Ján Čižmár

Grupy geometrických transformácií v systéme vzdelávania učiteľov matematiky

In: Martina Bečvářová (editor); Jindřich Bečvář (editor): Matematika v proměnách věků. V. (Slovak). Praha: Matfyzpress, 2007. pp. 56–65.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/400886

GRUPY GEOMETRICKÝCH TRANSFORMÁCIÍ

v systéme vzdelávania učiteľov matematiky[1]

Ján Čižmár

Keď v októbri 1872 vtedy dvadsaťtriročný Felix Christian Klein, novonastupujúci profesor matematiky na filozofickej fakulte univerzity v Erlangene, napriek svojmu veku už známa a výrazná vedecká osobnosť, predkladal v duchu tradície zaužívanej na univerzite vedeckej rade fakulty a senátu univerzity svoj programovo orientovaný spis *Porovnávacie úvahy o novších geometrických bádaniach* (v origináli *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*), mala teória grúp za sebou štyri desaťročia svojej viac-menej latentnej existencie v podobe teórie grúp permutácií a krátke dva roky ako predzvesť neskoršieho mohutného prúdu teórie algebrických štruktúr. Neeuklidovská geometria, ktorej pripadla historická úloha priekopníka nového chápania objektov matematiky a jej teórií, bola rovesníčkou teórie grúp v oboch ohľadoch: aj časom svojho zrodu na rozhraní dvadsiatych a tridsiatych rokov 19. storočia, aj časom svojho uznania a vstupu do systému plnohodnotných matematických disciplín na konci šesťdesiatych a na začiatku sedemdesiatych rokov toho istého storočia. Nie je náhoda, že Klein si vydobyl historické zásluhy v oboch týchto oblastiach na samom začiatku svojej nadmieru úspešnej vedeckej a pedagogickej kariéry. Patril ku generácii mladých, vysoko nadaných a erudovaných vedeckých pracovníkov, nespútaných autoritou a predsudkami dvetisícročnej euklidovskej tradície a predstavami popredných vedcov 17. a 18. storočia o matematike ako prírodovednej disciplíne. Chápanie matematiky ako abstraktnej teórie ideálnych objektov – okolo r. 1870 viac intuitívne tušené než exaktne podložené – umožnilo Kleinovi nahliadnuť na tradičné i nové oblasti očami znalca nových štruktúr a nástrojov matematiky. Vo svetle konštituujúcich sa nových matematických disciplín, ku ktorým patrila o. i. projektívna geometria a algebra štruktúr, ostrejšie vystúpili aj kontúry stavby klasických oblastí, ako bola napríklad euklidovská geometria. Klein si povšimol, že v teórii geometrických priestorov, ktorých variantnosť jasne odhalila projektívna geometria ako dominantná geometrická disciplína 19. storočia, hrajú okrem základných geometrických pojmov a relácií, ktoré budujú štruktúru priestoru, rovnako významnú úlohu aj operácie, medzi ktorými majú výsadné postavenie transformácie. Dnes, z odstupu viac než jedného a štvrť storočia, je v retrospektíve jasne zreteľný fakt, ktorého si tak ostro možno nebol vedomý sám Klein: jeho koncepcia priestoru ako usporiadanej dvojice (M, G_M), kde M označuje bodový podklad a G_M jeho charakteristickú grupu transformácií, vystihuje jednotu a protikladnosť oboch zložiek priestoru, a to v bodovom podklade jeho zložku statickú a v grupe

[1] Článok bol vypracovaný s podporou grantu VEGA 1/3024/06.

transformácií zložku dynamickú, bez ohľadu na spôsob zavádzania základných pojmov – či už konštruktivistickým prístupom Euklida alebo formalistickým spôsobom Hilberta.

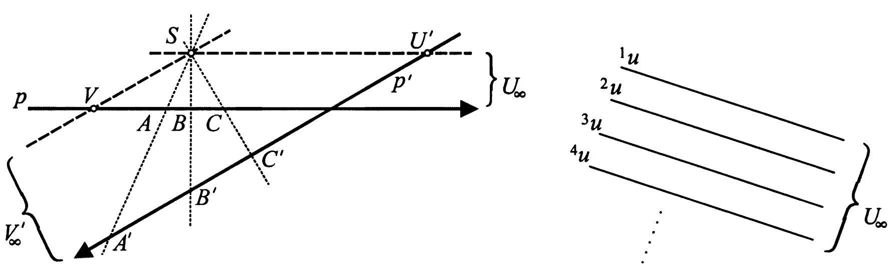
Klein načrtol program prestavby geometrie a klasifikácie geometrických priestorov podľa charakteristických grúp transformácií; formuloval tak v podstate program *globálnej geometrie.* (Jeho priateľ a súpútnik Sophus Lie otvoril cestu k podobnému zovšeobecneniu v oblasti *lokálnej geometrie* zavedením spojitých grúp.) Sám Klein sa o klasifikáciu klasických priestorov pokúsil; vypadnutie afinného priestoru a grupy afinných transformácií z tejto klasifikácie má pôvod v nerozvinutosti teórie týchto objektov v r. 1870 a nie v subjektívnom opomenutí, ku ktorému sa Klein r. 1921 sebakriticky doznal.

Klein bol jeden z nepočetných matematikov-vedcov, ktorí sa okolo prelomu 19. a 20. storočia priamo angažovali za didaktickú transpozíciu najnovších poznatkov matematickej vedy do obsahu vysokoškolskej a stredoškolskej výučby matematiky. Jeho organizátorská, spolková, propagačná a verejná činnosť na tomto poli, ako aj nadhľad, s ktorým sa sám pustil do plnenia tejto úlohy, mu vyniesli renomé uznávaného odborníka v didaktike matematiky, hoci sa konkrétnej tematike v tejto disciplíne v užšom zmysle nevenoval. Z jeho priamej iniciatívy bol r. 1905 v Merane vypracovaný program prestavby obsahu stredoškolského učiva matematiky, ktorý o. i. predvídal začlenenie tematiky grúp geometrických transformácií do učiva vyšších ročníkov gymnázií. Jedny z prvých učebníc matematiky, v ktorých bola táto tematika spracovaná, boli gymnaziálne učebnice aritmetiky od Bohumila Bydžovského a geometrie od Jana Vojtěcha z rokov 1911 – 1912. Oduševnenie pre túto koncepciu pomaly doznievalo v prvej polovici dvadsiatych rokov. V celom ďalšom dlhom období až do sedemdesiatych rokov sa grupy geometrických transformácií zo stredoškolských učebníc vytratili. (Tento fakt vôbec nie je prekvapujúci, keď sa vezme do úvahy, že abstraktná teória grúp sa u nás dostala do osnov vysokoškolskej algebry až v druhej polovici päťdesiatych rokov.)

Druhé obdobie rozkvetu zažila teória grúp geometrických transformácií v druhej polovici šesťdesiatych rokov a v sedemdesiatych rokoch, keď pod vplyvom francúzskej štrukturalistickej školy a najmä jej vedúcej osobnosti – Jeana Dieudonného – vlna nadšenia a oduševnenia pre štrukturalistickú matematiku zachvátila rozhodujúce pedagogické kruhy v matematike temer vo všetkých európskych krajinách. V niektorých z nich (napr. v bývalom ZSSR) sa štrukturalistická koncepcia s explicitne uvedeným pojmom grupy presadila už do učebníc základných škôl. Výsledok nemohol byť iný, než aký očakávali skeptici a realisti – formálne vedomosti a minimum užitočných praktických zručností. V súčasnosti sa grupová koncepcia geometrických transformácií v stredoškolskej geometrii neobjavuje. Nebolo by však na mieste likvidovať akýkoľvek náznak grupového pohľadu na geometrické transformácie v úlohách týkajúcich sa ich skladania, rozkladu, inverzných transformácií a pod. Nemá však v stredoškolskom učive miesto samoúčelný formalizmus s prípadným explicitným grupovým aparátom a exaktnou terminológiou. V porovnaní s mnohými zahraničnými učebnicami pomerne vyváženú realizáciu grupovej koncepcie v geometrii – okrem určitej poplatnosti formalizmu v označovaní – predstavuje učebnica planimetrie pre gymnáziá od autorov Hejného, Hanulu a Dekréta zo sedemdesiatych rokov (Hejný-Hanula-Dekrét: *Matematika pre gymnáziá 4*, SPN, Bratislava, 1978).

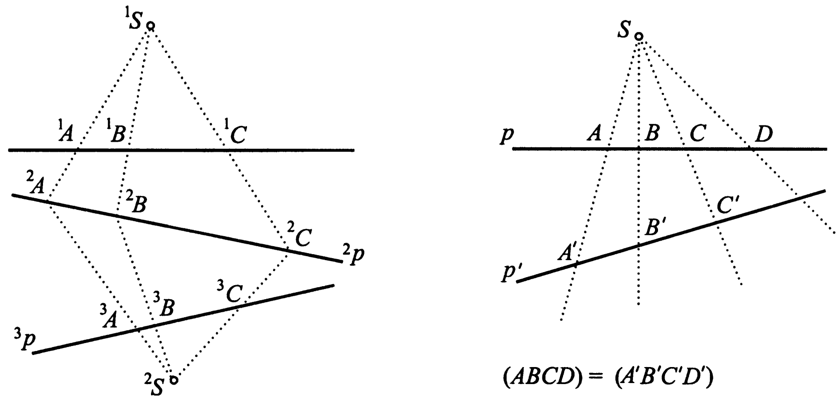
Ambientným priestorom geometrie v obsahu matematiky na základných a stredných všeobecnovzdelávacích i stredných odborných školách je reálny euklidovský priestor s grupou zhodnostných zobrazení a grupou podobnostných zobrazení. Štruktúra tohto priestoru sa postupne buduje od 1. stupňa základnej školy po najvyššie ročníky gymnázií a v koncepcii realizovanej v súčasnosti nedospieva k poznaniu možnosti axiomatickej výstavby. Zobrazenia sa explicitne začínajú vyučovať na 2. stupni základnej školy a podľa súčasných osnov štrukturálne hľadisko v ich výučbe celkom absentuje. Poučenie absolventov gymnázia o geometrických transformáciách zostáva ohraničené obzorom štruktúry, ktorú Klein nazval *hlavnou grupou*, čo je grupa podobnostných zobrazení euklidovského priestoru s vyznačenou podgrupou zhodnostných zobrazení. (Akokoľvek bol Klein geniálny matematik, v pojme hlavnej grupy sa odráža nedozretosť a nedonosenosť aplikácie idey striktnej klasifikácie grúp geometrických transformácií. V ďalšom vývoji sa klasifikácia sprecizovala a pojem hlavnej grupy bol prekonaný.) Žiaľ, aj mnohí učitelia matematiky na základných a stredných školách dlhoročnou praxou ustrnú na tejto úrovni, keď nie vždy aj vysoká škola im dala dostatočný teoretický nadhľad nad týmto učivom. V najlepšom prípade sa celej populácii študentov učiteľstva matematiky na učiteľských fakultách na Slovensku dostane ako vrchol vzdelávania v geometrii poučenie o axiomatickej výstavbe reálneho n-rozmerného afinného priestoru, ktoré sa zakrátko redukuje na analytický model. Špecializáciou tohto modelu sa po zavedení skalárneho násobenia v bázovom vektorovom priestore prechádza priamo k metrickému euklidovskému priestoru bez náležitého štúdia medzistupňa medzi afinným a metrickým priestorom, a to priestoru *ekviformného* (podobnostného), v ktorom je definovaná veľkosť uhla, nie však vzdialenosť bodov. V ďalšej výučbe geometrie sa náležitá pozornosť venuje štúdiu afinných, podobnostných a zhodnostných transformácií. Tejto koncepcii geometrického vzdelávania budúcich učiteľov matematiky s ohľadom na časové dispozície sotva možno niečo seriózne vyčítať, hádam len určitú disproporciu medzi rozsahom vyučovania analytickou a syntetickou metódou v neprospech metódy syntetickej. Kameňom úrazu a zdrojom častých študijných neúspechov býva pri tejto koncepcii náhly zvrat didaktickej metódy: študent, ktorý bol ako žiak základnej a strednej školy zvyknutý na induktívne postupy od prvkov k celku, od príkladov k zovšeobecneniam, od konkrétneho k abstraktnému, je naraz konfrontovaný s vysoko abstraktným pojmom, od ktorého sa len technicky značne komplikovanými špecializáciami deduktívne dopracúva ku konkrétnejším a bližšie známym objektom. Toto sú však prekonateľné ťažkosti, nevymykajúce sa z rámca náročnosti vysokoškolského štúdia, a väčšina študentov sa s nimi po čase vyrovná. Čo chýba nášmu systému vysokoškolského vzdelávania učiteľov matematiky, je absencia *logického* zavŕšenia prvej základnej línie zovšeobecňovania geometrických priestorov v pojme *projektívneho priestoru.* Najmenej sedem-osem desaťročí – naposledy v medzivojnovom období – sa tento pojem budúcim učiteľom matematiky prezentoval v predmete *projektívna geometria*, prednášanom syntetickou metódou. Nemožno, samozrejme, z akýchsi nostalgických sentimentov horliť za jeho znovuzavedenie do učebného plánu učiteľského štúdia matematiky. Obsah školskej matematiky na prelome 20. a 21. storočia sa značne líši od obsahu školskej matematiky nielen medzivojnovej doby, ale aj od obsahu spred tridsiatich-štyridsiatich rokov. Postavenie matematiky a jej aplikácií, praktické používanie a rastúci význam čoraz dokonalejšej počítačovej techniky nútia k adekvátnym zmenám aj v učebných plánoch a osnovách vysokoškolskej prípravy učiteľov matematiky. Časová dispozícia magisterského štúdia, ktorého trvanie nemožno z mnohorakých príčin neúmerne predlžovať, neumožňuje zaradiť do učebných plánov všetky predmety, ktorých prítomnosť vo vzdelávacích programoch učiteľov je žiadúca, či priam nevyhnutná pre primeranú kvalifikačnú úroveň učiteľov. Ukazuje sa čoraz jasnejšie potreba zaviesť do stabilizovaného, premysleného a starostlivo skoncipovaného systému *postpromočného* a *celoživotného vzdelávania* učiteľov štúdium predmetov nielen rozširujúceho, ale aj doplňujúceho vzdelania učiteľov o poznanie nových disciplín, kľúčových z hľadiska odborného profilu. O mieste projektívnej geometrie v teoretickej základni počítačovej geometrie a počítačovej grafiky sa dnes už nediskutuje; jej potreba je nesporná. Rovnako nepochybná je – hoci to momentálne nie všetci kompetentní uznávajú – aj v sústave základných teoretických predmetov učiteľského vzdelávania. A keďže sa do magisterského kurzu nevmestí, treba ju zaradiť do postpromočného vzdelávania.

Pre nadhľad učiteľa matematiky nad učivom geometrie základnej a strednej školy je dôležité osvojiť si Kleinov princíp klasifikácie geometrií a oboznámiť sa s jeho realizáciou vo forme základného reťazca geometrických priestorov a ich charakteristických grúp. Absolventovi vysokej školy s náležitou úrovňou abstraktného myslenia možno predostrieť tematiku v primeranej abstraktnosti a exaktnosti. Presnosť a efektivita vyžadujú použitie analytickej metódy; syntetický výklad v n-rozmernom priestore pre $n > 3$ nemá ani názornosť ani prehľadnosť. Didaktickou prekážkou pri analytickom zavádzaní *projektívneho priestoru* bývajú *homogénne súradnice* a hlavne ich počet. Zafixované návyky z používania nehomogénnych súradníc sú často bariérou na ceste k zovšeobecneniu. Okrem stimulujúcej motivácie (obr. 1) tu treba položiť dôraz na ovládnutie algoritmov, ktoré následne napomáha aj logickému osvojeniu pojmov a ich zautomatizovanému používaniu.



Obr. 1a, b

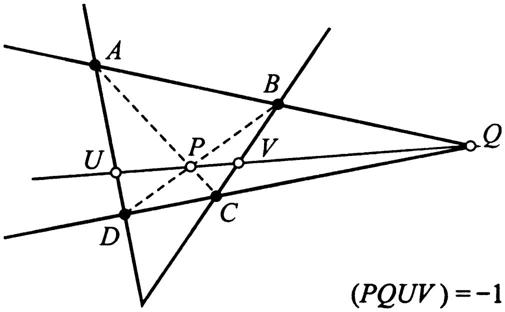
Štúdium vlastností projektívnych zobrazení (t.j. kolineácií) priestoru treba podporovať grafickými prostriedkami, ktorých názornosť má nezastupiteľnú úlohu. Práve jednoduchosť základnej operácie – projektívneho zobrazenia (obr. 2), založeného výlučne na relácii incidencie, a šírka teoretických výsledkov z neho odvoditeľných býva faktorom, ktorým sa spravidla natrvalo získa záujem študujúceho o projektívnu geometriu.



Obr. 2a, b

Pre adeptov, ktorí obvykle v tomto štádiu poznania projektívnej geometrie prejavia snahu a vytrvalosť v prenikaní k jej základom, býva fascinujúcim zážitkom, ako z pojmu harmonického dvojpomeru, založeného triviálne na incidencii (obr. 3), možno vybudovať ucelený systém geometrie s usporiadaním a spojitosťou, zahrňujúci v sebe potencialitu vybudovania takých teórií, ako je metrika, teória kužeľosečiek, koordinatizácia atď. Jednoduchým dôsledkom v tejto koncepcii je aj zistenie *invariantnosti dvojpomeru* vzhľadom na projektívne transformácie. Negatívnou črtou tejto – syntetickej – koncepcie budovania základov projektívnej geometrie je jej zdĺhavosť, ktorá môže odradiť od projektívnej geometrie aj vážnych záujemcov o jej štúdium. Z časových a metodických dôvodov je účelnejšie opierať sa o analytickú metódu, ktorej hlavným nedostatkom je nenázornosť, vedie však podstatne rýchlejšie ku kľúčovým výsledkom, ktoré sú východiskovým bodom ďalšieho rozvíjania teórie aj základom klasifikácie. Takéto najvýznamnejšie výsledky sú v projektívnom priestore tri:

1. Všetky projektívne transformácie vzhľadom na operáciu skladania zobrazení tvoria nekomutatívnu grupu.
2. Projektívny priestor nemá vzhľadom na túto grupu invariantné žiadne bodové podmnožiny. Jedinou incidentnostnou invariantnou reláciou je kolineárnosť bodov.
3. Jediným číselným invariantom projektívneho priestoru vzhľadom na grupu projektívnych transformácií je *dvojpomer*.

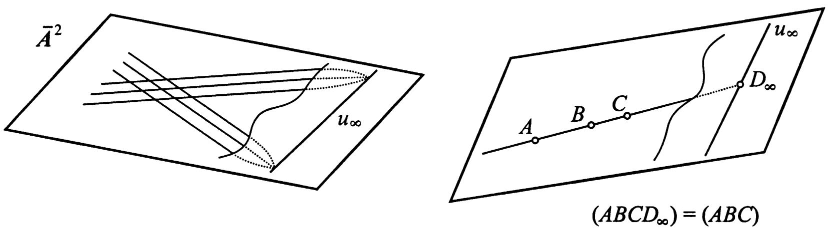


Obr. 3

Vychádzajúc z projektívneho priestoru sa afinný priestor a afinná grupa dostanú ako prirodzené špecializácie projektívneho priestoru a projektívnej grupy:

1. Vyznačí sa pevná nadrovina projektívneho priestoru a ukáže sa, že podmnožina všetkých projektívnych transformácií, v ktorých je nadrovina invariantná, tvorí grupu. To je afinná podgrupa projektívnej grupy vzhľadom na zvolenú nadrovinu. Doplnok tejto nadroviny v projektívnom priestore je afinný priestor, ktorého charakteristickou grupou operácií je uvedená afinná grupa. Afinný priestor a afinná grupa získané uvedenou špecializáciou strácajú charakter výlučnosti a stávajú sa relativizovanými objektmi, závislými od voľby nadroviny projektívneho priestoru. Metodickou výhodou tejto konštrukcie je možnosť používať podľa potreby a okolností vyznačenú nadrovinu a jej prvky.

2. Vyznačená nadrovina indukuje v afinnom priestore novú reláciu – *rovnobežnosť* (obr. 4a): čiastočne rovnobežnými, resp. totálne rovnobežnými sú podpriestory afinného priestoru, ktorých projektívne uzávery majú spoločný podpriestor, resp. spoločný podpriestor maximálneho možného rozmeru vo vyznačenej nadrovine.



Obr. 4a, b

Invariantnou množinou projektívneho priestoru vzhľadom na grupu afinných transformácií je vyznačená nadrovina. Invariantná množina afinného priestoru vzhľadom na grupu afinných transformácií je prázdna.

Incidentnostným *invariantom* afinného priestoru – samozrejme, okrem kolineárnosti – je relácia *rovnobežnosti*.

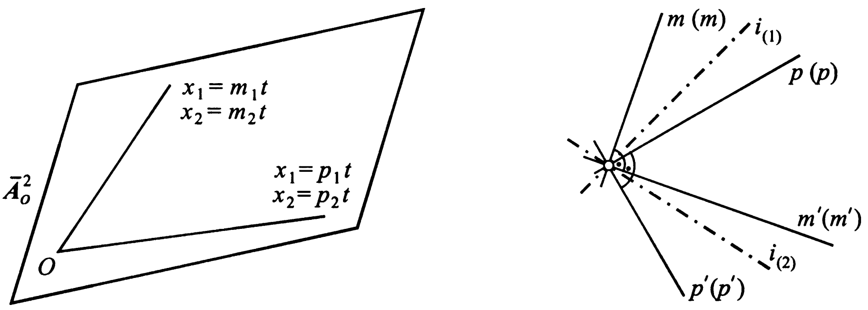
3. Číselným invariantom afinného priestoru vzhľadom na grupu afinných transformácií je (*deliaci*) *pomer* (obr. 4b). (Invariantnosť dvojpomeru je v afinnom priestore dôsledkom invariantnosti pomeru.)

Kľúčové postavenie z hľadiska pojmovej a technickej náročnosti v reťazci priestorov a ich charakteristických grúp má ekviformný priestor a ekviformná grupa. Ich objektívnu zložitosť a náročnosť potvrdzuje aj fakt, že sa v sústave kardinálnych pojmov geometrie objavili ako jedny z posledných až v prvom desaťročí 20. storočia. Spočívajú na pojme *uhla*, ktorý v axiomaticko-deduktívnej koncepcii aj v didaktickom systéme patrí k najkomplikovanejším pojmom geometrie. V analytickom stvárnení problematiky sa nepracuje s uhlom, ale s jeho *veľkosťou* v absolútnej, t.j. oblúkovej miere. A tu sa ukazuje, že

1) všeobecnosť definície uhla možno dosiahnuť len v komplexnej oblasti a
2) zavedenie veľkosti uhla je ekvivalentné so zavedením *kolmosti priamok*.

Použitie metód projektívnej geometrie a analytického aparátu je na riešenie oboch úloh nielen vhodné, ale aj nevyhnutné. Realizácia sa deje v niekoľkých krokoch:

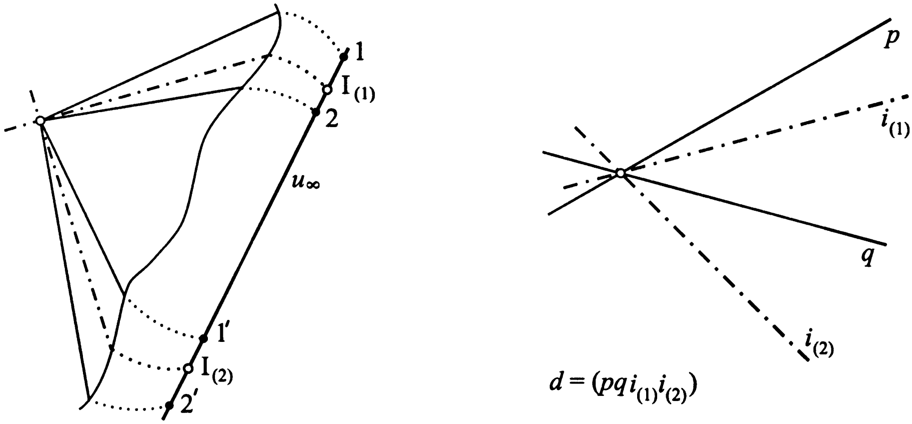
1. Definícia kolmosti dvoch osnov priamok v afinnom podpriestore projektívneho priestoru spôsobom analogickým s definíciou kolmosti dvoch vektorov vo vektorovom priestore (obr. 5a).



Obr. 5a, b

2. Definícia pravouhlej involúcie vo zväzku priamok a zistenie invariantných priamok tejto involúcie. Invariantné priamky – tzv. *izotropické priamky* (obr. 5b) danej roviny v danom bode sú *vždy imaginárne*, teda aj v prípade reálnej roviny (obr. 6a). Na tomto mieste je pre reálny priestor nevyhnutná *komplexifikácia*, t.j. doplnenie reálnych objektov imaginárnymi, a zároveň sa potvrdzuje nevyhnutnosť analytickej metódy.

3. Pre ľubovoľné dve priamky zväzku priamok sa definuje ich dvojpomer d s dvojicou (jednoznačne určených) izotropických priamok zväzku (obr. 6b). Dvojpomer d je projektívne invariantný.



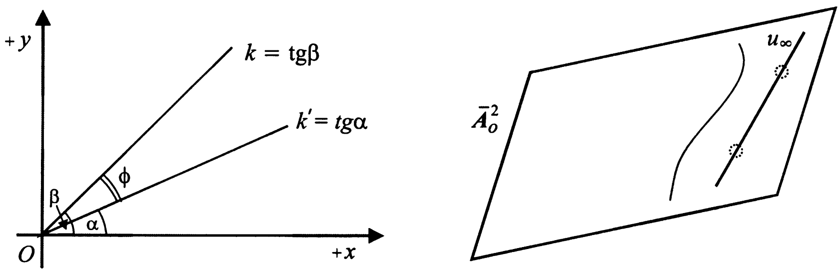
Obr. 6a, b

4. Veľkosť uhla φ dvoch priamok zväzku sa definuje formulou

$$\varphi = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{i} \cdot \log d$$

(log znamená prirodzený logaritmus). Táto definícia veľkosti uhla pochádzajúca od Laguerra je projektívne invariantná a v klasickej geometrii sa nazýva *projektívnou definíciou uhla.* Na upresnenie treba dodať dve poznámky:

1. Definícia sa nevzťahuje na ľubovoľné dve priamky projektívneho priestoru, ale len na priamky afinného priestoru s ortogonalitou.
2. Definícia nie je invariantná vzhľadom na grupu projektívnych transformácií, ale len vzhľadom na podgrupu grupy afinných transformácií afinného priestoru s ortogonalitou, ktoré transformujú izotropické priamky na izotropické (obr. 7b).



Obr. 7a, b

Posledne uvedená podgrupa je *ekviformná grupa* a ekvivalencia zavedenia kolmosti dvoch priamok a uhla (t.j. veľkosti uhla) dvoch priamok je z bodov $1-4$ a dodatkov $1-2$ zrejmá.

Dôkaz, že zúženie definície veľkosti uhla na reálnu rovinu je totožné s definíciou veľkosti uhla v nej, je záležitosť technickej rutiny (obr. 7a).

Didaktické komplikácie tejto koncepcie sú zjavné: aj pri zvládnutí štandardných metód projektívnej geometrie v reálnej oblasti pri zavedení imaginárnych elementov zlyháva predchádzajúca názornosť aj intuícia a nastupuje nevyhnutnosť vyrovnať sa rýdzo logickou a exaktnou cestou s novými didaktickými prekážkami. Samozrejme, možnosť modelovania komplexných priestorov viacrozmernými reálnymi priestormi tu stojí v úzadí k dispozícii, avšak zvládnutie týchto technických prostriedkov je samo osebe zložitejšie a časovo náročnejšie než prezentovaný postup.

V tomto článku reťazca vidím najväčšiu ťažkosť na ceste učiteľov k náležitému epistemologicko-historicko-didaktickému nadhľadu nad tematikou, ktorá je v programe základnej a strednej školy realizovaná ako učivo o uhloch, podobnosti a ich aplikáciách (goniometria, trigonometria).

Zvládnutie problematiky ekviformného priestoru a ekviformnej grupy uľahčuje, automaticky však neuhládza cestu k suverenite v tematike *metrického* priestoru a *izometrických* transformácií. Hlavný problém vyvoláva okolnosť, že ekviformná problematika nútila vyjsť s koordinatizáciou do oblasti komplexných čísel, ktorá je v niektorých aspektoch pre teóriu metrických priestorov nevhodná; napr. fakt, že pole komplexných čísel nie je lineárne usporiadané, znemožňuje definovať vzdialenosť dvoch bodov ako komplexné číslo, ak majú byť vzdialenosti podľa „veľkosti“ porovnateľné. Tento problém je preklenutý jednoduchým dôvtipným obratom: vo výraze pre vzdialenosť dvoch bodov v reálnom euklidovskom priestore sa štvorec rozdielu súradníc nahradí súčinom rozdielu a združeného komplexného čísla, čím sa odmocňovaný výraz stáva nezáporným reálnym číslom, a tým je vzdialenosť dvoch bodov v komplexnom priestore definovaná kompatibilne s definíciou v priestore reálnom. (Ide, samozrejme, o *parabolickú hermitovskú metriku komplexného priestoru*, ktorá sa v prípade reálneho priestoru zhoduje s metrikou euklidovskou.) Analogicky sa preformulujú aj podmienky ortogonality matíc izometrických transformácií. Jediná podmienka, ktorá potom odlišuje transformácie ekviformné (t.j. podobnostné) od transformácií izometrických (t.j. zhodnostných), t.j. rozdiel v module riadkového vektora matice transformácií, umožňuje chápať zhodnostné transformácie ako špecializácie transformácií podobnostných a grupu izometrií ako podgrupu ekviformnej grupy.

Stála prítomnosť vyznačenej nadroviny projektívneho priestoru pri skúmaní priestoru afinného, ekviformného a metrického a pri skúmaní ich charakteristických grúp je nezrušiteľná. (Samozrejme, možno pracovať s ekvivalentným modelom, ktorým je rozšírený afinný priestor.) Bez prítomnosti vyznačenej nadroviny nemožno totiž definovať bodové invarianty jednotlivých grúp – afinnej, ekviformnej a metrickej. V posledných dvoch prípadoch je bodovým invariantom grúp geometrických transformácií imaginárna nadkvadrika vyznačenej roviny, nazývaná absolútom priestoru. Hlbšie pochopenie charakteru tejto nadkvadriky je bez zautomatizovaného ovládania analytickej metódy a geometrickej interpretácie výsledkov pomocou nej získaných nemysliteľné.

A tu niekde je zdroj pochybností, či napriek zjavnej atraktivite a užitočnosti poznania uvedenej tematiky nebudú obavy z nadmerných technických ťažkostí u mnohých učiteľov silnejšie než príťažlivosť a potreba témy. Mnohé závisí od návykov samostatnej práce s literatúrou už počas magisterského štúdia. Nezastupiteľná je úloha vedúcich seminárov a vedúcich diplomových prác v osobnom kontakte so študentmi pri tvorbe návykov takého pracovného štýlu. Napriek neutešenej materiálnej situácii v rezorte školstva a progredujúcej pauperizácii učiteľského stavu u nás v porovnaní s okolitými krajinami je, našťastie pre národ, ešte stále dosť idealistov, ktorí povyšujú duchovné hodnoty nad bezprostredný hmotný osoh v nádeji, že raz príde čas, keď objektívne užitočná duševná práca, akou učiteľské pôsobenie nesporne je, zabezpečí svojim nositeľom keď už nie blahobytnú, tak aspoň slušnú a človeka dôstojnú existenciu. K nej patrí aj šanca a podmienky na vzdelávanie. Ak v ňom bude aktívna a úspešná aspoň taká časť našich žiakov a nasledovníkov, aká bola v minulosti pre naše stredoškolské učiteľstvo príznačná, bude to morálne zadosťučinenie našim snaženiam a závan nádeje pre generáciu našich vnukov.

LITERATÚRA

[1] Benz W., *Geometrische Transformationen*, Wissenschaftsverlag, Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich, 1992, ISBN 3-411-15071-8.

[2] Čižmár J., *Grupy geometrických transformácií*, ALFA, Bratislava, 1984.

[3] Hlavatý V., *Projektivní geometrie II*, Melantrich, Praha, 1945.

[4] Klein F., *Das Erlangen Programm*, Geest und Portig K.-G., Leipzig, 1974.

[5] Čižmár J., *Grupy geometrických transformácií (125 rokov Erlangenského programu)*, In: Proceedings of Seminars on Computational Geometry. SCG' 97, Kočovce 1997; STU, Bratislava, 1997.