Kapitola 4

Faktorizace grafů

V této kapitole se budeme zabývat rozkladem grafů na faktory. V první části věnujeme pozornost pracem P. G. Taita a zejména J. Petersena, na kterého na počátku 20. století navázali autoři, kteří usilovali o zjednodušení důkazu Petersenovy věty o rozkladu pravidelných grafů 3. stupně.

V další části této kapitoly se budeme věnovat zejména problematice rozkladu pravidelných bipartitních grafů, ke které významným způsobem přispěl D. Kőnig, který věnoval rozkladům grafů celé tři kapitoly své knihy. Zde kromě výsledků svých předchůdců prezentoval i výsledky své práce.

Ve třetí části naznačíme vývoj ve 40. až 60. letech tohoto století. Soustředíme se přitom hlavně na práce týkající se vlastností grafů s lineárním faktorem.

V poslední a nejrozsáhlejší části se seznámíme s dílem A. Kotziga, jehož práce v 50. a 60. letech přímo navazovaly na klasické práce z konce 19. a počátku 20. století.

4.1 Rozklady pravidelných grafů

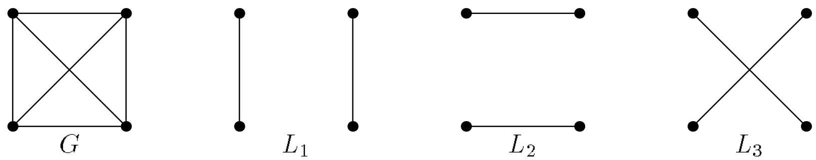
4.1.1 Problém čtyř barev

První práce, ve kterých můžeme najít problémy rozkladu pravidelných grafů, jsou práce [14] a [31]. V první T. P. Kirkman studoval rozklad úplných grafů K_p na trojúhelníky, v druhé M. Reiss odvodil výsledek týkající se rozkladu úplných grafů K_{2n} na lineární faktory.

Dalším z matematiků, kteří se zabývali otázkami rozkladu pravidelných grafů na pravidelné faktory byl P. G. Tait. Jeho zájem o tuto problematiku úzce souvisel s řešením problému čtyř barev. Víme, že tento problém se zdál po publikování Kempeho „důkazu“ v roce 1879 vyřešen. Tait byl jedním z těch, kteří se pokoušeli o jednodušší důkazy tohoto problému. Už A. Cayley a A. B. Kempe si uvědomili, že pro řešení problému je důležitý pouze ten případ map, na kterých se stýkají právě tři hraniční čáry oblastí v jednom bodě. Tait si v práci [74] všiml, že barvení takových map pomocí čtyř barev je ekvivalentní problému obarvení pravidelného grafu 3. stupně třemi barvami tak, že každý uzel grafu je incidentní s hranami tří různých barev. Tato myšlenka je správná, ale už ne další Taitovy úvahy o tom, že důkaz existence tohoto obarvení je možno provést snadno indukcí. Je to stejně složitý problém, jako ten původní.

Ve své druhé práci [75], kterou můžeme zařadit k tématu rozkladu grafů, Tait v roce 1880 píše:

Mějme $2n$ *bodů spojených pomocí* $3n$ *čar takovým způsobem, že se v každém bodě střetávají právě tři čáry. Pak můžeme tyto čáry rozdělit (obvykle mnoha různými způsoby) do tří skupin po* n *čarách tak, že v každém bodě končí z každé skupiny pouze jedna čára.*



Obr. 4.1: Rozklad grafu na lineární faktory

Sám Tait si byl vědom toho, že tato „věta“ vždy neplatí. Uvedl ale dále tvrzení, které podle něj platí vždy:

Hrany mnohostěnu, který má všechny vrcholy třetího stupně, můžeme rozdělit do tří skupin takovým způsobem, že v každém vrcholu končí pouze jedna hrana každé skupiny.

V tomto případě jsou pro uvažované grafy dány implicitně dvě podmínky. Jak v roce 1922 dokázal Ernst Steinitz (1871–1928) [448], je graf, který odpovídá konvexnímu mnohostěnu, rovinný a 3-souvislý. V další části práce se Tait pokusil toto své tvrzení dokázat, protože by se z něj dalo odvodit řešení problému čtyř barev.

V práci [85] věnoval Tait pozornost podobné otázce. Předpokládal, že každý mnohostěn, který má všechny vrcholy třetího stupně, má hamiltonovskou kružnici. Kdyby to byla pravda, bylo by možné jeho hrany obarvit třemi barvami. Tato Taitova hypotéza však není pravdivá. V roce 1946 ji v práci [449] vyvrátil W. T. Tutte, který nalezl pravidelný 3-souvislý rovinný graf se 46 uzly, který hamiltonovskou kružnici nemá.[1]

4.1.2 Petersenova věta

Mezníkem v teorii rozkladů pravidelných grafů, ale i v teorii grafů vůbec, je rozsáhlá práce *Die Theorie der regulären graphs*[2] [99] dánského matematika

[1] Nejmenší známý protipříklad s 38 uzly nalezli nezávisle na sobě J. Lederberg, J. Bosák a D. Barnette (viz. [359]).

[2] Petersen vycházel ze Sylvesterova pojmu *graph* a v celém textu jej uváděl kurzívou s malým počátečním písmenem.

J. Petersena z roku 1891. V úvodu této práce Petersen ukázal následující problém teorie binárních forem, který pak grafově interpretoval.

Pro proměnné $x_1, x_2, \cdots, x_n$ uvažujme všechny součiny tvaru

$$\prod_{i<j}(x_i - x_j)^{a_{ij}},$$

ve kterých je stupeň α každé proměnné x_i stejný. Paul Albert Gordan (1837–1912) dokázal, že existuje pouze konečný počet součinů (Petersen je nazýval *Grundfactoren*), pomocí kterých získáme všechny ostatní.

Na možnost grafové interpretace tohoto algebraického problému upozornil Petersena v roce 1889 J. J. Sylvester.[3] Petersen přiřadil proměnným $x_1, \cdots, x_n$ uzly grafu a členu $(x_i - x_j)^{\alpha_{ij}}$ α_{ij} hran, které spojují uzel x_i s uzlem x_j. V tomto případě tak obdržel pravidelný graf stupně α. Gordanovu větu pak můžeme grafově interpretovat tak, že pro každé přirozené číslo n existuje pouze konečný počet konečných pravidelných grafů s n uzly, které jsou **primitivní**. Primitivními grafy (primitiv graphs) Petersen nazval takové grafy, které nemají žádný pravidelný faktor. V úvodu dále obvyklým způsobem definoval pojmy pravidelný graf (regulär graph), počet uzlů grafu (Ordnung) a stupeň pravidelného grafu (Grad).

Vlastní Petersenova práce je rozdělena do dvou částí. V první části se Petersen věnoval rozkladům pravidelných grafů sudého stupně. Jak sám konstatoval, je tento problém mnohem jednodušší než zkoumání rozkladů pravidelných grafů lichého stupně, kterým věnoval druhou část práce.

V úvodu části věnované rozkladům pravidelných grafů sudého stupně Petersen vyřešil otázku rozkladu pravidelných grafů druhého stupně. Konstatoval, že graf druhého stupně se skládá z uzavřených polygonů (dnes bychom řekli kružnic). Jsou-li všechny tyto polygony tvořeny sudým počtem hran, pak můžeme tento graf rozložit na dva lineární faktory; ve všech dalších případech je tento graf primitivní (str. 195). Petersen ukázal, že v případě grafu tvořeného p polygony, které mají všechny sudý počet hran, můžeme tento graf rozložit na dva lineární faktory 2^{p-1} různými způsoby.

Petersen pak zavedl pojmy Wechselpolygon, Wechsellinie a Wechselweg, které později použila většina autorů, kteří se zabývali rozkladem grafů. Předpokládejme, že pravidelný graf stupně $\alpha + \beta$ je možno rozložit na pravidelný faktor stupně α a faktor stupně β. Obarvíme hrany prvního faktoru modře a hrany druhého faktoru červeně. Kružnici grafu (polygon), ve které se pravidelně střídají modré a červené hrany nazval Petersen **střídavá kružnice** (Wechselpolygon).[4]

Záměnou barev hran v nějaké takové kružnici dostaneme jiný rozklad grafu. Petersen dokázal větu (str. 196):

---

[3] Samotný Sylvester se podobnými otázkami zabýval již dříve (např. práce [48]). Zachovala se rozsáhlá korespondence J. Petersena se J. J. Sylvesterem, D. Hilbertem a F. Kleinem o těchto otázkách (viz. práce [450]).

[4] D. Kőnig použil pro Wechselpolygon ve své knize název *alternierenden Kreis* [275, str. 187]. Také A. Kotzig používal ve svých pracích název *alternujúca kružnica*.

Můžeme-li libovolný graf rozložit několika způsoby na dva faktory (jeden modrý a druhý červený), pak každý rozklad dostaneme z každého jiného záměnou barev hran jistých střídavých kružnic.

V další části Petersen dokázal, že každý pravidelný souvislý graf sudého stupně můžeme nakreslit jedním tahem. Konstatoval, že stejným způsobem by bylo možné dokázat podobnou větu pro grafy, které nejsou pravidelné, ale mají všechny uzly sudého stupně. Petersen tak vlastně podal důkaz starého Eulerova tvrzení, které nedlouho předtím poprvé dokázal C. Hierholzer v práci [45]. Zda Petersen znal Hierholzerův důkaz není zřejmé (viz. práce [372]).

V tomto okamžiku Petersen dokázal, že každý pravidelný graf 4. stupně můžeme rozložit na dva kvadratické faktory (str. 198).[5]

Dalším pojmem, který Petersen zavedl, byl pojem sdružené grafy (gepaarten graphs). Z pravidelného grafu G sudého stupně odstranil dvě nestýkající se hrany ab a cd a nahradil je buď dvěma novými hranami ac a bd, nebo hranami ad a bc. Vniklý graf označil G' a dvojici grafů G a G' nazval **sdružené grafy**. Petersen ukázal, že pokud je jeden graf z této dvojice rozložitelný na dva kvadratické faktory, pak je možné takto rozložit i druhý graf (str. 198). Dále dokázal, že každý graf je možno transformovat opakováním konstrukce popsané v definici sdružených grafů[6] na libovolný jiný graf stejného stupně a se stejným počtem uzlů (str. 199).

Na základě předcházejících úvah dokázal Petersen hlavní výsledek první části své práce (str. 200):

Každý pravidelný graf sudého stupně je rozložitelný na faktory 2. stupně.

Jak napsal později D. Kőnig [275, str. 162], je tato věta řešením celé řady kombinatorických úloh. Nový důkaz této věty podal ve 30. letech tohoto století Kurt Werner Friedrich Reidemeister (1893–1971) v práci [241].

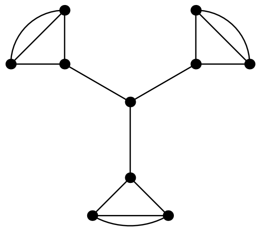
Z předcházejících výsledků vyplývá, že pomocí střídavých kružnic můžeme získat všechny kvadratické faktory pravidelného grafu 4. stupně. Petersen v závěru první části práce řešil otázku, kdy mají dvě hrany stejnou nebo různou barvu v každém rozkladu na kvadratické faktory. Pravidelný graf 4. stupně G s m hranami nakreslil jedním tahem. Tento tah znázornil jako m-úhelník G' (Petersen tento graf nazýval *ausgestreckten graph*), ve kterém se všechny uzly grafu G nacházely dvakrát. V grafu G' spojil dvojice uzlů, které odpovídaly stejnému uzlu původního grafu. Každá taková úhlopříčka rozdělila G' buď na dvě sudé, nebo dvě liché cesty (podle počtu jejich hran na obvodu m-úhelníka). Vzhledem k tomu Petersen dělil tyto úhlopříčky na sudé nebo liché. Nyní vedl přímku, která protínala všechny liché úhlopříčky a žádnou sudou. Hrany m-úhelníka, které tato přímka protnula, měly stejnou nebo různou barvu v každém rozkladu grafu G na kvadratické faktory.

Druhá část Petersenovy práce byla věnována pravidelným grafům lichého stupně. Petersen neřešil triviální případ rozkladu pravidelných grafů prvního

[5] Poznamenejme na tomto místě, že problematikou rozkladů pravidelných grafů 4. stupně se v práci [312] zabýval A. Kotzig.

[6] Petersen neměl pro uvedenou konstrukci žádný název.

stupně, které samy představují lineární faktor. Nejvýznamnějším výsledkem této části a vlastně celé práce je **Petersenova věta**, která řeší případ pravidelných grafů 3. stupně. Petersen se ale nejprve věnoval pravidelným grafům lichého stupně obecně. Zatímco primitivní grafy sudého stupně 2α ($\alpha > 1$) neexistují, můžeme pro libovolné číslo $2\alpha+1$ ($\alpha \geq 1$) najít pravidelný graf stupně $2\alpha + 1$, který je primitivní. Petersen ukázal jednoduchou konstrukci takových grafů pro libovolné přirozené číslo α. Na obrázku 4.2 vidíme graf, který touto konstrukcí dostal pro $\alpha = 1$. Z Petersenovy korespondence je zřejmé, že s tímto grafem Petersena seznámil v roce 1889 J. J. Sylvester.



Obr. 4.2: Sylvesterův graf

Petersen dále ukázal, že existuje pouze konečný počet pravidelných primitivních grafů s $2n$ uzly. Dokázal totiž, že pravidelný graf s $2n$ uzly, jehož stupeň je větší než $\frac{2n}{3} + 1$, nemůže být primitivní (str. 208).[7]

Nyní si ukážeme, jakým způsobem Petersen vyřešil problém rozkladu pravidelných grafů 3. stupně, kde mohou nastat pouze tyto možnosti: Pokud graf 3. stupně není primitivní, pak existuje jeho rozklad na kvadratický faktor a lineární faktor. V případě, že každá kružnice kvadratického faktoru je tvořena sudým počtem hran, můžeme takový pravidelný graf 3. stupně rozložit na tři lineární faktory.

Petersen dokázal platnost tvrzení, které dnes označujeme jako **Petersenova věta**. Ve své práci ji formulovat takto (str. 218):

Primitivní graf 3. stupně musí obsahovat nejméně tři listy.

Petersen pojem list (Blatt) použil jako první a rozuměl tímto pojmem část grafu, která je se zbytkem grafu spojena jedinou hranou.[8] Petersenův důkaz této věty byl komplikovaný a v literatuře se téměř neobjevuje. Proto mu budeme v naší práci věnovat větší pozornost. Jednodušší důkazy podali na počátku 20. století H. R. Brahana [162], A. Errera [168, 172], O. Frink [199] a T. Schön-

[7] Při důkazu tohoto tvrzení použil Petersen pěkné myšlenky, která v podstatě odpovídá větě o maximálním párování v grafu G, kterou jako první vyslovil C. Berge v roce 1957 [451] a o které budeme mluvit v další části této kapitoly.

[8] D. Kőnig definoval list ve své monografii na str. 180. Listem označil část grafu, která neobsahuje žádný most a se zbytkem grafu je spojena jedinou hranou (mostem). Tato definice pochází od H. R. Brahany [162]. Z Petersenových úvah je ovšem patrné, že chápal pojem list stejně. Pouze se při definici listu nepřesně vyjádřil.

berger [263]. O těchto pracech budeme hovořit v další části.

Naznačme alespoň ve stručnosti jakým způsobem Petersen dokázal svoje tvrzení. Jeho postup je důležitý v tom, že řada myšlenek v něm obsažených byla později dále využívána při studiu faktorizace grafů. V této části rozumíme grafem G primitivní souvislý pravidelný graf 3. stupně s $2n$ uzly a tedy $3n$ hranami.

Petersen zavedl pojem tah (Kette), kterým označil stejně jako dnes my sled hran, ve kterém je každá hrana obsažena nejvýše jednou. Na str. 210 ukázal, že hrany grafu G můžeme rozložit do n tahů, které nazval sudé, resp. liché podle počtu hran v nich obsažených.[9] Pokud by všechny tahy byly liché, pak by graf G nemohl být primitivní. K důkazu tohoto tvrzení obarvil hrany tahů střídavě modrou a červenou barvou tak, aby obě krajní hrany byly modré. Pokud bychom spojením těchto tahů vytvořili opět graf G, bylo by vidět, že každý uzel je incidentní se dvěma modrými a jednou červenou hranou. Modré hrany by tvořily kvadratický a červené hrany lineární faktor grafu G. Protože graf G je primitivní, musí tedy v rozkladu existovat i sudé tahy, které mají jednu svoji koncovou hranu obarvenu červeně. Každý takový tah má právě jeden koncový uzel incidentní se dvěma červenými hranami a je tedy počet těchto sudých tahů roven počtu takových uzlů v grafu.

Petersen uvažoval takový rozklad hran grafu G na n tahů, ve kterém počet sudých tahů je nejmenší možný. Nyní vybral libovolný sudý tah T začínající červenou hranou v uzlu a, který je incidentní se dvěma červenými hranami. Hrany tahu T orientoval ve směru procházení od uzlu a. Dále uvažoval další střídavé tahy, které začínají červenou hranou v uzlu a a mají lichý počet hran. Společně s tahem T vytváří orientovaný systém, ve kterém některé hrany jsou orientovány pouze v jednom směru a některé v obou směrech. Tento systém vytváříme postupně v jednotlivých krocích. Po každém kroku Petersen nazval modrým uzlem takový uzel systému, který je z uzlu a dosažitelný pouze po modré hraně. Uzel dosažitelný z a i po hraně červené nazval červený. Některé modré uzly se po dalším kroku stanou červenými. Uzly, které jsou incidentní s neorientovanými hranami Petersen nazval nenasycené.

Po určitém počtu kroků vzniknou podsystémy, které mají všechny hrany orientované v obou směrech a které mají všechny uzly červené. Nahradíme-li každý takový podsystém jediným uzlem (může představovat také původní uzel a), obdržíme tak nový graf G'. Na graf G' aplikujeme výše popsaný postup (stále vycházíme z uzlu a). Při tomto postupu Petersen zkoumal rozdíl mezi počtem nenasycených modrých uzlů a počtem nenasycených červených uzlů. Proces končí, když již neexistují nenasycené červené uzly. Rozborem všech možných případů Petersen ukázal, že primitivní graf G musí obsahovat nejméně 3 listy.

Petersen se zamyslel i nad tím, jak je to s rozkladem pravidelných grafů lichého stupně vyššího než tři. Vyslovil přesvědčení, že tuto otázku je možno řešit podobným způsobem jako problém pravidelných grafů 3. stupně.

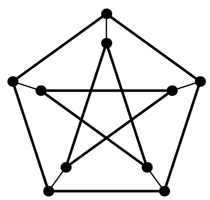
Kromě této práce se J. Petersen zabýval otázkou rozkladu pravidelných

[9] Existence těchto n tahů vyplývá z Listingovy věty. Touto větou se ve svých pracech zabýval v souvislosti s rozkladem grafů na lineární faktory A. Kotzig. (viz. [303, 321]).

grafů ještě ve dvou dalších pracech. V práci *Sur le théorème de Tait* [128], publikované v roce 1898, Petersen reagoval na práce P. G. Taita. Připomněl své předchozí výsledky z roku 1891 a formuloval Taitovu „větu“ takto:

Pravidelný graf 3. stupně bez listů může být rozložen na tři faktory 1. stupně.

Petersen zkonstruoval graf, pro který Taitovo tvrzení neplatí. Je to známý Petersenův graf, který vidíme na obrázku 4.3. Édouard Goursat (1858–1936) v práci [124] ukázal, že Petersen dokázal pouze skutečnost, že neplatí obecné Taitovo tvrzení (což věděl samotný Tait), ale protože Petersenův graf není rovinný, nevyvrátil Taitovu hypotézu pro grafy odpovídající mnohostěnům.



Obr. 4.3: Petersenův graf

V práci [131] z roku 1899 Petersen reagoval na Goursatův komentář své předcházející práce a věnoval se některým otázkám souvisejícím se vztahem rozkladu pravidelných grafů 3. stupně na lineární faktory a problému 4 barev. Je zajímavé, že došel k názoru, že věta o 4 barvách zřejmě neplatí.

4.1.3 Další důkazy Petersenovy věty

Petersenovy práce z 90. let minulého století vyvolaly pozornost o více jak 20 let později. Alternativní důkaz Petersenovy věty podal jako první v roce 1917 Henry Roy Brahana [162], který byl žákem americké topologické školy J. W. Alexandera a O. Veblena. Brahanův důkaz byl veden matematickou indukcí.

V roce 1922 publikoval svoji dizertační práci o problému čtyř barev A. Errera [168]. Diskutoval v ní Brahanův důkaz Petersenovy věty a zjednodušil některé jeho kroky. Část této práce byla později publikována v [172].

Přímočarý důkaz Petersenovy věty pak podal v roce 1926 O. Frink v práci *A proof of Petersen's theorem* [199]. O jeho důkazu se zmíníme podrobněji.

Frink nejprve definoval základní pojmy a pak vyjádřil Petersenovu větu. Citoval práce svých předchůdců a pak postupně dokázal tři věty, z kterých Petersenova věta vyplývá. Pod názvem prostý graf (simple graph) rozuměl souvislý pravidelný graf 3. stupně bez listů. Frink zavedl v těchto grafech následující konstrukci, kterou D. Kőnig ve své knize (str. 183) nazval štěpení hrany (Spalten der Kante):

Z grafu odstraníme libovolnou hranu a čtyři hrany s ní incidentní spojíme po dvojicích jedním ze dvou možných způsobů.

Frink nyní dokázal, že z každého prostého grafu, který má více než dva uzly, dostaneme prostý graf s menším počtem uzlů pomocí štěpení některé hrany (Věta I). Toto tvrzení je základem celého Frinkova důkazu Petersenovy věty. Frink dále použil stejné myšlenky jako Petersen a aniž tento název zavedl, definoval pojem střídavá kružnice. Prostý graf rozložil na kvadratický a lineární faktor. Hrany lineárního faktoru obarvil červeně a kvadratického modře. Tento graf pak nazval obarvený. Z Petersenovy práce Frink věděl, že záměnou barev v některé střídavé kružnici dostaneme nové obarvení a tedy i nový rozklad grafu. Frink ukázal, že každá hrana obarveného prostého grafu leží na uzavřené červeno–modré cestě a proto může být její barva změněna (Věta II). Na závěr dokázal, že každý prostý graf je obarvitelný (Věta III). Z uvedených vět pak ihned vyplynula platnost Petersenovy věty.

Krátce předtím než vyšla Kőnigova kniha podal další důkaz Petersenovy věty T. Schönberger v práci [263]. Jeho důkaz vycházel z Frinkovy definice prostého grafu, obarvení grafu a z věty III. Schönberger nejprve ukázal, že každý prostý graf může být obarven tak, že dvě libovolně vybrané hrany jsou modré. Potom už jen stačilo dokázat, že pravidelný souvislý graf G 3. stupně se dvěma listy má odpovídající rozklad na červený lineární a modrý kvadratický faktor.

4.1.4 Rozklady bipartitních grafů

D. Kőnig věnoval ve své monografii rozkladu pravidelných grafů poměrně značnou pozornost. V kapitole XI se zabýval rozkladem pravidelných grafů sudého stupně a rozkladem bipartitních grafů. Právě v této oblasti dosáhl sám Kőnig významných výsledků. Těmto otázkám se zde také budeme věnovat podrobněji.

Bipartitní graf Kőnig definoval jako konečný nebo nekonečný graf, jehož každá kružnice je tvořena sudým počtem hran.[10] Kőnig ve své knize ukázal známou skutečnost, že graf je bipartitní právě tehdy, když můžeme jeho uzly rozdělit do dvou tříd tak, že pouze uzly různých tříd jsou spojeny hranou (Věta 12, str. 170).

Je-li bipartitní graf konečný a pravidelný, pak mají obě tyto třídy stejný počet uzlů. Kőnig se řadu let zabýval otázkou existence lineárních faktorů v bipartitních grafech. V roce 1914 vystoupil s tímto problémem na *Congrès de Philosophie Mathématique* v Paříži a ukázal, že každý konečný pravidelný bipartitní graf obsahuje lineární faktor a každý konečný pravidelný bipartitní graf g-tého stupně se dá rozložit na g lineárních faktorů. ([275, Věty 13 a 14, str. 171]).

Příspěvek z pařížského kongresu byl publikován až v roce 1923 [184], ale už v roce 1916 vyšla práce [160], ve které Kőnig ukázal, že pokud je každý uzel konečného bipartitního grafu nejvýše g-tého stupně, pak můžeme hrany

[10] Místo názvu bipartitní graf používal D. Kőnig název sudý graf (paarer Graph, graphe à circuits pairs). Název *bipartie* užil poprvé Sainte-Laguë v práci [186]. V naší literatuře se v 50. a 60. letech setkáváme také s názvem sudý graf. Richard Rado (1906–1989) v práci [452] zavedl pojem *zobecněný bipartitní graf*, který může obsahovat i smyčky.

tohoto grafu rozdělit do g tříd tak, že dvě hrany, které jsou incidentní se stejným uzlem, patří do různých tříd (viz. [275, Věta 15, str. 171]). Poslední věta hraje důležitou roli při řešení různých kombinatorických úloh a úloh teorie množin. Je možno ji odvodit z Mengerovy věty o souvislosti grafů a Hallovy věty o systému různých reprezentantů. Tyto dvě věty patří k základním a současně nejdůležitějším výsledkům teorie grafů.

Karl Menger (1902–1985) v roce 1927 ukázal v práci *Zur allgemeinen Kurventheorie* [210] vztah mezi souvislostí grafu a počtem disjunktních cest, které spojují dva různé uzly grafu. Dnes existuje celá řada variant této věty. Převedeme-li původní Mengerův výsledek do dnešního jazyka teorie grafů, můžeme Mengerovu větu formulovat takto:[11]

Nejmenší počet uzlů, které musíme odstranit z grafu G, aby se dva různé hranou nespojené uzly u a v nacházely v různých komponentách takto vytvořeného grafu, je roven maximálnímu počtu disjunktních cest, spojujících v grafu G uzly u, v.

Hallova věta publikovaná v roce 1935 v práci *On representatives of subsets* [264] Philipem Hallem (1904–1982) je dnes většinou uváděna takto:[12]

Buď $G = (A, B)$ bipartitní graf s rozkladem uzlů na dvě stejně početné třídy A a B. Nechť $X \subseteq A$ a $\Gamma(X)$ označuje množinu uzlů z B, které jsou alespoň jednou hranou spojeny s některým uzlem množiny X. Platí:

Bipartitní graf G má lineární faktor právě tehdy, když pro libovolnou množinu $X \subseteq A$ platí $|\Gamma(X)| \geq |X|$.

Hledáme-li lineární faktor nějakého grafu G, hledáme vlastně podmnožinu L množiny hran grafu G, která má tu vlastnost, že každý uzel grafu G je incidentní právě s jednou hranou množiny L. Pokud lineární faktor neexistuje, má často smysl hledat množinu hran M, pro kterou platí, že každý uzel grafu G je incidentní nejvýše s jednou hranou množiny M. Takovou množinu hran nazýváme **párování** v grafu G. Párování s největším počtem hran pak nazýváme **maximální párování**. Je zřejmé, že pokud má graf G lineární faktor, pak tento faktor představuje jedno z maximálních párování v grafu G.

D. Kőnig v pracech [230, 252] ukázal, že pro libovolný bipartitní graf platí:

Velikost maximálního párování v bipartitním grafu G je rovna minimálnímu počtu uzlů grafu G, které jsou dohromady incidentní se všemi hranami grafu G.

Je nutno zdůraznit, že Kőnig získal své výsledky týkající se otázek existence lineárních faktorů v bipartitních grafech při studiu vlastností matic. Grafové vyjádření umožňovalo názornější důkazy a interpretaci některých výsledků.

V předcházející kapitole jsme definovali matici sousednosti M bipartitního grafu G. Pokud v rozvoji determinantu matice M existuje alespoň jeden nenulový člen, pak graf G má lineární faktor. D. Kőnig ve své knize upozornil na možnosti grafového vyjádření celé řady výsledků teorie matic a determinantů. Některé z nich odvodil ve svých pracech Ferdinand Georg Frobenius

[11] K. Menger vyslovil tuto větu pro rovinné křivky.

[12] D. Kőnig ji podobným způsobem formuloval ve své knize na str. 234–235.

(1849–1917), který znal Kőnigovy práce, ale o možnosti využití grafů při studiu determinantů se vyjadřoval skepticky.

V kapitole XII se D. Kőnig zabýval rozkladem pravidelných grafů 3. stupně a podal přitom rozbor výsledků získaných při důkazu Petersenovy věty. Kőnig se zamyslel i nad problémem rozkladu pravidelných grafů lichého stupně vyššího než tři. Ukázal přitom, že každý faktor lichého stupně nějakého pravidelného konečného grafu G obsahuje všechny mosty grafu G. Na str. 193 pak ukázal, že konečný pravidelný graf, který má most, není možno rozložit na tři lineární faktory.[13] Kőnig poznamenal, že tato věta neplatí pro grafy nekonečné.

V kapitole XIII se pak Kőnig věnoval rozkladu nekonečných pravidelných grafů. Nejprve studoval vlastnosti nekonečných pravidelných grafů, jejichž uzly mají konečný sudý stupeň. Ukázal, že takové grafy můžeme podobně jako pravidelné konečné grafy sudého stupně vždy rozložit na faktory druhého stupně (Věta 2, str. 204). Podobně jako pro grafy konečné platí, že pro každé liché číslo $2\alpha + 1$ existuje souvislý primitivní nekonečný pravidelný graf stupně $2\alpha + 1$ (Věta 5, str. 209). Část této kapitoly Kőnig věnoval nekonečným bipartitním grafům a ukázal, že každý pravidelný bipartitní graf konečného stupně můžeme rozložit na lineární faktory (Věta 7, str. 212).

4.2 Vývoj po roce 1936

4.2.1 Kritérium existence lineárního faktoru

Jedním z nejvýznamnějších výsledků teorie grafů po druhé světové válce je věta o existenci lineárního faktoru, kterou odvodil v roce 1947 William T. Tutte v práci *The factorization of linear graphs* [453]. Práce je zajímavá tím, že při důkazu první pomocné věty využil Tutte vlastností antisymetrických matic.[14] V roce 1952 ukázal F. G. Maunsell v [454], že Tutteho důkaz bylo možno provést celý pomocí střídavých cest.

Mějme konečný souvislý graf G s množinou uzlů $a_1, a_2, \dots, a_n$. Nechť $S = \{a_i, a_j, \dots, a_r\}$ je její podmnožina. Označme G_S graf, který dostaneme z G odstraněním uzlů množiny S a hran, které jsou s nimi incidentní. Počet všech komponent grafu G_S označme $h(S)$ a počet komponent s lichým počtem uzlů $h_u(S)$. Tutte ukázal (Věta 4, str. 110):

Graf G neobsahuje lineární faktor právě tehdy, když existuje podmnožina S jeho uzlů taková, že platí $h_u(S) > |S|$

V roce 1953 odvodil jiné kritérium existence lineárního faktoru v grafech B. Kaluza [455], který ukázal, že v libovolném grafu G existuje lineární faktor právě tehdy, když graf G nemůžeme dostat z jisté cesty G_0 liché délky pomocí dvou jednoduchých operací, případně jejich opakováním. První operace je připojení nové cesty sudé délky k některému uzlu grafu a druhá spojení dvou

[13] Tuto větu ve svých pracech používal A. Kotzig.

[14] Na možnost využití antisymetrických matic při studiu lineárních faktorů grafu upozornil již G. Brunel v práci [109]. Poznámku o tom nalezneme v Kőnigově knize (str. 237).

uzlů grafu pomocí cesty liché délky. Užití tohoto kritéria je pro složité grafy samozřejmě obtížné.

V práci *The 1-factors of oriented graphs* [456] odvodil Tutte pomocí orientovaných cest nutnou a postačující podmínku existence lineárního faktoru v konečném orientovaném grafu (Věta 5.1, str. 928) a pak v lokálně konečném[15] orientovaném grafu $\vec{G}$ (Věta 6.2, str. 929).

Mezi základní práce v oblasti faktorizace grafů patří příspěvek T. Gallaiho z roku 1950 *On factorization of graphs* [457]. V této práci rozvinul Gallai metody vypracované J. Petersenem [99] a F. Baeblerem [458].[16] Výsledky těchto autorů byly většinou dokázány metodami, které závisely na tom, zda studovaný graf byl lichého či sudého stupně a na tom, jakého stupně byl hledaný faktor. Gallaimu se podařilo najít obecnou metodu, kterou je možno použít ve všech případech. Jeho metoda vychází z Petersenovy metody střídavých cest, kterou ovšem výrazným způsobem rozvinul.

Gallai nejprve dokázal Tutteho větu[17] a pak ukázal, jakým způsobem můžeme tuto větu vyjádřit pomocí nových pojmů, které zavedl. Řekneme, že dva podgrafy G_1, G_2 grafu G, které nemají společné uzly, jsou spojené (connected), jestliže existuje hrana, která má jeden koncový uzel v G_1 a druhý koncový uzel v G_2. Množinu podgrafů grafu G nazveme nezávislou (independent subgraphs), jestliže žádné dva podgrafy této množiny nemají společný uzel a současně nejsou spojené. Tutteho větu pak Gallai formuloval takto (str. 143):

Nutnou a postačující podmínkou existence lineárního faktoru v konečném grafu je, aby počet uzlů spojených s kteroukoli množinou nezávislých podgrafů obsahujících lichý počet uzlů nebyl menší než počet podgrafů v této množině.

V další části Gallai dokázal Kőnigovu–Hallovu větu o existenci lineárního faktoru v pravidelném bipartitním grafu, kde je situace velmi jednoduchá. Není třeba uvažovat množinu nezávislých podgrafů, ale jen systém nezávislých uzlů. Gallai ukázal, že pokud bipartitní graf nemá lineární faktor, pak existuje systém nezávislých uzlů, které jsou spojeny s množinou uzlů, která má méně prvků než je počet uzlů v tomto systému. Na druhé straně je zřejmé, že pokud lineární faktor existuje, pak takový systém nenajdeme.

V další části této rozsáhlé práce se Gallai zabýval problémem existence pravidelných faktorů stupně $n > 1$, který byl do té doby studován pouze pro pravidelné grafy. Gallai odvodil několik nutných podmínek existence takových pravidelných faktorů a ukázal, že z nich vyplývají některá již dříve známá tvrzení.

V poslední části pak Gallai ukázal, že předcházející výsledky platí i v pří-

[15] Lokálně konečným grafem rozumíme nekonečný graf, ve kterém má každý uzel konečný stupeň. Lineárním faktorem v orientovaném grafu $\vec{G}$ Tutte rozuměl podgraf grafu $\vec{G}$, který obsahuje všechny uzly grafu $\vec{G}$ a ve kterém vstupní a výstupní stupeň každého uzlu je rovný 1.

[16] F. Baebler ukázal, že pravidelný graf stupně r, který je hranově $(r-1)$-souvislý a obsahuje sudý počet uzlů, má lineární faktor. C. Berge ve své knize [357] a v 70. letech J. Plesník v práci [459] dokázali, že v takovém případě existuje lineární faktor, který obsahuje zvolenou hranu. Plesník současně ukázal, že existuje lineární faktor, který neobsahuje zvolených $r-1$ hran.

[17] V roce 1963 podal Gallai nový důkaz Tutteho věty v práci [460]. Existuje mnoho dalších důkazů Tutteho věty (viz. [370, str. 5]). Jeden podal i Plesník [461] v roce 1975.

padě lokálně konečných grafů. Jen je třeba vždy uvažovat systémy uzlů nebo podgrafů s konečným počtem prvků.

4.2.2 Pravidelné faktory

Podívejme se v závěru na některé další práce, které v 50. a 60. letech ovlivnily vývoj faktorizace grafů. Pozornost věnujeme zejména pracem, ve kterých je studována existence lineárního faktoru. V literatuře je možno najít několik přehledných článků, které se věnují problému faktorizace. Jedná se např. o práce [370, 372, 371].

Hans Boris Belck v roce 1950 nalezl kritérium existence pravidelného faktoru n-tého stupně. Jeho důkaz v práci [462] byl ovšem značně komplikovaný.

W. T. Tutte v práci *The factors of graphs* [463] zobecnil v roce 1952 pojem faktor n-tého stupně tím, že definoval ***f*-faktor** grafu:

Nechť f je funkce, která každému uzlu a lokálně konečného grafu G přiřazuje kladné celé číslo $f(a)$. Faktor F grafu G nazveme f-faktor, jestliže pro každý uzel a platí $d_F(a) = f(a)$ ($d_F(a)$ označuje stupeň uzlu a ve faktoru F).

Faktor n-tého stupně je potom f-faktor, ve kterém pro každý uzel a platí $f(a) = n$. Tutte odvodil nutnou a postačující podmínku existence f-faktoru (a tedy také faktoru n-tého stupně) v lokálně konečných grafech G (Věta XV, str 324). K jejímu důkazu užil Tutte Gallaiho metody založené na střídavých cestách v grafu G. Ověření existence f-faktoru v daném grafu je však podle tohoto kritéria velmi složité.

Tutte se k problému existence f-faktoru vrátil v roce 1954 v práci [464]. Ukázal, jakým způsobem je možno podmínku existence f-faktoru odvodit z nutné a postačující podmínky existence lineárního faktoru. Ani tím se ovšem praktické ověření existence f-faktoru příliš nezjednodušilo. Tutte si byl této skutečnosti vědom a o zjednodušení dále usiloval. Jiné kritérium existence f-faktoru podal v roce 1957 O. Ore v práci [465].

Všimněme si nyní alespoň stručně prací spojených s problematikou maximálního párování v grafech.

V roce 1955 studoval O. Ore v práci [466] problém maximálního párování v bipartitním grafu $G = (A, B)$. Označme $\nu(G)$ počet hran maximálního párování v grafu G a definujme $\nu'(G) = Min\{|A| + |\Gamma(X)| - |X|\}$ pro všechny $X \subseteq A$, kde $\Gamma(X) \in B$ opět představuje množinu uzlů, které jsou spojeny hranou s alespoň jedním uzlem množiny X. Ore ukázal, že platí

$$\nu'(G) = \nu(G).$$

O dva roky později C. Berge řešil v práci [451] otázku maximálního párování v libovolném grafu $G = (V, E)$. Označíme-li stejně jako v Tutteho práci [453] $h_u(S)$ počet lichých komponent grafu G_S a položíme-li $\nu''(G) = \frac{1}{2}Min\{|V| - h_u(S) + |S|\}$ pro všechny $S \subseteq V$, pak platí

$$\nu''(G) = \nu(G).$$

Také při problému maximálního párování hrají významnou úlohu střídavé cesty. Střídavou cestou vzhledem k párování M nazveme cestu, ve které se pravidelně střídají hrany patřící do M s hranami, které do M nepatří. Berge ukázal, že M je maximální párování právě tehdy, jestliže v grafu G neexistuje střídavá cesta vzhledem k párování M, která spojuje dva uzly, které nejsou incidentní s žádnou hranou párování M. Kdyby taková cesta existovala, mohli bychom záměnou hran párování M, které leží na této cestě, za hrany cesty, které v M nejsou, získat nové párování, které by mělo větší počet hran. Proto takovou střídavou cestu nazýváme **zvětšující cesta**. Pojem zvětšujícící cesty znali již J. Petersen, D. Kőnig, E. Egerváry a pravděpodobně i další.

Bergeho věta se stala základem algoritmů, které hledají maximální párování v grafech. Nejprve byly studovány algoritmy pro bipartitní grafy. V roce 1956 Marschal Hall (1910–1990) v práci [467] nalezl algoritmus pro konstrukci systému různých reprezentantů, ale svůj výsledek na bipartitní grafy nezobecnil. H. W. Kuhn po prostudování prací Kőniga a Egerváryho použil metod lineárního programování a v práci [468] nalezl algoritmus pro řešení problému maximálního párování v ohodnocených bipartitních grafech. Na počest svých předchůdců jej nazval *maďarský algoritmus*.

Poznamenejme, že otázky maximálního párování (a tedy také existence lineárního faktoru v grafech) pomáhá významným způsobem řešit teorie toků v sítích. L. R. Ford a D. R. Fulkerson v knize *Flows in Networks* [469] v roce 1962 ukázali, jak lze jejich značkovací algoritmus pro nalezení maximálního toku v síti aplikovat na hledání maximálního párování v bipartitních grafech. V roce 1965 J. Edmonds nalezl algoritmus pro nebipartitní grafy. Podrobnosti o tomto a dalších algoritmech lze nalézt v Plesníkově knize [421]. Plummerova práce [371] podává přehledný historický vývoj těchto algoritmů.

4.3 Práce Antona Kotziga

Problémy spojené s rozklady konečných pravidelných grafů upoutaly již v 50. letech pozornost bratislavského matematika A. Kotziga. Ve svých pracech vycházel především z Kőnigovy monografie a znal také práce J. Petersena, O. Frinka a T. Schönbergera, které u nás byly snadno dostupné. V období let 1954–1961 napsal řadu prací věnujících se zejména vlastnostem pravidelných grafů s lineárními faktory. Své práce psal většinou ve slovenském jazyce a proto byly dlouhou dobu pro matematiky ve světě nedostupné. Až v 70. letech se objevily zmínky o jeho výsledcích zejména v pracech maďarského matematika L. Lovásze (viz. [371, str. 194]).

V následující části naší práce podáme přehled Kotzigových prací věnovaných problému faktorizace grafů. Názvy jednotlivých částí odpovídají názvům Kotzigových prací.

4.3.1 O istých rozkladoch grafu

V práci [298] studoval A. Kotzig v roce 1955 vlastnosti takových souvislých pravidelných grafů n-tého stupně, které je možno rozložit na n lineárních faktorů.

Kotzig nejprve definoval řadu všeobecně známých pojmů. Zejména definoval pojem **stupeň souvislosti mezi uzly $\boldsymbol{u, v}$**, který označoval $\sigma_G(u,v)$. Kotzig tímto pojmem označoval minimální počet hran, po jejichž odstranění z grafu G leží uzly u, v v různých komponentách takto vytvořeného grafu. Položil přitom $\sigma_G(u,u) = +\infty$ a definoval tak funkci $\sigma_G(u,v)$ pro každou dvojici uzlů u, v souvislého grafu G.

Pro přirozené číslo k pak Kotzig definoval relaci $(\overset{k}{=})$. Dva uzly u, v jsou v relaci $(\overset{k}{=})$ pokud $\sigma_G(u,v) \geq k$. Kotzig ukázal, že takto definovaná relace $(\overset{k}{=})$ je relace ekvivalence. Proto můžeme provést rozklad množiny uzlů U grafu G podle relace $(\overset{k}{=})$ na třídy ekvivalentních prvků $U_1^{(k)}, U_2^{(k)}, \ldots, U_n^{(k)}$. Tento rozklad Kotzig označil $U^{(k)}$.

Kotzig pak pro přirozené číslo i definoval pomocí rozkladu $U^{(k)}$ množinu $H(i, i+1)$ všech takových hran grafu G, ve kterých pro dvojici uzlů u, v, s kterými je hrana incidentní, platí:

1. Uzly u, v patří ke dvěma různým množinám rozkladu $U^{(i+1)}$,
2. uzly u, v patří do stejné množiny rozkladu $U^{(i)}$.

Kotzig odvodil některé vlastnosti množin $H(i, i+1)$ (Věty 2, 3, 4). Ukázal např., že hrana h je prvkem množiny $H(i, i+1)$ právě tehdy, když pro uzly u a v, s kterými je hrana h incidentní, platí $\sigma_G(u,v) = i$ (Věta 3, str. 147).

Po těchto přípravných úvahách se Kotzig věnoval vyšetřování vlastností pravidelných souvislých grafů G n-tého stupně, ve kterých existuje rozklad $R = \{L_1, L_2, \ldots, L_n\}$ grafu na lineární faktory. Kotzig ukázal, že pokud je n liché číslo, pak pro libovolné dva uzly u, v tohoto grafu G platí, že číslo $\sigma_G(u,v)$ je buď číslo sudé, nebo $\sigma_G(u,v) = n$ (Věta 11, str. 151). V takovém grafu je libovolná hrana buď hranou množiny $H(n, n+1)$, nebo je hranou některé z množin $H(2i, 2i+1)$, kde $i = 1, 2, \ldots$. (Věta 12, str. 151).

4.3.2 Poznámky k Listingovej vete o rozklade grafu na otvorené ťahy

V této práci [303] A. Kotzig v roce 1956 odvodil kritérium existence lineárního faktoru v pravidelném grafu 3. stupně. Vyšel přitom z Listingovy věty, podle které v pravidelném grafu G $(2n+1)$-ního stupně $(n > 0)$ o $2m$ uzlech musí existovat Listingův systém otevřených tahů $\{T_1, T_2, \ldots, T_m\}$, tedy systém, ve kterém je každá hrana grafu G hranou právě jednoho tahu. Kotzig ukázal, že pokud má takový graf G alespoň jeden lineární faktor L, pak existuje Listingův systém otevřených tahů, ve kterém každý tah systému obsahuje stejný počet $(2n+1)$ hran a právě jednu hranu faktoru L, která je svým pořadím prostřední hranou tahu (Věta 1, str. 397).

Kotzig pak odvodil kritérium existence lineárního faktoru v pravidelných grafech 3. stupně (Věta 2, str. 400):

Nechť G je konečný pravidelný graf 3. stupně o $2m$ uzlech a nechť v grafu G existuje Listingův systém otevřených tahů $T = \{T_1, T_2, \ldots, T_m\}$, ve kterém každý tah obsahuje právě tři hrany, pak v grafu G existuje alespoň jeden lineární faktor L.

Podobná věta pro pravidelné grafy lichého stupně většího než 3 neplatí. Kotzig tento fakt ukázal na konkrétním příkladu pravidelného grafu 5. stupně, který neobsahuje lineární faktor, i když existuje jeho rozklad na Listingův systém otevřených tahů, ve kterém každý tah obsahuje právě pět hran.

V závěru práce Kotzig dokázal, že nutnou podmínkou proto, aby pravidelný graf G $(2n+1)$-ního stupně bylo možno rozložit na Listingův systém otevřených tahů, ve kterém je každý tah tvořen $(2n+1)$ hranami, je, aby graf G neobsahoval uzel, který je incidentní s více než n mosty (Věta 3, str. 401).

4.3.3 Rozklad konečného pravidelného grafu nepárného stupňa na dva faktory

Na předcházející výsledky A. Kotzig navázal v roce 1958 v práci [321]. V krátkém historickém úvodu zde Kotzig připomenul výsledky L. Eulera, C. Hierholzera, J. B. Listinga, É. Lucase a J. Petersena.

Pak dokázal (str. 28):

Pravidelný graf G $(2n+1)$-ního stupně (kde n je libovolné přirozené číslo) s $2m$ uzly se dá rozložit na faktor n-tého a faktor $(n+1)$-ního stupně právě tehdy, když v G existuje Listingův systém tahů, jehož každý tah má lichý počet hran.

Pokud ovšem v pravidelném grafu $(2n+1)$-ního stupně G neexistuje takový Listingův systém otevřených tahů, neznamená to ještě, že G je primitivní graf. Tuto skutečnost Kotzig demonstroval na příkladu jistého pravidelného grafu 7. stupně, který můžeme rozložit na faktory 5. a 2. stupně, ale nemůžeme rozložit na faktory 4. a 3. stupně.

4.3.4 Eulerovské čiary a rozklady pravidelného grafu párného stupňa na dva faktory rovnakého stupňa

V této práci [304] A. Kotzig ukázal v roce 1956 možnost zobrazení systému všech eulerovských tahů souvislého pravidelného grafu G sudého stupně na systém všech rozkladů grafu G na dva faktory stejného stupně. Dostatečnou pozornost jsme jeho výsledkům věnovali v kapitole 1.

4.3.5 Z teorie konečných pravidelných grafov tretieho a štvrtého stupňa

V další své práci [312] věnované rozkladům pravidelných grafů na lineární faktory zavedl A. Kotzig v roce 1957 pojem **úhel grafu**. Úhlem grafu s vrcholem v uzlu u a s rameny h_1, h_2 rozuměl trojici prvků grafu $\{u, h_1, h_2\}$, kde u je uzel a $h_1 \neq h_2$ hrany grafu, které jsou obě incidentní s uzlem u.

Kotzig ukázal (Věta 4, str. 79):

V libovolném souvislém grafu G se sudým počtem hran existuje takový systém $\mathfrak{W}$ úhlů grafu G, že každá hrana grafu G je ramenem právě jednoho úhlu systému $\mathfrak{W}$ a systém úhlů s touto vlastností existuje jen tehdy, když G má sudý počet hran.

V další části pak Kotzig věnoval pozornost souvislým pravidelným grafům 3. stupně se sudým počtem hran. Ukázal, že v těchto grafech existuje takový systém úhlů, ve kterém je každá hrana grafu ramenem právě jednoho úhlu systému (Věta 5, str. 80). Poté odvodil některé vlastnosti pravidelných grafů 3. stupně se sudým počtem hran, které mají lineární faktor (Věta 6, str. 80), resp. jdou rozložit na tři lineární faktory (Věta 7, str. 81).

Kotzig pak zavedl jisté zobrazení, které pravidelnému grafu 3. stupně G přiřazuje pravidelný graf 4. stupně G^*, který nazval **ϑ-obrazem** grafu G:

Graf $G^* = (V^*, E^*)$ nazveme ϑ-obrazem souvislého pravidelného grafu 3. stupně $G = (V, E)$, jestliže platí:
1) Existuje prosté zobrazení α množiny hran E na množinu uzlů V^*,
2) existuje prosté zobrazení β systému úhlů $\mathfrak{W}$ grafu G na množinu hran E^*,
3) uzel $v^* = \alpha(h_i)$ je incidentní s hranou $h^* = \beta(W_j)$ v grafu G^* právě tehdy, když hrana $h_i \in E$ je hranou úhlu $W_j \in \mathfrak{W}$.

Kotzig odvodil některé vlastnosti těch grafů $G^* = \vartheta(G)$, které mají sudý počet uzlů. Ukázal, že každý takový graf graf G^* má lineární faktor (Věta 8, str. 83). Pokud má graf G lineární faktor, pak graf G^* má kvadratický faktor, který je možno rozložit na dva lineární faktory (Věta 9, str. 83). Pokud je možno rozložit graf G na tři lineární faktory, pak můžeme rozložit graf G^* na čtyři lineární faktory a naopak (Věty 10 a 11, str. 84).

V poslední části A. Kotzig ukázal souvislost mezi hamiltonovskými kružnicemi v pravidelných grafech 3. stupně a rozložením jejich ϑ-obrazů na dvě hamiltonovské kružnice.

4.3.6 Súvislosť a pravidelná súvislosť konečných grafov

Kotzigova práce [305] z roku 1956 je rozdělena do čtyř kapitol a desíti částí. Autor v první kapitole nejprve na několika stranách definoval základní pojmy. V druhé kapitole se zabýval rozklady grafů, které charakterizují jeho souvislost. V třetí kapitole se zaměřil na souvislost v pravidelných grafech. Zde také nalezneme problémy týkající se rozkladu pravidelných grafů na lineární faktory. V poslední kapitole pak Kotzig doplnil a systematizoval předcházející výsledky a navázal na práci [302].

My se zde soustředíme na osmou část Kotzigovy práce, která má název *Rozklady pravidelného grafu na lineárne faktory a jeho súvislosť*. Kotzig zde uvedl některé výsledky týkající se rozkladu pravidelných grafů na lineární faktory, které již byly publikovány v [298] a kde byla zavedena relace ekvivalence

$(\stackrel{k}{=})$ a rozklad $U^{(k)}$ množiny uzlů grafu G podle této relace. Tyto výsledky pak dále významným způsobem rozšířil.

Kotzig dokázal, že pokud můžeme rozložit pravidelný graf G n-tého stupně na n lineárních faktorů, pak G neobsahuje žádnou artikulaci (Věta 53, str. 92). Ukázal dále, že v pravidelném grafu n-tého stupně existuje rozklad na lineární faktory jen tehdy, když každá z tříd rozkladu $U^{(n)}$ obsahuje sudý počet uzlů (Věta 58, str. 96). Tato podmínka není postačující. Například známý Petersenův graf ji splňuje, ale rozklad na tři lineární faktory nemá.

Kotzig se pak věnoval otázce kompozice lineárních faktorů nějakého pravidelného grafu. Dokázal v této souvislosti tuto větu (Věta 60, str. 99):

Nechť G je pravidelný graf n-tého stupně ($n > 1$), ve kterém existuje takový rozklad $F = \{L_1, L_2, \ldots, L_n\}$ na lineární faktory, že kompozice libovolných dvou různých lineárních faktorů z F je hamiltonovská kružnice grafu G[18]*, pak G je pravidelně souvislý graf.*[19]

Na tomto místě se A. Kotzig zmínil o práci [455], ve které odvodil B. Kaluza nutnou a postačující podmínku existence lineárního faktoru v libovolném grafu, ale o pracích W. T. Tutteho a T. Gallaiho se nezmínil.

Kotzig pak ještě odvodil zajímavou větu (Věta 61, str. 101), která zaručuje existenci pravidelných grafů n-tého stupně ($n > 3$) neobsahující žádný lineární faktor, které nejen že neobsahují žádný most, ale ve kterých se nevyskytuje ani řez mohutnosti menší než $n - 2$. To ovšem nevyvrací Petersenovu domněnku o pravidelných grafech lichého stupně, protože graf lichého stupně vyššího než třetího, který neobsahuje lineární faktor, nemusí být ještě primitivní.

4.3.7 Poznámka k rozkladom konečných párnych pravidelných grafov na lineárné faktory

V této práci [322] se A. Kotzig zabýval v roce 1958 existencí rozkladu konečných bipartitních pravidelných grafů na lineární faktory. Víme, že libovolný bipartitní pravidelný graf n-tého stupně se dá rozložit na n lineárních faktorů [275, str. 171]. Nechť tedy G je libovolný bipartitní pravidelný graf n-tého stupně $n > 1$ a nechť $\mathfrak{R} = \{L_1, L_2, \ldots, L_n\}$ je libovolný rozklad grafu G na lineární faktory. Graf $Q_{i,j}$, který je kompozicí lineárních faktorů L_i, L_j (kde $i < j; i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$; $Q_{i,j} = L_i \times L_j$) je zřejmě kvadratickým faktorem grafu G. Kotzig se ovšem zabýval jen tím případem, kdy pro všechny dvojice $i < j; i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ je graf $Q_{i,j}$ souvislý a tvoří tedy hamiltonovskou kružnicí grafu G.

Vzniká otázka, zda při daném počtu uzlů a daném stupni existuje alespoň jeden takový pravidelný bipartitní graf, který má uvedenou vlastnost. Kotzig ukázal, že platí (Věta 2, str. 352):

Nechť G je bipartitní pravidelný graf m-tého stupně ($m > 2$) s $2n$ uzly. Takový rozklad $\mathfrak{R} = \{L_1, L_2, \ldots, L_m\}$ grafu G na lineární faktory, že kompozice

[18] Takové grafy existují a Kotzig je později v práci [354] nazval hamiltonovské grafy.
[19] Definici pravidelně souvislého grafu jsme uvedli na straně 38.

libovolných dvou lineárních faktorů rozkladu je hamiltonovskou kružnicí grafu G, může existovat jen tehdy, když n je liché číslo.

Tato věta doplňuje výše citovanou větu 60 z práce [305], ve které Kotzig ukázal, že tento graf je pravidelně souvislý.

4.3.8 O rovnovážne orientovaných konečných grafoch

Práce [330] z roku 1959 je věnována zejména určení počtu rovnovážných orientací eulerovských grafů, počtu rovnovážně orientovaných podgrafů orientovaných grafů. Tyto výsledky jsou v závěru aplikovány na otázky určení počtu lineárních faktorů bipartitních grafů. Podrobně se o této práci zmíníme v kapitole 5 věnované orientovaným grafům.

4.3.9 Z teórie konečných grafov s lineárnym faktorom I, II, III

V této rozsáhlé práci [331, 332, 339] se A. Kotzig zabýval zkoumáním základních společných vlastností grafů, které obsahují lineární faktor. Tyto vlastnosti mohou pomoci při hledání kritérií existence lineárního faktoru. Kotzig zde citoval výsledky prací J. Petersena [99], B. Kaluzy [455], O. Frinka [199], T. Schönbergera [263] a samozřejmě také výsledky, které nalezl v Kőnigově monografii. Navázal přitom na své předcházející práce [303, 305, 312, 321].

V úvodu první části Kotzig definoval známé pojmy **střídavá cesta** a **střídavá kružnice** vzhledem k lineárnímu faktoru L:[20]

Nechť G je libovolný graf, ve kterém existuje lineární faktor L. Kružnici K grafu G nazveme střídavá kružnice (zkráceně α-kružnice) vzhledem k L, když libovolný uzel z K je incidentní právě s jednou takovou hranou z K, která patří do L.

Cestu C grafu G budeme nazývat střídavá cesta (α-cesta) vzhledem k L, když každý uzel cesty C je incidentní právě s jednou hranou cesty C, patřící do L.

Kotzig ukázal, že pomocí střídavých kružnic vzhledem k nějakému faktoru L_0 můžeme získat ostatní lineární faktory tohoto grafu (Věty 1 a 2, str. 76–77). Jak víme, tuto skutečnost znali již J. Petersen a O. Frink. Z Kotzigovy další úvahy vyplynulo, že množina $\hat{H}$ těch hran grafu G, které jsou hranou alespoň jedné α-kružnice vzhledem k nějakému lineárnímu faktoru, nezávisí na volbě lineárního faktoru (Věta 4, str. 78). Kotzig tak mohl definovat pojem **jádro** grafu G:

Podgraf grafu G (obsahujícího alespoň jeden lineární faktor), který je tvořen právě z těch hran, které jsou hranou alespoň jedné α-kružnice v G a z uzlů s těmito hranami incidentních, nazveme jádrem grafu G.

[20] Kotzig uvedl, že pro speciální případ pravidelných grafů 3. stupně odpovídá pojem střídavá kružnice Petersenovu Wechselpolygonu.

Jádro grafu G Kotzig označoval $\hat{G}$. Jádrem grafu může být i nulový graf. Pokud je jádro $\hat{G}$ nenulový graf, pak v $\hat{G}$ existuje lineární faktor. Jádrem nenulového jádra $\hat{G}$ je jádro $\hat{G}$. Tedy $\hat{\hat{G}} = \hat{G}$ (Věta 6, str. 79). Kotzig ukázal, že libovolná hrana grafu G, který obsahuje alespoň jeden lineární faktor, je buď hranou jádra $\hat{G}$, nebo nepatří do žádného lineárního faktoru grafu G, nebo patří do každého lineárního faktoru grafu G a tyto tři případy se navzájem vylučují.

Poznatky, které získal v předcházející části, mu umožnily definovat relaci Ω a relaci Λ a studovat jejich základní vlastnosti :

Nechť G je libovolný graf, ve kterém existuje lineární faktor. Definujeme na množině uzlů grafu G relaci Ω takto: uzly u, v jsou v relaci Ω (zapíšeme $u\Omega v$) právě tehdy, když $u = v$, nebo když existuje v G taková cesta spojující uzly u a v, jejíž každá hrana je hranou alespoň jednoho lineárního faktoru grafu G.

Definujeme dále relaci Λ takto: uzly u, v jsou v relaci Λ (zapíšeme $u\Lambda v$) právě tehdy, když neexistuje v G taková α-cesta (vzhledem k libovolnému lineárnímu faktoru), která by spojovala uzly u a v.

Kotzig dokázal, že relace Ω je v grafu obsahujícím lineární faktor relace ekvivalence (Věta 8, str. 80). Rozklad množiny U_G uzlů grafu G (obsahujícího lineární faktor) na třídy uzlů, které jsou v relaci Ω označil $\bar{U}_G^{\Omega}$.

Pro relaci Λ platí následující věta (Věta 11, str. 83):

Nechť G je libovolný graf, ve kterém existuje lineární faktor L a nechť $\bar{U}_G^{\Omega}$ je rozklad množiny U_G uzlů grafu G na třídy uzlů, které jsou v relaci Ω.

Platí: v libovolné třídě $U_i \in \bar{U}_G^{\Omega}$ je relace Λ relací ekvivalence.

Protože relace Λ je relace ekvivalence v libovolné třídě U_i rozkladu $\bar{U}_G^{\Omega}$, můžeme každou z těchto tříd ještě dále rozdělit na třídy uzlů, které jsou jak v relaci Ω tak v relaci Λ. Tento rozklad Kotzig označil $\bar{U}_G^{*}$.

Ve druhé části své práce Kotzig definoval pojem **nasycený graf**:

Graf G, ve kterém existuje lineární faktor, budeme nazývat nasyceným grafem, když libovolné dva jeho uzly, které jsou v relaci Λ, jsou v G spojeny alespoň jednou hranou.

Např. každý úplný graf se sudým počtem uzlů je nasycený. Existují ale i nasycené grafy, které nejsou úplné. Kotzig odvodil řadu vlastností nasycených grafů. Ukázal například, že nasycený graf je vždy souvislý (Věta 15, část II, str. 138). Velký význam nasycených grafů pro studium základních vlastností grafů s lineárním faktorem vyplývá ze skutečnosti, že libovolný nenasycený graf G s lineárním faktorem je podgrafem alespoň jednoho grafu, který má stejnou množinu uzlů a stejné jádro jako graf G (Věta 19, část II, str. 19).

Z dalších Kotzigových výsledků vyplynulo, že libovolný graf G s lineárním faktorem, který není nasycený, můžeme přidáním hran spojujících uzly z různých tříd rozkladu $\bar{U}_G^{\Omega} = \{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ doplnit na nasycený graf jen tehdy, když libovolný z jeho podgrafů G_i (graf G_i je tvořen uzly množiny U_i a z těch hran grafu G, které spojují dva uzly z U_i) je nasyceným grafem.

V důkazu vět 24 a 25 (část II, str. 145–151) ukázal Kotzig způsob, jakým můžeme spojit jednotlivé nasycené podgrafy G_i hranami nepatřícími do žádného lineárního faktoru tak, aby vznikl nasycený graf G. Tato skutečnost pak umožnila v části III zúžit pozornost na vlastnosti a konstrukci nasycených grafů, ve kterých jsou libovolné dva uzly v relaci Ω.

V závěru druhé části zkoumal Kotzig grafy s lineárním faktorem, které mají nulové jádro. V těchto grafech existuje právě jeden lineární faktor a platí i obrácené tvrzení: graf s jediným lineárním faktorem má nulové jádro (Věta 26, část II, str. 152). V libovolném nasyceném grafu G s nulovým jádrem existuje alespoň jeden most a tento most patří do jediného lineárního faktoru grafu G (Věta 28, část II, str. 152).

Kotzig pak ukázal, že libovolný graf, ve kterém existuje jediný lineární faktor L, obsahuje alespoň jeden most patřící do L (Věta 29, část II, str. 153). Důsledkem předcházející věty je fakt, že libovolný eulerovský graf, ve kterém existuje lineární faktor, má nenulové jádro (protože nemůže obsahovat most [275, str. 194] a graf s nulovým jádrem vždy obsahuje most). Z toho ihned plyne, že pravidelný graf sudého stupně s lineárním faktorem má nenulové jádro.

Kotzig ukázal, že tento závěr je možno rozšířit na všechny grafy s lineárním faktorem, které jsou pravidelnými grafy stupně vyššího než prvního. Následující věta je významným obohacením teorie faktorizace pravidelných grafů (Věta 30, část II, str. 155):

Nechť G je libovolný pravidelný graf vyššího stupně než prvního, ve kterém existuje lineární faktor. Pak G má nenulové jádro; t. j. v G existují nejméně dva lineární faktory.

Kotzigova věta 29 je citována v historickém přehledu prací zabývajících se rozklady grafů [370, str. 11]. Můžeme ji formulovat takto:

Libovolný hranově 2-souvislý graf, který má lineární faktor, má alespoň dva lineární faktory.

Stejný výsledek odvodili v roce 1967 L. W. Beineke a M. D. Plummer v práci [470]. V roce 1978 B. Bollobás v knize [471] ukázal, že každý hranově k-souvislý graf s lineárním faktorem má nejméně k lineárních faktorů. G. Hetyei v práci [472] v roce 1964 zase dokázal, že graf s $2n$ uzly, který obsahuje lineární faktor a ve kterém platí $E(G) > n^2$, obsahuje minimálně dva lineární faktory.

L. Lovász, který se seznámil s Kotzigovými výsledky, v roce 1972 v práci [473] ukázal, že graf s jediným lineárním faktorem musí mít malý minimální stupeň. Dokázal, že graf s n uzly, který má lineární faktor a minimální stupeň $\delta(G) \geq \lfloor log_2(n+2) \rfloor$ má nejméně dva lineární faktory. Dále ukázal, že pro hranově k-souvislý graf s lineárním faktorem platí, že počet lineárních faktorů v tomto grafu je větší nebo roven $n!$, nebo pro libovolnou dvojici uzlů u, v grafu G má graf $G \setminus \{u, v\}$ lineární faktor.

Ve třetí části Kotzig studoval grafy s lineárním faktorem, ve kterých je libovolná dvojice uzlů v relaci Ω. Takové grafy nazval **Ω-grafy**.

Hlavním výsledkem této části je věta, která ukazuje způsob, jakým můžeme libovolný nasycený Ω-graf převést na graf G^*, jehož každý člen má nasycené jádro (Věta 36, část III, str. 213):

Nechť G je libovolný nasycený Ω-graf. Nechť graf G^* vznikne z grafu G tak, že necháme splynout jednotlivé třídy rozkladu $\bar{U}_G^*$, a to každou z nich do jediného nového uzlu.

Platí:

(1) libovolný uzel z G^*, který vznikl splynutím takové třídy z $\bar{U}_G^*$, která obsahuje n uzlů, patří právě do n členů grafu G^*;

(2) libovolný člen grafu G^* je nasyceným jádrem;

(3) tvar grafu G^* nezávisí na pořadí, ve kterém necháme splynout jednotlivé třídy z $\bar{U}_G^*$.

4.3.10 Postrojenije gamiltonovskich grafov treťjej stěpeni

V této práci [354] Kotzig v roce 1962 navázal na své předcházející práce, ve kterých se zabýval otázkou existence hamiltonovských kružnic v grafech s lineárními faktory. V práci [305] se zabýval otázkami pravidelné souvislosti pravidelných grafů n-tého stupně, jejichž rozklad na n lineárních faktorů má tu vlastnost, že kompozice libovolných dvou různých lineárních faktorů tvoří hamiltonovskou kružnici grafu. Nyní pro tyto grafy použil název **hamiltonovský graf**. V práci [322] se zabýval bipartitními hamiltonovskými grafy.

Tato práce je pak Kotzigovým příspěvkem k teorii rozkladu pravidelných grafů 3. stupně. Popsal zde metodu konstrukce všech hamiltonovských grafů 3. stupně z nejjednoduššího možného takového grafu, tedy grafu, ve kterém jsou dva uzly spojeny třemi hranami (Věta 2, str. 161). Přitom použil dvou konstrukčních prvků, které nazval ϱ-rozšíření a π-rozšíření.

V závěru práce se Kotzig zabýval rovinnými hamiltonovskými grafy. Dokázal (Věta 3, str. 163):

Jediným pravidelným rovinným bipartitním hamiltonovským grafem 3. stupně je graf, který tvoří dva uzly a tři hrany, které tyto uzly spojují.

Kotzig tento výsledek dále zobecnil na pravidelné grafy 3. stupně, které nemusí být bipartitní ani hamiltonovské (v Kotzigově smyslu). Nechť $K = L_1 \times L_2$ je libovolná hamiltonovská kružnice pravidelného grafu 3. stupně (přitom není nutné, aby $L_1 \times L_3$; $L_2 \times L_3$ byly hamiltonovskými kružnicemi grafu G). Kotzig zobrazil daný graf tak, že hamiltonovskou kružnici zobrazil jako kružnici rozdělenou jednotlivými uzly a množinu H_3 hran lineárního faktoru L_3 představovaly úsečky, které spojovaly odpovídající body kružnice. Hamiltonovskou kružnici K nazval Kotzig **významnou hamiltonovskou kružnicí** právě tehdy, když množinu H_3 bylo možné rozložit na dvě třídy T_1, T_2 tak, že se žádné dvě úsečky představující hrany stejné třídy neprotínaly.

Kotzig dokázal, že pravidelný graf 3. stupně, který obsahuje alespoň jednu hamiltonovskou kružnici K, je rovinný tehdy a jen tehdy, když K je významná hamiltonovská kružnice (Věta 4, str. 163).

A. Kotzig o těchto výsledcích referoval na mezinárodní konferenci ve Smolenicích v roce 1963. Jeho příspěvek *Hamilton graphs and Hamilton circuits* [474] najdeme ve sborníku konference.