania nosných, obsahovo a logicky diferencovaných pojmov.

Pokus prispieť k zvýšeniu metodickej pripravenosti učiteľov na dosahovanie trvalého a hlbokého osvojenia kardinálnych pojmov u študentov vedie cez spresňovanie fundamentálnych poznatkov o priestoroch, špeciálne rovinách, u samých učiteľov. Nejde tu ani tak o štúdium špeciálnych objektov, napr. konečných telies či polí a konečných rovín, resp. priestorov nad nimi, ani o skúmanie rovín a priestorov so špeciálnymi metrikami (napr. Cayleyho-Kleinových rovín), či o štúdium špeciálnych objektov (napr. kužeľosečiek) v takýchto priestoroch, ako skôr o vyjasnenie úlohy a významu základného poľa priestoru a jeho algebrických rozšírení v tradičných klasických prípadoch projektívneho, afinného a metrického euklidovského priestoru.

Formulácia problematiky

Nevyhnutnou podmienkou možnosti efektívne sa zaoberať problematikou základného poľa je používanie analytickej metódy. Syntetická metóda spravidla neformuluje explicitne vzťah geometrie k základnému poľu, analytická metóda ho deklaruje na samom začiatku. V syntetickej metóde sa problém nutnosti rozšírenia základného poľa objavuje sprostredkovane pri použití kalkulatívnych metód – čo je v podstate prostriedok analytickej metódy – a rozšíreniu chýba povaha všeobecnosti. V analytickej metóde je problém formulovaný explicitne a rozšírenie jediným krokom posúva hranicu operačnej oblasti na úroveň uzavretosti všetkých operácií.

Problém základného poľa sa predstavuje v elementárnej podobe v nasledujúcej úlohe:

Je daný systém funkcií n premenných

$$f_i(x_1,\dots,x_n)\ ,\quad i\in I \quad (\,I \text{ je indexová množina}) \tag{1}$$

s koeficientmi z poľa F; F sa nazýva základné pole.

Nech $S(L)$ je bližšie neurčený n-rozmerný priestor, ktorého body majú nehomogénne súradnice v istom rozšírení L poľa F. Pre systém rovníc

$$f_i(x_1,\dots,x_n)=0\ ,\quad i\in I \tag{2}$$

definujme dve množiny:

$$V_1=\left\{\,(y)=(y_1,\dots,y_n)\in S(L)\;\middle|\;f_i(y_1,\dots,y_n)=0\,,\ i\in I\,\right\}\subset S(L)\ ,$$
$$V_2=\left\{\,(z)=(z_1,\dots,z_n)\in S(L')\;\middle|\;f_i(z_1,\dots,z_n)=0\,,\ i\in I\,\right\}\subset S(L')\ ,$$

kde L' je nejaké rozšírenie poľa L a $S(L')$ je n-rozmerný priestor toho istého druhu ako $S(L)$, pričom nehomogénne súradnice bodov priestoru $S(L')$ sú z poľa L'.

Je zjavné, že $V_1 \subseteq V_2$.

Variabilita tejto inklúzie závisí od takých faktorov, ako je druh priestoru $S(L)$ (a $S(L')$), druh funkcií f_i, vzťah základného poľa F a jeho rozšírenia L, vzťah poľa L a jeho rozšírenia L'.

Ako extrémny problém možno sformulovať úlohu nájsť také minimálne rozšírenie T poľa F, že v priestore $S(T)$ sú všetky korene sústavy rovníc (2). V tomto prípade množina

$$V = \left\{ (v) = (v_1, \ldots, v_n) \in S(T) \;\middle|\; f_i(v_1, \ldots, v_n) = 0\,,\ i \in I \right\} \subset S(T)$$

je maximálnou množinou v každom reťazci

$$V_1 \subseteq V_2 \subseteq \cdots \subseteq V$$

a pre každé rozšírenie T' poľa T a priestor $S(T')$ pre množinu

$$V' = \left\{ (w) = (w_1, \ldots, w_n) \in S(T') \;\middle|\; f_i(w_1, \ldots, w_n) = 0\,,\ i \in I \right\} \subset S(T')$$

platí $V' = V$.

Krajným prípadom vzťahu poľa koeficientov F a poľa súradníc L je rovnosť $F = L$ týchto polí. Toto je najčastejšia situácia zadania základného poľa. Potreba jeho rozšírenia sa spravidla vyskytne ako aktuálna úloha v určitom štádiu riešenia sústavy rovníc (2).

Špeciálny prípad nastane, keď sa vo *všetkých* sústavách rovníc tvaru (2) pripúšťajú len *algebrické* rovnice, t.j. všetky funkcie f_i sústavy (1) sú polynomické. Podľa Hilbertovej vety o báze ideálu v noetherovskom okruhu možno sústavu (2) redukovať na ekvivalentnú konečnú sústavu algebrických rovníc

$$g_i(x_i, \ldots, x_n) = 0\,, \quad i = 1, \ldots, r\ . \tag{2'}$$

Všetky jej korene, ktorých môže byť konečný počet alebo nekonečne mnoho, adjungované k základnému poľu F vytvárajú algebrické rozšírenie K poľa F, v ktorom sú súradnice všetkých koreňov sústavy (2'). Priestor $S(K)$ obsahuje všetky body, ktoré sú koreňmi sústavy (2').

Pre každú sústavu (2') algebrických rovníc určite obsahuje súradnice všetkých jej koreňov algebrický uzáver $\overline{F}$ základného poľa F, t.j. minimálne algebricky uzavreté pole obsahujúce pole F.

Ak je teda K minimálne pole obsahujúce súradnice všetkých koreňov sústavy (2') s koeficientmi zo základného poľa F, existuje nasledovný reťazec polí:

$$F \subseteq K \subseteq \overline{F} \tag{3}$$

—⋆——⋆——⋆——⋆—

Vo výučbe geometrie na strednej aj vysokej škole rolu základného poľa zastáva spravidla pole reálnych čísel $\mathbb{R}$. Eudoxovou-Archimedovou axiómou a Cantorovou axiómou (alebo ekvivalentne Dedekindovou axiómou) sa dospieva k ekvivalencii priamky euklidovskej roviny alebo euklidovského priestoru s poľom reálnych čísel. (Axiómy sú nezávislé od axiómy rovnobežnosti, takže spojitosť je vlastnosťou priamky aj v neeuklidovskej geometrii.) Pole reálnych čísel sa stáva základným poľom budovania geometrie v rovine a priestore, čo sa presvedčivo dokumentuje na výstavbe základných pojmov analytickej geometrie. Avšak už elementárna teória kužeľosečiek prezentovaná analytickou metódou poukazuje na nedostatočnosť poľa reálnych čísel ako základného poľa priestoru. Klasifikácia vzájomnej polohy priamky a regulárnej kužeľosečky vedie aj k prípadu nesečnice, ktorý je algebricky reprezentovaný kvadratickou rovnicou s imaginárnymi koreňmi. Známy a bezproblémový algebrický výsledok nemá geometrickú interpretáciu, na ktorú by stačilo jednoduché pripustenie imaginárnych čísel ako súradníc bodov, t.j. rozšírenie základného poľa reálnych čísel na pole komplexných čísel. Tento proces rozšírenia sa v takýchto alebo podobných súvislostiach niekedy realizuje až vo vysokoškolskej výučbe (niekde a niekedy sa aj tam zastane na prahu zavádzania komplexných čísel ako súradníc) a nazýva sa *komplexifikácia* reálneho priestoru. Práve istá náhodilosť pri voľbe motívov a dôvodov komplexifikácie pôsobí často zahmlievajúco pri osvojovaní si tohto pojmu študentmi. Na vysokoškolskej úrovni matematického vzdelávania by analytická metóda budovania priestoru nad poľom komplexných čísel analógiou so známou metódou výstavby teórie reálneho priestoru nemala vzbudzovať prílišné didaktické obavy a metodické problémy ani u učiteľov, ani u študentov.

Vzťah medzi poľom reálnych čísel $\mathbb{R}$ a poľom komplexných čísel $\mathbb{C}$ je v porovnaní so všeobecnou schémou triviálny: pole komplexných čísel je *jednoduchým algebrickým rozšírením* poľa reálnych čísel; vzniká adjunkciou jediného prvku – imaginárnej jednotky i:

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}[\,i\,] = \mathbb{R}(\,i\,) \cong \mathbb{R}[X]/(X^2+1) = \mathbb{R}\langle 1, \mathrm{i}\rangle$$

Význam jednotlivých symbolov:

$\mathbb{R}[\,i\,] = \left\{\, a + b\mathrm{i} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \,\right\}$

$\mathbb{R}(\,i\,) = \left\{\, \frac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}} \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathbb{R},\; c + d\mathrm{i} \neq 0 \right\}$

$\mathbb{R}\big[X\big]/(X^2+1)$ – faktorový okruh oblasti integrity polynómov neurčitej X nad poľom reálnych čísel podľa ideálu (X^2+1)

(Hlavný ideál $(X^2+1) \subset \mathbb{R}[X]$ je prvoideál, ktorý je maximálnym ideálom, preto faktorový okruh $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$ je pole.)

$\mathbb{R}\langle 1, \mathrm{i}\rangle$ je $\mathbb{R}$-modul generovaný nad $\mathbb{R}$ prvkami 1 a i; násobenie komplexných čísel robí z tohto modulu $\mathbb{R}$-algebru.

Pole komplexných čísel $\mathbb{C}$ je zároveň algebricky uzavreté, takže celý možný reťazec (3) sa redukuje na inklúziu

$$\mathbb{R} \subsetneqq \mathbb{C}\;;$$

je tu $\mathbb{C} = L$ (akékoľvek vlastné algebrické rozšírenie poľa $\mathbb{R}$) aj $\mathbb{C} = \overline{\mathbb{R}}$ (algebrický uzáver poľa $\mathbb{R}$)

Chápanie klasických priestorov a grúp ich transformácií

Kleinova koncepcia priestoru ako bodovej množiny s príslušnou „prirodzenou“, s priestorom vnútorne zviazanou grupou transformácií, dobudovaná do dnešnej podoby, spresnila a sprehľadnila hierarchiu priestorov a ich grúp transformácií, ako aj potenciálne vzťahy inklúzie medzi nimi. Často sa uvádza, dokonca v knižných publikáciách, že grupa projektívnych transformácií PG, grupa afinných transformácií AG a grupa metrických transformácií MG toho istého priestoru tvoria reťazec grúp (a inklúzií)

$$PG \supsetneqq AG \supsetneqq MG$$

Toto tvrdenie je korektné len za určitých podmienok. Nevyhnutným predpokladom možnej inklúzie grúp transformácií je ich operovanie na tej istej bodovej množine, čo apriorne nie je splnené. Ak je afinná grupa vnútornou grupou afinného priestoru, ktorý je vlastnou podmnožinou projektívneho priestoru, a to doplnkom pevnej nadroviny v projektívnom priestore, je táto grupa len *izomorfná* s podgrupou projektívnych transformácií projektívneho priestoru, ktoré ponechávajú pevnú nadrovinu invariantnou. Je zrejmé, že pri tomto chápaní nemožno hovoriť o inklúzii afinnej grupy v projektívnej grupe, ale len o *monomorfnom zobrazení* prvej grupy do druhej.

Na vyjasnenie relácií medzi priestormi a ich vnútornými grupami je užitočné krátko sa zmieniť o geometrických a číselných invariantoch jednotlivých grúp transformácií.

Nech F je základné pole, pod ktorým sa v ďalšom bude rozumieť pole reálnych čísel $\mathbb{R}$ alebo pole komplexných čísel $\mathbb{C}$. Tam, kde rozdiel medzi týmito poľami bude v úvahách podstatný, sa výber základného poľa výslovne upresní.

1. Nech $P^n(F)$ je n-rozmerný projektívny priestor nad poľom F a nech $\mathrm{PG}(P^n(F)) = \mathrm{PG}$ je grupa projektívnych transformácií (kolineácií) priestoru $P^n(F)$ (projektívna grupa).

Ku každej projektívnej transformácii z PG prislúcha určité zoskupenie lineárnych podpriestorov projektívneho priestoru, ktoré sú vzhľadom na túto transformáciu invariantné. Každé takéto zoskupenie obsahuje aspoň jeden bod a aspoň jednu nadrovinu. Neexistujú však podpriestory, ktoré by boli invariantné vzhľadom na *všetky* transformácie z grupy PG. Jediným číselným invariantom vzhľadom na projektívnu grupu PG je *dvojpomer* usporiadanej štvorice prvkov ľubovoľného jednoparametrického útvaru. (Invariantnosť dvojpomeru znamená: dvojpomer usporiadanej štvorice prvkov sa rovná dvojpomeru štvorice obrazov týchto prvkov v každej transformácii z grupy PG.)

2. Množina všetkých transformácií z grupy PG, vzhľadom na ktoré je invariantná pevná nadrovina t priestoru $P^n(F)$, je podgrupa grupy PG. Označme ju $(\mathrm{AG})_t$. Otvorená podmnožina $U_t = P^n(F) \setminus \{t\}$ projektívneho priestoru $P^n(F)$ je ekvivalentná s n-rozmerným afinným priestorom $A^n(F)$ nad poľom F a grupa $(\mathrm{AG})_t$ je izomorfná s grupou AG všetkých afinných transformácií priestoru $A^n(F)$ (afinná grupa). Skrátene možno písať:

$$(U_t, (\mathrm{AG})_t) \xrightarrow{\sim} (A^n(F), \mathrm{AG})$$

Vzťah štrukturálnej (grupovej) inklúzie platí len pre grupy $(\mathrm{AG})_t$ a PG:

$$(\mathrm{AG})_t \subset \mathrm{PG}.$$

Pre afinnú grupu AG existuje injektívne zobrazenie do grupy PG zachovávajúce štruktúru, t.j. monomorfizmus

$$\mathrm{AG} \hookrightarrow \mathrm{PG}\ ,$$

ktorým sa grupa AG izomorfne zobrazuje na vlastnú podgrupu $(\mathrm{AG})_t$ grupy PG. Len v tomto zmysle, t.j. prostredníctvom izomorfizmu

$$(A^n(F), \mathrm{AG}) \xrightarrow{\sim} (U_t, (\mathrm{AG})_t)$$

je opodstatnené a korektné tvrdenie, že

a) afinný priestor je podmnožinou projektívneho priestoru
b) afinná grupa je podgrupou projektívnej grupy
c) geometrickým invariantom afinnej grupy je nevlastná nadrovina rozšíreného afinného priestoru.

(Tu sa použilo: $(U_t \cup \{t\}) = \overline{A}_t^n(F)$ je rozšírený afinný priestor nad poľom F utvorený rozšírením afinného priestoru o nevlastnú nadrovinu t.)

Všeobecne známy je fakt, že jediným číselným invariantom vzhľadom na grupu afinných transformácií je deliaci pomer usporiadanej trojice bodov na priamke. (Invariantnosť dvojpomeru je dôsledkom tejto vlastnosti.)

3. V pokračujúcej špecializácii projektívneho priestoru, ktorou je (rozšírený) *ekviformný priestor*, sa po prvý raz prejavuje podstatný význam základného poľa. Zavedenie kolmosti priamok, čo je ekvivalentné so zavedením *veľkosti uhla* (stručne: uhla), vedie k odhaleniu odlišnosti geometrických invariantov grupy ekviformných transformácií v závislosti od toho, či základným poľom je pole reálnych čísel alebo pole komplexných čísel. *Absolútom* priestoru nad poľom reálnych čísel je *absolútna polarita* vo význačnej (nevlastnej) rovine priestoru, zatiaľ čo absolútom priestoru nad poľom komplexných čísel je *absolútna* $(n-1)$-*nadkvadrika* vo význačnej (nevlastnej) nadrovine tohto priestoru ako množina *samozdružených* bodov absolútnej polarity v tejto nadrovine. Formálne zhodné analytické vyjadrenie v reálnom priestore definuje prázdnu množinu.

Pre (rozšírenú) ekviformnú rovinu ako špecializovanú rozšírenú afinnú rovinu to znamená: Absolútom reálnej ekviformnej roviny je *absolútna involúcia* na nevlastnej priamke (ktorá nemá samodružné body), absolútom komplexnej ekviformnej roviny je (neusporiadaná) dvojica *kružnicových bodov* tejto roviny; tieto body sú samodružnými bodmi absolútnej involúcie.

Poznámka. Ak má nevlastná priamka rozšírenej ekviformnej roviny homogénnu rovnicu $x_0 = 0$ a absolútna involúcia na nej je daná homogénnou rovnicou

$$x_1 x_1' + x_2 x_2' = 0 \ ,$$

je množina samodružných bodov tejto involúcie nad $\mathbb{R}$ prázdna a nad $\mathbb{C}$ pozostáva z dvoch bodov s reprezentantmi $(0, 1, \mathrm{i})$ a $(0, 1, -\mathrm{i})$. To sú kružnicové body.

Číselným invariantom ekviformnej grupy je *veľkosť uhla* (nazývaná stručne aj len slovom uhol).

Pri uvedenom zadaní projektívneho priestoru $P^n(F)$, afinného priestoru $A^n(F)$ (pre ktorý $\overline{A}_t^n(F) = P^n(F)$) a ekviformného priestoru $S^n(F)$ (pre ktorý $\overline{S}^n(F) = P^n(F)$), platia pre tieto priestory a k nim príslušné grupy PG (projektívna grupa), AG (afinná grupa) a SG (ekviformná grupa) reťazce

$$P^n(F) \supsetneqq A^n(F) = S^n(F)$$

$$PG \supsetneqq AG \supsetneqq SG$$

4. Zavedenie metrických transformácií na priestore $S^n(F)$ ako unitárnych ekviformných transformácií znamená, že geometrickým invariantom grupy metrických transformácií zostáva naďalej absolút ekviformného priestoru a číselným invariantom je *vzdialenosť* dvoch bodov. Pri zavedení euklidovskej metriky formulou

$$d(P, P') = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i' - x_i)\overline{(x_i' - x_i)}}$$

pre vzdialenosť bodov $P = (x_1, \dots, x_n)$, $P' = (x_1', \dots, x_n')$, je grupa centrálnych metrických (euklidovských) transformácií (s invariantným začiatkom sústavy súradníc) izomorfná s grupou ortogonálnych matíc stupňa n.

Euklidovský priestor $E^n(F)$ a jeho grupa transformácií EG (ktorá je priamym súčtom grupy centrálnych metrických transformácií a grupy posunutí) doplňujú predchádzajúce reťazce na reťazce

$$P^n(F) \supset A^n(F) = S^n(F) = E^n(F)$$

$$PG \supsetneqq AG \supsetneqq SG \supsetneqq EG$$

Poznámka 1. Grupy AG, SG, EG treba chápať ako grupy izomorfné s grupami operujúcimi na rozšírených priestoroch $\overline{A}_t^n(F)$, $\overline{S}^n(F)$, $\overline{E}^n(F)$.

Poznámka 2. V aplikáciách sa najčastejšie pracuje s priestorom $\overline{E}^n(F)$ ako špeciálnym modelom projektívneho priestoru $P^n(F)$, pričom na $\overline{E}^n(F)$ operujú všetky tri grupy AG, SG, EG. V záujme exaktnosti však treba dbať na metodické rozlišovanie povahy transformácií.

Úloha základného poľa v klasifikácii kužeľosečiek a kvadratických plôch

Algebrickým základom klasifikácie kužeľosečiek v projektívnej rovine, resp. kvadratických plôch v trojrozmernom projektívnom priestore je uvedenie ternárnej, resp. kvaternárnej kvadratickej formy na kanonický tvar.

Všeobecne kvadratickú formu $n+1$ neurčitých

$$f(X) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_{ij}x_i x_j \ , \qquad a_{ij} \in F \ , \quad a_{ij} = a_{ji} \ , \tag{4}$$

a) nad poľom $\mathbb{C}$ (t.j. $F = \mathbb{C}$) možno uviesť (konečným počtom lineárnych transformácií) na tvar

$$f(X) = \overline{f}(Y) = \sum_{i=0}^{d} Y_i^2 \ , \tag{5}$$

kde $d+1$ je hodnosť matice $A = (a_{ij})$, nazývaná aj hodnosť kvadratickej formy f;

b) nad poľom $\mathbb{R}$ (t.j. $F = \mathbb{R}$) možno uviesť na tvar

$$f(X) = \overline{f}(Y) = \sum_{i=0}^{r} Y_i^2 - \sum_{i=r+1}^{d} Y_i^2 \ , \tag{5'}$$

kde $d+1$ je hodnosť matice $A = (a_{ij})$ (t.j. hodnosť kvadratickej formy).

Tvary (5), (5') sa nazývajú kanonické tvary kvadratickej formy.

Číselné charakteristiky $d+1$, resp. $d+1$, $r+1$ sú invariantné vzhľadom na regulárne lineárne transformácie. Výsledok (5') spolu s poslednou vetou je tzv. Sylvestrov zákon zotrvačnosti kvadratickej formy.

Geometrická interpretácia:

Rovnica

$$f(X) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_{ij}x_i x_j = 0 \ , \quad a_{ij} \in F \ , \ a_{ij} = a_{ji} \ ,$$

je pre $n = 2$ rovnica kužeľosečky v projektívnej rovine $P^2(F)$ a pre $n = 3$ rovnica kvadriky (kvadratickej plochy, plochy druhého stupňa) v projektívnom priestore $P^3(F)$.

Číselné charakteristiky kvadratických foriem sa prenášajú na kužeľosečky a kvadratické plochy takto:

— hodnosť kvadratickej formy je hodnosť kužeľosečky (kvadratickej plochy) $f = 0$

— $|r+1-(d-r)| = |2r+1-d|$ je signatúra kužeľosečky (kvadratickej plochy) $f = 0$

To znamená:

1. Jediným projektívnym invariantom kužeľosečky (kvadriky) nad poľom komplexných čísel je jej hodnosť.
2. Jedinými projektívnymi invariantmi kužeľosečky (kvadriky) nad poľom reálnych čísel sú jej hodnosť a signatúra.

Tieto vety sú základom projektívnej klasifikácie kužeľosečiek a kvadrík nad poľom komplexných čísel, resp. nad poľom reálnych čísel.

Špecializáciou sa získa z projektívnej klasifikácie afinná klasifikácia, z afinnej klasifikácie metrická klasifikácia. Kanonické tvary afinných typov sa získavajú odhomogenizovaním rovníc projektívnych typov vzhľadom na nevlastnú priamku, resp. nevlastnú rovinu.

Úplná projektívna, afinná a metrická klasifikácia sa nachádza v priložených tabuľkách.

TYPY KUŽEĽOSEČIEK

I. Projektívna klasifikácia

C			**R**			
Hodnosť h	Kanonický tvar rovnice	Typ	Hodnosť h	Signatúra s	Kanonický tvar rovnice	Typ
h = 3	1. $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$	regulárna kužeľosečka	h = 3	s = 3	1.1. $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$	prázdna regulárna kužeľosečka
				s = 1	1.2. $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$	neprázdna regulárna kužeľosečka
h = 2	2. $x_0^2 + x_1^2 = 0$ t.j. $(x_0 + ix_1)(x_0 - ix_1) = 0$	singulárna kužeľosečka (dve rôzne priamky)	h = 2	s = 2	2.1. $x_0^2 + x_1^2 = 0$	singulárna kužeľosečka (jeden bod)
				s = 0	2.2. $x_0^2 - x_1^2 = 0$, t.j. $(x_0 + x_1)(x_0 - x_1) = 0$	singulárna kužeľosečka (dve (rôzne) priamky)
h = 1	3. $x_0^2 = 0$	singulárna kužeľosečka (dvojnásobná priamka)	h = 1	s = 1	3. $x_0^2 = 0$	singulárna kužeľosečka (dvojnásobná priamka)

II. Afinná klasifikácia

Kanonické tvary rovníc afinných typov vzniknú odhomogenizovaním kanonických tvarov rovníc projektívnych typov napr. vzhľadom na x_0. (V rovniciach kužeľosečiek, pre ktoré je významný dotyk so súradnicovou osou o_0 (rovnica $x_0 = 0$), sa použije pre projektívny prípad tvar $x_0 x_2 + x_1^2 = 0$. Odhomogenizácia sa vykoná opäť vzhľadom na x_0.)

Nad poľom reálnych čísel majú v kanonických tvaroch rovníc dôležitý význam znamienka členov. Pri rôznosti znamienok treba urobiť rôzne odhomogenizovania vzhľadom na neznáme, v ktorých sa štvorce v rovnici vyskytujú s rôznymi znamienkami.

Pri odhomogenizovaní označíme:

$$\frac{x_j}{x_i} = x \ , \qquad \frac{x_k}{x_i} = y \ , \quad \text{kde } j \neq i, \ k \neq i, \ j < k \ .$$

II. Afinná klasifikácia

C		R	
Kanonický tvar rovnice	Typ	Kanonický tvar rovnice	Typ
1.1 $x^2 + y^2 + 1 = 0$	regulárna stredová kužeľosečka	1.1.1 $x^2 + y^2 + 1 = 0$	prázdna regulárna kužeľosečka
		1.1.2 $x^2 + y^2 - 1 = 0$	elipsa
		1.1.3 $x^2 - y^2 - 1 = 0$	hyperbola
1.2 $x^2 + y = 0$	parabola	1.2 $x^2 + y = 0$	parabola
2.1 $x^2 + y^2 = 0$ t.j. $(x + iy)(x - iy) = 0$	dve rôznobežné priamky	2.1.1 $x^2 + y^2 = 0$	singulárna kužeľosečka (jeden bod)
		2.1.2 $x^2 - y^2 = 0$ t.j. $(x + y)(x - y) = 0$	dve rôznobežné priamky
2.2 $x^2 + 1 = 0$ t.j. $(x + i)(x - i) = 0$	dve rôznobežné priamky	2.2.1 $x^2 + 1 = 0$	prázdna singulárna kužeľosečka
		2.2.2 $x^2 - 1 = 0$ t.j. $(x + 1)(x - 1) = 0$	dve rovnobežné priamky
3. $x^2 = 0$	dvojnásobná priamka	3 $x^2 = 0$	dvojnásobná priamka

III. Metrická klasifikácia

C		R	
Kanonický tvar rovnice	Typ	Kanonický tvar rovnice	Typ
1.1.1 $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + 1 = 0$ $a \neq b, a \neq 0, b \neq 0$	regulárna stredová kužeľosečka (rôzna od kružnice)	1.1.1.1 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$ $a \neq 0, b \neq 0$	prázdna regulárna kužeľosečka
		1.1.1.2 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ $a \neq b, a \neq 0, b \neq 0$	elipsa
		1.1.1.3 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ $a \neq b, a \neq 0, b \neq 0$	hyperbola
1.1.2 $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{a} + 1 = 0$ $a \neq 0$	kružnica	1.1.2.1 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - 1 = 0$ $a \neq 0$	kružnica
		1.1.2.2 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} - 1 = 0$ $a \neq 0$	rovnoosová hyperbola
1.2 $2px^2 + y = 0,\ p \neq 0$	parabola	1.2 $2px^2 + y = 0,\ p \neq 0$	parabola
2.1 $ax^2 + by^2 = 0$ $a \neq 0, b \neq 0$	dve rôznobežné priamky	2.1.1 $a^2x^2 + b^2y^2 = 0$ $a \neq 0, b \neq 0$	singulárna kužeľosečka (jeden bod)
		2.1.2 $a^2x^2 - b^2y^2 = 0$ $a \neq 0, b \neq 0$	dve rôznobežné priamky
2.2 $x^2 + a = 0,\ a \neq 0$	dve rovnobežné priamky	2.2.1 $x^2 + a^2 = 0,\ a \neq 0$	Prázdna singulárna kužeľosečka
		2.2.2 $x^2 - a^2 = 0,\ a \neq 0$	dve rovnobežné priamky
3. $x^2 = 0$	dvojnásobná priamka	3 $x^2 = 0$	dvojnásobná priamka

TYPY KVADRÍK

I. Projektívna klasifikácia

C			R			
Hodnosť h	Kanonický tvar rovnice	Typ	Hodnosť h	Signatúra s	Kanonický tvar rovnice	Typ
$h = 4$	1. $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$	regulárna kvadrika	$h = 4$	$s = 4$	1.1. $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$	prázdna regulárna kvadrika
				$s = 2$	1.2. $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$	regulárna nepriamková kvadrika
				$s = 0$	1.3 $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$	regulárna priamková kvadrika
$h = 3$	2. $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$	(kvadratická) kužeľová plocha	$h = 3$	$s = 3$	2.1. $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$	singulárna kvadrika (jeden bod)
				$s = 1$	2.2 $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$	(kvadratická) kužeľová plocha
$h = 2$	3. $x_0^2 + x_1^2 = 0$	dve (rôzne) roviny	$h = 2$	$s = 2$	3.1. $x_0^2 + x_1^2 = 0$	singulárna kvadrika (jedna priamka)
				$s = 0$	3.2. $x_0^2 - x_1^2 = 0$	dve (rôzne) roviny
$h = 1$	4. $x_0^2 = 0$	dvojnásobná rovina	$h = 1$	$s = 1$	4. $x_0^2 = 0$	dvojnásobná rovina

II. Afinná klasifikácia

C		R	
Kanonický tvar rovnice	Typ	Kanonický tvar rovnice	Typ
1.1. $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$	regulárna stredová kvadrika	1.1.1. $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$	prázdna regulárna kvadrika
		1.1.2. $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$	elipsoid
		1.1.3. $x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$	dvojdielny hyperboloid
		1.1.4. $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$	jednodielny hyperboloid
1.2 $x^2 + y^2 + z = 0$	paraboloid	1.2.1. $x^2 + y^2 + z = 0$	eliptický paraboloid
		1.2.2. $x^2 - y^2 + z = 0$	hyperbolický paraboloid
2.1. $x^2 + y^2 + z^2 = 0$	(kvadratická) kužeľová plocha	2.1.1. $x^2 + y^2 + z^2 = 0$	singulárna kvadrika (jeden bod)
		2.1.2. $x^2 + y^2 - z^2 = 0$	(kvadratická) kužeľová plocha
2.2. $x^2 + y^2 + 1 = 0$	neparabolická valcová plocha	2.2.1. $x^2 + y^2 + 1 = 0$	prázdna singulárna kvadrika
		2.2.2. $x^2 + y^2 - 1 = 0$	eliptická valcová plocha
		2.2.3. $x^2 - y^2 - 1 = 0$	hyperbolická valcová plocha
2.3. $x^2 + y = 0$	parabolická valcová plocha	2.3. $x^2 + y = 0$	parabolická valcová plocha
3.1. $x^2 + y^2 = 0$	rôznobežné roviny	3.1.1. $x^2 + y^2 = 0$	singulárna kvadrika (priamka)
		3.1.2. $x^2 - y^2 = 0$	rôznobežné roviny
3.2. $x^2 + 1 = 0$	rovnobežné roviny	3.2.1. $x^2 + 1 = 0$	prázdna singulárna kvadrika
		3.2.2. $x^2 - 1 = 0$	rovnobežné roviny
4.1. $x^2 = 0$	dvojnásobná rovina	4.1. $x^2 = 0$	dvojnásobná rovina

III. Metrická klasifikácia

C		R	
Kanonický tvar rovnice	**Typ**	**Kanonický tvar rovnice**	**Typ**
1.1.1 $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}+1=0$ $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ $a \neq b \neq c \neq a$	trojosová (stredová) regulárna kvadrika	1.1.1.1 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+1=0$ $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$	prázdna regulárna kvadrika
		1.1.1.2 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ $a \neq b \neq c \neq a$	trojosový elipsoid
		1.1.1.3 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0$ $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ $a \neq b \neq c \neq a$	trojosový dvojdielny hyperboloid
		1.1.1.4 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$ $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ $a \neq b \neq c \neq a$	trojosový jednodielny hyperboloid
1.1.2 $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{a}+\frac{z^2}{c}+1=0$ $a \neq 0, c \neq 0, a \neq c$	rotačná stredová regulárna kvadrika	1.1.2.1 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}+1=0$ $a \neq 0, c \neq 0$	prázdna rotačná regulárna kvadrika
		1.1.2.2 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ $a \neq 0, c \neq 0, a \neq c$	rotačný elipsoid
		1.1.2.3 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0$ $a \neq 0, c \neq 0$	rotačný dvojdielny hyperboloid
		1.1.2.4 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$ $a \neq 0, c \neq 0$	rotačný jednodielny hyperboloid
1.1.3 $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{a}+\frac{z^2}{a}+1=0$ $a \neq 0$	guľová plocha	1.1.3.1 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}+1=0$ $a \neq 0$	prázdna guľová plocha
		1.1.3.2 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}-1=0$ $a \neq 0$	(neprázdna) guľová plocha

1.2.1 $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+z=0$ $a\neq 0, b\neq 0, a\neq b$	(nerotačný) paraboloid	1.2.1.1 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+z=0$ $a\neq 0, b\neq 0, a\neq b$	eliptický paraboloid
		1.2.1.2 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+z=0$ $a\neq 0, b\neq 0, a\neq b$	hyperbolický paraboloid (nerovnoosový)
1.2.2 $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{a}+z=0$ $a\neq 0$	rotačný paraboloid	1.2.2.1 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+z=0$ $a\neq 0$	rotačný paraboloid
		1.2.2.2 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}+z=0$ $a\neq 0$	rovnoosový hyperbolický paraboloid
2.1.1 $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=0$ $a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0$ $a\neq b$	(kvadratická) kužeľová plocha	2.1.1.1 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ $a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0$ $a\neq b$	nerotačná kvadratická kužeľová plocha (jediný bod)
		2.1.1.2 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ $a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0$ $a\neq b$	(kvadratická) kužeľová plocha
2.1.2 $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{a}+\frac{z^2}{c}=0$ $a\neq 0, c\neq 0$	rotačná (kvadratická) kužeľová plocha	2.1.2.1 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ $a\neq 0, c\neq 0$	rotačná (kvadratická) kužeľová plocha – – jediný bod
		2.1.2.2 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ $a\neq 0, c\neq 0$	rotačná (kvadratická) kužeľová plocha
2.2.1 $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+1=0$ $a\neq 0, b\neq 0, a\neq b$	neparabolická valcová plocha	2.2.1.1 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0$ $a\neq 0, b\neq 0, a\neq b$	prázdna eliptická valcová plocha
		2.2.1.2 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ $a\neq 0, b\neq 0, a\neq b$	eliptická valcová plocha
		2.2.1.3 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$ $a\neq 0, b\neq 0$	hyperbolická valcová plocha
2.2.2 $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{a}+1=0$ $a\neq 0$	rotačná valcová plocha	2.2.2.1 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+1=0$ $a\neq 0$	prázdna rotačná valcová plocha
		2.2.2.2 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-1=0$ $a\neq 0$	rotačná valcová plocha
		2.2.2.3 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}-1=0$ $a\neq 0$	rovnoosová hyperbolická valcová plocha

2.3.1	$2px^2+y=0$, $p\neq 0$	parabolická valcová plocha	2.3.1	$2px^2+y=0$, $p\neq 0$	parabolická valcová plocha
3.1.1	$ax^2+by^2=0$, $a\neq 0, b\neq 0$	rôznobežné roviny	3.1.1.1	$a^2x^2+b^2y^2=0$, $a\neq 0, b\neq 0$	singulárna kvadrika (priamka)
			3.1.1.2	$a^2x^2-b^2y^2=0$, $a\neq 0, b\neq 0$	rôznobežné roviny
3.2.1	$x^2+a=0$, $a\neq 0$	rovnobežné roviny	3.2.1.1	$x^2+a^2=0$, $a\neq 0$	prázdna singulárna kvadrika
			3.2.1.2	$x^2-a^2=0$, $a\neq 0$	rovnobežné roviny
4.1.1	$x^2=0$	dvojnásobná rovina	4.1.1	$x^2=0$	dvojnásobná rovina

LITERATÚRA

[1] Berger, Marcel, *Géometrie I, II*, CEDIC, Paris, 1977, 1978, Nathan, Paris, 1977, 1978.

[2] Čižmár, Ján, *Grupy geometrických transformácií*, ALFA, Bratislava, 1984.

[3] Šalát, Tibor a kol., *Malá encyklopédia matematiky*, 3. vydanie, Obzor, Bratislava, 1981.