Orientované grafy

In: Pavel Šišma (author): Teorie grafů, 1736–1963. (Czech). Praha: Prometheus, 1997. pp. 91–100.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/400872

Kapitola 5

Orientované grafy

Tato krátká kapitola je věnována některým problémům týkajícím se orientovaných grafů. Důraz je přitom kladen na práce našich autorů, kteří vycházeli většinou přímo z Kőnigovy monografie.

5.1 Definice základních pojmů

V předcházejících kapitolách naší práce jsme se zabývali neorientovanými grafy. Problémy, které se objevily na samotném počátku vzniku teorie grafů, vedly právě k takovým grafům. Vzpomeňme na problém königsbergských mostů či úlohu jezdce. Tak jako bylo možné procházet most v libovolném směru, tak i jezdec, pokud může táhnout z pole a na pole b, může vykonat tah i z pole b na pole a. Na odpovídajících grafech tedy není nutno vyznačovat možný směr pohybu. Ne vždy je ovšem tomu tak.

Georges Édouard Auguste Brunel (1856–1900) v roce 1893 publikoval krátkou práci [102], ve které vyřešil tuto známou úlohu:

Mějme plnou nádobu vody o objemu 8 litrů a dvě prázdné nádoby s objemy 5 a 3 litry. Jakým způsobem musíme přelévat vodu tak, abychom dostali nakonec dvakrát 4 litry.

Tato úloha má mnoho variant, ve kterých můžeme mít různý počet nádob o různých objemech. I tuto úlohu můžeme znázornit graficky. Stav vody v nádobách lze charakterizovat trojicí čísel, která udává množství vody v jednotlivých nádobách. Každé trojici můžeme přiřadit uzel grafu. Pokud se můžeme jediným přelitím dostat ze stavu i do stavu j, pak uzel i spojíme šipkou s uzlem j. Je zřejmé, že ve všech případech nemusí nastat současně možnost, že jediným přelitím lze přejít také ze stavu j do stavu i. Například ze stavu (3, 2, 3) můžeme přejít do stavu (0, 5, 3), ale obráceným směrem to možné není. Grafickým znázorněním této úlohy tedy nemůže být neorientovaný graf.

Definujme si nyní **orientovaný graf** a některé další základní pojmy. Nechť je dána množina uzlů V. Orientovaným grafem $\vec{G}$ rozumíme dvojici (V, E), kde

$E \subseteq V^2$.[1] Prvky množiny E budeme nazývat **orientovanými hranami**. Hranu s počátečním uzlem u a koncovým uzlem v můžeme značit $\vec{uv}$, ale pokud bude zřejmé, že jde o orientovanou hranu, zvolíme jednodušší označení uv. Počet hran, pro které je uzel u počátečním uzlem, nazveme **výstupní stupeň** uzlu u (označení $d_G^-(u)$) a počet hran, pro které je uzel u koncovým uzlem, nazveme **vstupním stupněm** uzlu u (označení $d_G^+(u)$). **Stupněm uzlu** u pak rozumíme číslo $d_G^-(u) + d_G^+(u)$.

Orientovaným spojením nazýváme posloupnost

$$(u_0, h_1, u_1, h_2, u_2, \dots, u_{n-1}, h_n, u_n),$$

kde u_i $(i = 0, 1, 2, \dots, n)$ jsou uzly a h_j $(j = 1, 2, \dots, n)$ hrany nějakého orientovaného grafu $\vec{G}$, $h_k = u_{k-1}u_k$ pro $(k = 1, 2, \dots, n)$. Řekneme, že orientované spojení začíná v uzlu u_0 a končí v uzlu u_n. Číslo n udává délku orientovaného spojení. **Orientovaným tahem** rozumíme orientované spojení, ve kterém se žádná hrana grafu neopakuje. Vyskytuje-li se každý uzel grafu v orientovaném spojení nejvýše jednou, hovoříme o **orientované cestě**. Orientované spojení, které má alespoň jednu hranu a jehož počáteční a koncový uzel splývají, nazýváme **uzavřeným orientovaným spojením**. Podobně mluvíme o **uzavřeném orientovaném tahu** a **uzavřené orientované cestě**, kterou většinou nazýváme **cyklus**. Podobně jako v případě neorientovaných grafů nazýváme graf, který neobsahuje žádný cyklus, **acyklický orientovaný graf**.

5.2 Cesty v orientovaných grafech

D. Kőnig ve II. kapitole své knihy, věnované převážně eulerovským tahům a hamiltonovským kružnicím v neorientovaných grafech, zobecnil tyto dva pojmy i pro grafy orientované. Názvy pro ně ovšem nezavedl. Bez důkazu ukázal, že uzavřený orientovaný tah, který obsahuje všechny hrany konečného souvislého grafu $\vec{G}$ (**eulerovský orientovaný tah**), existuje v grafu $\vec{G}$ právě tehdy, když pro libovolný uzel u grafu $\vec{G}$ platí $d_G^- u = d_G^+ u$ (Věta 7, str. 29). Takovým grafům dnes říkáme **rovnovážně orientované grafy**.[2]

C. A. B. Smith a W. T. Tutte v roce 1941 v práci [475] a nezávisle na nich o deset let později T. van Aardenne-Ehrenfest a N. G. de Bruijn v práci [476] odvodili vztah pro počet eulerovských orientovaných tahů v rovnovážně orientovaných grafech. Jejich výsledek můžeme vyjádřit takto (viz. [393, str. 240]):

Buď $\vec{G}$ rovnovážně orientovaný graf, Δ_1 počet různých kořenových stromů s kořenem x_1, které obsahují všechny uzly grafu $\vec{G}$, a r_k nechť označuje výstupní

[1] D. Kőnig zavedl ve své monografii nejprve orientovaný graf tak, že na hranách neorientovaného grafu šipkou vyznačil orientaci. V VIII. kapitole pak ukázal souvislost orientovaných grafů s binárními relacemi.

[2] D. Kőnig pro tento typ grafů žádný název neměl. Podle J. Sedláčka zavedl název rovnovážně orientovaný graf A. Kotzig (viz. [325, Poznámka 8]).

(a současně vstupní) stupeň uzlu x_k. *Pak v grafu* $\vec{G}$ *existuje právě*

$$\Delta_1 \prod_{k=1}^{n} (r_k - 1)!$$

různých orientovaných eulerovských tahů.

Rovnovážně orientovanými grafy se ve své první práci věnované orientovaným grafům zabýval v roce 1958 J. Sedláček. V práci *O konstrukcích orientovaných grafů* [325] zobecnil Listingovu větu i pro orientované grafy. Jak Sedláček uvedl, nebylo mu známo, že by se před ním někdo tímto problémem zabýval.

K důkazu věty analogické k Listingovu tvrzení odvodil následující pomocnou větu (Lemma 1, str. 275):

Pro orientovaný graf $\vec{G}$ *položme*

$$t_i = d^+_G(u_i) - d^-_G(u_i), \quad \psi(\vec{G}) = \sum_{i=1, t_i>0}^{n} |t_i|.$$

Pak platí :

Nechť $\vec{G}$ *je orientovaný graf, který není rovnovážně orientovaný (tedy* $\psi(\vec{G}) > 0$*). Pak lze* $\vec{G}$ *doplnit právě* $\psi(\vec{G})$ *hranami tak, že vznikne rovnovážně orientovaný graf.*

Hlavní výsledek práce pak Sedláček formuloval takto (Věta 3, str. 275):

Nechť $\vec{G}$ *je orientovaný graf, jehož žádná komponenta není rovnovážně orientovaný graf. Pak platí:*
a) Existuje systém S_p *skládající se z* p *otevřených orientovaných tahů takový, že každá hrana grafu* $\vec{G}$ *je v právě jednom tahu systému* S_p.
b) Pro každý takový systém S_p *platí* $p \geq \psi(\vec{G})$, *přičemž existuje systém* S_{p_0}, *kde* $p_0 = \psi(\vec{G})$.

A. Kotzig se rovnovážně orientovanými grafy zabýval v práci *O rovnovážne orientovaných konečných grafoch* [330] v roce 1959. Vycházel přitom z některých tvrzení, která pro orientované grafy uvedl ve své knize D. Kőnig.

Kőnig ukázal (str. 30), že hrany konečného souvislého neorientovaného grafu G je možné orientovat tak, aby z grafu G vznikl rovnovážně orientovaný graf $\vec{G}$ právě tehdy, když G je eulerovský graf.

Kotzig se ve své práci nejprve zabýval otázkou, kolika způsoby je takto možné eulerovský graf orientovat. Výsledek vyjádřil v následující větě (Věta 9, str. 38):

Nechť G *je libovolný eulerovský graf,* $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ *množina jeho uzlů a nechť uzel* u_i *je uzlem* $2s_i$*-tého stupně v grafu* G. *Nechť* $S = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ *je množina všech takových systémů uzavřených tahů grafu* G, *které mají tuto vlastnost: libovolná hrana z* G *je hranou právě jednoho tahu systému. Označme znakem* τ_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ *počet tahů systému* S_j. *Pro počet* $\varrho(G)$ *takových* *různých orientací hran grafu G, při kterých vznikne z grafu G rovnovážně orientovaný graf, platí*

$$\varrho(G) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(s_i!)} \sum_{j=1}^{m} 2^{\tau_j}.$$

V další části pak Kotzig ukázal, že rovnovážně orientovaný graf $\vec{G}$, který vznikne orientací jistého eulerovského grafu G, má $\varrho(G)-1$ různých rovnovážně orientovaných podgrafů (Věta 10, str. 40).[3] Počet různých rovnovážně orientovaných podgrafů libovolného orientovaného grafu $\vec{G}$ se ale Kotzigovi určit nepodařilo.

Kotzig si uvědomoval, že určení počtu rovnovážně orientovaných podgrafů daného orientovaného grafu má význam pro určení počtu různých lineárních faktorů v bipartitním neorientovaném grafu G. Tuto skutečnost vyjádřil tímto způsobem (Věta 13, str. 43):

Nechť G je libovolný bipartitní graf, ve kterém existuje alespoň jeden lineární faktor L, a nechť rozklad $\mathfrak{R} = \{U_1, U_2\}$ je libovolný rozklad množiny uzlů z G na dvě třídy takový, že libovolná hrana z G spojuje uzly z různých tříd. Označme znakem $\vec{G}$ graf, který vznikne z grafu G tak, že jeho hrany orientujeme takto:
(1) libovolná hrana z L směřuje z uzlu třídy U_2 do uzlu třídy U_1;
(2) libovolná hrana nepatřící do L směřuje v $\vec{G}$ z uzlu třídy U_1 do uzlu třídy U_2.

Pak platí: Počet různých rovnovážně orientovaných podgrafů grafu $\vec{G}$ se rovná počtu různých lineárních faktorů grafu G jiných než L.

Odtud je zřejmé, že G má jediný lineární faktor L právě tehdy, když graf $\vec{G}$ neobsahuje žádný cyklus.

Další Kotzigovou prací, ve které se zabýval orientovanými grafy, je práce *Beitrag zur Theorie der endlichen gerichteten Graphen* [349] z roku 1961. V jejím úvodu Kotzig zopakoval některé výsledky týkající se souvislosti neorientovaných grafů, které jsou obsaženy v jeho práci [305]. V další části pak řešil otázky souvislosti pro grafy orientované. Analogicky k funkci $\sigma_G(u,v)$ definoval **stupeň souvislosti $\boldsymbol{\omega_{\vec{G}}(u,v)}$** mezi dvěma uzly u, v grafu $\vec{G}$. **$\boldsymbol{\omega}$-hranou** pro uspořádanou dvojici uzlů u, v Kotzig nazval hranu, po jejímž odstranění z grafu $\vec{G}$ se stupeň souvislosti $\omega_{\vec{G}}(u,v)$ sníží o jedničku.

Kotzig dokázal následující větu, kterou lze považovat za orientovaný případ Mengerovy věty (Věta 6, str. 123):

Buď $\vec{G}$ libovolný orientovaný graf, $u \neq v$ dva jeho uzly a nechť $\omega_{\vec{G}}(u,v) = k > 0$. Pak v $\vec{G}$ existuje k (a ne více než k) hranově disjunktních orientovaných cest, které spojují uzly u, v.

V závěru práce se Kotzig věnoval grafům, ve kterých pro libovolnou dvojici uzlů u, v platí $\omega_{\vec{G}}(u,v) = \omega_{\vec{G}}(v,u)$. Takové grafy nazval **symetricky oriento-**

[3] Nulový graf Kotzig nepovažoval za podgraf grafu $\vec{G}$.

vané grafy. Platí (Věta 11, str. 124):

Každý rovnovážně orientovaný graf je symetricky orientovaný graf.

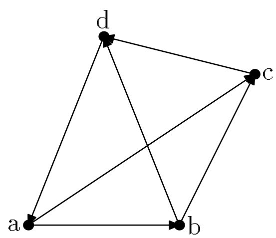
Na předcházející Kotzigův článek navázal v krátké práci *O istej triede orientovaných grafov* [351] Juraj Bosák v roce 1962. Studoval zde vlastnosti tzv. $\boldsymbol{(u,v)_m}$**-grafů**, jak nazval konečné orientované grafy $\vec{G}$, obsahující uzly $u \neq v$ takové, že graf $\vec{G}$ můžeme rozložit na m orientovaných tahů z uzlu u do uzlu v. V případě neorientovaných grafů, se podobnými grafy setkáváme v Kotzigově práci [305].

Bosák dokázal (Věta 1, str. 81):

Nutnou a postačující podmínkou pro to, aby souvislý orientovaný graf $\vec{G}$ byl $(u,v)_m$-grafem je:
a) $d^+_G(u) - d^-_G(u) = -m$;
b) $d^+_G(v) - d^-_G(v) = m$;
c) $d^+_G(x) - d^-_G(x) = 0$ *pro všechny zbývající uzly grafu* $\vec{G}$.

V další části se zabýval zejména otázkami existence cyklů v $(u,v)_m$-grafech a existencí množiny ω-hran těchto grafů.

D. Kőnig své úvahy ve II. kapitole uzavřel známým výsledkem z roku 1934, jehož autorem byl L. Rédei v práci *Ein kombinatorischer Satz* [262]. Rédei studoval orientované grafy bez smyček,[4] ve kterých je libovolná dvojice uzlů u, v spojena právě jednou z hran uv, vu. Takovému grafu dnes říkáme **turnaj**. Příklad turnaje na čtyřech uzlech vidíme na obr. 5.1.



Obr. 5.1: Turnaj

Každý z uzlů může představovat šachového hráče v turnaji (odtud název), ve kterém nedochází k remízám. Potom například orientovaná hrana ab znázorňuje vítězství hráče a nad hráčem b. Rédei ukázal, že každý turnaj obsahuje orientovanou cestu, která prochází všemi uzly tohoto grafu. Dále dokázal, že takových cest je vždy lichý počet (Věta 1, str. 39). Tuto skutečnost ukázal znovu T. Szele v práci [477], který navíc pravděpodobnostními metodami dokázal, že pro maximální počet T_n takových hamiltonovských cest v turnaji s n uzly

[4] Vyjádřeno v grafové terminologii, protože Rédei problém formuloval pouze v jazyce teorie permutací.

platí

$$T_n \geq \frac{n!}{2^{n-1}}.$$

J. Sedláček v práci [314] ukázal, že turnaj obsahuje jedinou orientovanou cestu procházející všemi uzly právě tehdy, je-li acyklický (Věta 15, str. 211).

Rédeiovu větu zobecnili T. Gallai a A. N. Milgram v práci *Verallgemeinerung eines graphentheoretischen Satzes von Rédei* [478] pro orientované grafy $\vec{G}$, ve kterých je libovolná dvojice uzlů spojena nejvýše jednou hranou (Věta 2.2, str. 182):

Označíme-li $\beta_0(\vec{G})$ maximální počet uzlů grafu $\vec{G}$, z nichž žádná dvojice uzlů není spojena hranou, pak v grafu $\vec{G}$ existuje nejvýše $\beta_0(\vec{G})$ uzlově disjunktních orientovaných cest, na kterých leží všechny uzly grafu $\vec{G}$.

Na závěr této části si všimneme dalšího typu orientovaných grafů. Graf $\vec{G}$ se nazývá **silně souvislý**, jestliže pro každou dvojici uzlů u, v existuje orientovaná cesta z uzlu u do uzlu v.

V roce 1960 odvodil A. Ghouila-Houri v práci [479] postačující podmínku existence orientované kružnice, která prochází všemi uzly nějakého silně souvislého grafu $\vec{G}$. Podobně jako u grafů neorientovaných budeme kružnici, která prochází všemi uzly grafu, nazývat **hamiltonovská kružnice**. Platí:

Je-li $\vec{G}$ silně souvislý orientovaný graf s $n \geq 3$ uzly a pro každý uzel x platí současně

$$d^+_G(x) \geq \frac{n}{2}, \qquad d^-_G(x) \geq \frac{n}{2},$$

pak graf $\vec{G}$ má hamiltonovskou kružnici.

Stejného výsledku, který připomíná Diracovu postačující podmínku existence hamiltonovské kružnice v neorientovaných grafech, dosáhl později C. St. J. A. Nash-Williams v práci [383], který zde také ukázal, že každý orientovaný graf, pro který platí současně $d^+_{\vec{G}} \geq \frac{n}{2}$ a $d^-_{\vec{G}} \geq \frac{n}{2}$, je silně souvislý.

V práci *O jednom typu dobře orientovaných grafů* [334] se J. Sedláček v roce 1959 věnoval silně souvislým grafům $\vec{G}$, ve kterých existuje uzel c, který leží v každém cyklu grafu $\vec{G}$.[5] Takový uzel nazval **centrum** grafu $\vec{G}$ a dokázal (Věta 2, str. 13):

Budiž G souvislý neorientovaný graf bez artikulací s alespoň třemi uzly a nechť c je libovolný jeho uzel. Pak lze volit orientaci hran grafu G tak, že vznikne silně souvislý graf $\vec{G}$ s centrem c.

V závěru práce se Sedláček věnoval rovnovážně orientovaným grafům. Posloupnost $u_1, u_1u_2, u_2, u_2u_3, u_3, \ldots, u_m, u_mu_1, u_1$, kde u_i jsou uzly a u_iu_{i+1} orientované hrany grafu $\vec{G}$, nazval **tahem kompletním** vzhledem k u_1, jestliže obsahuje všechny hrany grafu $\vec{G}$ začínající v u_1.

Ukázal (Věta 3, str. 14):

[5] J. Sedláček a ostatní českoslovenští matematici v té době používali místo názvu silně souvislý graf název dobře orientovaný graf.

Rovnovážně orientovaný graf $\vec{G}$ má uzel c za své centrum právě tehdy, jestliže každý tah kompletní vzhledem k c obsahuje všechny hrany grafu $\vec{G}$.

5.3 Báze

V VII. kapitole své knihy D. Kőnig definoval pojem **uzlová báze** (Punktbasis) orientovaného grafu:

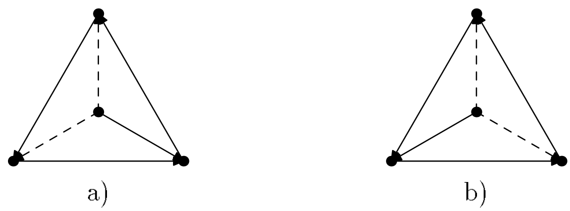
Uzlovou bází grafu $\vec{G}$ rozumíme podmnožinu B jeho uzlů, která má následující dvě vlastnosti:
1. Je-li u libovolný uzel grafu $\vec{G}$, který nepatří do B, pak v $\vec{G}$ existuje orientovaná cesta z nějakého uzlu množiny B do uzlu u.
2. Žádná dvojice uzlů z B není v $\vec{G}$ spojena orientovanou cestou.

Kőnig ukázal, že každý konečný orientovaný graf má takovou uzlovou bázi (Věta 4, str. 89). V další části pak zavedl uzlovou bázi druhého druhu, v jejíž definici je pojem orientovaná cesta nahrazen pojmem orientovaná hrana.

Nás ovšem bude více zajímat další Kőnigův pojem a to **hranová báze** (Kantenbasis) orientovaného grafu:

Podmnožinu B množiny hran grafu $\vec{G}$ nazveme hranovou bází grafu $\vec{G}$, má-li následující dvě vlastnosti:
1. Je-li uv libovolná orientovaná hrana, která není obsažena v B, pak existuje orientovaná cesta tvořená hranami v B, která vede z u do v.
2. Je-li uv libovolná orientovaná hrana z B, pak ze zbývajících hran v B nelze sestrojit orientovanou cestu, která vede z u do v.

Kőnig na tomto místě citoval práci P. Hertze [174] a ukázal souvislost hranové báze s jistými problémy logiky. Dále dokázal, že každý konečný orientovaný graf má hranovou bázi (Věta 15, str. 100) a ukázal třídu nekonečných grafů, které hranovou bázi nemají (Věta 16, str. 101). Některé konečné orientované grafy mají jedinou hranovou bázi, jiné mohou mít více hranových bází dokonce s různým počtem hran. Na obrázku 5.2 vidíme orientovaný graf a v něm plnou čarou vyznačené dvě různé hranové báze.



Obr. 5.2: Hranová báze

V další části VII. kapitoly se Kőnig věnoval otázkám hranové báze v sítích.

Síť (Netz) definoval jako orientovaný graf, v němž je libovolná dvojice uzlů u, v spojena jak hranou uv, tak hranou vu. Jedná se tedy o jisté zobecnění pojmu úplný graf.[6] Kőnig ukázal, že pojem sítě se objevil poprvé v souvislosti s grafickým znázorněním konečných grup v Cayleyho pracích [56, 57, 90]. Dokázal, že každá síť (i nekonečná) má hranovou bázi (Věta 17, str. 102). Konečná síť s n uzly má hranovou bázi, která je tvořena n hranami, ale neexistuje její hranová báze s méně jak n hranami (Věta 18, str. 102). Cyklus procházející všemi uzly sítě je tedy hranová báze, která má nejmenší počet hran.

Studiem hranových bází sítí se zabýval J. Sedláček v roce 1957 v práci *O konečných orientovaných grafech* [314]. Zde navázal na Kőnigovy výsledky a na práci [480] L. Rédeie z roku 1954. Sedláček označil B libovolnou hranovou bázi sítě $\vec{G}$ a $\nu(B)$ počet uzlů báze B, které jsou druhého stupně. Pak ukázal, že platí (Věta 4, str. 200):

$$\nu(B) \geq 2.$$

Je-li báze B graf bez artikulace s lichým (resp. sudým) počtem uzlů a platí $\nu(B) \leq 4$ (resp. $\nu(B) \leq 3$), pak je báze B rovinný graf (Věta 8, str. 205). Sedláček ukázal příklad nerovinné báze B s 10 uzly, pro kterou je $\nu(B) = 4$. Vyvrátil tak chybné Rédeiho tvrzení, že každá hranová báze je rovinný graf.

V další části své práce se Sedláček zabýval silně souvislými grafy. Herbert E. Robbins v práci [481] ukázal, že konečný souvislý orientovaný graf $\vec{G}$ je silně souvislý, nebo je možné tento graf změnou orientace některých hran převést na silně souvislý, právě tehdy, když každá hrana grafu $\vec{G}$ leží v nějaké kružnici.[7]

Sedláček dokázal (Věta 11, str. 207):

Každý silně souvislý graf $\vec{G}$ o m hranách a n uzlech má alespoň $\nu = m-n+1$ cyklů.

V závěru práce se J. Sedláček věnoval acyklickým grafům a ukázal, že v těchto grafech existuje jediná hranová báze (Věta 13, str. 210).

Vlastnostem konečných acyklických a silně souvislých grafů se věnovali M. Fiedler a J. Sedláček v práci *O W-basích orientovaných grafů* [319] z roku 1958. V každém acyklickém grafu $\vec{G}$ existuje alespoň jeden uzel u, který není koncovým uzlem žádné hrany. Takový uzel autoři nazvali **pramen**. Souvislý graf s jediným pramenem nazvali ***W*-graf**. Je-li W-graf stromem, pak tento graf nazývali ***W*-strom**. Podgraf grafu $\vec{G}$, který obsahuje všechny uzly grafu $\vec{G}$ a každá jeho komponenta je W-strom, nazvali ***W*-báze**.

Pro orientované grafy platí (Věta 4, str. 217):

Jestliže ke každému uzlu w grafu $\vec{G}$ existuje W-báze grafu $\vec{G}$ s jediným pramenem w, pak $\vec{G}$ je silně souvislý graf.

V další části pak autoři využili pojmu W-báze k odvození metody určení počtu koster neorientovaného grafu G. O tomto výsledku jsme se již zmínili v kapitole 2.

[6] Pojem úplný orientovaný graf použil v české literatuře poprvé J. Sedláček v práci [335].

[7] Kružnicí v tomto případě Sedláček rozuměl stejně jako u neorientovaných grafů souvislý graf, jehož každý uzel má stupeň dva.

5.4 Matice

V práci *O incidenčních maticích orientovaných grafů* [335] J. Sedláček v roce 1959 ukázal, že některé vlastnosti nezáporných matic můžeme studovat pomocí orientovaných grafů. Grafově tak interpretoval některé výsledky získané v pracích [323, 324].

Buď x uzel grafu $\vec{G}$ a nechť existuje přirozené číslo d tak, že pro každý uzel y grafu $\vec{G}$ existuje orientované spojení mezi uzly x, y, které má délku d. Uzel x Sedláček nazval **primitivním uzlem** grafu $\vec{G}$ a nejmenší přirozené číslo d_{min}, jež je možno takto k danému uzlu x nalézt, **ukazatelem uzlu** x. Je zřejmé, že graf, jehož jeden uzel je primitivní, nemusí být ještě silně souvislý. Je-li ovšem graf $\vec{G}$ silně souvislý a má-li primitivní uzel, pak jsou primitivní všechny uzly grafu $\vec{G}$. Graf, jehož každý uzel je primitivní, Sedláček nazval **primitivním grafem**. Můžeme také říci, že graf je primitivní právě tehdy, je-li jistá jeho mocnina úplný orientovaný graf. Nejmenší přirozené číslo v_0, pro které je $\vec{G}^{v_0}$ úplný orientovaný graf, Sedláček nazval **ukazatelem primitivnosti** grafu $\vec{G}$.

V primitivním grafu $\vec{G}$ vyhledejme ke každému uzlu příslušný ukazatel. Nechť max $\vec{G}$ (resp. min $\vec{G}$) značí největší (resp. nejmenší) ze všech těchto ukazatelů. Ukazatel primitivnosti grafu $\vec{G}$ je roven max $\vec{G}$. Sedláček dokázal (Věta 3, str. 309):

Pro každý primitivní graf $\vec{G}$ o n uzlech ($n \geq 2$) platí

$$min\ \vec{G} \leq n^2 - 3n + 3;$$

přitom existuje primitivní graf $\vec{G}$, pro který v předcházejícím vztahu nastává rovnost.

Dále Sedláček ukázal (Věta 4, str. 310):

Existuje jediný primitivní graf $\vec{G}$ s n uzly ($n \geq 2$), pro který platí

$$max\ \vec{G} = (n-1)^2 + 1.$$

V závěru práce Sedláček ukázal některé vlastnosti spektra matice sousednosti A_G grafu $\vec{G}$ s n uzly.[8] Sestrojme determinant

$$\varphi(\lambda) = \det\ (A_G - \lambda E_n),$$

kde E_n je jednotková matice n-tého stupně. Množinu kořenů rovnice $\varphi(\lambda) = 0$ (tj. množinu charakteristických čísel matice A_G) nazýváme **spektrum** grafu $\vec{G}$. Matice sousednosti grafu $\vec{G}$ je nezáporná matice, která má alespoň jedno

[8] V práci ovšem Sedláček tuto matici nazýval incidenční maticí. Pro graf $\vec{G} = (V, E)$ a pro dané pořadí uzlů $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ je čtvercová matice $A_G = (a_{ij})$ řádu n definována předpisem $a_{ij} = 1$, jestliže v grafu $\vec{G}$ existuje hrana $v_i v_j$; jestliže taková hrana neexistuje, klademe $a_{ij} = 0$.

nezáporné charakteristické číslo. Maximální reálné charakteristické číslo matice A_G nazveme **indexem** grafu $\vec{G}$.

Sedláček dokázal, že pokud graf $\vec{G}$ obsahuje jako podgraf alespoň jeden cyklus, pak index grafu $\vec{G}$ je ≥ 1 (Věta 7, str. 312). Nutná a postačující podmínka k tomu, aby graf $\vec{G}$ byl acyklický, je, aby jeho spektrum bylo tvořeno vesměs nulami (Věta 8, str. 313).

Řadu zajímavých výsledků týkajících se neorientovaných a orientovaných grafů odvodil v roce 1962 J. Bosák v práci *Vyšetrovanie grafov pomocou matíc* [350]. V práci definoval čtyři číselné funkce čtvercových matic, jejichž hodnoty pro matici sousednosti orientovaného grafu $\vec{G}$ udávají počty faktorů, faktorů tvořených pouze cykly délky 2, hamiltonovských cyklů a počet cyklů procházejících libovolným uzlem v grafu $\vec{G}$.