Obr. 1 Abraham De Moivre (1667-1754).

ABRAHAM DE MOIVRE

Ivan Saxl, Lucia Ilucová

V roce 2004 uplynulo 250 let od smrti jednoho z nejvýznamnějších matematiků XVIII. století – Abrahama De Moivrea (1667-1754), a v letošním roce je to 340 let od jeho narození. De Moivreovy práce byly ve své době dobře známé a díky nim byl přijat za člena několika učených společností – britské Royal Society (1697), Berlínské akademie (1735)[1] i Francouzské akademie věd (1754). Jeho knihy vycházely v opakovaných vydáních a mezi jeho přátele patřily nejvýznamnější osobnosti, jako například Edmond Halley, Isaac Newton, Johann a Nikolaus Bernoulli, James Stirling a po dočasných neshodách i Pierre Rémond de Montmort. Nová vlna zájmu o De Moivreovu osobu se zdvihla ve XX. století, kdy díky pečlivějšímu čtení jeho prací bylo prokázáno, že mu náleží priorita v řadě významných poznatků a matematických postupů do té doby obecně přičítaných jiným a také po nich pojmenovaných.

Jestliže je De Moivre i dnes obecně známý, je to díky tomu, že jeho jméno nese důležitý vztah $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$. Toto pojmenování je však demonstrací Stiglerova zákona (Stigler, 1999), podle nějž žádný vědecký objev není pojmenován po svém původním objeviteli[2]. De Moivre tento vztah ve svých pracích sice používal a rozšířil tak jeho známost, ve výše uvedené formě jej však nikdy nenapsal. Slovní formulaci podal jako první François Viète (1540-1603) ve své práci *Angulares Sectiones* z roku 1570, spočetl k němu odpovídající tabulky pro $n = 2, 3, 4, 5$ a používal jej i v dalších pracích (podrobněji viz Schneider, 1968). Nynější forma vztahu i jeho důkaz jsou přičítány anglickému matematikovi a astronomovi Rogeru Cotesovi (1682-1716), exponenciální formu $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$, z níž De Moivreův vztah plyne automaticky, zavedl Leonhard Euler (1707-1783) v *Introductio in Analysin Infinitorum* (Lausanne 1648). Stiglerův zákon se však na De Moivreovi uplatňuje ještě dvakrát, neboť by správně po něm měla či mohla být nazvána dvě významná pravděpodobnostní rozdělení: Gaussovo (normální nebo také Gaussovo-Laplaceovo) a Poissonovo, která první odvodil jako limitní případy rozdělení binomického, popsal jejich vlastnosti a používal je[3].

Práce byla podpořena grantem GAČR č. 201/06/0302, grantem AV ČR IAA 100110502 a projekty MSM 0021620839 a AV0Z10190503.

[1] Jako *Societas Regia Scientiarum* byla založena roku 1700, od roku 1744 byl název Fridrichem II. změněn na *Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Prusse.*

[2] S. M. Stigler připouští, že zákon se vztahuje i na něj, protože za vše spjaté s jeho objevem vděčí americkému sociologovi R. K. Mertonovi (1910-2003).

[3] V knize Stigler (1999) je metodou nenáhodného výběru z literatury publikované v letech 1816 až 1976 zkoumán výskyt eponymického názvu normálního rozdělení s následujícími výsledky (symbol $[X]_{Y/Z}$ značí, že v rozmezí let X bylo eponymické označení v Y

Obr. 2 Johann Bernoulli (1667-1748).

zkoumaných knihách nalezeno Z-krát): $[1816-1884]_{17/2}$, $[1884-1917]_{21/8}$, $[1919-1939]_{19/9}$, $[1947-1976]_{19/9}$. Ve všech těchto případech se vyskytoval název Gaussovo nebo Gaussovo-Laplaceovo rozdělení. Laplaceovo jméno se objevilo poprvé v italské práci v roce 1920, poté převažuje v pracích francouzských.

Zdánlivě nejstarším zdrojem poznatků o De Moivreově životě je oslavná biografie *Eloge* přednesená v roce 1754 u příležitosti jeho zvolení za člena Francouzské akademie věd jejím sekretářem Grandjeanem de Fouchy (1707-1788). Tiskem však vyšla až v roce 1759 a Fouchy jako jeden ze zdrojů uvádí biografii (Maty, 1755), kterou napsal Matthew Maty (1718-1776), knihovník-asistent Britského musea v Londýně a pozdější sekretář Royal Society. Maty byl podobně jako De Moivre francouzským emigrantem z náboženských důvodů a blízce se s ním stýkal v posledních letech jeho života. De Moivreovy životopisné údaje lze nalézt také v biografické encyklopedii *La France Protestant* (1846-1859), kterou sestavili Eugene a Emil Haagovi.

Další biografie se objevují až ve XX. století. Karl Wollenschläger (1933) vydává De Moivreovu korespondenci s Johannem Bernoulli doplněnou o řadu údajů včetně soupisu jeho publikací a téměř zároveň vychází podrobný životopis od Helen M. Walkerové (1934). Rozsáhlou stať *Der Mathematiker Abraham de Moivre* založenou na své doktorské disertaci publikuje Ivo Schneider (1968). Francouzsky vyšla v poslední době biografie od Gilberta Maheuta (1988) publikovaná péčí Société des Sciences et Arts de Vitry-le-François v De Moivreově rodišti. Nejnověji se objevil překlad Matyho práce do angličtiny s neobyčejně rozsáhlým poznámkovým aparátem zpochybňujícím resp. blíže osvětlujícím některé biografické údaje předchozích publikací – Bellhouse a Genest (2006).

V knihách o historii teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky je De Moivreovi vesměs věnována velká pozornost. Uveďme alespoň ty nejdůležitější. Klasickým dílem je Todhunterova *Mathematical Theory of Probability* (1865), mnoho De Moivreových výsledků je zachyceno také ve třetím svazku rozsáhlých Cantorových *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* (1898). Patří mu také jedna kapitola v knize F. N. Davidové *Games, Gods and Gambling* (1962), obsahující i anglický Dodatek *Approximatio* z třetího vydání De Moivreovy *The Doctrine of Chances* (1756)[4]. Rozbor a diskuse De Moivreových výsledků vztahujících se ke statistice je v knize S. M. Stiglera (1986) a velmi detailní zpracování této problematiky je v *History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750* od A. Halda (2003).

K přímému studiu De Moivreova díla je běžně dostupné vícekrát reprintované 3. vydání *The Doctrine of Chances* z roku 1756 (Amer. Math. Soc., 2001) obsahující jak poslední verzi Dodatku *Approximatio*, tak *Annuities on Lives*. K dispozici je také anglický překlad práce *De Mensura Sortis* od Bruce McClintocka s podrobným komentářem A. Halda (1984).

Příspěvek byl původně napsán k výročí 250 let od De Moivreova úmrtí a přednesen na 25. mezinárodní konferenci historie matematiky ve Velkém Meziříčí; jeho část zazněla také na konferenci PRASTAN 2005 (Saxl, 2005). Je věnován jednak okolnostem pozdního uznání De Moivreova prvenství v objevení normálního rozdělení jako limity rozdělení binomického, jednak jeho málo známé korespondenci s Johannem Bernoulli.

[4] Na internetové adrese `http://www.york.ac.uk/depts/maths/histstat/demoivre.pdf` je dostupná (ke dni 20. 1. 2007) kratší verze Dodatku připojená k druhému vydání *The Doctrine of Chances* (1738).

THE

DOCTRINE

OF

CHANCES:

OR,

A METHOD of Calculating the Probabilities
of Events in PLAY.

THE THIRD EDITION,
Fuller, Clearer, and more Correct than the Former.

By A. DE MOIVRE,
Fellow of the ROYAL SOCIETY, *and Member of the* ROYAL ACADEMIES
OF SCIENCES *of* Berlin *and* Paris.

LONDON:
Printed for A. MILLAR, in the *Strand.*
MDCCLVI.

Obr. 3 Titulní stránka posmrtného vydání *The Doctrine of Chances* z roku 1756.

Tato korespondence byla letech 1704 až 1714 vedena dvěma účastníky prioritního sporu mezi Newtonem a Leibnizem stojícími na opačných stranách. Obráží také historické okolnosti provázející vznik diferenciálního a integrálního počtu. V poslední části jsou připomenuty De Moivreovy výsledky z teorie pravděpodobnosti i jejich aplikace na hry, a je ukázáno, že zavedl i používal také další důležitá diskrétní a spojitá pravděpodobnostní rozdělení.

TEORIE PRAVDĚPODOBNOSTI PŘED DE MOIVREM

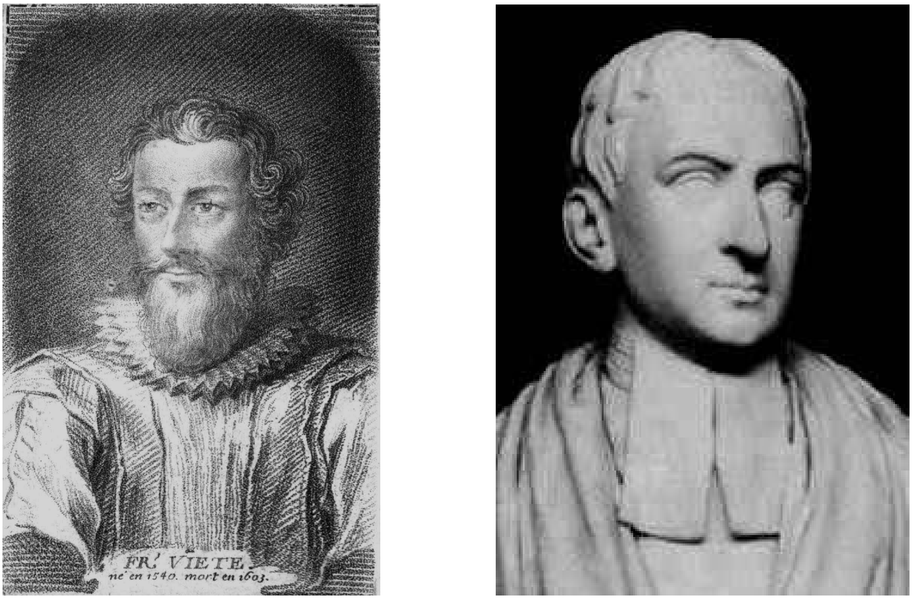
Za počátek teorie pravděpodobnosti je obecně považována výměna dopisů mezi Pierrem Fermatem (1601-1665) a Blaisem Pascalem (1623-1662) z roku 1654. Zabývala se tehdy slavnou, již dvě až tři století neúspěšně řešenou úlohou o rozdělení sázky. O rok později přijíždí do Paříže Christiaan Huyghens (1629-1695), dovídá se o této korespondenci, nikoliv však o jejích výsledcích. Vrací se do Nizozemí a píše první knihu o pravděpodobnosti *De ratiociniis in ludo aleae* [O výpočtech v hazardní hře], která vychází v roce 1657. Pascalovy výsledky byly zveřejněny až posmrtně v roce 1665 v souhrnném vydání jeho spisů v části nazvané *Traité du triangle arithmétique avec quelques autres petites traités sur la même matière* [Pojednání o aritmetickém trojúhelníku s několika dalšími malými příspěvky k téže problematice]. Pravděpodobný je však i jeho příspěvek k port-royalské učebnici logiky napsané Antoinem Arnauldem (1612-1694) a Pierrem Nicole (1625-1695), *La logique, ou l'art de penser* [Logika aneb umění myslet], která vyšla anonymně v Paříži roku 1662, tedy ještě za Pascalova života. Obsahuje čtyři kapitoly o nededuktivním (induktivním, pravděpodobnostním) myšlení.

Huyghensova knížka vzbudila zájem Jakoba Bernoulli[5], který ji s komentáři a zobecněními zařadil do *Ars Conjectandi* obsahujícího první limitní větu teorie pravděpodobnosti a považovaného za první základní knihu o teorii pravděpodobnosti. Jakob Bernoulli buď nebyl spokojen se svými výsledky, nebo nenašel vhodné aplikace pro širší využití své teorie, a proto na knize patrně od roku 1692 dále nepracoval. Vyšla až posmrtně v roce 1713 péčí synovce Nikolause a své ocenění získávala jen zvolna; navíc některé její výsledky byly známy již před jejím vydáním. Mezitím v roce 1708 Pierre Rémond de Montmort[6] vydává *Essay d'Analyse sur le Jeux de Hazard*, jejíž rozšířené vydání se objevuje v roce 1713. V ní podstatně rozšiřuje Huyghensovy výsledky a řeší řadu kombinatorických a pravděpodobnostních úloh vztahujících se ke hrám; do jaké míry byl při jejím psaním obeznámen s prací Jakoba Bernoulli, je stále předmětem diskusí. Je známo, že od jisté doby intensivně spolupracoval s Nikolausem Bernoulli; možná však až po roce 1708.

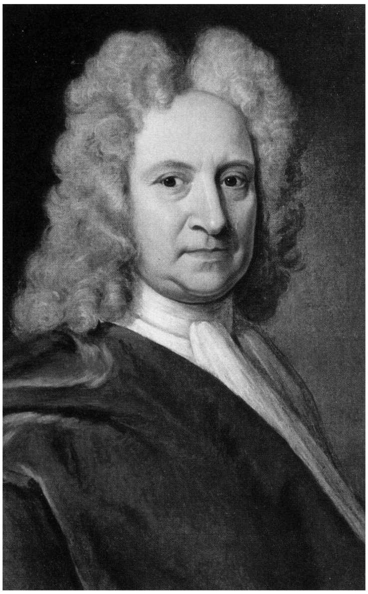
---

[5] Jakob (1654-1705) a Johann (1667-1748) byli nejstarší a nejmladší synové basilejského radního Nikolause Bernoulli (1623-1708). Jeho prostřední syn Nikolaus (1662-1716) byl malíř a jeho syn Nikolaus (1687-1759), o němž se píše v následujícím textu, byl rovněž matematikem a profesorem nejprve v Padově a později v Basileji.

[6] Pierre Rémond de Montmort (1678-1719), francouzský matematik, samouk (nejprve studoval práva, pak filozofii u Malebranche, fyziku u Descartesa, univerzitní studium nedokončil), kanovník při kostele Notre Dame v Paříži. Později zakoupil zámek Montmort (odtud *de Montmort*), oženil se a věnoval matematice.

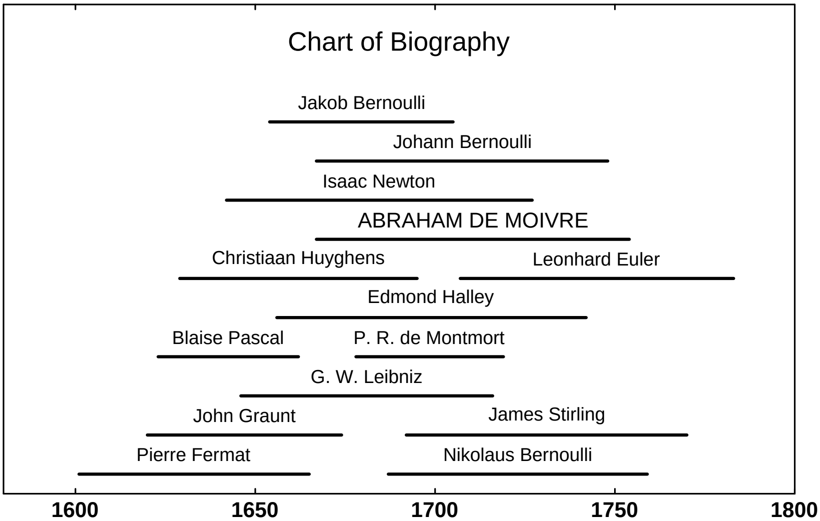


Obr. 4 François Viète (1540-1603) a Roger Cotes (1682-1717),
autoři Moivreovy formule.



Obr. 5 Edmond Halley (1656-1742).

Druhé vydání de Montmortovy knihy obsahuje korespondenci s Johannem a Nikolausem Bernoulli, která tvoří její nezanedbatelnou část.

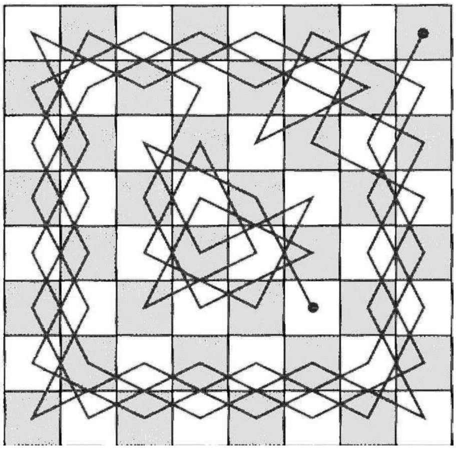


Obr. 6 Biografická mapa zakladatelů teorie pravděpodobnosti sestrojená podle *Chart of Biography* J. Priestleye (1765).

Souběžně s těmito počátky teorie pravděpodobnosti se rozvíjela i demografie, jejímž důležitým tématem byly úmrtnostní tabulky a na nich založené výpočty výše životního pojištění a životní renty. Na jejím počátku je kniha londýnského obchodníka Johna Graunta[7] *Natural and Political Observations Mentioned in a following Index, and made upon the Bills of Mortality* [Přirozená a politická pozorování zmíněná v následujícím přehledu a založená na seznamech zemřelých], vycházející v roce 1662 a obsahující úmrtnostní tabulky sestavené na základě sledování počtu křtů a úmrtí v Londýně ve dvou sedmiletých obdobích bez morové epidemie. V témže roce předkládá nizozemským generálním stavům svou teoretickou práci o pojišťovací matematice Johann de Witt[8].

[7] John Graunt (1620-1674), londýnský obchodník, známý se stal svou knihou, která v roce 1676 vyšla již v pátém vydání. Díky ní a na doporučení krále Karla II. byl přijat za člena *Society of Philosophers meeting at Gresham Colledge* (předchůdkyně Royal Society). Přišel o majetek při Velkém požáru v roce 1666 a zemřel v bídě. Kniha vzbudila ohlas i mimo Anglii.

[8] Johann de Witt (1625-1672), holandský právník, matematik a státník, autor první systematické práce o analytické geometrii *Elementa curvarum linearum* (1660), od roku 1653 Velký pensionář provincie Holland a politický vůdce Nizozemí. Za francouzské okupace v roce 1672 byl spolu s bratrem Corneliem zavražděn rozzuřeným davem. Jeho spis *Waardze van lyfrenten naer proportie van Losrenten* [Přednost doživotních důchodů ve srovnání s důchody vypověditelnými] z roku 1662 z matematického hlediska kritizuje tehdejší pojišťovací praxi, avšak není založen na žádných reálných datech.



Obr. 7 Řešení jezdcovy procházky mladým Moivrem.

Obr. 8 Slaughterův hostinec.

O práci podobnou Grauntově se pokusil také astronom Edmond Halley (1656-1674). Předností jeho článku *An estimate of the Degrees of the Mortality of Mankind* [Odhad lidské úmrtnosti], který vyšel ve *Philosophical Transactions* v roce 1693, je volba dat z matrik města Vratislavi, která byla podstatně stabilnější než Grauntova data londýnská, ovlivňovaná morem a vysokou migrací obyvatelstva. Na základě svých úmrtnostních tabulek a pravděpodobnostních úvah využívajících i teorii hazardních her propočetl Halley vhodnou výši důchodového pojištění pro každý věk.

O důležitosti těchto základních děl z oboru pravděpodobnosti a demografie svědčí skutečnost, že jsou stále vydávána a dostupná na knižním trhu v reprintech originálních vydání, některá jsou vystavena na internetu, jiná nově překládána[9]. Přehled vývoje teorie pravděpodobnosti do konce XVII. století s originálem i komentovaným překladem Huyghensova spisu obsahuje Mačákova kniha (1997).

ŽIVOT ABRAHAMA DE MOIVREA

Abraham Moivre (*De* si ve svém jménu začal psát až po příchodu do Anglie[10]) se narodil 26. 5. 1667 ve Vitry-le-François v rodině protestantského lékaře. Ačkoliv rodina nebyla příliš zámožná, výchově syna byla věnována velká pozornost. Nejprve měl domácího učitele, poté navštěvoval katolickou (!) školu a od 11 let protestantskou akademii v Sedanu. Po jejím zrušení v roce 1681 studoval filozofii na protestantské akademii v Saumuru (zde se seznámil s výše zmíněnou Huyghensovou knížkou o hazardních hrách) a od roku 1864 matematiku a fyziku v Paříži[11]. V roce 1685 byl zrušen edikt nanteský povolující ve Francii protestantskou víru a Moivre byl po odmítnutí konverze vězněn v převorství Saint-Martin až do roku 1688. Po propuštění okamžitě uprchl do Anglie a do Francie se již nikdy nevrátil[12]; o ostatních členech jeho rodiny se nedochovaly žádné zprávy. Zbývajících téměř 70 let svého života prožil v Londýně, kde se živil jako soukromý učitel docházející za svými šlechtickými žáky do jejich domovů. Přes všechen věhlas a uznání, členství ve špičkových vědeckých organizacích, přátelství ve vědeckých kruzích i známosti ve vysoké anglické společnosti, se mu jako cizinci nepodařilo získat ani místo na univerzitě[13], ani jakékoliv jiné stálé zaměstnání.

---

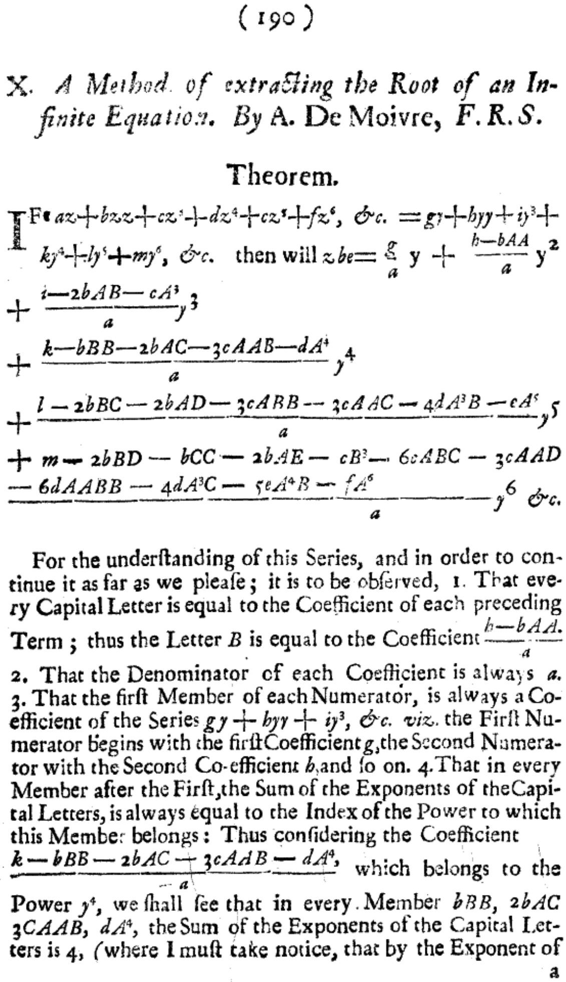
[9] Po téměř třista letech od prvního vydání konečně vyšel překlad do angličtiny Bernoulliova *Ars Conjectandi* od E. D. Sylla: *The Art of Conjecturing*, The John Hopkins University Press, Baltimore 2006.

[10] Bellhouse a Genest (2006) uvádějí, že předložka De byla velmi častá u hugenotských emigrantů v Anglii; patrně nebyla chápána jako šlechtický titul.

[11] Jeho učitelem tam byl Jacques Ozanam (1640-1717), autor řady matematických knih a úloh z rekreační matematiky. V posmrtném vydání jeho *Récréations mathématiques et physiques* (1725) je Moivreovo řešení šachové úlohy *jezdcova procházka*, v níž má jezdec projít všechna pole šachovnice právě jednou.

[12] Podle některých zdrojů však Moivre emigroval do Anglie již v roce 1687, a to se svým bratrem Danielem – podrobně viz Bellhouse a Genest (2006).

[13] V roce 1739 se smrtí Nicholase Saundersona (viz poznámka [68]) uvolnilo místo profesora na lucasiánské katedře matematiky v Cambridgi. Katedra byla založena v roce 1664 a jejími



(190)

X. *A Method of extracting the Root of an Infinite Equation.* *By* A. De Moivre, *F.R.S.*

Theorem.

IF $az+bzz+cz^3+dz^4+ez^5+fz^6$, &c. $=gy+hyy+iy^3+ky^4+ly^5+my^6$, &c. then will z be $=\frac{g}{a}y+\frac{h-bAA}{a}y^2$

$$+\frac{i-2bAB-cA^3}{a}y^3$$

$$+\frac{k-bBB-2bAC-3cAAB-dA^4}{a}y^4$$

$$+\frac{l-2bBC-2bAD-3cABB-3cAAC-4dA^3B-eA^5}{a}y^5$$

$$+\frac{m-2bBD-bCC-2bAE-cB^3-6cABC-3cAAD-6dAABB-4dA^3C-5eA^4B-fA^6}{a}y^6 \text{ \&c.}$$

For the underſtanding of this Series, and in order to continue it as far as we pleaſe; it is to be obſerved, 1. That every Capital Letter is equal to the Coefficient of each preceding Term; thus the Letter B is equal to the Coefficient $\frac{h-bAA}{a}$. 2. That the Denominator of each Coefficient is always a. 3. That the firſt Member of each Numerator, is always a Coefficient of the Series $gy+hyy+iy^3$, &c. *viz.* the Firſt Numerator begins with the firſt Coefficient g, the Second Numerator with the Second Co-efficient h, and ſo on. 4. That in every Member after the Firſt, the Sum of the Exponents of the Capital Letters, is always equal to the Index of the Power to which this Member belongs: Thus conſidering the Coefficient $\frac{k-bBB-2bAC-3cAAB-dA^4}{a}$, which belongs to the Power y^4, we ſhall ſee that in every Member bBB, $2bAC$ $3CAAB$, dA^4, the Sum of the Exponents of the Capital Letters is 4, (where I muſt take notice, that by the Exponent of a

Obr. 9 První stránka De Moivreova článku ve *Philosophical Transactions* XX(1698), 190-193.

prvními profesory byli Isaac Barrow (do roku 1669) a Isaac Newton (do roku 1702). Aby se De Moivre o toto místo mohl ucházet, byl královským výnosem přijat za člena Trinity College a jmenován M.A. S ohledem na De Moivreův vysoký věk (72 let) však byla přednost dána jeho žákovi Johnu Colsonovi (1680-1760).

Ve svém dopise Johannu Bernoulli z 2. 12. 1707 píše: „Musím pracovat téměř od rána do večera, to znamená učit své žáky a chodit; ale protože město je pořádně velké, podstatná část mého času je věnována výlučně chození.“[14] De Moivre se nikdy neoženil a svůj život patrně trávil v poměrné chudobě, ve stáří i v osamění, protože většinu svých přátel i známých přežil. Po večerech, které dlouhá léta pravidelně trávil ve Slaughterově kavárně, si přivydělával poskytováním rad hazardním hráčům a soukromým pojišťovatelům a šachovou hrou. To se stalo jeho jediným příjmem ve stáří, kdy již nemohl učit. Zemřel v Londýně 27. listopadu 1754.

Ve výše zmíněné *Eloge* je uvedeno, že matematika nebyla De Moivreovým jediným zájmem, ale že byl velmi zběhlý i v literatuře. Znal všechny vynikající antické autory a poskytoval rady při jejich studiu, z francouzské literatury si nejvíce vážil Rabélaise a Molièra, z jehož Misantropa znal nazpaměť celé scény a jemuž byl povahou poněkud podoben; vzpomínal též, jak tuto hru v mládí viděl v provedení Molièrovy herecké družiny. Svou vědu nestavěl nijak na odiv a jako matematik se projevoval nikoliv mluvením, ale pravdivostí svého ducha. Nikdy neřekl nic, co nebylo pečlivě rozmyšleno a jasně vyjádřeno. Jeho chování bylo spíše rozhodné a pevné, než příjemné a veselé. Vždy byl maximálně korektní a volbě svých slov věnoval stejnou pozornost jako svým výpočtům. Náboženství bylo pro něj po celý život dominantní záležitostí a jeho pevná víra v božský řád všech věcí vyjádřená slavným citátem z jeho *The Doctrine of Chances* (viz níže) pro něj byla charakteristická. Nelze proto vyloučit, že jeho osobní vlastnosti byly jednou z příčin, pro něž se mu přes veškeré jeho úsilí i obecné vědecké uznání nikdy nepodařilo získat stálé zaměstnání.

PŘEHLED DE MOIVREOVÝCH PRACÍ

Podrobný přehled těchto prací je ve Wollenschlägerově vydání korespondence mezi De Moivrem a Johannem Bernoulli a z něj je v následující části převážně čerpáno (viz též Schneider (1968), Bellhouse a Genest (2006)).

Poměrně brzy po svém příjezdu do Anglie se De Moivre seznamuje s Newtonovou knihou *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*[15] a v ní obsažené matematické myšlenky rozvíjí ve své první práci *Specimina quadem illustria* ...[16] z roku 1695 publikované ve *Philosophical Transactions* stejně jako všechny jeho další práce. V té době se již znal s Edmondem Halleyem, s nímž se velmi spřátelil. Ten byl tehdy sekretářem Royal Society a v ní jeho první práci předložil a doporučil[17]. V blízkých vztazích byl i s Isaacem Newtonem, ale není přesně

---

[14] Je suis obligé de travailler presque du matin au soir, c'est à dire d'enseigne mes écoliers et de marcher; mais comme la ville est fort grande, une partie considerable de mon temps es employée uniquement à marcher.

[15] *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* [Matematické základy filozofie přírody] vyšly v roce 1687 a byly tedy „horkou novinkou“.

[16] *Specimina quadem illustria Doctrinae Fluxionum sive exempla quibus Methodi istius Usus et praesentatia in solvendis Problematis Geometricis elucidatur, ex Epistola Peritissimi Mathematici D. Abr. de Moivre desumpta.* Phil. Trans. XIX (1695), 52-57.

[17] Zápis Halleyova doporučení v *Journal Book* společnosti z roku 1695 je uveden v práci Bellhouse a Genest (2006).

známo, kdy se s ním seznámil[18]. Patrně Halleyovou zásluhou byl De Moivre o dva roky později (1697) zvolen členem Royal Society v souvislosti se svou druhou prací věnovanou mocninám řad[19]. Geometrii i algebře jsou věnovány i jeho další čtyři články publikované v letech 1698 až 1707[20].

V roce 1711 vychází jako samostatný sešit *Philosophical Transactions* De Moivreova první práce z oblasti pravděpodobnosti *De Mensura Sortis, Seu, De Probabilitate Eventuum in Ludis a Casu Fortuito Pendentibus*[21][O míře náhody nebo o pravděpodobnosti jevu v hrách na náhodě založených]. Na ni pak navazuje i jeho další kratší příspěvek[22].

Následujících šest prací je opět věnováno algebře a geometrii[23] a poslední článek z roku 1744 se zabývá výpočtem životní renty[24]. Celkem tedy De Moivre publikoval 15 časopiseckých prací v rozmezí let 1695 až 1744.

---

[18] Jistě to však nebylo později, než v roce 1701, kdy Newton odešel z Cambridge, resp. v roce 1703, kdy se stal presidentem Royal Society. Mohlo to však být i dříve, neboť Newton byl od roku 1696 dozorcem královské mincovny [the warden of Mint] a od roku 1699 královským mincmistrem a ředitelem mincovny [the master of Mint] a jeho přítomnost v Londýně byla častá.

[19] *A Method of Raising an infinite Multinomial to any given Power, or extracting any given Root of the same. By Mr. Ab. De Moivre.* Phil. Trans. XIX (1697), 619-625.

[20] *A Method of extracting the Root of an Infinite Equation. By A. De Moivre, F.R.S.* Phil. Trans. XX (1698), 190-193.

The Dimension of the Solids generated by the Conversion of Hippokrates's Lumula, and of its Parts about several Axes, with the Surfaces generated by that Conversion, by Ab. De Moivre F.R.S. Phil. Trans. XXII (1700), 624-626.

Methodus quadrandi genera quaedam Curvarum, aut ad Curvas Simpliciores reducendi. per A. De. Moivre R.S.S. Phil. Trans. XXIII (1702), 1113-1127.

Aequationum quarundam Potestatis tertiae, quintae, septimae, nonae, et superiorum, ad infinitum uasque pergendo, in terminis finitis, ad instar Regularum pro Cubicis quae vocantur Cardani, Resolutio Analytica. Per Ab. de Moivre, R.S.S. Phil. Trans. XXV (1707), 2368-2371.

[21] *De Mensura Sortis, Seu, De Probabilitate Eventuum in Ludis a Casu Fortuito Pendentibus. Autore Abr. De Moivre, R.S.S.* Phil. Trans. XXVII (1711), 213-243.

[22] *Solutio generalis altera praecedentis Problematis, ope Combinationum et Serierum infinitarum, per Abr. de Moivre. Reg. Soc. Sodalem.* Phil. Trans. XXIX (1714), 145-158.

[23] *A ready Description and Quadrature of a Curve of the Third Order, resembling that commonly call'd the Foliate. Communicated by Mr. Abr. de Moivre, F.R.S.* Phil. Trans. XXIX (1715), 329-331.

Proprietates quaedam simplices Sectionum Conicarum ex Natura Focorum deductae; cum Theoremate generali de Viribus Centripetis; quorum Ope Lex Virium Centripetarum ad Focos Sectionum tendentium, Velocitates Corporum in illis revolventium, et Descriptio Orbium facillime determinantur. Per Abr. de Moivre. R.S.Soc. Phil. Trans. XXX (1717), 622-628.

De Maximis et Minimis quae in motibus Corporum Coelestium occurrunt. Phil. Trans. XXX (1719), 952-954.

De Fractionibus Algebraicis Radicalitate immunibus ad Fractiones Simpliciores reducendis, deque summandis Terminis quarumdam Serierum aequali Intervallo a se distantibus. Auctore Abrahamo de Moivre, S.R.Socio. Phil. Trans. XXXII (1722), 162-178.

De Sectione Anguli, Autore A. de Moivre, R.S.S. Phil. Trans. XXXII (1722), 228-230.

De Reductione Radicalium ad simpliciores terminus, seu de extrahenda radice quacunque data ex Binomio $a+\sqrt{+b}$, vel $a+\sqrt{-b}$. Epistola Abrahami de Moivre, R.S.S. ad Gulielmum Jones, Armigerum, R.S.S. Phil. Trans. XL (1738), 463-478.

[24] *A letter from Mr. Abraham De Moivre, F.R.S. to William Jones, Esquire, F.R.S.*

Hlavními De Moivreovými díly jsou ovšem jeho knihy. V roce 1704 vydává kratší polemickou práci *Animadversiones in D. Georgii Cheynaei Tractatum de Fluxionum Methodo Inversa*[25] otevírající jeho polemiku se skotským lékařem G. Cheynem (viz níže), která byla důvodem počátku jeho korespondence s Johannem Bernoulli.

Nejdůležitějším De Moivreovým dílem je kniha *The Doctrine of Chances: or, A Method of Calculating the Probability of Events in Play*[26], na níž pracoval řadu let (z části byla hotova patrně již kolem roku 1711), a která byla podstatným rozšířením práce *De Mensura Sortis.* Od jejího prvního vydání v roce 1718 věnovaného Isaacu Newtonovi ji postupně doplňoval a rozšiřoval. Druhé vydání vychází v roce 1738[27] a třetí, posmrtné a vydané Patrickem Murdochem[28], v roce 1756[29]. Obsahuje také *Approximatio Summam Terminorum Binomii* $(a+b)^n$ *in Seriem* samostatně vydané v roce 1733 (viz níže) a páté vydání *Annuities on Lives.*

Třetí kniha menšího rozsahu byla praktickou aplikací pravděpodobnostních postupů k predikci úmrtnosti a rozboru jejich důsledků pro pojišťovnictví. De Moivre vyšel z výše zmíněné práce Halleyovy, využil však většího množství úmrtnostních dat a navrhl řadu velmi podstatných zjednodušení. Kniha vyšla poprvé v Londýně v roce 1725[30], reprintována s drobnými korekcemi vyšla v roce 1731 v Dublinu, a opakovaně byla vydána upravená a rozšířená v roce 1743[31] a s dalšími úpravami v letech 1750 a 1752[32]. Díky své úspěšnosti a široké použitelnosti představovala i finanční přínos v De Moivreově chronicky tíživé finanční situaci.

---

concerning the easiest method for calculating the value of annuities upon lives, from tables of observations. Phil. Trans. XLIII (1744), 65-78.

[25] *Animadversiones in D. Georgii Cheynaei Tractatum de Fluxionum Methodo Inversa.* Edward Midwinter, London 1704.

[26] *The Doctrine of Chances: or, A Method of Calculating the Probability of Events in Play*, W. Pearson, London 1718, 175 stran.

[27] *The Doctrine of Chances: or, A Method of Calculating the Probability of Events in Play.* Woodfall, London 1738, 259 stran.

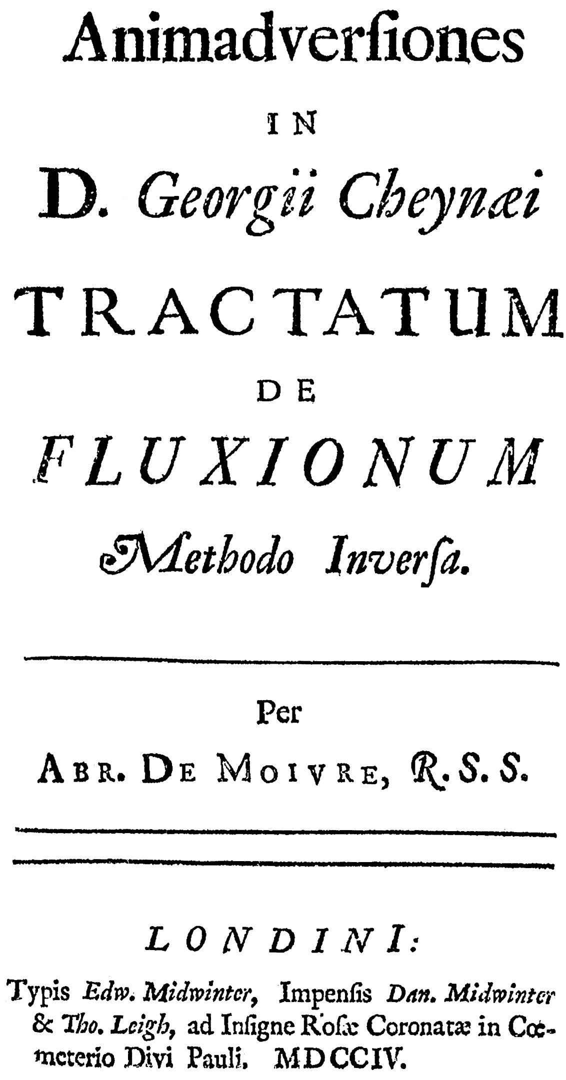
[28] Patrick Murdoch (1710-1774), matematik a anglikánský duchovní, jehož dílem bylo i posmrtné vydání Maclaurinových prací (viz Bellhouse a Genest, 2006).

[29] *The Doctrine of Chances: or, A Method of Calculating the Probability of Events in Play.* London 1756, 348 stran.

[30] *Annuities upon Lives, or, the Valuation of Annuities upon any Number of Lives, as also, of Reversions to which is added, an Appendix Concerning the Expectations of Life, and Probabilities of Survivorship.* London, W. P., 1725. V literatuře se velmi často uvádí rok vydání 1724. Zdrojem tohoto letopočtu je De Moivreova předmluva ve vydání z roku 1756 (v jedné knize s *The Doctrine of Chances*): "Since the Publication of my first Edition, which was in 1724, …". Tento údaj opakuje i Maty (1755). Liší se také titul knihy: u vydání z let 1725, 1731 je to *Annuities upon Lives*, vydání z let 1743, 1752 mají titul *Annuities on Lives*, ve vydání z roku 1756 je název *A Treatise on Annuities on Lives.*

[31] *Annuities on Lives: With Several Tables, Exhibiting at One View, the Values of Lives for Several Rates of Interest.* Woodfall, London 1743.

[32] Titul beze změny, vydavatel A. Millar, London 1750, 1752.



Animadverſiones

IN

D. *Georgii Cheynæi*

TRACTATUM

DE

FLUXIONUM

Methodo Inverſa.

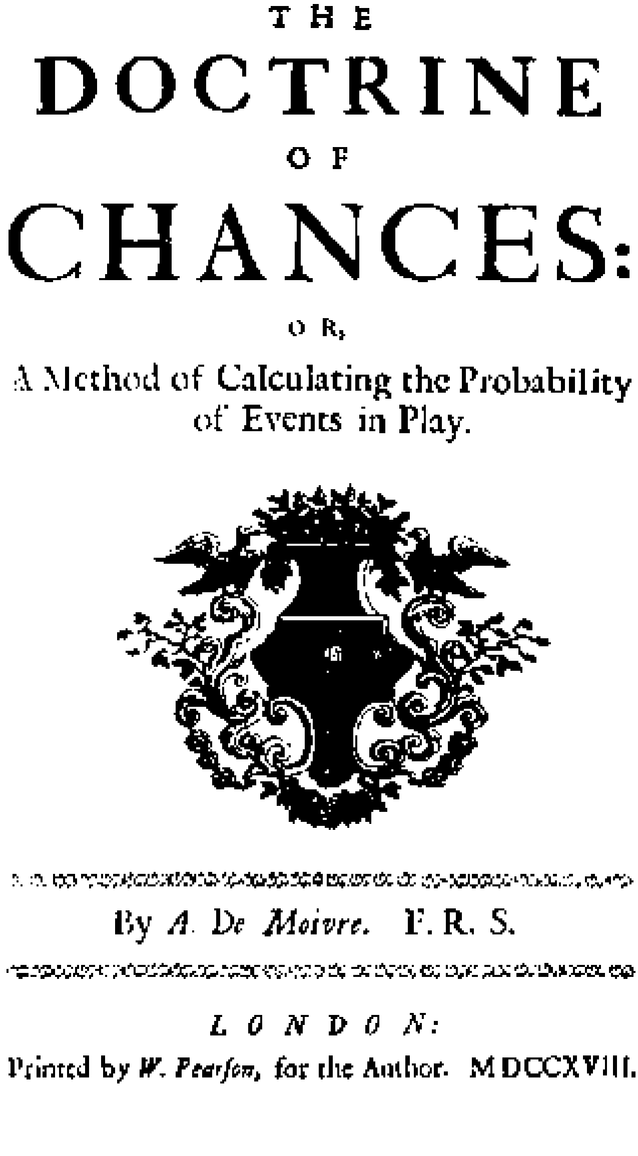
Per

ABR. DE MOIVRE, *R. S. S.*

LONDINI:

Typis *Edw. Midwinter*, Impenſis *Dan. Midwinter* & *Tho. Leigh*, ad Inſigne Roſæ Coronatæ in Cœmeterio Divi Pauli. MDCCIV.

Obr. 10 De Moivreovy *Animadversiones in D. Georgii Cheynaei Tractatum de Fluxionum Methodo Inversa* z roku 1704.



THE

DOCTRINE

OF

CHANCES:

OR,

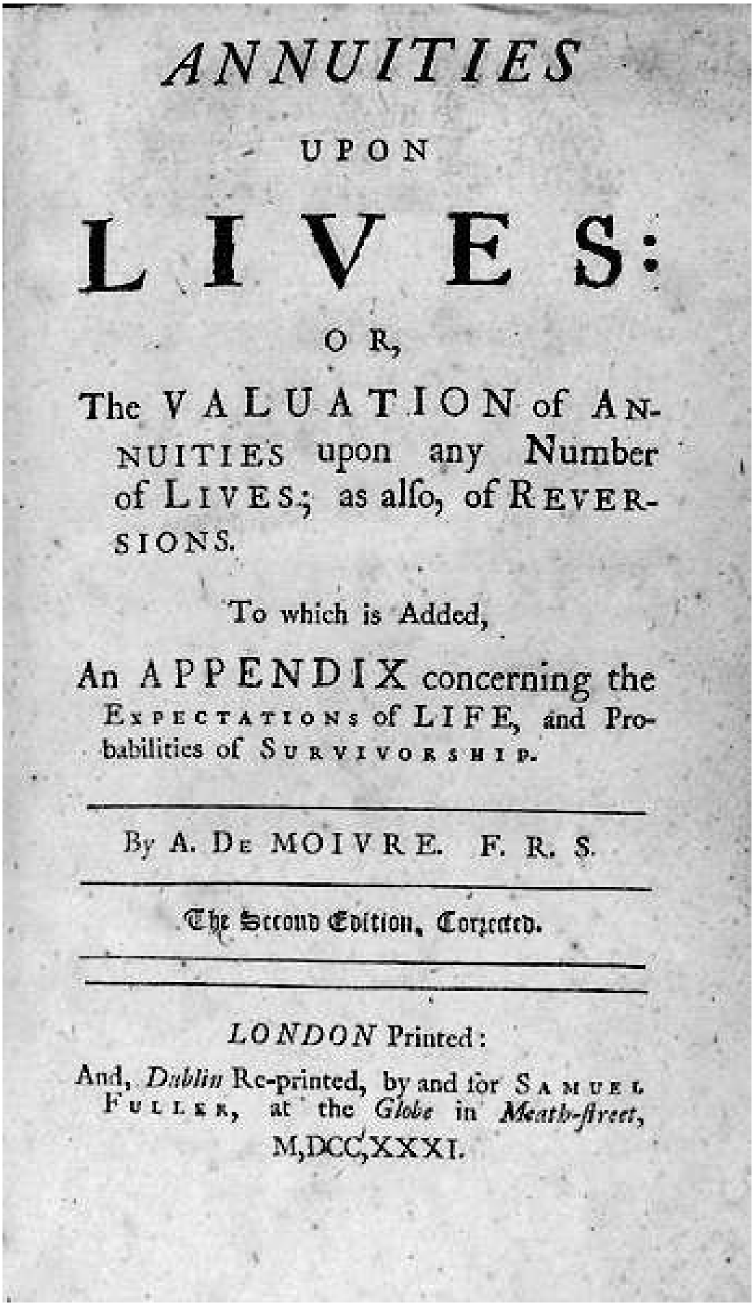
A Method of Calculating the Probability of Events in Play.

By *A. De Moivre.* F. R. S.

LONDON:

Printed by *W. Pearson,* for the Author. MDCCXVIII.

Obr. 11 Titulní stránka De Moivreovy *The Doctrine of Chances* z roku 1718.



ANNUITIES

UPON

LIVES:

OR,

The VALUATION of ANNUITIES upon any Number of LIVES; as alſo, of REVERSIONS.

To which is Added,

An APPENDIX concerning the EXPECTATIONS of LIFE, and Probabilities of SURVIVORSHIP.

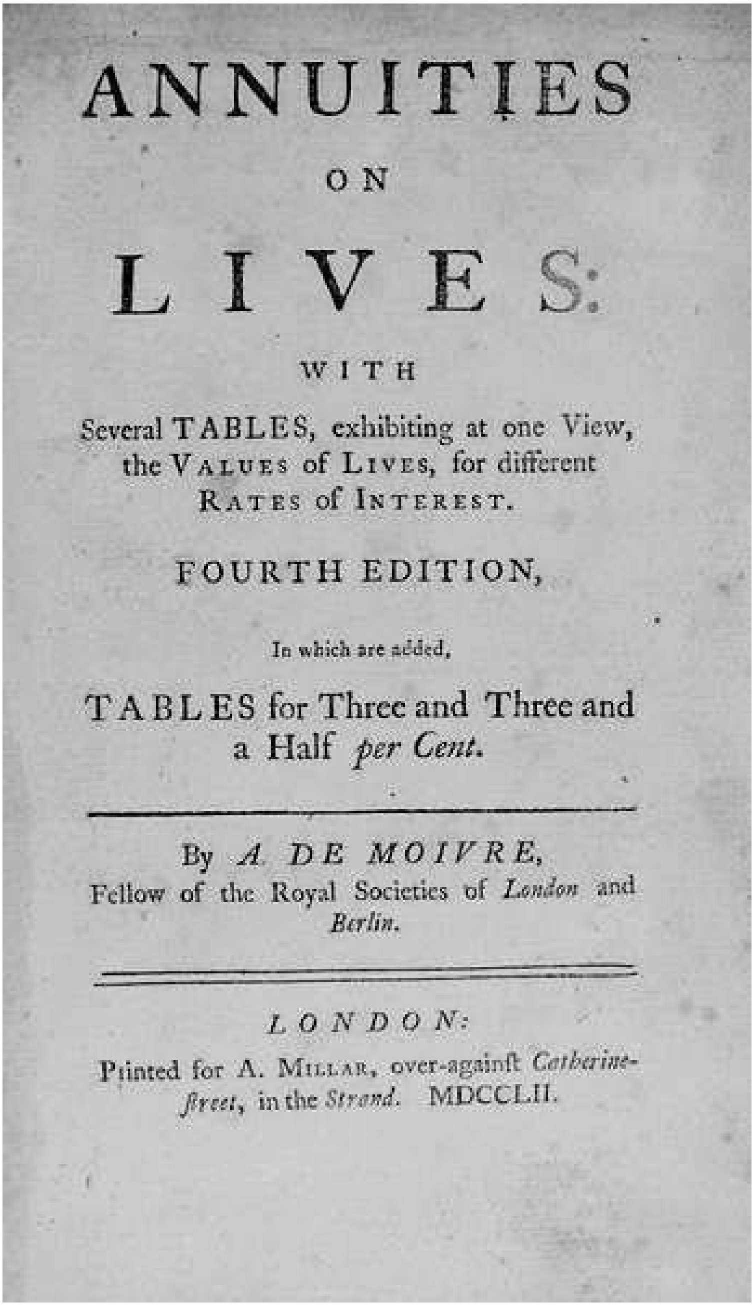
By A. DE MOIVRE. F. R. S.

The Second Edition, Corrected.

LONDON Printed:

And, *Dublin* Re-printed, by and for SAMUEL FULLER, at the *Globe* in *Meath-ſtreet*, M,DCC,XXXI.

Obr. 12 Titulní stránky vydání *Anuitites upon Lives* z roku 1731.



ANNUITIES

ON

LIVES:

WITH

Several TABLES, exhibiting at one View, the VALUES of LIVES, for different RATES of INTEREST.

FOURTH EDITION,

In which are added,

TABLES for Three and Three and a Half *per Cent.*

By *A. DE MOIVRE*, Fellow of the Royal Societies of *London* and *Berlin.*

LONDON:

Printed for A. MILLAR, over-againſt *Catherine-ſtreet*, in the *Strand.* MDCCLII.

Obr. 13 Titulní stránky vydání *Anuitites on Lives* z roku 1752.

Čtvrtou knihou věnovanou jeho matematickým výsledkům především z oblasti nekonečných řad jsou *Miscellanea Analytica de Seriebus et Quadraturis* vydaná v roce 1730[33]. Některé části z ní se pak dostávají do posledního vydání *The Doctrine of Chances* a právě od ní a jejich dodatků se odvinulo již zmíněné přehodnocení významu De Moivrea pro matematiku, které proběhlo ve XX. století a jemuž je věnována další kapitola.

Své knihy věnoval různým vlivným osobnostem, patrně v očekávání, že se mu od nich dostane pomoci při hledání trvalého zaměstnání. *De Mensura Sortis* věnoval Francisu Robartesovi[34], první vydání *The Doctrine of Chances* Isaacu Newtonovi, druhé vydání lordu Carpenterovi[35]; toto věnování je přetištěno i ve vydání posmrtném a v jeho současných reprintech. Konečně *Annuities on Lives* věnoval De Moivre hraběti z Macclesfieldu[36].

DE MOIVRE A NORMÁLNÍ ROZDĚLENÍ

Karl Pearson ve svých přednáškách (Pearson (1978) na londýnské University College v roce 1922 a poté v krátkém článku (Pearson, 1924) seznamuje veřejnost se svým zjištěním, že normální rozdělení poprvé nezavedl ani K. F. Gauss, ani P.-S. Laplace, ale De Moivre. Zjistil to při studiu *Miscellanea Analytica* (1730) ze svazku ve vlastnictví University College Library, který měl dva Dodatky. První z nich obsahoval čtrnáctimístné tabulky logaritmů faktoriálů pro $n = 10(10)900$, druhým (datovaným 12. 11. 1733) pak byla práce nazvaná *Approximatio ad Summam Terminorum Binomii* $(a+b)^n$ *in Seriem expansi Autore A.D.M.R.S.S.* [písmena jsou zkratkou Abraham De Moivre, Royal Society Socius]. V ní De Moivre dokazuje, že limitou binomického rozdělení pro velký počet pokusů je rozdělení, kterému dnes říkáme Gaussovo, Laplaceovo-Gaussovo či normální. Zavádí směrodatnou odchylku $\sigma = \sqrt{pqn}$, kde $p = 1 - q$ je pravděpodobnost sledovaného jevu a n je počet sledování, a jako první tedy odhaluje závislost $\sigma \propto \sqrt{n}$. Sumaci pravděpodobností jednotlivých jevů nahrazuje integrály limitního rozdělení, které pak přibližně počítá pro dva případy (viz níže) a dospívá k dnes dobře známému výsledku, že v rozmezích $\pm\ 2\sigma$ a $\pm\ 3\sigma$ leží 0.95428 a 0.99874 jevů (současné přesnější hodnoty jsou 0.95450 a 0.99730). Dále se pak věnuje zpřesnění centrální limitní věty a dokazuje, že požadovanou maximální odchylku relativní četnosti od teoretické

---

[33] *Miscellanea Analytica de Seriebus et Quadraturis.* J. Tonson and J. Watts, London 1730.

[34] Francis Robartes (1650-1718), dlouholetý člen Royal Society, známý zájmem o hudbu a o počet pravděpodobnosti (viz *Robartesova úloha* níže). Byl synem Johna Robartese, prvního hraběte z Radnoru (1606-1685), jemuž svou slavnou knihu o demografii věnoval John Graunt. V řadě prací včetně Schneider (1968) je nesprávně uvedeno, že Francis byl hrabětem z Radnoru. Tím však byl do roku 1723 Charles, syn Francisova staršího nevlastního bratra Roberta, a teprve Francisův syn John se stal čtvrtým hrabětem z Radnoru roku 1741 – viz `www.thepeerage.com/`.

[35] George Carpenter (?-1749), druhý baron Carpenter z Killaghy, člen parlamentu a Royal Society.

[36] George Parker, hrabě Macclesfield (1695 nebo 1697-1764), anglický astronom, člen Royal Society a od roku 1752 její president; měl podstatný vliv na to, že Anglie konečně v roce 1752 přijala gregoriánský kalendář (posuv o 11 dní).

hodnoty pravděpodobnosti dostaneme již při nižším počtu pokusů, než odvodil Jakob Bernoulli v *Ars Conjectandi*. Při svých výpočtech používá odhad faktoriálu velkých čísel ve tvaru $m! = B\sqrt{m}e^{-m}m^m$, kde B počítá z rozvoje $B = 1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{260} + \frac{1}{1260} + \frac{1}{1650} = 2.5074$, který dnes známe jako Stirlingův vzorec s konstantou úměrnosti $B = \sqrt{2\pi} = 2.5066$.

Pearson závěrem svého příspěvku konstatuje, že Laplaceovo-Gaussovo rozdělení tedy objevil a prozkoumal již De Moivre, a že má také prvenství v případě Stirlingovy formule. V těchto souvislostech kritizuje Todhuntera, že ve své knize (Todhunter, 1865) dostatečně nedocenil De Moivreův přínos a jeho objev normálního rozdělení přehlédl. Pearsonovo zjišťování přítomnosti druhého Dodatku v dalších dostupných exemplářích *Miscellanea Analytica* ukázalo, že z dvanácti prozkoumaných výtisků uložených v různých britských knihovnách byl první Dodatek v sedmi a druhý Dodatek pouze v jediném, což lze vysvětlit tím, že se mohl objevit pouze ve výtiscích prodaných po roce 1733.

V dalším článku Pearson (1925) provádí podrobné srovnání Bernoulliova a De Moivreova přístupu k centrální limitní větě a ukazuje, že De Moivreovy odhady počtu pokusů pro dosažení požadované přesnosti odhadu pravděpodobnosti jevu jsou pro $p = 0.6$ zhruba třikrát nižší než odhady Jakoba Bernoulli. Článek pak uzavírá konstatováním, že Bernoulliovy výsledky byly často přeceňovány, a že čtvrtá kapitola *Ars Conjectandi* není tak významná, za jakou je považována[37].

Na zásadní nedostatek Pearsonova vystoupení upozornil R. C. Archibald v diskusi, která proběhla v *Nature* (Archibald, 1926a; Pearson, 1926) a poté také v samostatném článku (Archibald, 1926b). K získání Pearsonem uvedených poznatků o De Moivreových objevech totiž nebylo nutné najít druhý Dodatek k *Miscellanea Analytica*, ale stačilo si jej samotným De Moivrem doslovně přeložený a o něco rozšířený přečíst ve druhém vydání *The Doctrine of Chances* z roku 1738[38]. To ostatně Pearson ve svém příspěvku z roku 1925 uvádí a přiznává, že s touto knihou pracoval. Navíc Archibald zpochybňuje tvrzení, že se jedná o Dodatek k *Miscellanea Analytica*, protože jej De Moivre při publikaci v roce 1738 uvádí konstatováním: „Zde překládám svůj Článek, který byl vytištěn 12. 11. 1733 a dán na vědomí některým Přátelům, nikdy však publikován, abych si ponechal právo své Myšlenky rozšířit, kdy se to bude hodit.“[39] V přeloženém a snad i v latinském textu ještě uvádí, že jsou to výsledky staré nějakých 12 let, takže je lze datovat do roku 1721.

Archibald se zároveň zastává Todhuntera a konstatuje, že De Moivreovy výsledky z řádně vytištěných Dodatků *The Doctrine of Chances* uvádí správně, a dále spolu se svým příspěvkem v *Isis* publikuje fotokopii faksimile Pearso-

---

[37] The contributions of the Bernoullis to mathematical science are considerable, but they have been in more than one instance greatly exaggerated. The *Pars Quarta* of the *Ars Conjectandi* has not the importance which has often been attributed to it.

[38] Ve třetím vydání téže knihy z roku 1756 je Dodatek, mající původně šest a půl strany, rozšířen již na skoro dvanáct stran.

[39] I shall here translate a Paper of mine which was printed *November* 12, 1733, and communicated to some Friends, but never made public, reserving to myself the right of enlarging my own Thoughts, as occasion shall require.

nem nalezené latinské verze dodatku *Approximatio*, kterou pro něj zhotovila University College Library v Londýně. Konečně v poznámce pod čarou žádá o patřičnou informaci všechny, kdo by našli další kopie této latinské verze. Ve své části diskuse s Archibaldem připouští Pearson (1926), že tvrzení o druhém Dodatku bylo možná nepatřičné, ale že pokud budou hledány další jeho kopie, pak stejně doporučuje začít s *Miscellanea Analytica*. Posledním příspěvkem do debaty je Archibaldova zpráva z Berlína (Archibald, 1926c), kde Pearsonovi oznamuje, že zde v Pruské státní knihovně nalezl další kopii *Approximatio* svázanou s *Miscellanea Analytica*.

Objevení údajného latinského Dodatku k *Miscellanea Analytica*, obsahujícího zkrácenou verzi Dodatků následně řádně publikovaných a tedy teoreticky dobře známých, tak Pearsonovi vlastně jen posloužilo k implicitnímu konstatování, že téměř dvěstě let všichni slavnou De Moivreovu knihu buď nečetli, četli nepozorně nebo nepochopili, co čtou (Todhunterův text, který je přesným přepisem De Moivreova textu včetně značení, tento dojem vzbuzuje). Patrně proto, že mezi ty všechny by bylo třeba zařadit i jeho samotného, zvolil tuto poněkud neobratnou formu. Za ni jej Archibald kritizoval, podstatu sdělení o De Moivreových prioritách však nijak nezpochybnil. V historiích pravděpodobnosti a statistiky jsou od té doby De Moivreovy zásluhy zmiňovány, do obecného povědomí však pronikají jen pomalu. Tím by se mohlo zdát, že je příběh ukončen, ale není tomu tak.

Po téměř padesáti letech R. H. Daw a E. S. Pearson (1972) publikují příspěvek vracející se k této problematice. V první části ji stručně, ale s větší přesností rekapitulují (například se dozvíme, že mezi *Miscellanea Analytica* a *Approximatio* byl vevázán skutečný Dodatek nazvaný *Miscellaneis Analyticis Supplementum* s několika poznámkami patrně reagujícími na připomínky Jamese Stirlinga[40] poslané De Moivreovi bezprostředně po vydání knihy v roce 1730).

V další části autoři popisují výsledky svého hledání dalších kopií *Approximatio*. Ještě jedna se našla v londýnské University College Library, tentokrát však svázaná s italskou zeměpisnou knihou z roku 1789; v katalogu původně nebyla uvedena a byla objevena patrně náhodou. Na její zadní osmé (nepotištěné) stránce byl nápis:

for Mr. Stirling
The above is an autograph of A. de Moivre

Podpis De Moivrea však chyběl a dalo se usoudit, že patrně byl odříznut při vazbě. Naproti tomu Archibaldova kopie z Pruské státní knihovny chybí a ne-

[40] James Stirling (1692-1770), skotský matematik. Jeho nejvýznamnější prací je kniha *Methodus Differentialis* (1730) věnovaná diferenciálnímu i integrálnímu počtu, nekonečným řadám a posloupnostem. V ní dokázal, že posloupnost $x_n = \frac{n!k^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$ konverguje k $\sqrt{2\pi}$ pro $k = e$, odkud pro velká n plyne formule nesoucí jeho jméno. Jako Skot sympatizoval veřejně s vyhnanou stuartovskou dynastií, což mu značně komplikovalo život, především studium a možnost vyučování. Od roku 1735 byl ředitelem důlní společnosti ve Skotsku a matematice se již věnoval málo.

podařilo se ji nalézt v žádné berlínské knihovně. Zato se podařilo najít tři další kopie, vždy svázané společně s *Miscellanea Analytica* a jejich *Supplementum* v pevném výše popsaném pořadí. První z nich v Basileji nalezl již I. Schneider (1968), další se našly v Moskvě a v Petrohradě. A tak se kuriózně zdá, že přece jenom *Approximatio* prakticky – možná z rozhodnutí vydavatele – tvořilo dodatek k *Miscellanea Analytica.*

K tématu se vztahuje také práce O. B. Šejnina (1967), podle autorova vyjádření publikovaná k třístému výročí narození De Moivrea. Je ovšem, jak z jejího názvu *On the early history of the law of large numbers* vyplývá, poněkud širšího zaměření, avšak obsahuje i několik zajímavých dílčích poznatků. Výše zmíněné tabulky faktoriálů Šejnin porovnal s tabulkami současnými a zjistil, že jsou správné do jedenáctého až dvanáctého desetinného místa s jedinou výjimkou u $n = 380$, kde chyba byla na pátém desetinném místě. Volba $n^{-\frac{1}{2}}$ jako míry přesnosti měla původně čistě formální význam; vzdálenost od maxima (modu) rozdělení $x = \sqrt{n}/2$ byla hranicí pro dva způsoby přibližné integrace funkce hustoty pravděpodobnosti

$$\int_0^\ell e^{-\frac{2x^2}{n}}\,dx.$$

Pro odhad $\ell \leq \sqrt{n}/2$ používal De Moivre mocninné řady, jinak Newtonovu-Cotesovu metodu. Dále Šejnin vyjadřuje názor, že stať *Approximatio* byla psána především s ohledem na praktické aplikace, tj. testování konkrétních „experimentálně realizovaných“ náhodných jevů, jak dosvědčuje text předcházející Dodatek v *The Doctrine of Chances.* V něm De Moivre slibuje dále, tj. v *Approximatio*, dát návod pro případ, kdy statistický výsledek testu je v rozporu s apriorním předpokladem a je třeba rozhodnout, zda jej máme zamítnout.

Šejnin také upozorňuje na De Moivreovo použití, patrně první vůbec, spojitého rovnoměrného rozdělení pravděpodobnosti v *Annuities on Lives* (v příkladu 20, vydání z roku 1756 spolu s *The Doctrine of Chances*) a dalších spojitých rozdělení pravděpodobnosti v příkladu 21 (De Moivre pro ně počítá první momenty). Komentuje též skutečnost, že prvním, kdo si prokazatelně všiml normálního rozdělení v De Moivreových pracích nebyl K. Pearson v roce 1924, ale J. Eggenberger v roce 1894[41].

[41] Johann Eggenberger, málo známý švýcarský statistik. Poznatek o normálním rozdělení u De Moivrea je v jeho disertaci *Beiträge zur Darstellung des Bernoulli'schen Theorems, der Gammafunktion und des Laplace'schen Integrals*, Bern 1893, a ve stejnojmenném článku v Mitteilungen der Naturforschendem Gessellschaft, Bern 1893, 110-182, které jsou několikrát citovány nejen jeho současníkem E. Czuberem (1899) a D. Mirimanoffem (1930), ale i o sto let později Haldem (1998).

FLUXIONUM

Methodus Inverſa;

SIVE

QUANTITATUM FLUENTIUM

LEGES GENERALIORES.

AD

Celeberrimum Virum,

ARCHIBALDUM PITCARNIUM,

Medicum Edinburgenſem.

A

GEORGIO CHEYNÆO, M.D. & R.S.S.

LONDINI

Typis J. Matthews, & proſtant Venales apud R. Smith ad Inſigne Bibliorum ſub Excambio Regali, ut & complures Bibliopolas. MDCCIII.

Obr. 14 Titulní stránka Cheyneovy knihy z roku 1703.

KORESPONDENCE A. DE MOIVREA A JOHANNA BERNOULLI

Korespondence mezi oběma matematiky probíhala od roku 1704 do roku 1714. Nejprve se týkala knihy skotského lékaře Georgea Cheynea (1671-1743) *Fluxionum Methodus Inversa; Sive Quantitatum Fluentium Leges Generaliores* vydané roku 1703 a zabývající se dosti laicky leč neurvale nejen infinitesimálním počtem, ale také stranící nekriticky v již probíhajícím sporu o prioritu mezi Leibnizem a Newtonem[42] anglickému matematikovi[43]. Johann Bernoulli byl v době jejího vydání profesorem na univerzitě v Groningen. Knihu mu donesl jeden z jeho známých, Skot jménem Falconer, a požádal jej o její přečtení a posouzení. Po jistém zdráhání to Johann Bernoulli učinil a Falconerovi poslal zdvořilý dopis (ve Wollenschlägerově vydání korespondence je otištěn), v němž knihu nejprve formálně pochválil, ale pak vytkl její podstatné nedostatky. Falconer tento dopis poslal autorovi a Cheyne následně požádal jeho pisatele o podrobné připomínky, což nakonec Bernoulli udělal. Mezitím De Moivre napsal o Cheyneově knize výše zmíněný poměrně nelítostný kritický spisek *Animadversiones in D. Georgii Cheynaei Tractatum de Fluxionum Methodo Inversa* (1704) zčásti jistě vyvolaný i tím, že Cheyne bez odkazu uvádí jako vlastní některé De Moivreovy výsledky. Jenže než ten vyšel, stačil Cheyne publikovat dodatek *Addenda et adnotanda in D. G. Cheynaei libro* (1704), v němž zmiňuje Johanna Bernoulli jako svého příznivce; neuvedl však, že opravy jsou založeny na jeho připomínkách. Na *Animadversiones* odpověděl velmi osobně zaměřeným pamfletem *Rudimentorum methodi fluxionum inversae specimina, adversus Abr. de Moivre* (1705), na nějž již De Moivre nijak nereagoval[44]. *Animadversiones* však hned po jejich vydání poslal v *Addenda* zmíněnému Johannu Bernoulli, čímž vzájemná korespondence začala.

V roce 1705 zemřel Jakob Bernoulli a Johann po něm získal profesuru v Basileji. De Moivre se díky písemnému styku seznámil s jeho synovcem Nikolausem a posléze i s Pierrem Rémondem de Montmort, které uváděl do anglické vědecké společnosti při jejich návštěvách v Anglii. Johann Bernoulli věnoval veškeré své korespondenci velkou pozornost, schovával všechny došlé dopisy a od odeslaných si pořizoval kopie, doufaje, že celá jeho korespondence bude jednou vydána, což se však nestalo. Je třeba připomenout, že pravidelná pošta tehdy ještě neexistovala a dopisy se posílaly prostřednictvím cestujících přátel, kteří měli adresáta na své plánované trase.

Korespondence De Moivrea a Johanna Bernoulli sestává z 19 dopisů, převažuje v nich francouzština, jen některé (obvykle matematické) části jsou v la-

[42] Podrobně viz Cantor (1898) a Hall (1980).

[43] I. Schneider (1968) soudí, že impuls k napsání polemiky mohl pocházet od Newtona. Ten se Cheyneovou knihou mohl cítit ohrožen vzhledem k tomu, že sám dosud nevydal práci o kvadratuře, na níž pracoval od roku 1793 (viz též Bellhouse a Genest (2006)).

[44] Spor měl ještě smírnou dohru, o níž se lze dočíst v Pearson (1978) (viz též Hald (2003), str. 399). Kolem roku 1725 publikoval Cheyne esej o zdraví, v němž píše: „Obrana této knihy [*Fluxionum Methodus Inversa*] proti učenému a bystrému panu A. de Moivreovi byla psána neseriózně a v rozčílení, a já ji co nejupřímněji odvolávám a přál bych si, aby vůbec nebyla, neb je osobní a nepřívětivá, a žádám jej i svět o prominutí.“

tině. Téměř v každém dopise jsou řešeny jednak osobní a společenské záležitosti a vztahy, jednak se pisatelé informují o svých současných matematických výsledcích. Tato druhá složka korespondence postupně mizí, především v dopisech De Moivreových po roce 1708, kdy patrně ztratil naději na získání univerzitního místa někde v Evropě. Jejich zachycení by však neúměrně prodloužilo délku tohoto příspěvku a proto jsou jen velmi stručně zmíněny.

Korespondenci zahajuje De Moivreův dopis z 22. 4. 1704, jemuž však chybí první stránka, a uzavírá dopis Johanna Bernoulli ze 4. 8. 1714. K jejímu ukončení došlo zřejmě díky plnému propuknutí sporu o prioritu mezi Newtonem a Leibnizem[45], v němž se De Moivre a Bernoulli nakonec ocitli na opačných stranách, zčásti proti své vůli.

Spor se zvolna rozvíjel po Leibnizově publikaci výsledků v jím založeném časopise *Acta Eruditorum* v letech 1682 a 1684. Newton totiž své pojetí infinitesimálního počtu (teorii fluxí) zformuloval a rozvinul v letech 1665 až 1666, která kvůli morové epidemii trávil doma ve Woolsthorpu, ale nepublikoval je[46]. V okruhu jeho přátel a žáků se ovšem šířilo, a tak mohl Cheyne napsat ve svých *Fluxionum*, že „to, co zbytek matematiků publikoval za posledních 24 let, není než opakování a důsledky toho, co pan Newton sdělil svým přátelům“ (citováno podle dopisu Johanna Bernoulli Falconerovi ze dne 14. 8. 1703). Takové hodnocení se muselo Bernoulliho mimořádně dotknout, protože on i jeho bratr (od něj pochází i termín *integrál*) s Leibnizem téměř dvacet let spolupracovali, Johann novou teorii šířil ve Francii a díky jemu ji pak dále propagoval i G. F. A. l'Hôspital[47]. V korespondenci De Moivrea

[45] Pro Newtona byla výchozím bodem pro vytvoření infinitesimálního počtu problematika spojená s gravitací a pohybem planet, tedy analýza pohybu ve vztahu k působícím silám. Leibnizův přístup byl více geometrický, veden snahou potvrdit jeho filozofické názory, podle nichž existence objektů byla výsledkem součinnosti nepozorovatelných metafyzických entit (monád), které dohromady vytvářejí svět (přeneseno do matematiky pak například konečná plocha je součtem infinitesimálních oblastí). Podrobněji viz například Schwabik a Šarmanová (1996).

[46] V souvislosti s prioritním sporem Newton – Leibniz stojí za zmínku fiktivní „prioritní spor“ Hippokrates – Harvey, na němž se podílel skotský lékař Archibald Pitcairne (1652-1713). V roce 1628 publikoval William Harvey (1578-1657) svou studii o srdci a krevním oběhu. Poté, snad nad jeho hrobem, vyvstala otázka, zda priorita v objevu a zjištění významu krevního oběhu patří Hippokratovi či Harveymu. Pitcairne v roce 1688 (tj. rok po vydání Newtonových *Principia*) publikoval čtrnáctistránkový traktát *Solutio Problematis de Historicis, Inventoribus*. V něm prezentuje dva teorémy o prioritě, z nichž druhý postuluje, že priorita patří tomu, kdo objev první veřejně přednesl a dále jej prezentoval beze změn, a nepřipouštěl věci, jež by objevu odporovaly. S použitím postulátů a dalších svědectví pak přiřkl prioritu Harveyovi, což vzbudilo velkou radost anglické veřejnosti. Tytéž nadšeně přijaté postuláty by však daleko jednoznačněji přiřkly prioritu Leibnizovi ve druhém prioritním sporu. To si ovšem nikdo v Anglii nepřál, a traktát už nebyl více vzpomínán a úplně zapadl, ba dokonce snad i zmizel z knihoven. A Pitcairn zcela mlčel v letech 1710 až 1712, kdy otázku Newtonovy priority řešil výbor Royal Society, v němž asi zase mlčel jeden z jeho členů, Pitcairnův přítel John Arbuthnot, ve chvíli, kdy Leibniz byl obviněn z plagiátorství. Je potom jistou ironií, že právě tomuto Pitcairnovi připsal svou knihu G. Cheyne. Podrobněji viz Stigler (1999), str. 208-212.

[47] Guillaume François Antoine Marquis de l'Hôspital (1661-1704), francouzský matematik, žák Johanna Bernoulli, jehož upravené učební texty vydal jako první učebnici infini-

s Johannem Bernoulli se tak po léta probíhající spor ozývá, a neustálé vyvolávání Cheyneova ducha, který se jich dotkl obou, je zástupným a zároveň sjednocujícím problémem. Johann Bernoulli v dopise z 22. 4. 1704 vyjadřuje svou víru, že „... pan Newton by bezpochyby nechtěl, aby mu zbudovali sochy na troskách dobré pověsti někoho jiného“[48], a žádá De Moivrea o předání pozdravů a vyjádření úcty Newtonovi. Zároveň vyjadřuje své politování nad tím, že mu nedostatečná znalost angličtiny ztěžuje čtení jeho *Opticks*. Na což De Moivre odpovídá (13. 3. 1705), že Newton Johanna Bernoulli rovněž pozdravuje a že se připravuje i vydání *Opticks* v latině, které mu obratem zašle, jakmile vyjde. Na jiném místě pak píše, že se od celého sporu distancuje[49] a zároveň chválí uměřený přístup obou bratrů Bernoulliových. K zásilce *Opticks* pak přidává Halleyův překlad arabské verze Apollonia[50]; oboje podle dopisu z 8. 7. 1706 posílá De Moivre jak Johannovi Bernoulli, tak i Leibnizovi.

V dalším dopise z 2. 12. 1707 se De Moivre omlouvá za své dlouhé mlčení (Johannův dopis byl ze 6. 4. 1707) a vysvětluje je úpornými a dlouhodobými bolestmi hlavy, které přešly až poté, co se vzdal šňupavého tabáku. Dále děkuje Johannovi za jeho snahu, o níž se dozvěděl od společného známého, doporučit De Moivrea Leibnizovi, aby se ten svým vlivem pokusil pro něj najít kdekoliv volné místo. Poté následuje již zmíněné vylíčení jeho problému uživit se v Anglii jinak, než soukromými hodinami. Ze dvou volných (podle sdělení nejmenovaných přátel) kateder ve Franeckeru (město ve Frísku, kde byla v letech 1585 až 1811 univerzita) a v Groningen by si zvláště cenil místa druhého, uvolněného Bernoullim, kde by snad byl přijat s pověstí jeho žáka[51]. Naděje jsou ještě živé v dopise ze 6. 7. 1708, kde kromě zpráv o svých současných výsledcích zdůvodňuje, proč neodpovídá na Cheyeneovy další útoky tím, že pro neustálé chození od žáka k žákovi nemá na nic čas: „Po pravdě jsem tak zaměstnán chozením od rána do večera, že nemám čas se věnovat ani menším věcem, a když skončím své hodiny, musím si trochu odpočinout, abych nabral dech.“

Odpovědi se De Moivre dočkal až téměř za dva roky, 9. 4. 1710, s odůvodněním, že ji nebylo po kom poslat. Místo v Groningen je stále volné pro místní neshody a navíc mezitím zemřel Bernoulliův příznivec, od nějž byla očekávána přímluva. Leibnizův zájem o De Moivreův osud prý nicméně trvá, měl by však publikovat některé své práce v *Acta Eruditorum* (v korespondenci nazývaných *Actes de Leipsic*), aby se jeho jméno stalo v Evropě více známým. V houstnoucí atmosféře prioritního sporu[52] to samozřejmě nepřipadalo v úvahu, z Anglie se

---

tesimálního počtu pod názvem *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* (1696).

[48] ... M. Newton sans doute ne voudra pas lui-même qu'on lui érige des statues sur la ruine de la bonne renomée d'un autre.

[49] ... je n'entre point dans la dispute si lui [Newton] ou M. Leibniz sont auteurs du calcul differentiel.

[50] Jedná se o Halleyův překlad traktátu řeckého matematika Apollonia (262-190 př. Kr.) *De sectione rationis* nebo o jeho rekonstrukci Apolloniova ztraceného spisu *De sectione spatii*; oboje vyšlo v Oxfordu v roce 1706.

[51] ... une personne qui fait gloire d'être votre disciple.

[52] V roce 1908 napsal Newtonův obdivovatel John Keill (1671-1721), filozof přírodních

v „Leibnizově" časopise nepublikovalo ani v lepších dobách[53].

Více než další dva roky uplynuly do De Moivreovy odpovědi z 18. 10. 1712. Je v ní popisována úspěšná návštěva Bernoulliova synovce Nikolause v Anglii; De Moivre jej seznámil s Halleyem, třikrát byli přijati Newtonem a pozváni k němu domů na oběd. Při jednom setkání Nikolaus upozorňuje Newtona na chybu v jeho slavných *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, což je dobře přijato a pro chystané nové vydání opraveno. S Halleyem se Nikolaus také zúčastnil menšího zasedání Royal Society. Nejzajímavější částí dopisu je vylíčení vzniku *De Mensura Sortis*: „Bylo napsáno pro potěšení jednoho velmi zasloužilého a urozeného muže[54], který se při hovoru o knize pana de Montmort zmínil, že jeden obtížný problém, který se sám několikrát marně snažil vyřešit, v ní nenašel."

---

věd, astronom a člen Royal Society, článek do *Philosophical Transactions*, v němž explicitně označil Leibnize za plagiátora. V něm poté, co napsal, že jisté všechny zákony plynou ze slavné teorie fluxí objevené nepochybně panem Newtonem, pokračuje: „... a tato teorie pod jiným jménem a způsobem zápisu byla potom publikována panem Leibnizem v *Acta Eruditorum*" [... yet the same arithmetic, under a different name and method of notation, was afterwards, published by Mr. Leibniz in Acta Eruditorum]. Článek vyšel v roce 1710 a Leibniz po jeho přečtení žádal od Royal Society omluvu. Newton Keillovi s psaním omluvy pomohl; to, co vzniklo, však nebyla žádná omluva, ale opakování předchozího tvrzení v lehce změněné podobě s odvoláním na Newtonovy dopisy Leibnizovi z roku 1676, předané mu tehdejším sekretářem Royal Society a prvním editorem *Philosophical Transactions* Henry Oldenburgem (1619-1677). V omluvě se uvádí, že „na základě těchto dopisů Leibniz odvodil principy tohoto počtu nebo přinejmenším to mohl učinit ..." [Leibniz derived the principles of that calculus or at least could have derived them ...]. S podobnou omluvou se Leibniz nespokojil a dožadoval se začátkem roku 1712 omluvy nové. Newton nato jmenoval jako president společnosti *nestranný mezinárodní* výbor pro objektivní posouzení celé záležitosti. Aby jeho *nestrannost* byla zaručena, byla jména členů výboru tajná a byla v archivu společnosti nalezena až v roce 1846. Výbor se vesměs skládal z Newtonových příznivců; ze známých lidí mezi nimi byli Edmond Halley, John Arbuthnot, Francis Robartes, Brook Taylor (po němž je pojmenován Taylorův rozvoj funkce objevený Jamesem Gregory v roce 1671), John Machin (známý návrhem rychle konvergující řady pro číslo π, s jejíž pomocí bylo spočteno na 100 desetinných míst; je o něm také zmínka v De Moivreově korespondenci s J. Bernoullim) a *mezinárodnost* výboru byla zajištěna účastí Louise Fredericka Boneta, pruského vyslance, a De Moivrea (!). Výbor se posouzení věnoval asi 50 dnů a dal samozřejmě za pravdu Keillovi. Ačkoliv Newton prohlásil, že jednání výboru nebude ovlivňovat, obsahuje podrobná zpráva údaje, které nemohl dodat nikdo jiný než on, a v archivech se našel předběžný text zprávy napsaný jeho rukopisem. Zpráva končí slovy „... z těchto důvodů uznáváme pana Newtona jako prvního objevitele a jsme toho názoru, že pan Keill nezpůsobil panu Leibnizovi žádnou újmu, když tvrdil totéž ..." [... for which reasons we reckon Mr. Newton the first inventor and are of the opinion that Mr. Keill in asseting the same has been in no way injurious to Mr. Leibniz ...]. Stanovisko výboru (nepodepsané!) nazvané *Commercium Epistolicum Collinii & aliorum, De Analysi promota* bylo rozesláno akademickým institucím v Anglii i v Evropě a v roce 1715 k němu vyšel podrobný anonymní, leč Newtonem napsaný komentář ve *Philosophical Transactions*. Leibniz byl takto veřejně zneuctěn, a při nástupu hannoverské dynastie, jejímž byl v Hannoveru archivářem, na anglický trůn mu byl králem zakázán přístup do Anglie. Reagoval ještě několika články v různých časopisech, ale boj jednotlivce s renomovanou vědeckou společností byl předem prohraný. Umírá v roce 1716.

[53] Když v roce 1696 zveřejnil Johann Bernoulli v *Acta Eruditorum* svou obecnou výzvu k nalezení rovnice brachistochrony, Newton své řešení publikoval anonymně ve *Philosophical Transactions*!

[54] Byl to již zmíněný Francis Robartes.

De Moivreovi se podařilo najít velmi obecné řešení[55] a jeho objednavatel Robartes je také úspěšně prakticky ověřil. De Moivreovi pak sdělil, „že podle zákonů hazardní hry existuje vysoká pravděpodobnost, že jeho řešení je správné“[56] a přemluvil jej, aby v práci pokračoval. Když byla hotova, velmi ji chválil a byla publikována ve *Philosophical Transactions*. Ačkoliv se De Moivre dozvěděl, že ji Bernoulli mezitím již dostal od jednoho svého známého, přesto mu ji posílá „na lepším papíře, než jsou *Philosophical Transactions* obvykle tištěny“.

V dopise z 23. 11. 1712 Johann Bernoulli děkuje za dobré přijetí synovce i za zprávu jím mu sdělenou, že Newton a De Moivre je oba chtějí navrhnout za členy Royal Society, čehož si velmi váží a rád přijme. Následuje poněkud komplikovaná pochvala *De Mensura Sortis* (dosti připomínající formální hodnocení, které se dostalo Cheyneovi ve výše zmíněném Bernoulliově dopise Falconerovi): „většinu problémů tam nalezených jsem vyřešil již dříve … způsoby vašeho řešení jsou často zcela odlišné … váš styl je příliš koncisní, stručný a obezřetný … zdá se, že předpokládáte čtenáře stejně osvíceného, jako jste sám … píšete pro vědce“, atd.

V závěru dopisu pak Bernoulli De Moivrea informuje o tom, že jeho synovec připravuje k vydání nedopsanou, jen zpola dokončenou knihu jeho zesnulého bratra, kterou [Nikolaus] nazval *Ars Conjectandi*[57]. Dědici že jej o tom neinformovali, a tak s tím nemá nic společného, korektor že je zcela neschopný a ničemu nerozumí, úplný slepec, a že to píše jen proto, aby De Moivre nebyl šokován, až uvidí obludu nesoucí jméno jeho zesnulého bratra[58].

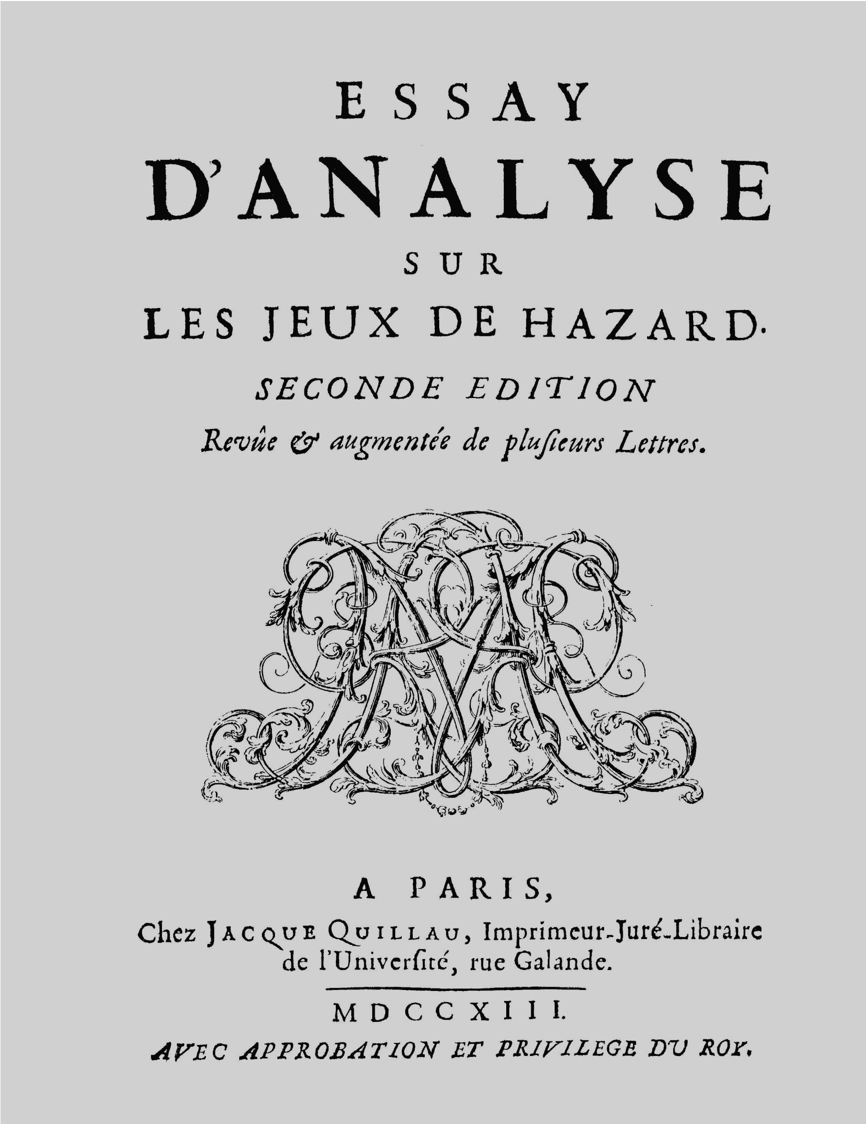
---

[55] Podle dopisu se jedná o úlohu 16 z *De Mensura Sortis*, De Moivre však v úvodu k této práci Robartesovi děkuje i za inspiraci k úlohám 17 a 18. Anglický překlad práce s komentářem je v Hald (1984).

[56] … que par les lois du Hazard, il y avoit une très grande probabilité, que ma solution étoit bonne.

[57] Název knihy byl patrně zvolen jako protiklad titulu latinského překladu výše zmíněné port-royalské učebnice logiky od A. Arnaulda a P. Nicole, který jako *Logica sive Ars Cogitandi* vyšel v roce 1662 v Londýně.

[58] … je vous le dis afin que vous ne vous scandalisiez pas, quand vous verrez paroître un monstre que portera le nom de feu mon frére.



ESSAY
D'ANALYSE
SUR
LES JEUX DE HAZARD.
SECONDE EDITION
Revûe & augmentée de pluſieurs Lettres.

A PARIS,
Chez JACQUE QUILLAU, Imprimeur-Juré-Libraire de l'Univerſité, rue Galande.

MDCCXIII.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

Obr. 15 Titulní stránka druhého vydání Montmortovy knihy z roku 1713.

Rychlá výměna dopisů pokračuje De Moivreovým sdělením ze 17. 12. 1712 o Bernoulliově přijetí za člena Royal Society. Nikolausovo přijetí bylo poněkud odloženo, protože Newton usoudil, že mezi přijetím strýce a synovce by měl být nějaký časový rozdíl, aby zásluhy prvního vynikly (nakonec však nebyl Nikolaus nikdy přijat). De Moivre se také zmiňuje o svém začínajícím sporu s de Montmortem, který vyvolala pasáž z úvodu k *De Mensura Sortis*. Je tam vzpomenut Huyghens jako první, kdo předložil pravidla pro řešení úloh tohoto typu (tj. objevujících se v hazardních hrách) a poté je zmíněn francouzský autor, který je zcela nedávno dobře ilustroval různými příklady; „nezdá se však, že tento vynikající pán dosáhl té jednoduchosti a obecnosti, kterou povaha věcí vyžaduje“[59]. Své nezdvořilé vyjádření De Moivre omlouvá tím, že nebylo úmyslné, že si de Montmorta velmi váží, a že jeho knihu pořádně nečetl, jak v úvodu přiznává[60]. V závěru slibuje poslat *Commercium Epistolicum*[61], jakmile vyjde.

Bernoulliův dopis ze 13. 2. 1713 začíná poděkováním za přijetí do Royal Society. Po zprávě o svých posledních matematických výsledcích komentuje pochvalně *De Mensura Sortis* a projevuje zájem o nové vydání Newtonových *Principia*, jakož i o *Commercium Epistolicum.* Bernoulli znovu píše De Moivreovi 20. 3. 1714, diví se, že na svůj poslední dopis nedostal odpověď a vyptává se na důvod jeho odmlčení, tj. zda nesouvisí s prioritním sporem; ujišťuje, že si obou soupeřících mužů váží stejně. Dále připomíná, že dosud nedostal slíbené knihy, oznamuje druhé vydání de Montmortovy knihy a slibuje poslat *Ars Conjectandi*, o něž De Moivre již dříve projevil zájem. K dopisu přikládá čtyři exempláře své práce *Essay d'une nouvelle Théorie de la Manoeuvre des Vaisseaux* [Pokus o novou teorii ovládání lodí] vydané v Basileji roku 1714, určené De Moivreovi, Newtonovi, Halleyovi a Burnetovi[62] jako reakci na starší spis se shodnou tématikou, kterou sepsal námořní inženýr Bernard Renau d'Eliçagary v roce 1689.

---

[59] „... sed non videntur viri clarissimi ea simplicitate ac generalite usi fusse quam natura rei postulat.“ Výrok se vztahuje k de Montmortově knize *Essay d'Analyse sur le Jeux de Hasard*, která vyšla v roce 1708.

[60] V následující korespondenci De Moivrea s de Montmortem došlo k určitému vyjasnění podstaty sporu: de Montmort shledává, že De Moivre řeší vesměs tytéž úlohy jako on a se stejným výsledkem. De Moivre však trvá na tom, že je řeší zásadně jiným způsobem, což měl na mysli svou úvodní poznámkou. Jejich vztahy se zlepšily v roce 1715, kdy de Montmort navštívil Anglii a De Moivre mu dělal tlumočníka, představil jej Newtonovi a uvedl do anglické učené společnosti. Po vydání *The Doctrine of Chances* však došlo k přerušení vztahů – viz níže.

[61] Jedná se o již výše zmíněné *Commercium Epistolicum Collinii & aliorum, De Analysi promota. Collinii* v názvu dokumentu se vztahuje k dopisům a archivu Johna Collinse (1624-1683), všestranné osobnosti anglického vědeckého života v XVII. století, předního člena Royal Society a vydavatele odborných knih. Collins byl s Leibnizem v písemném styku v době kolem jeho návštěv Londýna v osmdesátých letech XVII. století, a výbor se v Collinsově archívu snažil najít důkazy Leibnizova plagiátorství.

[62] Thomas Burnet (1635-1715), anglikánský kněz, kaplan krále Viléma III., autor velmi vlivné knihy *Telluris Theoria Sacra* [Posvátná teorie Země] (1681) vykládající potopu na základě geologických změn Země, v níž bylo ohromné množství vody, které způsobilo biblickou potopu. V *Archaeologiae Philosophicae* (1692) se snaží o alegorický výklad stvoření světa v šesti dnech i prvotního hříchu, což bylo považováno za těžkou herezi.

Ve svém posledním dopise z 28. 6. 1714 se De Moivre omlouvá za odmlčení způsobené opět špatným zdravím – úpornými bolestmi hlavy, souvisejícími zřejmě s námahou spojenou s docházením za žáky. Ujišťuje Johanna, že i kdyby se plně postavil za Leibnize, na jeho vztahu k němu by to nic nezměnilo. Zmiňuje však, že Newton byl dotčen obviněním z plagiátorství, které se objevilo v jistých letácích[63]. Předává též Newtonovu omluvu za to, že neposlal *Principia*; prý zapomněl, že to Bernoullimu slíbil, teď nemá žádný výtisk, ale určitě pošle jeden z druhého vydání.

Korespondence končí 4. 8. 1714. Bernoulli v dopise projevuje svou účast s De Moivreovými zdravotními potížemi, lituje, že osoba jeho kvalit nemá lepší a důstojnější zaměstnání, ale také konstatuje, že sám, ač je profesorem na univerzitě, přednáší většinou jen elementární aritmetiku a základy geometrie. Převážná část dopisu je věnována prioritnímu sporu, zmiňován je jak Cheyne, tak Keill, který ve své práci z roku 1714 explicitně Johanna napadá. Bernoulli znovu De Moivrea ujišťuje o své snaze být nestranný, posílá své pozdravy Newtonovi i Halleyovi, ale patrně cítí, že být zadobře s oběma stranami sporu je již nadále nemožné[64].

Vrátíme-li se nyní na okamžik k výše popisované problematice dodatků k *Miscellanea Analytica*, uveďme ještě, že Daw a Pearson (1972) se pokoušejí Schneiderův nález exempláře *Miscellanea Supplementum* v Basileji vysvětlit častou korespondencí mezi De Moivrem a Johannem Bernoulli. Ta však téměř jistě definitivně skončila téměř dvacet let před vznikem *Supplementum*, neboť v Johannem pečlivě schraňované korespondenci se žádné pozdější dopisy nenašly. Pravděpodobnější je proto jejich hypotéza, že Archibaldem nalezený exemplář berlínský by mohl souviset s De Moivreovým zvolením do Berlínské akademie v roce 1735. Ruské exempláře přičítají De Moivreovým možným stykům s L. Eulerem, který byl od roku 1727 v Petrohradě (profesorem od roku 1733); o těch však není nic známo. Vysvětlením místa jejich nálezu by spíše mohl být trvale udržovaný styk Johannova syna Daniela s Eulerem[65]. Zájem Bernoulliovy rodiny o De Moivreovu knihu je pravděpodobný, museli si ji však patrně obstarat bez De Moivreova přispění.

---

[63] První Leibnizovou reakcí na závěry komise Royal Society byl leták z roku 1713, v něž mj. cituje z dopisu Johanna Bernoulli tvrzení (jeho původcem byl po své návštěvě v Anglii Nikolaus Bernoulli), že Newton nerozumí derivacím vyšších řádů. Bernoulli Leibnize žádal, aby pokud toto tvrzení někde uvede, nesděloval jeho původce: Leibniz to však nerespektoval. Viz Cantor (1898).

[64] Prioritní spor a jednání „nestranného mezinárodního výboru“ ožilo v současné době na evropských jevištích hrou *Calculus*, jejímž autorem je americký profesor chemie, romanopisec a dramatik rakouského původu Carl Djerassi. Hlavním hrdinou hry je J. Arbuthnot a jednou z postav je i De Moivre. Po své premiéře 13. 5. 2002 v Berkeley se hra v dalších letech s úpěchem hrála v Londýně, Vídni, Berlíně a i jinde. Je vystavena na internetové stránce `www.djerassi.com`.

[65] Daniel Bernoulli odjel do Petrohradu se svým bratrem Nikolausem v roce 1725, Nikolaus však v roce 1726 umírá. Následuje šestiletá úzká spolupráce s Eulerem, která pokračuje i po Danielově odjezdu z Ruska v roce 1733.

OSTATNÍ KORESPONDENCE ABRAHAMA DE MOIVREA

Z ostatní De Moivreovy korespondence se dochovalo jen velmi málo; několik dopisů odborné povahy bylo publikováno již za jeho života, o ostatních jsou k dispozici pouze nepřímá svědectví. Podrobný přehled je v práci Schneidera (1968), zde je uveden stručný výtah z ní.

V letech 1712 až 1714 napsal De Moivreovi tři dopisy Nikolaus Bernoulli, odpověď však dostal jen na prostřední z nich, neboť došlo k úplnému přerušení De Moivreových styků s rodinou Bernoulli v důsledku plného rozvinutí prioritního sporu mezi Leibnizem a Newtonem. Nikolaus Bernoulli se tím cítil značně dotčen, protože se ještě v roce 1728 v dopise G. Cramerovi[66] z 3. 7. zmiňuje, že na odpověď De Moivrea čeká 14 let[67].

Některé De Moivreovy práce měly formu dopisu a jako takové byly i uveřejněny. Jeho první publikace ve *Philosophical Transactions* je dopis E. Halleyovi (adresát není explicitně uveden, ale bylo to všeobecně známo), další dopis Halleyovi z doby po roce 1705 byl zveřejněn posmrtně v roce 1761 v krátkodobě existujícím časopise *The Mathematical Magazine and Philosophical Repository.* I De Moivreova práce z roku 1722 otištěná opět ve *Philosophical Transactions* je dopisem tehdejšímu sekretáři Royal Society Johnu Machinovi (1680-1751). Patrně rozsáhlejší byla korespondence s cambridgeským profesorem Nicholasem Saundersonem[68], po jehož smrti se De Moivre ucházel o uvolněné místo (viz poznámka [13]). Konečně v *Miscellanea Analytica* De Moivre přetiskuje dopis od J. Stirlinga.

Ostatní korespondence se nedochovala, svědectví o ní však lze nalézt v dopisech De Moivreových současníků. Rozsáhlejší byla s P. R. de Montmortem. Začala v roce 1714, kdy de Montmort poslal De Moivreovi svou právě vyšlou knihu (druhé vydání *Essay d'Analyse* z roku 1713) a skončila v roce 1718, kdy naopak De Moivre poslal svou právě vyšlou *The Doctrine of Chances* de Montmortovi a ten byl uražen nedostatečnou citovaností výsledků svých a Nikolause Bernoulli; smrt de Montmorta v roce 1719 zabránila případnému smíření.

Existovat musela také korespondence s členem Berlínské akademie profesorem Philippem Naudé (1684-1747) v souvislosti s De Moivreovým přijetím za člena této vědecké instituce; z ní se však nic nedochovalo. V *Miscellanea Analytica* je také zmíněna korespondence s Brookem Taylorem[69] (v letech 1718 až 1720) na téma nekonečných řad.

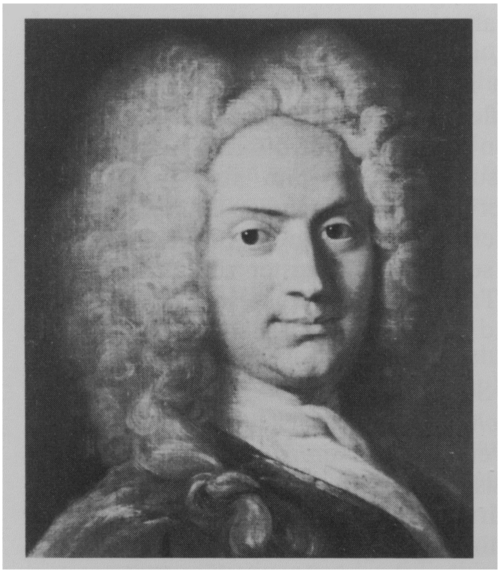
---

[66] Gabriel Cramer (1704-1752), švýcarský matematik, ve své práci *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébrique* (1750) podal klasifikaci algebraických křivek. V jejím dodatku se objevilo i známé Cramerovo pravidlo, jež však znal již Colin MacLaurin v roce 1729. Cramer byl rovněž úspěšným editorem, v roce 1742 vydal ve čtyřech svazcích kompletní dílo Johanna Bernoulli.

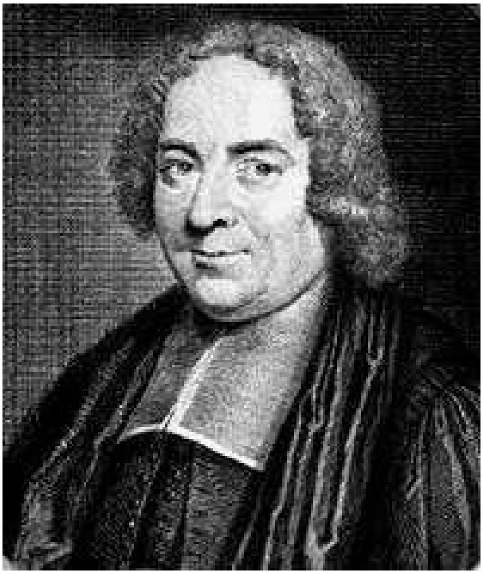
[67] „... que c'est la lettre, dont il parle lui même dans son Livre Doctrine of Chances page 142, à laquelle j'attends une response depuis 14 ans" [... že to je ten dopis, o němž se sám zmiňuje ve své knize *Doctrine of Chances* na straně 142, a na nějž odpověď čekám 14 let].

[68] Nicholas Saunderson (1682-1739) byl profesorem na lucasiánské katedře matematiky v Cambridgi v letech 1711 až 1739. Posmrtně vyšly jeho *Elements of Algebra* (1740) obsahující tři listy z této korespondence.

[69] Brooke Taylor (1685-1731), anglický matematik známý svými pracemi z diferenciálního a integrálního počtu (Taylorův rozvoj, integrace *per partes*) a z lineární perspektivy.



Obr. 16 Nikolaus Bernoulli (1687-1759).



Obr. 17 Pierre Varignon (1654-1722).

Početně nejrozsáhlejší korespondence probíhala s francouzským matematikem P. Varignonem[70]. Byla inspirována Johannem Bernoulli, který Varignona uvedl jako svého pařížského korespondenta a zpravodaje. De Moivre zaslal Varignonovi nejprve v roce 1706 své *Animadversione*, na děkovný dopis Varignonův však odpověděl až v roce 1714 a korespondence pokračovala až do Varignonovy smrti. Obsahovala více než 30 dopisů a zprávy o ní se dochovaly ve Varignonových listech Johannu Bernoulli. Tato korespondence zčásti, ne-li úplně, zprostředkovávala nepřímý styk mezi Johannem Bernoulli a Newtonem, kteří se v ní vzájemně ujišťovali úctou a přátelstvím a údajnou touhou po smíru. Keillova smrt v roce 1721 podle De Moivrea údajně odstranila hlavní překážku, nicméně ke smíru přesto nikdy nedošlo. Není známo, co korespondence obsahovala dále, protože Varignonovy citáty z ní v dopisech Johannu Bernoulli se týkaly pouze toho, co basilejského adresáta z dění v Anglii mohlo zajímat.

VYBRANÉ MATEMATICKÉ VÝSLEDKY ABRAHAMA DE MOIVREA

Výše zmíněná De Moivreova práce *A Method of raising an infinite Multinomial to any given Power, or extracting any given Root of the same* z roku 1697 i její pokračování *A Method of extracting the Root of an infinite Equation* z roku 1698 jsou věnovány nekonečným řadám s celočíselnými exponenty. V první jsou počítány koeficienty u členů $z^m, z^{m+1}, z^{m+2} \dots$ umocněné řady $(az+bz^2+cz^3+\dots)^m$. Tímto problémem se zabýval i Leibniz v dopise Johannu Bernoulli z roku 1695, De Moivreovi však patří publikační priorita. V druhé práci De Moivre aplikuje Descartesovu metodu neurčitých koeficientů na problém hledání kořenů nekonečné potenční řady (viz Cantor, 1898; str. 83). De Moivreovy výsledky se dostaly do polemiky mezi N. Fatiem de Duillierem[71] a Leibnizem. Fatio Leibnizovi vyčítá, že De Moivreovy výsledky dostatečně nedocenil, když se později touto problematikou začal zabývat.

Teorií pravděpodobnosti a hazardními hrami se De Moivre začal zabývat kolem roku 1708. Podle Schneidera (1968) mohlo být příčinou poznání, že univerzitního postavení v Anglii ani jinde nedosáhne, a že je proto vhodnější se věnovat aplikované matematice. *De Mensura Sortis* přednesené v Royal Society a publikované v jejích *Philosophical Transactions* (1712) je ovšem opět dílo určené spíše odborné veřejnosti. Kombinací exaktního přístupu s popularizací je až práce *The Doctrine of Chances* vydaná po prvé v roce 1718.

---

[70] Pierre Varignon (1654-1722), s Johannem Bernoulli udržoval písemný styk od roku 1692 až do své smrti. Větší část jejich korespondence byla v letech 1988 až 1992 publikována, viz Bernoulli, Johann I (1988, 1992).

[71] Nicolas Fatio de Duillier (1664-1753), švýcarský matematik a astronom, blízký přítel Newtonův v letech 1680 až 1690. Jeho spis *Lineae brevissimi descensus investigatio geometrica duplex* [Dvě geometrická zkoumání o brachistochroně] z roku 1699 je často považován za počátek prioritního sporu mezi Newtonem a Leibnizem.

De Mensura Sortis[72]

Lichotící a ponížené věnování F. Robartesovi (viz výše) je patrně dobový kolorit. Po něm následuje úvod, v němž jsou definovány všechny používané pojmy včetně pravděpodobnosti, zejména pak je zavedeno pravidlo o násobení pravděpodobností nezávislých jevů.

Jestliže dva jevy na sobě nezávisejí, takže p je počet možností, kdy nastane první jev a q je počet možností, kdy nenastane, a r je počet možností, kdy nastane druhý jev a s počet možností, kdy nenastane, pak součin $p + q$ a $r + s$ obsahuje všechny možnosti, jimiž k uskutečnění nebo neuskutečnění jevů může dojít.

Jednotlivé členy či jejich skupiny v součinu jsou pak interpretovány a je zmíněna možnost zobecnění na libovolný počet jevů.

Binomické rozdělení. Prakticky všechna De Moivreova řešení využívají binomického rozdělení, které je zavedeno hned v úvodu *De Mensura Sortis*:

Jestliže všechny jevy mají daný počet možností, jimiž nastanou, a podobně stejný počet možností, kdy nenastanou, a když a je počet možností, kdy každý jev nastane a b počet možností, kdy nenastane, a n je počet všech jevů, pak nechť $a + b$ je umocněno na n-tou.

Doslovně uveďme alespoň první příklad a jeho řešení.

Úloha 1: *A a B hrají s jednou kostkou tak, že když A z osmi hodů hodí šestku více než jednou, pak vyhrává, když ji však hodí jen jednou nebo ji nehodí vůbec, vyhrává B; jaké jsou šance hráčů?*

Řešení: Protože je jen jedna možnost pádu šestky a v pěti případech nepadne, je $a = 1$ a $b = 5$. A protože se hází osmkrát, je $n = 8$, a šance budou $(a + b)^n - b^n - nab^{n-1}$ ku $b^n + nab^{n-1}$, tj. 663991 ku 1015625, nebo přibližně jako 2 ku 3.

Celkem je řešeno 26 úloh, mezi nimiž je pět Huyghensem v závěru jeho *De Ratiociniis in ludo aleae* předložených a neřešených úloh, řada různých variant úlohy o rozdělení sázky, výpočty četností způsobů jak hodit daný součet bodů daným počtem kostek, určení počtu pokusů nutných pro nadpoloviční pravděpodobnost zadaného minimálního počtu úspěchů (tj. zobecnění Huyghensova Problému 1), dále tzv. problém obsazení a konečně úlohy Robartesova a Waldgraveova. Podobné úlohy se nacházejí i v de Montmortově *Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard*, zvláště v jeho druhém vydání. To bylo příčinou sporů mezi oběma matematiky, které však nepřerostly rozumnou míru. De Moivreova řešení jsou obvykle elegantnější a důmyslně využívající součtů nekonečných řad, zatímco Montmortův přístup je vesměs striktně kombinatorický. Uveďme alespoň některá zadání úloh, resp. jejich řešení.

[72] Následující přehled vychází z anglického překladu *De Mensura Sortis* publikovaného v Hald (1984) a z prezentace De Moivreových výsledků v Hald (2003).

Úloha o rozdělení sázky. Nejobecnější formulace úlohy o rozdělení sázky[73] mezi dva hráče je následující:

Dva hráči hrají hru o dohodnutý obnos a vítězem je ten, který první získá dohodnutý počet výher v jednotlivých kolech (například mohou střílet každý jednu ránu na terč a lepší získá bod). Hra je přerušena v okamžiku, kdy hráči A chybí do výhry a bodů, hráči B b bodů. Otázka zní, jak si mají rozdělit sázku, přičemž šance hráčů A, B na výhru jedné hry jsou obecně různé; označme je p, q.

V původní formulaci úlohy se hrálo na šest her, přitom $a = 1, b = 3$ a $p = q = 1$. Úloha byla uspokojivě vyřešena až Fermatem a Pascalem, kteří svá řešení založili na pravidle[74] (obecně tehdy patrně nikoliv známém), že záleží pouze na počtu bodů chybějících do výhry a nikoliv na tom, kolik bodů již bylo získáno. Předpoklad různých kvalit hráčů byl doplněn až později.

Obecné řešení zřejmě plyne z výše uvedeného De Moivreova pravidla pro násobení pravděpodobností resp. četností nezávislých jevů. Nutný počet her do vítězství je $a + b - 1$. Jestliže šance hráče A vyhrát hru je p a šance ji prohrát je q, pak všechny možné případy zachycuje výraz

$$(p+q)^{a+b-1} = \sum_{i=0}^{a+b-1} \binom{a+b-1}{i} p^i q^{a+b-1-i},$$

přičemž hráč A musí vyhrát a-krát, takže jeho šance je

$$e(A) = \sum_{i=a}^{a+b-1} \binom{a+b-1}{i} p^i q^{a+b-1-i}$$

a šance hráče B je tedy

$$e(B) = \sum_{i=0}^{a-1} \binom{a+b-1}{i} p^i q^{a+b-1-i}.$$

Dosazením $p = q = 1$ a $a = 1, b = 3$ dostaneme Fermatovo a Pascalovo řešení úlohy, tj. 7 ku 1. Úlohu lze formulovat a vyřešit i pro libovolný počet hráčů; vyskytuje se u De Moivrea v *De Mensura Sortis* (úlohy 2, 3, 4 a 8) i u de

---

[73] V různých verzích se úloha vyskytuje v italských rukopisech ze XIV. a XV. století, O. Ore (1960) o ní našel nejstarší zmínku v rukopise z roku 1380. Obvykle však bývá spojována se jménem Luca Pacioli (1445-1517), který ji uvádí ve své knize *Summa* z roku 1494 takto: *Dva hráči míčové hry se dohodnou, že smluvenou sázku získá ten, kdo první dosáhne šesti bodů. V okamžiku, kdy stav je 5:3, musejí hru ukončit. Jak se mají o sázku rozdělit?* Jeho řešení, že částka má být rozdělena v poměru dosažených bodů, je zřejmě nesprávné. Nesprávná řešení podali i N. F. Tartaglia (1499-1557) a G. Cardano (1501-1570), nejblíže správnému řešení byl G. F. Peverone (1509-1559), který již správně počítal pouze s body chybějícími do konce hry a dostal dělení 6:1, což je již hodně blízko správnému poměru 7:1.

[74] V knize *Liber de ludo aleae*, která však vyšla až roku 1663, je jako tzv. *princip úměrnosti* formuloval i G. Cardano: *Při řešení nejisté úlohy v budoucnosti máme uvažovat pouze to, co se může stát, a nikoliv to, co se již stalo.*

Montmorta (1713), který uvádí, že jej na ni upozornil Johann Bernoulli v dopise z roku 1713. Uveďme opět jeden příklad o dvou hráčích různých kvalit.

ÚLOHA 4: *Hráči A a B hrají kuželník na tři hry a hráč A si může dovolit pustit jednu hru, aniž ztratí šanci vyhrát. Jaký je poměr kvalit hráčů?*

Řešení: Hráč A tedy musí vyhrát třikrát dřív, než hráč B vyhraje ještě dvakrát. Je tedy $a = 3$, $b = 2$, a nechť schopnosti hráčů jsou z a 1, nejvyšší nutný počet her je 4, tj. rozkládáme $(z+1)^4$ a poměr šancí A ku B, tj. $(z^4 + 4z^3) : (6z^2 + 4z + 1)$, je roven jedné. Řešením dostaneme jediný reálný kladný kořen přibližně $z = 1.6$ (druhý reálný kořen je -5.04 a dva kořeny jsou komplexní).

Poissonovo rozdělení jako limitní případ rozdělení binomického. V *De Mensura Sortis* se vyskytují úlohy (čísla 5, 6 a 7), v nichž De Moivre jako první dospěl k Poissonovu rozdělení $\mathrm{Po}(\lambda)$, jež je limitním případem rozdělení binomického $\mathrm{Bi}(n,p)$ (zde n je počet opakování jevu a p jeho pravděpodobnost) pro případ, že $p \to 0, n \to \infty$ a $np = \lambda$ je konstanta. Pravděpodobnost, že náhodná veličina s rozdělením $\mathrm{Po}(\lambda)$ nabude hodnoty k, je $\mathrm{P}_\lambda[X{=}k] = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$. Problém limitních vlastností binomického rozdělení se objevuje již u Jakoba Bernoulli v *Ars Conjectandi* (to však v roce 1712 ještě nevyšlo) a lze je zformulovat následovně:

Mějme jev, jehož pravděpodobnost je p. Kolik pokusů je třeba provést, aby pravděpodobnost, že jej realizujeme nejméně c-krát byla rovna $\frac{1}{2}$?

Triviální případ je počet opakovaných hodů kostkou za podmínky, že pravděpodobnost pádu alespoň jedné šestky je větší než $\frac{1}{2}$: platí $(\frac{5}{6})^n = \frac{1}{2}$, tj. $n = \frac{\log 2}{-\log \frac{5}{6}} = 3.802$. Obecné úloze zřejmě odpovídá podmínka

$$\mathrm{P}[x \leq c-1] = \sum_{x=0}^{c-1} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \frac{1}{2}.$$

De Moivre zavedl $r = \frac{q}{p}$, tj. $q^{-1} = 1 + \frac{1}{r}$ a řeší případ, že $p \to 0$, takže $r \to \infty$, přičemž zřejmě také $n \to \infty$. Pak provede úpravu, v níž zavede $m = \frac{n}{r} = \frac{np}{q}$:

$$\sum_{x=0}^{c-1} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = q^n \sum_{x=0}^{c-1} \binom{n}{x} \frac{1}{r^x} = \left(1 + \frac{1}{r}\right)^{-n} \sum_{x=0}^{c-1} \binom{n}{x} \frac{1}{r^x} =$$

$$= \left(1 + \frac{m}{n}\right)^{-n} \sum_{x=0}^{c-1} \frac{m^x}{x!} = \frac{1}{2}.$$

V moderním zápisu bychom napsali

$$\frac{1}{2} = \sum_{x=0}^{c-1} \mathrm{P}_m[X{=}x],$$

kde $\mathrm{P}_m[X = x]$ je pravděpodobnost, že náhodná proměnná X s rozdělením $\mathrm{Po}(m)$ nabývá hodnoty x. De Moivre ovšem hledá hodnoty $m = \frac{np}{q}$ a konstatuje, že $\left(1 + \frac{m}{n}\right)^{-n}$ pro $n \to \infty$ je veličina mající hyperbolický (tj. přirozený) logaritmus $-m$. Zápis typu e^{-m} tehdy ještě nebyl zaveden, proto vztah zapsal ve tvaru

$$m = \ln 2 + \ln\left[1 + m + \frac{m^2}{2!} + \cdots + \frac{m^{c-1}}{(c-1)!}\right]$$

a z něj pak počítal m pro $c = 1, 2, \ldots, 6$; dostal hodnoty 0.693, 1.678 [1.67835], 2.675 [2.67405], 3.6719 [3.67206], 4.67 [4.67091] a 5.668 [5.67016] (pro porovnání jsou v hranatých závorkách uvedeny výsledky získané softwarem *Mathematica*). Na příklad pro hod tří šestek třemi kostkami dostaneme odhad počtu takových hodů pro rovnou šanci jako násobek $n = m \times \frac{q}{p} = 0.693 \times 215 \approx 149$ (De Moivre násobí 0.7 a dostává výsledek mezi 150 a 151). Chceme-li však, aby nám tři šestky padly dvakrát s pravděpodobností $\frac{1}{2}$, potřebujeme pokusů $215 \times 1.678 \approx 361$. Lze tedy konstatovat, že De Moivre Poissonovskou aproximaci binomického rozdělení odvodil i použil jako první.

Robartesova úloha. V této úloze se řeší problém dvou stejně dobrých hráčů hrajících koulenou [bowls].

První hráč má m koulí, druhý n koulí, které se snaží umístit co nejblíže zvolené značce. Hraje se na domluvený počet bodů, které jsou v jedné hře rovny počtu koulí bližších značce než nejbližší koule protivníka. Jaké jsou šance hráčů na výhru, když hráči A chybí jeden bod a hráči B body dva (úloha 16), resp. tři (úloha 17)?

Úloha byla De Moivreovi podle Úvodu k *De Mensura Sortis* a podle dopisu Johannu Bernoulli z 18. 10. 1712 předložena Francisem Robartesem. Jedná se vlastně o variantu úlohy o rozdělení sázky, kterou v moderní terminologii můžeme považovat za náhodnou procházku v rovině (viz Hald, 2003) s vertikálními kroky hráče A (délky $0, 1, 2, \ldots, m$) a horizontálními kroky hráče B (délky $0, 1, 2, \ldots, n$).

De Moivre řeší pouze symetrický případ, kdy oba hráči mají stejný počet koulí m, a dostane pomocí kombinatorických úvah řešení pro poměry šancí

$$\frac{e(A)}{e(B)} = \frac{5m-2}{3m-2} \quad \text{v prvním případě a} \quad \frac{23m^2 - 19m + 4}{9m^2 - 13m + 4}, \quad m > 1.$$

Pro $m = 1$ problém přechází na úlohu o rozdělení sázky. Dostáváme pak v prvním případě správný poměr šancí 3:1. Při odvozování druhého případu však byla hodnota $m = 1$ vyloučena a De Moivre provádí zvláštní odvození se správným výsledkem 7:1.

Waldegraveova úloha. Úloha se vztahuje k cyklické hře n hráčů a pro nejjednodušší případ tří účastníků byla vyřešena J. Waldegravem[75] a poté předložena de Montmortovi v roce 1713 (název úlohy zavedl až Todhunter

[75] James, první hrabě Waldegrave (1684-1741), anglický diplomat. Narodil se a byl vychován ve Francii, jeho otcem byl Henry, první baron Waldegrave, matkou Henrietta

(1865)). Kromě De Moivrea řešil úlohu také Nikolaus Bernoulli a posléze i Laplace. Úloha zní:

Po složení dohodnutého příspěvku f_0 do banku každým z hráčů A_1 až A_n stejných kvalit, první dva hráči začnou hrát. Ten z nich, který prohraje, přidá do banku částku f a nepokračuje dřív, než odehrají ostatní. Vítěz hraje s třetím hráčem atd. Když vítěz první hry porazí všechny, bere bank a hra končí, jinak se hraje další kolo tak dlouho, dokud jeden hráč neporazí postupně všechny ostatní. Úkolem je najít pro každého hráče pravděpodobnost výhry p_i, očekávanou výhru e_i a délku hry[76].

De Moivreovo řešení pro tři hráče A, B, C je následující. Označme výhru hráče X nad hráčem Y symbolem XY a předpokládejme nejprve, že v první hře vyhraje hráč B. Nechť podmíněná pravděpodobnost výhry hráče X v $d-$té hře je $p_X(d|BA)$ a místo $\frac{1}{2}$ píšeme q. Hra má pak toto schéma:

d	sled her	vítěz	$p_X(d\|BA)$	výhra
2	BA, BC	B	q	$3f_0 + 2f$
3	BA, CB, CA	C	q^2	$3f_0 + 3f$
4	BA, CB, AC, AB	A	q^3	$3f_0 + 4f$
5	BA, CB, AC, BA, BC	B	q^4	$3f_0 + 5f$
6	BA, CB, AC, BA, CB, CA	C	q^5	$3f_0 + 6f$
7	$BA, CB, AC, BA, CB, AC, AB$	A	q^6	$3f_0 + 7f$

Každý hráč má tedy po třech hrách šanci vyhrát a při velkém počtu her jsou pravděpodobnosti $p_X(d \to \infty|BA)$ rovny součtu nekonečných geometrických posloupností s kvocienty q^3 a počátečními členy q, q^2, q^3 pro hráče B, C, A:

$$p_B(\infty|BA) = \frac{4}{7}, \qquad p_C(\infty|BA) = \frac{2}{7}, \qquad p_A(\infty|BA) = \frac{1}{7}.$$

Nepodmíněné pravděpodobnosti jsou potom

$$p_A(\infty) = p_B(\infty) = \frac{p_B(\infty|BA) + p_A(\infty|BA)}{2} = \frac{5}{14} \qquad \text{a} \qquad p_C(\infty) = \frac{2}{7},$$

neboť výsledek hráče C nezávisí na tom, zda první hru vyhraje hráč A nebo B. Očekávané výhry pak dostaneme ve tvaru

$$e_A = e_B = \frac{105}{98} f_0 + \frac{99}{98} f \qquad \text{a} \qquad e_C = \frac{84}{98} f_0 + \frac{96}{98} f.$$

Fitzjames, nemanželská dcera vyhnaného krále Jakuba II. Po smrti své manželky James konvertoval k anglikánské církvi, vrátil se do Anglie a zasedal v Horní komoře parlamentu. V letech 1730 až 1740 byl vyslancem u francouzského dvora. V teorii her je známý především svým řešením týkajícím se hry *Le Her* (francouzský název odvozený od německého *Der Herr*), v němž po prvé použil tzv. minimaxní strategii, zaručující hráči co nejvyšší očekávanou výhru – podrobně viz Hald (2003), Hykšová (2004).

[76] Úlohu lze dále zkomplikovat předpokladem různých schopností hráčů.

Pro určení čistého očekávaného zisku g_X je však třeba ještě od výhry odečíst počáteční vklad f_0. Pak dostaneme

$$g_A = g_B = \frac{3}{42} f_0 - \frac{3}{49} f \qquad \text{a} \qquad g_C = -\frac{3}{21} f_0 + \frac{6}{49} f.$$

S rostoucím počtem hráčů se řešení značně komplikuje. De Moivre je publikoval také pro 4 hráče a naznačil možnost rozšíření na 6 hráčů, k úloze se vracel i v dalších vydáních *The Doctrine of Chances*. V jejím posledním vydání z roku 1756 v devítistránkové poznámce k úloze XLV podává zjednodušené numerické řešení pro 3, 4, 5 a 6 hráčů. Nejúplnější řešení podal Nikolaus Bernoulli, úloha je však diskutována ještě i A. De Morganem (1806-1871) v roce 1837 (viz Hald, 2003).

Úloha o zruinování hráče. Neobyčejně důmyslné je De Moivreovo řešení Huyghensova problému zruinování hráče, který však řeší v obecnější formě. Jeho moderní formulace (Hald, 1984) je následující:

Hráč A má a žetonů, hráč B jich má b. Hraje se libovolná hra, v níž hráči A, B mají pravděpodobnosti výhry $p, q = 1-p$ a výherce dostane od spoluhráče jeden žeton. Jaký je poměr pravděpodobností, že se jednomu z nich podaří připravit spoluhráče o všechny žetony?

De Moivre žetony očísluje na začátku čísly $x = 1, 2, \ldots, a$ (hráč A) a $x = a+1, \ldots, a+b$ (hráč B) a pak každému žetonu formálně přiřadí číslo $\left(\frac{q}{p}\right)^x$. Hraje se pak vždy o sousední žetony hráčů, tj. v první hře o žetony s čísly $\left(\frac{q}{p}\right)^a$ a $\left(\frac{q}{p}\right)^{a+1}$. Když vyhraje hráč A, hraje se v následující hře o žetony $\left(\frac{q}{p}\right)^{a+1}$ a $\left(\frac{q}{p}\right)^{a+2}$ atd. Očekávaná výhra je potom v každé hře s dělícím bodem čísel žetonů hráčů mezi $x, x+1$ rovna rozdílu mezi pravděpodobností výhry čísla žetonu soupeřova a pravděpodobností ztráty vlastního, tj. $p\left(\frac{q}{p}\right)^{x+1} - q\left(\frac{q}{p}\right)^x = 0$ pro hráče A a podobně $q\left(\frac{q}{p}\right)^x - p\left(\frac{q}{p}\right)^{x+1} = 0$ pro hráče B. Protože hráči mají v každé hře stejné očekávání, musejí mít stejné i očekávání celkové, rovné součtu čísel získaných žetonů násobené pravděpodobností celkového počtu her do jejich výhry, které označíme $P_a, P_b = 1 - P_a$. Musí tedy platit

$$P_a\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{a+1} + \cdots + \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}\right) = P_b\left(\left(\frac{q}{p}\right)^1 + \cdots + \left(\frac{q}{p}\right)^a\right),$$

a s použitím vztahu pro součet geometrické posloupnosti dostaneme

$$\frac{P_a}{1 - P_a} = \frac{p^b(p^a - q^a)}{q^a(p^b - q^b)}.$$

V originální páté Huyghensově úloze mají oba hráči 12 žetonů (tj. $a = b = 12$) a házejí třemi kostkami. Když padne 11 (27 možností z 216), platí hráč A, když padne 14 (15 možností z 216), platí hráč B. Odtud $\frac{p}{q} = \frac{5}{9}$ a $\frac{P_b}{P_a} = \left(\frac{9}{5}\right)^{12} = 1157$.

Úloha o trvání hry. Tato úloha je pokračováním úlohy předchozí, k níž přistupuje požadavek určení pravděpodobnosti, že hra skončí v $n-$tém kole nebo dříve. Objevuje se u de Montmorta (1708, 1713) a posléze také u Laplace. Podrobný vývoj řešení této patrně nejobtížnější úlohy z klasické teorie her je popsán v kapitolách 20 a 23 v Hald (2003). Lze ji řešit také pro úlohu Waldegraveovu. V *De Mensura Sortis* je jí věnováno celkem 7 úloh (20 až 26). Řešení nalezl Nikolaus Bernoulli, který je uvedl v korespondenci s de Montmortem a ten je publikoval s uvedením autora ve druhém vydání své knihy (1713). N. Bernoulli je také poslal De Moivreovi, jenž je komentuje v předmluvách ke všem vydáním *The Doctrine of Chances*.

Cílem následujícího řešení je určení pravděpodobnosti, že v $n-$tém kole hra skončí. Označme $u_n(x, a, b)$, $-a < x < b$, pravděpodobnost, že žádný z hráčů v $n-$tém kole zruinován není a že hráč A v dosavadním průběhu hry získal celkem x žetonů od hráče B. Potom pravděpodobnost, že hráč A v $n-$tém kole vyhraje, je

$$r_n(a, b) = p\, u_{n-1}(b - 1, a, b)$$

a podobně také pravděpodobnost, že v $n-$tém kole vyhraje hráč B, je

$$r_n^*(a, b) = q\, u_{n-1}(-a + 1, a, b).$$

Potom

$$d_n = r_n + r_n^*$$

je pravděpodobnost, že hra v $n-$tém kole skončí, a

$$D_n = \sum_{i=0}^{n} d_n$$

je pravděpodobnost, že hra skončí nejpozději v $n-$tém kole. De Moivre v úloze 20 navrhuje jednoduché řešení:

Předpokládejme, že hráči mají po dvou žetonech a hledejme pravděpodobnost, že hra neskončí v druhém kole. Zřejmě výraz $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ udává všechny možnosti: a^2 odpovídá dvěma výhrám hráče A, b^2 dvěma výhrám hráče B, takže pravděpodobnost, že hra neskončí v druhém kole je $u_2 = 2ab/(a + b)^2$. Obecný postup po n kolech pak spočívá v postupném provádění násobení a odstraňování všech členů, vedoucích ke skončení hry. Ovšem již při $n = 3$ musíme s členy $3a^2b$ a $3ab^2$ zacházet opatrně, neboť to jsou součty a^2b, aba a ba^2, podobně pro $3ab^2$, při čemž členy a^2b, b^2a značí konec hry. Zbude tedy pouze $2a^2b$ a $2ab^2$ a pravděpodobnost pokračování je $\frac{2ba^2+2ab^2}{(a+b)^3}$, tj. stejná, jako v předcházejícím případě. Odtud jsou patrné obtíže vznikající při vysokých hodnotách n, a tak jakkoliv je navržená metoda správná, prakticky je nepoužitelná. Proto se De Moivre v dalších pracích o této úloze věnoval úpravám výše zmíněného řešení Nikolause Bernoulli.

Součet n náhodně vybraných proměnných. Poslední ukázkou z *De Mensura Sortis* je obecné řešení problému, kterému byla v souvislosti s hrou v kostky věnována pozornost již několik staletí. Jedná se o určení počtu možností, jimiž lze realizovat dané celé číslo jako součet bodů na n kostkách resp. jako součet bodů po n hodech jednou kostkou. Pro tři kostky se šesti stěnami podal řešení jako první Richard de Fournival (1190-1260), humanista a kancléř katedrály v Amiens, a to v básni *De vetula* [O stařence, resp. O vědmě], obsahující i správné kombinatorické zdůvodnění. Řešení však nebylo obecně známo nebo nebylo zcela pochopeno, i když přinejmenším pozdější tištěná vydání básně obsahovala i tabulku. Úlohu řešil také Girolamo Cardano (1501-1576) v knize *Liber de Ludo Aleae*, která však byla vydána až v roce 1663. Proto úlohu řešil i Galileo Galilei ve zlomku *Sopra le Scoperte dei Dadi*[77] pocházejícím podle David (1998) patrně z let 1613 až 1623. Řešení uvádí i Huyghens v *De ratiociniis in ludo aleae* v části předcházející úlohy o hře v kostky (před Propositio X) a ve formě tabulky jej podává Jakob Bernoulli v *Ars Conjectandi*, opět jen pro dvě a tři kostky.

V *De Mensura Sortis* je uveden pouze algoritmus, teprve v *Miscellanea Analytica* je důkaz, který je pak přetištěn i v dalších vydáních *The Doctrine of Chances*. Protože v De Moivreově době ještě nebyla užívána kombinační čísla, je poměrně dlouhý a proto je zde reprodukován v moderním zápise a jen nepodstatně upravený podle Halda (2003). De Moivre předpokládá, že kostka má t stěn označených 1, t^2 stěn označených 2 atd. až do t^f stěn označených f. Celkový počet stěn je tedy $t + t^2 + \cdots + t^f$. Provedeme-li n hodů, budou všechny možné případy zahrnuty podle multiplikačního teorému v mocnině řady $g(t) = (t+t^2+\cdots+t^f)^n$. Po roznásobení dostaneme členy typu $N(s;n,f)t^s$, kde $N(s;n,f)$ jsou hledané počty možností vytvoření bodového součtu s. De Moivre proto sečte geometrickou posloupnost součtu stěn, tu umocní a dále upraví takto:

$$(t + t^2 + \dots t^f)^n = t^n \left(\frac{1-t^f}{1-t}\right)^n = t^n \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} t^{if} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n+j-1}{j} t^j,$$

kde čitatel rozepsal podle běžné binomické relace a pro jmenovatel použil její tvar pro záporný exponent $(1-x)^{-n} = \sum_{i=n-1}^{\infty} \binom{i}{n-1} x^{i-n+1}$ (viz například Abramowitz a Stegun, 1964, str. 822 v 7. vydání z roku 1968). Zřejmě platí $s = n + if + j$, takže když $j = 0$, pak i je maximální: $i = [(n-s)/f]$. Pro každé menší i je pak vybráno jediné $j = s - n - if$, takže koeficient u t^s je

$$N(s;n,f) = \sum_{i=0}^{\left[\frac{(n-s)}{f}\right]} (-1)^i \binom{n}{i} \binom{s-if-1}{n-1},$$

což je hledaný počet možných součtů s. Snadno se přesvědčíme, že pro $f = 6$, $n = 3$ a $s = 11$ nebo 14 dostaneme $N(11;3,6) = 27$ a $N(14;3,6) = 15$, což jsou počty možností hodu součtů 11 a 14, které jsme použili v Huyghensově příkladu o ruinování hráčů.

[77] V sebraných spisech uváděném pod názvem *Considerazione sopra il Giuco dei Dadi* a přeloženém do angličtiny v David (1998).

De Moivre zde zřejmě využil svých zkušeností s polynomy a jejich umocňováním získané při psaní výše zmíněných prací z let 1697 a 1698. Použité metody pro nalezení posloupnosti koeficientů mocninné řady pomocí vhodné funkce $g(t)$ rozvinul později Laplace a funkci $g(t)$ nazval v oboru její konvergence *vytvořující funkcí* dané posloupnosti. V De Moivreově postupu bychom správně měli pracovat nikoliv s četnostmi stejně označených stěn t^i, ale s jejich relativními četnostmi, aby konvergence byla zaručena. Shodné řešení problému podal také de Montmort (1713), jeho důkaz je však striktně kombinatorický. Součty s lze chápat jako součty nezávislých rovnoměrně rozložených náhodných veličin a musí se tedy na ně vztahovat centrální limitní teorém. Pro velká n tedy funkce $N(s; n, f)$ musí konvergovat k normálnímu rozdělení. Grafická demonstrace této skutečnosti je v Hald (2003) a „normálnost“ $N(s; n, 6)$ je docela dobře patrná již při $n = 4$ a 8.

Jako první použil De Moivre také spojitého rovnoměrného rozložení pravděpodobnosti, a to v knize *Annuities on Lives* v příkladu 20 (vydání z roku 1756 spolu s *The Doctrine of Chances*). Tamtéž v příkladu 21 vystupují i další spojitá rozdělení pravděpodobnosti (De Moivre pro ně počítá první momenty) – podrobně viz Hald (1998).

S výjimkou jediné[78] se všechny úlohy řešené v *De Mensura Sortis* objevují také ve všech třech vydáních *The Doctrine of Chances* – viz Hald (1984). Vesměs jsou však rozšířeny, řešení bývají podrobnější a je zařazeno více numerických příkladů.

Miscellanea Analytica a *Approximatio...*

Anders Hald (2003) tuto práci charakterizuje jako sérii „výzkumných zpráv“ vytvořených v letech 1721 až 1730, publikovaných patrně s ohledem na prioritu[79] a doplněných o Stirlingův dopis z roku 1729. Spojovacím momentem prací byla snaha najít vhodnou aproximaci binomického rozdělení $\mathrm{Bi}(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ pro velká n. V řadě úloh, zvláště tam, kde se měl spočítat počet pokusů nutných pro dosažení požadovaného rozmezí pravděpodobností, byl totiž výpočet binomických koeficientů obtížný resp. s tehdejšími prostředky nemožný. De Moivre se proto v roce 1721 začal zabývat symetrickým rozdělením $\mathrm{Bi}(k; n, \frac{1}{2})$, a to nejprve odhadem jeho maximální hodnoty $\mathrm{Bi}(m; 2m, \frac{1}{2})$ pro sudé $n = 2m$, a poté poměrem hodnoty odpovídající členu vzdálenému o ℓ od maxima k hodnotě v maximu popisujícím rychlost klesání pravděpodobnosti na obě strany od maxima. Spolu s J. Stirlingem, který se zabýval od roku 1725 podobnou problematikou, začal hledat také aproximaci $n!$ a oba dokázali formuli dnes nazývanou po Stirlingovi. De Moivrea tento úkol posléze dovedl k aproximaci binomického rozdělení normálním, tedy přesně řečeno rozdělením, jehož přirozený logaritmus je úměrný ℓ^2 (v originálním zápise $\ell\ell$, neboť tehdy se

---

[78] Jedná se o úlohu č. 13, kterou je první z neřešených pěti problémů ze závěru Huyghensových *De Ratiociniis ...* Její řešení bylo obecně známé.

[79] De Moivre ve vydání *The Doctrine of Chances* z roku 1718 uvedl řadu svých výsledků bez důkazu; patrně proto, aby se s jeho postupy nemohl seznámit de Montmort. Po jeho smrti v roce 1719 je však začal postupně uveřejňovat – viz Bellhouse a Genest (2006).

exponent obvykle používal teprve když byl větší než 3). To se mu však podařilo až v roce 1733.

Podle *Miscellanea Analytica* získal De Moivre již v roce 1721 následující aproximaci hodnoty maxima symetrického rozdělení $\mathrm{Bi}(k; n, \frac{1}{2})$ pro sudé hodnoty $n{=}2m$, tj. hodnotu $\mathrm{Bi}(m; 2m, \frac{1}{2}) \equiv M(m)$:

$$M(m) = \binom{n}{\frac{n}{2}} 2^{-n} \approx 2.168 \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}{\sqrt{n-1}}.$$

Důkaz je podrobně uveden v Hald (2003), zde je jen stručně naznačen. Zřejmě

$$\ln M(m) = \ln\left(2^{-2m+1} \prod_{i=1}^{m-1} \frac{m+1}{m-1}\right) = (-2m+1)\ln 2 + \sum_{i=1}^{m-1} \ln \frac{1 + \frac{i}{m}}{1 - \frac{i}{m}}.$$

S použitím rozvoje (údajně dokázaného Newtonem)

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} \tag{*}$$

lze součet logaritmů zapsat jako

$$A(m) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)m^{2k-1}} \sum_{i=1}^{m-1} i^{2k-1}.$$

Pak lze použít vztah odvozený Jakobem Bernoulli v *Ars Conjectandi* pro konečný součet celočíselných mocnin celých čísel

$$\sum_{i=1}^{u} i^v = u^v \left(\frac{u}{v+1} + \frac{1}{2}\right) + \sum_{j=1}^{J} \frac{1}{2j} \binom{v}{2j-1} B_{2j} u^{v+1-2j},\ J = \max(j | v - 2j > 0),$$

kde B_{2j} jsou Bernoulliova čísla rovná $\frac{1}{6}, -\frac{1}{30}, -\frac{1}{42}, \ldots$ pro $j = 1, 2, 3, \ldots$ atd. Po zavedení proměnné $t = 1 - \frac{1}{m}$ dostaneme

$$A(m) = 2(m-1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{2k-1}}{(2k-1)2k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{2k-1}}{2k-1} + B_2 \sum_{k=2}^{\infty} t^{2k-2} + \ldots$$

První člen dá po integraci od 0 do t a vydělení t

$$(m-1)\ln(2m-1) + m \ln \frac{2m-1}{m^2},$$

druhý s pomocí (*) je roven $\frac{1}{2}\ln(2m-1)$ a třetí člen je geometrická řada se součtem

$$\frac{B_2}{m} \frac{t^2}{1-t^2} \to \frac{1}{12} \text{ pro } m \to \infty.$$

Limity dalších členů s Bernoulliovými koeficienty jsou $-\frac{1}{360}, \frac{1}{1260}, -\frac{1}{1680}$ (řada však nekonverguje a De Moivre sčítání zastavil právě včas!). Takže výsledná aproximace je

$$\ln M(m) \approx (2m - \frac{1}{2}) \ln(2m-1) - 2m \ln(2m) + \ln 2 + \frac{1}{12} - \frac{1}{360} + \frac{1}{1260} - \frac{1}{1680}.$$

Odtud

$$M(m) \approx 2.168 \, \frac{(2m-1)^{2m-\frac{1}{2}}}{(2m)^{2m}},$$

a po dosazení $2m = n$ dostaneme výše uvedený odhad $M(m)$, přičemž $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ konverguje k e^{-1} pro $n \to \infty$, takže $M(m) \approx \frac{0.7976}{\sqrt{n}}$.

Miscellanea Analytica obsahují také dopis, který De Moivreovi napsal v roce 1729 J. Stirling a v němž jej seznamuje se svým výsledkem odhadu faktoriálu $n! \approx \sqrt{2\pi}\; n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$ pro velká n. Když použijeme tento výsledek na $M(m)$, dostaneme jen o málo jiný výsledek, totiž $M(m) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{n}} \approx \frac{0.7978}{\sqrt{n}}$. Jako pokračování Stirlingova dopisu uvedl De Moivre svůj vlastní důkaz přesného vztahu pro $M(m)$, založený na použití Wallisovy[80] formule pro π, která zní

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m \to \infty} \frac{[2 \times 4 \times \cdots \times (2m)]^2}{[1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2m-1)]^2} \frac{1}{2m+1}.$$

K důkazu stačí přepsat $M(m)$ do tvaru

$$M(m) = \frac{2m(2m-1) \times \cdots \times 1}{m!\; m!} \frac{1}{2^m} =$$

$$= \frac{2m(2m-1) \times \cdots \times 1}{[2m(2m-2) \times \cdots \times 2]^2} = \frac{(2m-1)(2m-3) \times \cdots \times 1}{2m(2m-2) \times \cdots \times 2}.$$

Wallisovu formuli lze pak zapsat jako $\lim\limits_{m \to \infty} \frac{1}{[M(m)]^2} \frac{1}{2m+1} = \frac{\pi}{2}$, odkud opět $M(m) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi n}}$.

Dalším nezbytným krokem k nalezení normální aproximace binomického rozdělení byl odhad poměru maxima $M(m)$ a členu $\mathrm{Bi}(n + \ell; n, \frac{1}{2}) \equiv Q(\ell)$ vzdáleného od maxima o ℓ. Lze psát

$$\frac{M(m)}{Q(\ell)} = \frac{(m+\ell)!(m-\ell)!}{(m!)^2} = \frac{m+\ell}{m} \prod_{i=1}^{\ell-1} \frac{m+i}{m-i}.$$

[80] John Wallis (1616-1703), anglický polyhistor, duchovní a jeden z prvních kryptografů. Ač samouk, byl nejvlivnějším anglickým matematikem před Newtonem, profesorem geometrie v Oxfordu od roku 1649 a jedním ze zakladatelů Royal Society. Byl přívržencem Cromwella, avšak protestoval proti popravě Karla I., což mu nejen zachovalo profesorské místo, ale vyneslo i jmenování královským kaplanem Karla II. V *Arithmetica infinitorum* z roku 1656 je uvedena jeho slavná formule pro π, kterou odvodil při výpočtu integrálu z $\sqrt{1-x^2}$ od 0 do 1 (výpočet plochy čtvrtkruhu) interpolací (slovo jím zavedené) podle Cavalieriho; podrobně viz Scott (1938).

Součin Π lze opět vypočítat postupem založeným na Newtonově a Bernoulliově vztahu a použitém při původním odhadu $M(m)$; dostaneme

$$\ln\frac{M(m)}{Q(\ell)}\approx$$

$$\approx(m+\ell-\frac{1}{2})\ln(m+\ell-1)+(m-\ell+\frac{1}{2})\ln(m-\ell+1)-2m\ln m+\ln\frac{m+\ell}{m}.$$

Po vydání *Miscellanea Analytica* publikuje De Moivre ještě v roce 1730 dvaadvacetistránkové *Miscellaneis Analytici Supplementum*, v němž své odhady s ohledem na svůj a Stirlingův vzorec pro $n!$ ještě zpřesňuje. Získané aproximace jsou sice velmi přesné, ale pro praktické výpočty stále jen obtížně použitelné. Teprve ve výše zmíněné práci *Approximatio Summam Terminorum Binomii* $(a+b)^n$ *in Seriem* (vytištěné v několika exemplářích a rozdané přátelům) z roku 1733 se daří De Moivreovi najít aproximaci jednoduchou. Při velkém m a $\ell\ll m$ totiž oba výrazy $m\pm\ell\pm\frac{1}{2}, m\pm\ell\pm1$ konvergují k $m\pm\ell$ a po rozvinutí logaritmů dostaneme (s připomenutím historické notace)

$$\ln\frac{M(m)}{Q(\ell)}\approx(m+\ell)\left(\frac{\ell}{m}-\frac{\ell\ell}{2mm}\right)+(m-\ell)\left(-\frac{\ell}{m}-\frac{\ell\ell}{2mm}\right)=$$

$$=\frac{\ell\ell}{m}=\frac{2\ell\ell}{n}.$$

Odtud v současné notaci

$$Q(\ell)=\sqrt{\frac{2}{\pi n}}\exp\left(-\frac{2\ell^2}{n}\right)+O(\frac{1}{n^2}).$$

De Moivre nyní využívá jednoduchého tvaru získané aproximace a počítá rozložení pravděpodobností kolem maxima. Přitom uvádí, že rozhodující veličinou bude $\sqrt{n}$, kterou nazývá *modulem*[81]. Proto dále v *Aproximatio* počítá pravděpodobnost

$$\mathrm{P}_\ell(t)=\sum_{|x-\frac{n}{2}|\le\ell}\mathrm{Bi}(x;n,\frac{1}{2})=\frac{4}{\sqrt{2\pi n}}\int_0^\ell e^{-\frac{2x^2}{n}}\,dx=\frac{4}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-2y^2}\,dy \qquad (**)$$

pro $\ell=t\sqrt{n}, t=\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}$. Exponenciálu rozvede v řadu, integruje a dostává hodnoty 0.682688, 0.95428 a 0.99874. Dnešní tabulkové hodnoty jsou 0.682689, 0.95450 a 0.99730 (větší rozdíl pro $k=\frac{3}{2}$ je zřejmě důsledek jeho početní chyby, neboť při numerické integraci provedené stejným postupem lze dostat 0.99710). To tedy znamená, že kolem správné hodnoty $\frac{n}{2}$ je zhruba 68% výsledků pokusu soustředěno v rozmezí $\pm\frac{\sqrt{n}}{2}$ a 99.7% výsledků leží v rozmezí $\pm\frac{3}{2}\frac{\sqrt{n}}{2}$. Přesnost výsledku náhodného pokusu tedy závisí na $\sqrt{n}$ a nikoliv na počtu pokusů n.

[81] Modulus by which we are to regulate our Estimation.

Připomeňme ještě, že $\sqrt{n}$ se u De Moivrea vyskytuje po prvé, když hledá inflexní bod křivky $e^{-\frac{2\ell^2}{n}}$ a zjišťuje, že je to $\frac{\sqrt{n}}{2}$.

Ve vydání *The Doctrine of Chances* z roku 1738 je zařazen De Moivrem pořízený překlad *Approximatio*[82] doplněný o jednostránkový komentář Corollary 10 začínající posledním odstavcem z *Approximatio* (viz internetový odkaz v poznámce [4]). De Moivre v této části knihy diskutuje důsledky rovnice (**). Tu lze pro $t = \frac{1}{2}$ zapsat jako

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{x}{n} - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}\right) \approx 0.683,$$

to znamená, že $\frac{x}{n}$ se bude od správné hodnoty $\frac{1}{2}$ lišit o méně než $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ zhruba ve dvou případech ze tří. Maximální odchylku $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ počítá pro $n = 3600, 14\,400$ a 10^6. Dostává hodnoty $\frac{1}{120}$, $\frac{1}{240}$ a $\frac{1}{2000}$ a konstatuje, že tento poměr 2:1 můžeme podstatně, přesně řečeno libovolně zvýšit, když povolíme větší odchylku, například pro $\frac{1}{\sqrt{n}}$ dostaneme 21:1.

V *Approximatio* uvádí bez důkazu i výsledek pro asymetrické binomické rozdělení s $p \neq \frac{1}{2}$. V současné notaci je to pro velké n

$$\mathrm{Bi}(np + \ell; n, p) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\ e^{-\frac{\ell^2}{2npq}}.$$

Součin npq má pochopitelně význam variance σ^2; střední hodnota binomického rozdělení je $\mu = np$ a nahradíme-li ℓ proměnnou $x = np + \ell$, dostaneme jako limitu binomického rozdělení standardní tvar normálního rozdělení $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$[83]

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Bi}(x; n, p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\ e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Obecnou De Moivreovu-Laplaceovu větu (kterou ovšem De Moivre takto nezapsal, ale pouze prakticky používal) lze pak zapsat ve tvaru

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{x}{n} - p\right| \leq 2t\sqrt{\frac{pq}{n}}\right) \approx \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-2y^2}\, dy.$$

Je jistě podivné, že asymetrické rozdělení je aproximováno rozdělením symetrickým, ale teprve když se provádí odvození se zachováním členů vyšších řadů, dostane se pro $\mathrm{Bi}(n{+}l; n, p)$ navíc člen řádu $n^{-\frac{1}{2}}$ popisující asymetrii $\mathrm{Bi}(n{+}l; n, p)$ při $p \neq \frac{1}{2}$.

---

[82] *A method of approximating the Sum of the Terms of the Binomial $(a + b)^n$ expanded into a Series, from whence are deduced some practical Rules to estimate the Degree of Assent which is to be given to Experiments.*

[83] Směrodatná odchylka a variance v dnešním významu se neužívaly nejen v době De Moivreově, ale ani v Laplaceově.

ZÁVĚR

Svého životního výsledku dosáhl De Moivre v 66 letech a nelze se divit, že jej již dále podstatně nerozvinul. Ostatně jeho smyslem bylo řešení obtížně počítatelných úloh z teorie her a toho bylo normální aproximací vyhovujícím způsoben dosaženo. Jeho práce v této oblasti byly obecně uznávány a měly velkou popularitu. Podle Stiglera (1986) jej citovala většina encyklopedií vydaných v XVIII. století včetně Encyclopaedia Britannica. Pokud se jedná o jeho poznatky týkající se rozdělení dnes známého jako normální resp. Gaussovo, zdá se, že odpovídající pozornost nevzbudily. Důvodem (opět podle Stiglera (1986)) je to, že aktuálním se stal inverzní problém, k němuž neměly jak přispět. Za důležitý výsledek lze také považovat De Moivreovu formulaci centrálního limitního teorému, i když se vztahovala pouze na procesy charakterizovatelné binomickým rozdělením. O jiné procesy se však De Moivre většinou nezajímal, ale pokud to považoval za vhodné, dovedl je objevit i použít.

V dalších vydáních *The Doctrine of Chances* rozšiřoval okruh řešených úloh a dopisoval filozofické úvahy náboženské povahy, podle nichž právě získaná aproximace ukazuje, jak Boží vůlí je náhoda spoutána pevným zákonem. Ve třetím (posmrtném) vydání z roku 1756 se z Corollary 10 v překladu *Approximatio* odděluje jako Poznámka I jeho část s matematickými i náboženskými úvahami a přistupuje ještě i Poznámka II [Remark II] se slavnou a hojně citovanou pasáží:

Stejně jako lze ukázat, že z povahy věcí vyplývají jisté Zákony, podle nichž se Události dějí, tak z Pozorování také vyplývá, že tyto Zákony slouží moudrým a prospěšným cílům; zachovat pevný Řád Vesmíru, rozmnožovat některé Druhy Bytostí a dát jim tolik Pocitu štěstí, kolik je pro jejich Stav vhodné. Tyto Zákony stejně jako jejich původní Návrh a Účel jejich Ustanovení musejí přicházet z vnějšku*;* Setrvačnost *věcí a povaha všeho stvoření znemožňují, aby cokoliv bylo samo schopno změnit svou vlastní podstatu, nebo dáti sobě, či čemukoliv jinému, prvotní určení a sklony. A odtud, pokud se nedáme oslepit metafyzickým prachem, jsme vedeni krátkou a zřejmou cestou k uznání velkého TVŮRCE a VLADAŘE všeho,* vševědoucího, všemohoucího a dobrého.[84]

---

[84] Again, as is thus demonstrable that there are, in the constitution of things, certain Laws according to which Events happen, it is no less evident from Observation, that those Laws serve to wise, useful and beneficient purposes; to preserve the stedfast Order of the Universe, to propagate several Species of Beings, and furnish to the sentient Kind such degrees of happiness as are suited to their State.
But such Laws, as well as the original Design and Purpose of their Establishment, must all be *from without*; the *Inertia* of matter, and the nature of all created Beings, rendering it impossible that any thing should modify its own essence, or give to itself, or to any thing else, an original determination or propensity. And hence, if we blind not ourselves with metaphysical dust, we shall be led, by a short and obvious way, to the acknowledgement of the great MAKER and GOVERNOUR of all; *Himself all-wise, all-powerful and good.*

LITERATURA

Abramowitz, M. a Stegun, I. A. (1964) *Handbook of Mathematical Functions.* National Bureau of Standards, Washington, D. C.

Archibald, R. C. (1926a) *Abraham de Moivre (Letter).* Nature **117**, 551.

Archibald, R. C. (1926b) *A Rare Pamphlet of Moivre and some of his Discoveries.* Isis **8**, 671-683.

Archibald, R. C. (1926c) *Abraham de Moivre (Letter).* Nature **117**, 894.

Bellhouse, D. R. a Genest Ch. (2006) *Maty's Biography of Abraham De Moivre, Translated, Annotated and Augmented.* Statistical Science (v tisku). Dostupné na internetové adrese (ke dni 6. 8. 2007) `archimede.mat.ulaval.ca/pages/genest/publi/StatSci_2007.pdf`

Bernoulli, Jakob (1713) *Ars Conjectandi.* Impensis Thurnisiorum, Fratrum, Basel. [anglický překlad E. D. Sylla: The Art of Conjecturing. The John Hopkins University Press, Baltimore 2006.]

Bernoulli, Johann I (1988) *Der Briefwechsel von Johann I. Bernoulli. Bd 2. Der Briefwechsel mit Pierre Varignon. Teil 1: 1692-1702.* Birkhäuser Verlag, Bern 1988.

Bernoulli, Johann I (1992) *Der Briefwechsel von Johann I. Bernoulli. Bd 3. Der Briefwechsel mit Pierre Varignon. Teil 2: 1702-1714.* Birkhäuser Verlag, Bern 1992.

Cantor, M. (1898) *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.* Band 3. Teubner Verlag, Leipzig, 274-315.

Czuber, E. (1899) *Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeits Theorie und ihrer Anwendungen.* Jahresber. deutsch. Math.-Vereinigung, Vol. 7., No. 2. Teubner, Leipzig.

David, F. N. (1998) *Games, Gods and Gambling, A history of probability and statistical ideas.* Dover Publ., Inc., Mineola (N.Y.) (reprint knihy z roku 1962).

Daw, R. H. a Pearson, E. S. (1972) *Abraham De Moivre's 1733 derivation of the normal curve: A bibliographical note.* Biometrika **59**, 677-680.

Eggenberger, J. (1894) *Beiträge zur Darstellung des Bernoullisches Theorems, des Gammafunktion und des Laplaceschen Integrals.* Mitt. Naturforsch. Ges. Bern **50**, 110-182.

Hacking, I. (1975) *The Emergence of Probability.* Cambridge University Press, Cambridge.

Hald, A. (1984) *A. de Moivre: "De Mensura Sortis" or "On the Measurement of Chance".* Inter. Stat. Sci. **52**, 229-262.

Hald, A. (1998) *A History of Mathematical Statistics from 1750 to 1930.* John Wiley & Sons, Inc., New York.

Hald, A. (2003) *History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750.* Wiley-Interscience, Haboken, New Jersey.

Hall, R. (1980) *Philosophers at War: The Quarell between Newton and Leibniz.* Cambridge University Press, New York.

Huyghens, Ch. (1657) *De ratiociniis in ludo aleae.* Příloha ke knize F. van Schouten: *Exercitationem mathematicarum libri quinque.* Leyden. (Latinský originál a český překlad jsou v knize Mačák (1997)).

Hykšová, M. (2004) *Historické počátky teorie her.* In: J. Bečvář, E. Fuchs (eds.): *Matematika v proměnách věků III.* (Dějiny matematiky, svazek 24). Výzkumné centrum pro dějiny vědy, Praha 2004, 69-98.

Mačák, K. (1997) *Počátky počtu pravděpodobnosti.* Prometheus, Praha.

Maheut, G. (1988) *Abraham de Moivre.* Mémoires de la Société des Sciences et Arts de Vitry-le-François, **37**, 93-134.

Maty, M. (1755) *Mémoire sur la vie & sur les écrits de M. de Moivre.* Journal Britannique **18**, 1-51.

Mirimanoff, D. (1930) *Le jeu de pile ou face et les formules de Laplace et de J. Eggenberger.* Commentarii Mathematici Helvetici **2**, 133-168.

Moivre De, A. (1756) *The Doctrine of Chances.* Printed by W. Pearson, London. Internetová verse je dostupná na `www.ibiblio.org/chance/`

Montmort, P. R. de (1708) *Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard.* Paříž (rozšířené vydání v roce 1713).

Ore, O. (1960) Pascal and the invention of probability theory. Amer. Math. Monthly **67**, 409-419.

Pearson, K. (1924) *Historical Note on the Origin of the Normal Curve of Errors.* Biometrika **16**, 402-404.

Pearson, K. (1925) *James Bernoulli's Theorem.* Biometrika **17**, 201-210.

Pearson, K. (1926) *Abraham de Moivre. Reply to Professor Archibald (Lettre).* Nature **117**, 551-552.

Pearson, K. (1978) *The history of Statistics in the 17th and 18th centuries*, ed. E. S. Pearson. Přednášky K. Pearsona na University College v Londýně v letech 1921 až 1933. Griffin, London.

Saxl, I. (2005) *De Moivreova rozdělení.* Forum Statisticum Slovacum **1**, 81-90.

Schneider, I. (1968) *Der Mathematiker Abraham de Moivre.* Arch. Hist. ex. Sci. **5**, 177-317.

Sheynin, O. B. (1967) On the early history of the law of large numbers. Biometrika **55**, 459-467.

Schwabik, Š., Šarmanová, P. (1996) *Malý průvodce historií integrálu.* Prometheus, Praha.

Scott, J. F. (1938) *The mathematical work of John Wallis.* Taylor & Francis, London.

Stigler, S. M. (1986) *The History of Statistics.* Harvard University Press, Cambridge (Mass.).

Stigler, S. M. (1999) *Statistics on the Table.* Harvard University Press, Cambridge (Mass.).

Todhunter, I. (1865) *A History of the Mathematical Theory of Probability.* MacMillan and Com., London, Cambridge.

Walker, H. M. (1934) *Abraham De Moivre.* Scripta Mathematica **II**, 316-333. (Práce je systematicky přetiskována v současných reprintech třetího vydání *The Doctrine of Chances* z roku 1756.)

Wollenschläger, K. (1933) *Die mathematische Briefwechsel zwischen Johann I Bernoulli und Abraham de Moivre.* Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft in Basel **XLIII** (1931-32). Georg & Cie Verlag, Basel.