Problém čtyř barev, barvení grafů, rovinné grafy

Kapitola 3

Problém čtyř barev, barvení grafů, rovinné grafy

V první části této kapitoly se podrobně zmíníme o historii problému čtyř barev. Budeme sledovat jeho vývoj od roku 1852, kdy pravděpodobně vznikl, až do současnosti. Přitom vycházíme z původních prací, které jsou publikovány v knize [367]. Tuto část zakončíme přehledem některých výsledků, týkajících se otázek barvení uzlů grafů. Další oblastí, kterou ovlivnilo hledání řešení problému čtyř barev, je studium vlastností rovinných grafů. O této problematice se zmíníme v druhé části této kapitoly.

3.1 Problém čtyř barev

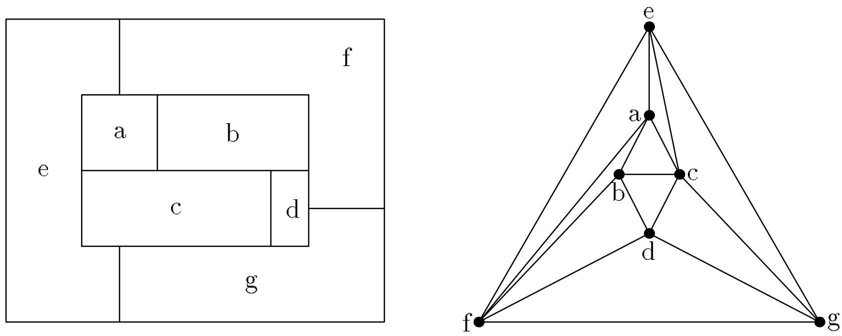
3.1.1 Vznik problému a Kempeho důkaz

Nejznámějším z problémů, které po desetiletí podněcovaly rozvoj teorie grafů, byla následující zdánlivě jednoduchá otázka. Mějme v rovině nebo na kouli znázorněnu zeměpisnou mapu s několika státy. Sousedními státy rozumíme ta dvě území, jež mají společnou hraniční čáru. Mají-li dva státy společné jen izolované body, nepokládáme je tedy za sousední (státy Arizona a Colorado v USA podle této definice nesousedí, protože mají pouze jeden společný bod). Budeme uvažovat jen takové mapy v rovině nebo na kulové ploše, ve které hranici každého státu tvoří jediná jednoduchá uzavřená křivka.

Nechť M je libovolná mapa; řekneme, že mapa je obarvitelná pomocí čtyř barev, jestliže každý stát této mapy můžeme obarvit jednou z těchto čtyř barev tak, aby sousední státy nebyly obarveny stejnou barvou. Otázka zní: je možno obarvit libovolnou mapu v rovině či na kulové ploše pomocí čtyř barev? Tento problém nazýváme **problém čtyř barev**. Praxe ukazuje, že čtyři barvy opravdu stačí. Dokázat toto tvrzení se však podařilo až v roce 1976, přestože se o důkaz během více než 100 let pokoušela řada matematiků.

Barvení mapy se dá převést na barvení uzlů grafu, který získáme takto:

uvnitř každého státu zvolíme libovolný bod a prohlásíme ho za uzel grafu, jehož hrany dostaneme tak, že spojíme dva uzly právě tehdy, když jsou odpovídající státy sousední. Barvení států je pak možno převést na barvení příslušných uzlů, přičemž dva uzly, které jsou spojeny hranou, obarvíme různými barvami. Z názoru je zřejmé, že graf odpovídající zeměpisné mapě je rovinný. Na obrázku 3.1 je znázorněna mapa v rovině a její graf. K obarvení této mapy stačí pouhé tři barvy.



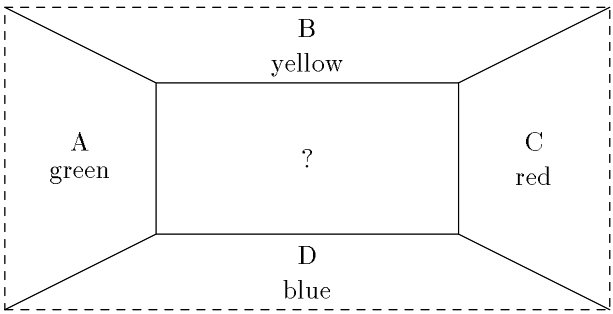
Obr. 3.1: Mapa a její graf

První zmínku o tomto problému nalézáme v dopise Augusta de Morgana (1806–1871) adresovaném W. R. Hamiltonovi ze dne 23. října 1852. De Morgan seznámil Hamiltona s otázkou, kterou mu položil jeden z jeho studentů na University College v Londýně. Tento student se jmenoval Frederick Guthrie; problém nevymyslel on, ale jeho bratr Francis Guthrie (1831–1899), který byl později profesorem matematiky v Kapském Městě a proslavil se některými objevy v botanice. Oba si všimli, že někdy jsou nutné k obarvení mapy skutečně čtyři barvy. Nenašli případ, kdy čtyři barvy nestačí, ale dokázat, že stačí, se jim nepodařilo. Frederick tedy položil otázku de Morganovi. Ten důkaz také neznal, a proto se obrátil na Hamiltona. Hamilton odpověděl již 26. října, kdy napsal, že se touto otázkou nebude v nejbližší době zabývat.

Problém, který začal de Morgan šířit, se stal brzy součástí matematického folklóru. Už v roce 1860 o důkazu přednášel Charles Sanders Peirce (1839–1914) v Harvardu. Tušíme, že jeho důkaz nebyl správný, i když jeho znění neznáme. S problémem se seznámil i A. Cayley, který o něm v roce 1879 publikoval krátkou práci [61]. Z jeho úvah je zřejmé, že se domníval, že důkaz tohoto tvrzení není možný. Předpokládal, že pro libovolné přirozené číslo n můžeme sestrojit mapu, na jejíž obarvení potřebujeme n různých barev.

Dne 17. 7. 1879 oznámil v časopise *Nature* londýnský advokát Alfred Bray Kempe (1849–1922) (bývalý student Cayleyho v Cambridge), že se mu podařilo problém vyřešit (viz. [63]). Na doporučení Cayleyho byl Kempeho důkaz publikován v práci *On the geographical problem of the four colours* [64] ve druhém ročníku časopisu *American Journal of Mathematics*. Důkaz vyvolal velké nadšení a Cayley navrhl autora za člena Royal Society. Kempe zde pak mnoho let zastával funkci pokladníka. Brzy se objevily další důkazy odvozené z Kempeho důkazu a problém se zdál být jasný.

Podívejme se, jakým způsobem Kempe ve své práci postupoval. Nejprve si uvědomil, že je postačující dokázat hypotézu čtyř barev pro tzv. **trivalentní mapy**. Tímto pojmem rozumíme mapu, na které se vždy stýkají právě tři hraniční křivky v jednom bodě. Pokud dokážeme, že pro trivalentní mapy čtyři barvy stačí, pak čtyři barvy stačí k obarvení libovolné mapy. Kempe ukázal, že libovolná trivalentní mapa obsahuje oblast, která sousedí s pěti nebo méně oblastmi. Důkaz hypotézy pak provedl matematickou indukcí vzhledem k počtu oblastí mapy. Hypotéza samozřejmě platí pro mapu s jednou oblastí. Je třeba ukázat, že pokud je mapa M_r s r oblastmi obarvitelná čtyřmi barvami, pak čtyři barvy stačí i pro mapu M_{r+1} s $r+1$ oblastmi. Kempe uvažoval jednotlivé případy map, které obsahují oblast sousedící s 2, 3, 4 nebo 5 oblastmi. Jeden z těchto případů musí vždy nastat. Z mapy M_{r+1} obdržel mapu M_r tak, že odstranil jednu hranu uvažované oblasti. Důkaz nečinil potíže pro první dva případy. Pro oblasti se čtyřmi a pěti sousedy použil Kempe následující metodu řetězců (Kempe chains), která pak byla ještě mnohokrát použita dalšími autory. Předpokládejme, že máme trivalentní mapu, která má již obarveny všechny oblasti pomocí čtyř barev, kromě jedné, která ještě obarvena není, a že neobarvená oblast sousedí se čtyřmi oblastmi A,B,C a D, které jsou postupně obarveny barvami zelenou, žlutou, červenou a modrou (viz. obr 3.2).



Obr. 3.2: Kempe chains

Ukážeme, že v takovém případě můžeme obarvení změnit tak, aby čtyři barvy stačily. Soustřeďme pozornost na oblasti A a C, které jsou obarveny zeleně a červeně. Mohou nastat dva případy: buď existuje řetězec A—C, ve kterém se pravidelně střídají oblasti obarvené zelenou a červenou barvou, nebo takový řetězec neexistuje. Ve druhém případě můžeme zaměnit barvy červenou a zelenou v těch červeno–zelených oblastech, které jsou spojeny s A, aniž by se změnila barva oblasti C. Po této záměně jsou obě oblasti A i C obarveny červeně a na oblast doposud neobarvenou můžeme použít barvu zelenou. Protože máme mapu nakreslenou v rovině nebo na kulové ploše, tak v případě, že existuje zeleno–červený řetězec spojující oblasti A a C, neexistuje žluto–modrý řetězec spojující oblasti B a D. Pak ovšem můžeme předcházející úvahu provést pro oblasti B a D.

Kempe ve své práci upozornil na to, že pro mapy na jiných plochách čtyři barvy nemusí stačit. Uvedl případ anuloidu, kde je někdy potřeba barev šest. Tímto problémem se však nezabýval. Kempe dále uvedl, že do každé oblasti můžeme umístit bod a ten spojit s body těch oblastí, které sousedí s uvedenou oblastí. Dostaneme rovinný graf[1] a naše úloha je převedena na barvení uzlů tohoto grafu.

Po Kempeho práci následovaly práce, které potvrzovaly její výsledek a snažily se jej modifikovat. Krátce se na tomto místě můžeme zmínit o práci [74], jejímž autorem je P. G. Tait. Práce souvisí s rozklady pravidelných grafů a Tait zde správně formuloval ekvivalentní podobu problému čtyř barev. Ukázal (řečeno dnešní grafovou terminologií), že barvení trivalentní mapy pomocí čtyř barev je ekvivalentní k přiřazení tří barev hranám rovinného pravidelného grafu třetího stupně tak, aby se v každém uzlu stýkaly hrany různých barev. Tato Taitova úvaha je správná, ovšem jeho další tvrzení o tom, že tento problém se snadno vyřeší indukcí, vyvolává úsměv. Tento problém je stejně složitý jako původní.

Jako zajímavost si na tomto místě můžeme uvést příklady toho, že Kempeho důkaz byl přijímán jako fakt. Vyřešení problému inspirovalo Charlese Lutwidga Dodgsona[2] (1832–1898) k vytvoření hry, při které jeden z hráčů kreslí mapu a druhý ji barví za pomoci čtyř barev. V roce 1886 vypsal ředitel jedné anglické chlapecké školy soutěž pro své žáky v tom, kdo podá lepší důkaz problému čtyř barev. Požadovaný důkaz neměl mít rozsah větší než jednu stranu textu a jednu stranu obrazové přílohy.

3.1.2 Práce P. J. Heawooda a L. W. J. Hefftera

Na chybu, které se Kempe ve svých úvahách dopustil, upozornil jako první v roce 1890 Percy John Heawood (1861–1955). V práci *Map–colour theorem* [93] ukázal, že Kempeho metoda řetězců selhává v případě, kdy jedinou neobarvenou oblast trivalentní mapy obklopuje pět oblastí, na které již byly použity všechny čtyři barvy. Výsledek jeho práce na zasedání London Mathematical Society oznámil samotný Kempe, který přiznal svou chybu a uvedl, že ji nedokáže napravit. Jestliže Kempeho důkaz vyvolal nadšení, pak Heawoodova práce zůstávala dlouhou dobu bez odezvy. Když v roce 1896 objevil chybu v Kempeho důkazu Charles de la Vallée Poussin (1866–1962), ukázalo se, že o Heawoodově práci vůbec nevěděl [115].

Heawoodova práce je významná z několika důvodů. Autor v ní dokázal, že k obarvení libovolné mapy v rovině nebo na kulové ploše stačí pět barev. Dlouhou dobu šlo o jediný definitivní výsledek. Důležitější ovšem je, že Heawood začal systematicky zkoumat barvení map na různých plochách. Doplníme-li ku-

[1] Kempe použil ve své práci označení *linkage*.

[2] Nematematické veřejnosti je znám jako Lewis Carroll, autor knih *Alenka v říši divů* a *Alenka za zrcadlem*.

lovou plochu p uchy, dostaneme jednoduchý model orientované plochy rodu p, kterou budeme označovat S_p. Kulovou plochu tedy označíme S_0 a anuloid S_1. Pro danou mapu M na ploše S_p symbolem $\chi(M)$ označíme **chromatické číslo mapy** M. Tímto pojmem rozumíme nejmenší počet barev, které jsou třeba k obarvení mapy M. Heawood ukázal, že horní hranice tohoto číslo závisí pouze na ploše S_p.

Kromě tohoto pojmu zavedl Heawood ještě pojem **chromatické číslo plochy**:

Jestliže S_p je plocha, na které je libovolná mapa obarvitelná n barvami, ale existují mapy, které se nedají obarvit $n-1$ barvami, řekneme, že plocha S_p má chromatické číslo n (zapíšeme $\chi(S_p) = n$).

Heawood ukázal příklad mapy na anuloidu, k jejímuž obarvení je zapotřebí sedm barev. Potom dokázal, že těchto sedm barev stačí k obarvení libovolné mapy na anuloidu (tedy $\chi(S_1) = 7$). Heawood odvodil následující nerovnost pro chromatické číslo $\chi(S_p)$ orientované plochy rodu $p \geq 1$

$$\chi(S_p) \leq \left\lfloor \frac{7+\sqrt{1+48p}}{2} \right\rfloor . \tag{3.1}$$

Heawood se domníval, že dokázal rovnost

$$\chi(S_p) = \left\lfloor \frac{7+\sqrt{1+48p}}{2} \right\rfloor . \tag{3.2}$$

Jak však v roce 1891 ukázal Lothar Wilhelm Julius Heffter (1862–1962) v práci *Über das Problem der Nachbargebiete* [96], byla dokázána jen nerovnost (3.1). Heffter si uvědomil, že pro každou plochu musíme najít mapu, která potřebuje k obarvení $\left\lfloor \frac{7+\sqrt{1+48p}}{2} \right\rfloor$ barev. Heawoodovi se to podařilo pouze pro anuloid. Heffter tento problém řešil tak, že se rozhodl konstruovat mapy, na kterých každá oblast sousedí s každou. Takovou mapu nazval **systém sousedících oblastí**.

Tato myšlenka nebyla nová. Již v roce 1840 řešil stejný problém August Ferdinand Möbius (1790–1868). Jeho přítel z univerzity v Lipsku, profesor filologie B. Weiske, mu položil otázku, zda je možné, aby umírající král rozdělil své království na pět částí mezi své syny tak, aby každá část sousedila se všemi ostatními. Vyloučen byl případ, kdy dvě oblasti mají jen společný bod. Šlo tedy o sestrojení systému pěti sousedících oblastí v rovině. Snadno se ukáže, že takový systém neexistuje. Heffter se o tomto problému dozvěděl z práce Heinricha Richarda Baltzera (1818–1887) [86]. Dlouhou dobu se tradovalo, že Möbius byl první, kdo formuloval problém čtyř barev. Již Felix Klein (1849–1925) si povšiml jisté podobnosti Möbiova problému s problémem čtyř barev. Pokud bychom mohli sestrojit systém pěti sousedících oblastí, pak potřebujeme k jejich obarvení pět barev. Pokud ovšem takový systém neexistuje, nedokazuje to, že čtyři barvy stačí.

Heffter uvažoval duální formulaci problému sousedících oblastí. Zde byl inspirován Kempem. Hledal systém bodů na ploše S_p, které jsou spojeny každý s každým tak, aby se spojující hrany neprotínaly. Tento systém nazval **systém sousedících bodů**; v grafové terminologii dnes hovoříme o úplných grafech, které se dají zobrazit na ploše S_p tak, aby jedinými společnými body hran byly uzly grafu. V pozdější literatuře byl někdy tento problém označován jako *problém nití* (název pochází od Davida Hilberta (1862–1943) a S. Cohn-Vossena) Jde pouze o to, že místo hran uvažujeme nitě.

Heffterův postup spočíval v tom, že pro pevný počet sousedících bodů hledal nejmenší rod plochy, na které jde tento systém sestrojit. Označíme-li toto číslo p_n, pak lze ukázat, že pro $n \geq 3$ platí vztah

$$p_n \geq k(n) = \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\rceil . \tag{3.3}$$

Symbolem $\lceil x \rceil$ je zde označena horní celá část čísla x.

Heffter dokázal vztah (3.3) pro všechna $n \leq 12$ a pro velmi speciální posloupnost $n = 19, 31, 55, 67, 139, 175, 199, \ldots$. Jedná se o čísla tvaru $n = 12s+7$ taková, že číslo $q = 4s + 3$ je prvočíslem a řád prvku 2 v multiplikativní grupě celých čísel mod q je roven $q - 1$ nebo $(q - 1)/2$.

V roce 1952 Gerhard Ringel dokázal vztah 3.3 pro $n = 13$ a v roce 1954 pro všechna $n \equiv 5 \pmod{12}$. V roce 1961 pro $n \equiv 3, 7, 10 \pmod{12}$. Pro $n \equiv 4 \pmod{12}$ vztah dokázal v roce 1963 W. Gustin. V roce 1963 C. M. Terry, L. R. Welch a J. W. T. Youngs vyřešili případ $n \equiv 0 \pmod{12}$. V letech 1963 až 1965 W. Gustin a J. W. T. Youngs dokázali vztah (3.3) pro $n \equiv 1, 9 \pmod{12}$. J. W. T. Youngs v roce 1966 vyřešil případ $n \equiv 6 \pmod{12}$. Na podzim roku 1967 G. Ringel a J. W. T. Youngs spojili své síly na univerzitě v Santa Cruz a dokázali zbývající případy pro $n \equiv 2, 8, 11 \pmod{12}$.

Přehled těchto výsledků nalezneme v knize [365], ve které je problém nití podrobně rozebrán.

V následující tabulce jsou uvedena chromatická čísla $\chi(S_p)$ pro několik prvních hodnot p. Pro $p = 0$ byl vztah 3.2 dokázán až v roce 1976, vyřešením problému čtyř barev.

p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\chi(S_p)$	4	7	8	9	10	11	12	12	13	13	14	15	15	16

Kromě dvoustranných ploch začaly matematiky zajímat i plochy jednostranné. Také na nich je možno konstruovat mapy a ty obarvovat různými barvami. Označme M_q Möbiův list rodu q. V roce 1910 Heinrich Franz Friedrich Tietze (1880–1964)[3] v práci [152] ukázal, že chromatické číslo Möbiova listu M_1 je 6. Pokusil se i o nalezení chromatického čísla plochy M_2, ale to se mu nepodařilo. V roce 1934 dokázal Philip Franklin (1898–1965) v práci [260], že platí $\chi(M_2) = 6$.

[3] Heinrich Tietze působil v letech 1910–1919 na německé technice v Brně. Otázkou barvení jednostranných ploch se ovšem zabýval ještě ve Vídni.

V roce 1954 odvodil G. Ringel v práci [422] obecný vztah

$$\chi(M_q) = \left\lfloor \frac{7+\sqrt{1+24q}}{2} \right\rfloor \quad \text{pro } q \neq 2. \tag{3.4}$$

Vztah (3.4) byl pro některé speciální hodnoty dokázán již dříve, jak ukazuje následující tabulka:

$q = 1$	Tietze H.	1910
$q = 2$	Franklin P.	1934
$q = 3, 4, 6$	Kagno I. N.	1935
$q = 5$	Coxeter H. S. M.	1943
$q = 7$	Bose R. C.	1939

Obtížný Ringelův důkaz vztahu (3.4) zjednodušil v roce 1967 J. W. T. Youngs, který užil při důkazu toků v grafech.

3.1.3 Práce amerických matematiků

Jak jsme již uvedli, první alternativní formu problému čtyř barev ukázal již P. G. Tait. Se druhou přišel v roce 1898 Heawood. Jeho práce *On the four-colour map theorem* [125] začíná zjištěním, že pokud je počet hran každé oblasti trivalentní mapy dělitelný 3, pak tuto mapu můžeme obarvit pomocí čtyř barev. Tento výsledek Heawood zobecnil následujícím způsobem:

Předpokládejme, že každému uzlu trivalentní mapy můžeme přiřadit hodnoty $+1, -1$ *takovým způsobem, že součet ohodnocení uzlů každé oblasti je dělitelný třemi, pak je mapa obarvitelná čtyřmi barvami.*

Toto tvrzení platí i obráceně. Důkaz přitom vychází z Taitovy ekvivalence problému. Heawood formuloval problém dále takto:

Označme uzly trivalentní mapy $v_1, v_2, \cdots, v_n$*, pak máme systém kongruencí, které odpovídají jednotlivým oblastem mapy, tvaru*

$$x_i + x_j + \cdots + x_k \equiv 0 \pmod 3,$$

kde každá neznámá nabývá hodnot $+1$ *nebo* -1*.* x_i *je obsaženo v kongruenci právě tehdy, když* v_i *leží na hranici odpovídající oblasti. Protože mapa je trivalentní, je každá neznámá obsažena právě ve třech kongruencích. Problém čtyř barev je tedy ekvivalentní problému, zda pro každou trivalentní mapu má odpovídající systém kongruencí řešení.*

Heawood věnoval těmto kongruencím hodně času a energie. Publikoval několik článků zabývajících se touto otázkou až do roku 1950, kdy mu bylo již téměř 90 let.

Po roce 1912, kdy publikoval svou první práci o problému čtyř barev O. Veblen [156], nastalo ve Spojených státech období zvýšeného zájmu o problém čtyř barev. Již dříve se zde problémem zabývali C. S. Peirce, W. E. Story (redigoval článek, ve kterém Kempe podal svůj „důkaz") a J. J. Sylvester. Dvě práce o tomto problému publikoval také Paul Wernicke [122, 144]. Veblenův zájem o topologii a jeho znalost nových algebraických metod, které objevil Jules Henri Poincaré (1854–1912), jej přivedly k řešení problému, který odolával snažení mnoha matematiků již více než 50 let. Jeho práce z roku 1912 se zabývala otázkami finitní geometrie a matic incidence nad konečným tělesem. V závěru Veblen ukázal jisté zobecnění systému Heawoodových kongruencí.

V téže době byl Veblenovým kolegou na Princeton University Georg David Birkhoff (1884–1944). Jeho práce *A determinant formula for the number of ways of coloring a map* [155] vyšla ve stejném ročníku *Annals of Mathematics* jako Veblenova práce [156]. Birkhoff přinesl do problému nové myšlenky. Pro dané přirozené číslo λ a danou mapu M zavedl číslo $P(\lambda)$, které označuje počet způsobů, kterými můžeme mapu M obarvit, je-li k dispozici λ barev. Birkhoff ukázal, že funkce $P(\lambda)$ je vždy polynom v λ. Poměrně komplikovaně odvodil vztah pro výpočet koeficientů těchto polynomů. Nechť mapa M obsahuje n oblastí. Symbolem (i,k) označme počet způsobů, jak je možno vytvořit z mapy M mapu o i oblastech pomocí k splynutí dvou oblastí tak, že odstraníme všechny jejich společné hranice. Birkhoff ukázal, že platí

$$P(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (i,k).$$

Birkhoffova druhá práce o barvení map nesla název *The reducibility of maps* [157]. V této práci autor revidoval dosavadní výsledky mnoha autorů a zformoval systematickou metodu dalšího zkoumání, která pak ovlivnila vývoj v dalších desetiletích a vedla nakonec k vyřešení problému čtyř barev. Základní myšlenka spočívá v tom, že pokud existují mapy, které vyžadují k obarvení pět barev, pak mezi nimi existují mapy, které mají nejmenší počet oblastí. Takové mapy nazveme **ireducibilní**. Jde o to, hledat stále další a další omezující podmínky pro takové mapy, až ireducibilní mapu sestrojíme, nebo dokážeme, že neexistuje. První výsledky v tomto směru přinesl P. Wernicke již v roce 1904 v práci [144], když ukázal, že ireducibilní mapa musí obsahovat buď dva sousedící pětiúhelníky, nebo pětiúhelník sousedící s šestiúhelníkem.

Birkhoff nejprve ukázal, že ireducibilní mapa musí být trivalentní a nemůže obsahovat oblast ohraničenou méně než pěti hranami. Dále aplikoval metodu Kempeho řetězců na „prstenec" oblastí R, který obepíná mapu M_1 a je obklopen mapou M_2. Ukázal, že ireducibilní mapa nemůže obsahovat prstenec tvořený čtyřmi nebo pěti oblastmi. Kromě toho odvodil ještě celou řadu dalších vlastností ireducibilní mapy.

V roce 1922 P. Franklin v práci [173] ukázal, že hypotéza čtyř barev platí pro všechny mapy, které mají nejvýše 25 oblastí. Podobně jako Birkhoff ukázal, které konfigurace oblastí nemohou v ireducibilní mapě nastat. Podobnou cestou se vydali i další matematici. Jejich výsledky ukazuje následující tabulka:

1922	P. Franklin	25
1926–27	N. Reynolds	27
1938	P. Franklin	31
1940	C. E. Winn	35
1970	O. Ore, J. Stemple	39
1970	A. Doněc, W. Stromquist	44
do 1974	J. Mayer	51,71,95

Problémem se zabývali i nematematici, o čemž svědčí výsledky J. Mayera, který působil jako profesor francouzské literatury na univerzitě v Montpellier. Jeho poslední výsledek přišel v době, kdy se blížil okamžik vyřešení problému čtyř barev.

Na konci 20. let se Birkhoff vrátil k problému čtyř barev a pod jeho vedením na něm začal pracovat i Hassler Whitney (1907–1989). Jejich práce významně ovlivnily rozvoj teorie grafů. Birkhoff v práci [221] dokázal, že pro všechny mapy s $n \geq 3$ oblastmi platí

$$P(\lambda) \geq \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)^{n-3},$$

kde λ je libovolné přirozené číslo různé od 4. Kdyby tento vztah platil i pro $\lambda = 4$, byl by dokázán problém čtyř barev.

Whitney ve svých pracích nemluvil o problému barvení map, ale převedl jej do řeči teorie grafů. Kromě Kempeho zmínky se touto problematikou do roku 1930 v podstatě nikdo nezabýval. Whitney užil označení $M(\lambda)$ pro počet způsobů obarvení daného grafu, je-li k dispozici λ barev. V případě že jde o graf, který odpovídá mapě, je funkce $M(\lambda)$ polynom proměnné λ, který dnes nazýváme **chromatický polynom grafu**. Pomocí principu exkluze a inkluze odvodil Whitney v práci [248] vztah pro koeficienty tohoto polynomu. Whitney problému čtyř barev věnoval i další práce. Uveďme zde například práci [231], ve které ukázal, že duální graf k rovinné trivalentní mapě musí být hamiltonovský.

V roce 1934 se Birkhoff v práci [259] věnoval ohraničení kořenů chromatických polynomů. Doufal přitom, že tímto způsobem by bylo možno problém čtyř barev vyřešit.

3.1.4 Vyřešení problému

V této části si ve stručnosti naznačíme, jakým způsobem byl problém čtyř barev v roce 1976 vyřešen. K tomu potřebujeme zavést několik pojmů. Souvislý rovinný graf nazýváme **konfigurací**, jestliže jsou všechny jeho vnitřní oblasti trojúhelníkové. Konfiguraci nazýváme **triangulací**, jestliže je i její vnější oblast trojúhelníková. Příkladem triangulace je tedy graf na obrázku 3.2. Triangulaci nazveme **jednoduchou**, pokud nemá dvojúhelníky, uzly stupně ≤ 4 a trojúhelníky, které netvoří hranici žádné oblasti. Z Eulerova vzorce pro rovinné grafy snadno odvodíme, že každá jednoduchá triangulace má alespoň 12 uzlů pátého stupně.

Jak již víme, pro řešení problému čtyř barev má smysl uvažovat jen trivalentní mapy. Těm odpovídá rovinný graf, který je konfigurací. Ukáže se, že pro důkaz hypotézy čtyř barev stačí zkoumat jen jednoduché triangulace. Ireducibilní mapě v našem novém označení odpovídá ireducibilní jednoduchá triangulace, tedy jednoduchá triangulace, jejíž uzly není možno obarvit pomocí čtyř barev a ze všech jednoduchých triangulací s touto vlastností má nejmenší počet uzlů. Hypotéza čtyř barev je pak pravdivá, jestliže neexistuje ireducibilní jednoduchá triangulace.

Pokud v triangulaci zvolíme nějaký n-úhelník a vynecháme všechny její uzly a hrany ležící vně tohoto n-úhelníka (ponecháme pouze uzly ležící na n-úhelníku), vznikne konfigurace. Číslo n nazveme řádem této konfigurace.

Důležitou roli mají konfigurace, které nejsou izomorfní s žádným podgrafem ireducibilního grafu. Ty nazveme reducibilní konfigurace. Víme, že tyto konfigurace hledali již Birkhoff, Wernicke a Franklin. Jejich počet neustále rostl a ukazovalo se, že je třeba nějaký systém jejich klasifikace. Nejpřirozenějším způsobem se ukázalo jejich roztřídění podle řádu. Zřejmě každá konfigurace, která obsahuje jako podgraf reducibilní konfiguraci, je reducibilní, proto se ukazuje výhodné zkoumat pouze tzv. minimální reducibilní konfigurace (které už nemají jako podgraf reducibilní konfiguraci). Úsilím mnoha matematiků se podařilo do poloviny 70. let najít všechny reducibilní konfigurace řádu menšího než 12.

Pro další úvahy musíme definovat ještě jeden nový pojem. Mějme dvě množiny grafů M_1 a M_2, řekneme, že množina M_1 je **nevyhnutelná** (unavoidable) vzhledem k množině M_2, když každý graf z M_2 má alespoň jeden podgraf izomorfní s některým grafem z M_1. Budeme zkoumat množiny nevyhnutelné vzhledem k množině všech ireducibilních jednoduchých triangulací, které budeme stručně nazývat nevyhnutelné množiny. Hypotéza čtyř barev je pak správná, když existuje nevyhnutelná množina reducibilních konfigurací.

Jakým způsobem rozhodneme, že daná konfigurace je reducibilní? Metody důkazu reducibility jsou založeny na metodě Kempeho řetězců a na nahrazení konfigurace konfigurací s menším počtem uzlů (tzv. reducérem). Existuje celá řada redukcí, které užívají různých reducérů.

Kenneth Appel a Wolfgang Haken použili při řešení problému čtyř barev v pracích [423, 424, 425] terminologii z teorie elektrických sítí. Každému uzlu ireducibilní jednoduché triangulace přiřadili reálné číslo, tzv. náboj uzlu, tak, aby jen uzly stupně 5 měly kladný náboj a aby i celkový součet všech nábojů uzlů byl kladný. Pak uskutečnili vybíjení, při kterém se přesouvaly náboje z vrcholů stupně 5 na uzly vyšších stupňů tak, aby se neměnil celkový součet nábojů. Většinou není těžké zjistit všechny možnosti pro okolí uzlů, které po vybíjení zůstanou s kladným nábojem, a sestavit katalog těchto konfigurací s kladným nábojem některého uzlu. Vybíjení je možno definovat takovým způsobem, aby každá z těchto konfigurací byla reducibilní. Ty však nemohou v ireducibilní triangulaci existovat, a proto by mělo dojít k vybití. To však není možné, neboť součet nábojů je konstantní. Tento spor by dokazoval, že nemůže existovat ireducibilní jednoduchá triangulace, a tedy hypotéza o čtyřech barvách je správná.

Jde vlastně stále o sestrojení nevyhnutelné množiny reducibilních konfigurací. S touto myšlenkou přišel již H. Heesch v roce 1969, kterému se tuto množinu nepodařilo najít. Appel s Hakenem sestrojili nevyhnutelnou množinu reducibilních konfigurací, která měla nejprve 1936 prvků. Postupně se jim podařilo tento počet snížit až na 1405. Další podstatné snížení již neočekávali.[4] Pro prověřování reducibility konfigurací si stanovili zásadu, že všechny konfigurace z nevyhnutelné množiny musí mít řád menší než 14. Při kontrole konfigurací s řádem menším než 10 vycházeli z již dříve sestavených tabulek (později byly publikované v práci [426]). Reducibilitu ostatních konfigurací prověřovali na počítačích IBM. Příslušné programy vytvořili ve spolupráci s J. Kochem. Výpočty spotřebovaly asi 1200 hodin strojového času. Příprava metod, programu a samotná práce s počítačem trvaly čtyři roky. Trvalo až do roku 1978 než byla překonána nedůvěra v počítačem provedený důkaz. V paměti byl ještě rok 1971, kdy důkaz založený na práci počítačů oznámil Y. Shimamoto. Chybu v programu tehdy nalezl William T. Tutte, který důkaz Appela a Hakena přijal s důvěrou.

Na závěr připomeňme význam tohoto problému pro matematiku. Přivedl k teorii grafů celou řadu významných matematiků (Birkhoff, Veblen, Whitney) a při jeho řešení byla zavedena celá řada nových grafových pojmů (rovinný graf, duální graf, chromatický polynom ap.). Problém čtyř barev se nakonec stal první velkou větou, dokázanou pomocí počítače, bez možnosti přímého ověření jinými matematiky.

3.1.5 Barvení uzlů grafu

Jak jsme již několikrát zdůraznili, otázky barvení map lze snadno převést na barvení uzlů grafu. Připomeňme, že s touto myšlenkou přišel již A. B. Kempe v roce 1879. V případě mapy v rovině nebo na kulové ploše dostáváme vždy rovinný graf, ale problém je možno zobecnit i na grafy, které rovinné nejsou.

Podaří-li se nám obarvit uzly grafu G pomocí k barev tak, že žádná hrana grafu G není incidentní se dvěma stejně obarvenými uzly, pak řekneme, že graf G je **uzlově k-chromatický**. Nejmenší počet barev, které potřebujeme k takovému obarvení uzlů grafu, nazveme **uzlové chromatické číslo** a značíme je obvykle $\chi(G)$. Vzhledem k tomu, že budeme mluvit pouze o barvení uzlů grafu, vynecháme přívlastek uzlové a budeme mluvit pouze o chromatickém čísle $\chi(G)$.

Je zřejmé, že chromatické číslo úplného grafu K_n je n, chromatické číslo libovolného stromu (s více než jedním uzlem) je 2. Kružnice mají chromatické číslo 2, resp. 3, podle toho, zda jejich délka je sudé, resp. liché číslo. D. Kőnig ve své knize ukázal, že $\chi(G) = 2$ právě tehdy, když G neobsahuje kružnici liché délky a je tedy bipartitní (str. 170).

Podobnou charakteristiku grafů s $\chi(G) \geq 3$ neznáme. Je-li G graf s n uzly, pak jeho chromatické číslo samozřejmě nepřevýší n. Obsahuje-li G jako podgraf nějaký úplný podgraf K_m, pak musí být $\chi(G) \geq m$.

[4] V roce 1995 američtí matematici Neil Robertson, Daniel P. Sanders, Paul Seymour a matematik českého původu Robin Thomas výrazně snížili počet nevyhnutelných reducibilních konfigurací i počet vybíjecích procedur. Své výsledky publikovali prostřednictvím počítačové sítě Internet (viz. ftp://ftp.math.gatech.edu/pub/users/thomas/fcdir/npfc.ps).

R. L. Brooks v roce 1941 odvodil v práci [427] následující větu:

Nechť graf G má maximální uzlový stupeň ϱ; pak $\chi(G) \leq \varrho$ až na tyto dvě výjimky:
1) graf G má úplný graf $K_{\varrho+1}$ jako jednu ze svých komponent,
2) $\varrho = 2$ a graf G obsahuje kružnici liché délky jako jednu ze svých komponent.

Významným podnětem ke studiu barevnosti grafů se stala Hadwigerova hypotéza z roku 1943. Hugo Hadwiger (1908–1981) definoval v práci [428] jednoduchou operaci **elementární kontrakce**. Tuto operaci zavedl tímto způsobem:

V grafu G odstraňme dva sousední uzly u, v a nahraďme je novým uzlem w tak, že w je incidentní se všemi uzly, se kterými byly incidentní uzly u, v.

Hadwigerova hypotéza říká:

Každý souvislý graf G, který má chromatické číslo rovno q, můžeme opakováním elementárních kontrakcí transformovat na úplný graf K_q.

Platnost hypotézy pro $q \leq 4$ dokázal G. A. Dirac v práci [429]. Později se v práci [430] zabýval případem $q = 5$ a ukázal, že pokud Hadwigerova hypotéza platí pro $q = 5$, pak platí i hypotéza o čtyřech barvách. Ekvivalenci těchto hypotéz dokázal Klaus Wagner v práci [431]. Po vyřešení problému čtyř barev v roce 1976 tedy víme, že Hadwigerova hypotéza platí pro $q \leq 5$. Pro obecné q je ovšem známo velmi málo.

V roce 1958 dokázal H. C. Grötzsch v práci [432], že každý rovinný graf bez trojúhelníků lze obarvit třemi barvami. Silnější tvrzení pak odvodil B. Grünbaum v [433], když ukázal, že každý rovinný graf s méně než čtyřmi trojúhelníky je 3-chromatický.

Při zkoumání barevnosti grafů hrají velký význam grafy, které mají tu vlastnost, že jejich chromatické číslo se sníží po odstranění libovolného uzlu tohoto grafu. Takové grafy nazval G. A. Dirac v práci [429] **kritické grafy**. Jestliže G je kritický graf a $\chi(G) = k$, pak G nazveme ***k*-kritický graf**. Je zřejmé, že 1-kritickým grafem je K_1. Jediným 2-kritickým grafem je K_2 a všechny 3-kritické grafy jsou kružnice liché délky. Struktura 4-kritických grafů je již značně složitá. Snadno se ukáže, že každý kritický graf G je souvislý, stupeň libovolného uzlu je nejméně $k - 1$. Takový graf G neobsahuje artikulaci ani nemůže být porušena jeho souvislost odstraněním množiny uzlů, které tvoří úplný podgraf grafu G (viz. např. [393]).

G. A. Dirac se zúčastnil v roce 1963 mezinárodní konference ve Smolenicích a ve sborníku této konference nalezneme jeho příspěvek shrnující zejména jeho výsledky studia kritických grafů [364, str. 21–27]. Na stejné téma vystoupil na této konferenci i T. Gallai a podobným problémem barvení hran grafu se věnoval H. Izbicki.

Problémy barvení uzlů grafu se ve svých pracích zabýval i Karel Čulík. V práci *On chromatic decompositions and chromatic numbers of graphs* [328] v roce 1959 definoval pojem ***V*-graf**:

Graf $G = (V, E)$ nazveme V-grafem, jestliže platí

$$x, y, z \in V,\ x \neq y \neq z \neq x,\ \{x, y\} \in E \Rightarrow \ \textit{buď}\ \{x, z\} \in E,\ \textit{nebo}\ \{y, z\} \in E.$$

Čulík ukázal, že V-grafy mají jednoduchou strukturu (Věty 3 a 4, str. 182–183) a dokázal následující důležitou vlastnost těchto grafů (Věta 5, str. 183):

Nechť G je V-graf s chromatickým číslem $\chi(G)$. Přidáme-li ke grafu G libovolnou hranu, dostaneme graf G', který má chromatické číslo $\chi(G') > \chi(G)$.

V závěru své práce Čulík odvodil nutnou a postačující podmínku, aby graf G měl zvolené chromatické číslo a vyslovil ekvivalentní formulaci problému čtyř barev (Věta 8, str. 184):

Hypotéza čtyř barev je pravdivá právě tehdy, když z každého konečného rovinného grafu můžeme přidáním jisté hrany vytvořit V-graf, který neobsahuje jako podgraf graf K_5.

V práci *K jedné extremální úloze o chromatických číslech konečných grafů* [336] zodpověděl Čulík v roce 1960 dvě spolu související otázky. Položme

$$m(n, k) = \left(n - k\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor\right)\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor + k\binom{\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor}{2},$$

pak platí (Věta 2, str. 16):

1) Nejmenší počet hran, které musíme přidat ke k-chromatickému grafu $G = (V, E)$, abychom dostali n-chromatický graf $G' = (V', E')$, kde n je dané přirozené číslo splňující nerovnosti $k \leq n \leq \binom{|V|}{2}$, je roven $m(n, k)$.

2) Přidáme-li ke k-chromatickému grafu $G = (V, E)$ m hran, kde m splňuje nerovnost $|E| + m \leq \binom{|V|}{2}$, pak vznikne graf, jehož chromatické číslo je nejvýše rovno $n(m, k)$.

3.2 Rovinné grafy

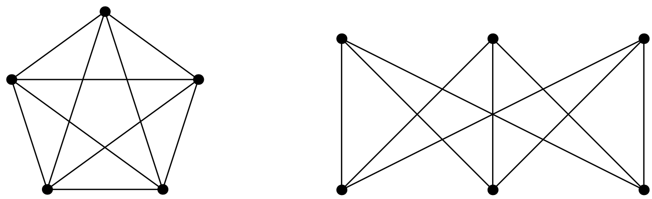
Významnou část teorie grafů představuje studium vlastností rovinných grafů. **Rovinný graf** je graf, který můžeme znázornit v rovině takovým způsobem, že uzlům odpovídají body roviny a hranám oblouky (lomené čáry) takové, že žádné dva nemají společný vnitřní bod. Jedním z impulsů vzniku tohoto pojmu byl bezesporu problém čtyř barev. Graf, který přiřadíme mapě znázorněné v rovině nebo na kulové ploše tak, že jednomu libovolnému vnitřnímu bodu každé oblasti mapy odpovídá uzel grafu a dva uzly jsou spojeny hranou právě tehdy, když odpovídající si oblasti spolu sousedí, je rovinný.

Definujme nyní pojem **půlení hrany**. Zvolme v grafu $G = (V, E)$ nějakou hranu xy. Definujeme nový graf $G_0 = (V_0, E_0)$ takto: Zvolíme nový uzel z nepatřící do V a položíme $V_0 = V \cup \{z\}$. Množinu E_0 dostaneme, odstraníme-li z množiny E hranu xy a přidáme-li místo ní hrany xz a zy. Řekneme, že graf

G_0 vznikl z G půlením hrany xy. Dále řekneme, že graf G_1 je **homeomorfní** s grafem G_2, je-li buď G_1 izomorfní s G_2, nebo je-li možno konečným počtem půlení hran dosáhnout v těchto grafech toho, že vzniklé grafy jsou izomorfní.

Při studiu rovinnosti grafů sehrál pojem homeomorfismu grafů důležitou úlohu. V roce 1930 polský matematik Kazimierz Kuratowski (1896–1980) dokázal v práci [223] následující větu:

Graf je rovinný právě tehdy, neobsahuje-li žádný podgraf homeomorfní s grafem K_5 ani žádný podgraf homeomorfní s grafem $K_{3,3}$.



Obr. 3.3: Grafy K_5 a $K_{3,3}$

Úplný graf K_5 a úplný bipartitní graf $K_{3,3}$ vidíme na obr. 3.3. Snadno se dokáže užitím Eulerova vztahu

$$|V| + |F| = |E| + 2$$

pro počet uzlů $|V|$, počet hran $|E|$ a počet oblastí $|F|$ libovolného rovinného grafu, že tyto dva grafy nejsou rovinné. Samotný důkaz Kuratowského věty ovšem je značně složitý. Novější důkaz Kuratowského věty, který pochází od G. A. Diraca a S. Schustera z roku 1954 nalezneme v Hararyho učebnici [359, str. 133–137].

Kuratowski svůj výsledek oznámil již v červnu roku 1929, ale ještě dříve než jeho práce vyšla v časopise *Fundamenta Mathematicae* oznámili Orrin Frink (1901–?) a P. A. Smith v *Bulletin of the American Mathematical Society*, že také vyřešili problém rovinných grafů. Výsledek, který získali nezávisle na Kuratowském, publikován nebyl. V rusky psané literatuře z teorie grafů (např. ruský překlad Hararyho knihy [359]) se setkáváme s údajem, že kritérium rovinnosti grafů dokázal (ale nepublikoval) Lev Semjonovič Pontrjagin (1908–1988) již v roce 1927.[5]

Ve 30. letech se otázkami rovinnosti grafů zabýval americký matematik H. Whitney. Jeho zájem o tuto problematiku byl dán snahou vyřešit problém čtyř barev. V roce 1931 v práci *Non-separable and planar graphs* [233] definoval poprvé kombinatorickou dualitu rovinných grafů. Znázorníme-li v rovině nějakou mapu M, můžeme se na ni dívat jako na rovinný graf G. Víme, jakým způsobem lze této mapě přiřadit jiný rovinný graf G'. O grafu G' řekneme,

[5] O tomto faktu v knize [367] zmínku nenajdeme.

že je (geometricky) duální ke grafu G. Whitney definoval dualitu grafů jiným způsobem (viz. např. [359, str. 139–140]). Dokázal, že pokud jsou grafy G a G' geometricky duální, pak jsou duální i v kombinatorickém smyslu. Whitney ve svých pracech ukázal, že graf G je rovinný právě tehdy, když k němu existuje duální graf G'. V práci [249] dokázal, že grafy K_5 a $K_{3,3}$ nemají duální grafy. Kuratowského věta tedy může posloužit při důkazu tvrzení, že graf, ke kterému existuje duální graf, musí být rovinný. V práci [256] podal Whitney alternativní důkaz Kuratowského věty.

K. Wagner v práci [434] v roce 1937 a nezávisle na něm v 60. letech F. Harary a W. T.Tutte v práci [435] ukázali ekvivalentní formulaci Kuratowského věty pomocí pojmu elementární kontrakce. Platí:

Graf G je rovinný právě tehdy, když neobsahuje podgrafy, které by bylo možno opakováním elementárních kontrakcí převést na K_5 nebo $K_{3,3}$.

W. T. Tutte v práci [436] vytvořil algoritmus, který umožňuje kreslení grafu v rovině bez průsečíků hran tak dlouho, dokud je to možné. Tutteho algoritmus je jedním z prvních algoritmů, které umožňují rozhodnout zda zadaný graf je rovinný. Podrobnosti o dalších starších algoritmech pro stanovení rovinnosti grafů nalezneme např. v Plesníkově knize [421].

Úplný graf K_5 sehrál jistou roli při snaze vyřešit problém čtyř barev. Reprezentuje totiž případ pěti navzájem sousedících oblastí, které v rovině nelze sestrojit. Připomeňme pouze, že pravděpodobně jako první se otázkou existence 5 sousedících oblastí zabýval A. F. Möbius.

Úplný bipartitní graf $K_{3,3}$ je grafovým modelem známé úlohy o třech domech a třech studnách, kterou nacházíme opět v knihách s rekreačními matematickými problémy. V úloze požadujeme spojit každý ze tří domů s každou ze tří studní tak, aby se cesty neprotínaly. Úloha není řešitelná, protože graf $K_{3,3}$ není rovinný.

Tuto úlohu v roce 1923 zobecnil v práci [180] Alfred Errera (1886–1960), když dokázal následující větu:

Jsou-li $x_1, x_2, \dots, x_{a_1}; y_1, y_2, \dots, y_{a_2}$ body roviny, pak z $a_1 a_2$ možných hran $\overline{x_i y_j}$ lze sestrojit nejvýše $2a_1 + 2a_2 - 4$ hran tak, aby se žádné dvě hrany neprotínaly ve vnitřním bodě.

Nejmenší počet průsečíků, které dostaneme, sestrojíme-li všech $a_1 a_2$ hran za předpokladu, že se žádné tři hrany neprotínají v jednom vnitřním bodě, se pokusil určit v roce 1954 Kazimierz Zarankiewicz (1902–1959) v práci *On a problem of P. Turan concerning graphs* [437]. Samotný problém pochází od Pála Turána (1910–1976) a je znám jako *problém cihelny.*[6] Minimální počet průsečíků nazýváme **průsečíkové číslo** grafu a značíme $\alpha(G)$.

Zarankiewicz odvodil následující vztahy pro stanovení průsečíkového čísla úplného bipartitního grafu $K_{p,q}$ (Věta 1, str. 137):

$$\alpha(K_{2k,2n}) = (k^2 - k)(n^2 - n),$$

[6] Historické poznámky ke vzniku tohoto problému nalezneme v článku P. Erdőse [438].

$$\alpha(K_{2k,2n+1}) = (k^2 - k)n^2,$$

$$\alpha(K_{2k+1,2n+1}) = k^2n^2.$$

Při důkazu autor nejprve stanovil průsečíkové číslo pro úplný graf $K_{p,3}$. Zarankiewicz ukázal, že pro libovolná čísla p, q je možno snadno zkonstruovat graf s průsečíkovým číslem $\alpha(K_{p,q})$.

Podle Zarankiewicze stejný výsledek získal i Kazimierz Urbanik, který ukázal, že vztah pro průsečíkové číslo úplného bipartitního grafu $K_{p,q}$ je možno vyjádřit pomocí jediného vztahu

$$\alpha(K_{p,q}) = \left(p - 1 - \left\lfloor\frac{p}{2}\right\rfloor\right)\left\lfloor\frac{p}{2}\right\rfloor\left(q - 1 - \left\lfloor\frac{q}{2}\right\rfloor\right)\left\lfloor\frac{q}{2}\right\rfloor.$$

Brzy se však ukázalo, že jeden z pomocných Zarankiewiczových důkazů nebyl správný a tak uvedený vzorec představuje pouze horní odhad průsečíkového čísla (viz. [361, str. 127]).

Otázky spojené s rovinnými grafy se objevily i v prvních pracech z teorie grafů u nás. J. Sedláček v práci *O jednom extrémním rovinném grafu* [306] navázal v roce 1956 na Errerovu práci [180]. Ukázal (Věta 4, str. 428), že maximální počet neprotínajících se hran, které spojují uzly

$$x_i, y_j, z_l \quad (1 \le i \ \le a_1, \quad 1 \le j \le a_2, \quad 1 \le l \le a_3, \quad 2 \le a_1 \le a_2 \le a_3),$$

při čemž se připouštějí jen hrany $\overline{x_iy_j}, \overline{x_iz_l}, \overline{y_jz_l}$, je roven

$$\min(3a_1 + 3a_2 + 3a_3 - 6; 4a_1 + 4a_2 + 2a_3 - 8).$$

Sedláček přitom formuloval problém obecněji pomocí pojmu **mapa**, který definoval následujícím způsobem:

Budiž dáno k přirozených čísel $a_1, a_2, \ldots, a_k$, pro která platí $2 \le a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_k$; $\sum_{i=1}^{k} a_i = n$. Je-li v rovině E_2 zvoleno n různých bodů, sestrojme rozklad této množiny na k podmnožin $A_1, A_2, \ldots, A_k$, kde a_i je počet prvků v množině A_i. Dále sestrojme rovinný graf, který má tyto vlastnosti:

1. *Množinu jeho uzlů tvoří zvolených n bodů.*

2. *Je-li $\overline{xy}$ jeho hrana, pak pro žádné i není současně $x \in A_i$, $y \in A_i$.*

3. *Graf je souvislý, nemá koncové hrany ani most.*

Takový graf nazveme mapou. *Označme $\mathfrak{M}$ množinu všech map, které jsou určeny čísly $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Budiž $\chi(M)$ počet hran mapy $M \in \mathfrak{M}$. Mapu o minimálním (resp. maximálním) počtu hran nazýváme* minimální *(resp.* maximální*) a označujeme M_{min} (resp. M_{max}).*

Sedláček nejprve dokázal (Věta 1, str. 427):

$$\chi(M_{min}) = \max(2a_k, n).$$

Errerův výsledek výsledek pak v této terminologii představuje skutečnost, že pro $k = 2$ má maximální mapa $2a_1 + 2a_2 - 4$ hran. Pro $k = 3$ Sedláček odvodil již zmíněný vztah:

$$\chi(M_{max}) = min(3a_1 + 3a_2 + 3a_3 - 6; 4a_1 + 4a_2 + 2a_3 - 8).$$

Na počátku 60. let se členové pražského grafového semináře začali zabývat průsečíkovým číslem úplného grafu K_n. J. Blažek a M. Koman byli první, kdo v tomto směru dosáhl zajímavých výsledků. Některé jejich výsledky byly publikovány ve sborníku konference ve Smolenicích [439].

Autoři zde ukázali, že horní odhad průsečíkového čísla úplného grafu K_n je

$$\alpha(K_n) \leq h_n = 2^{-6}(n-1)^2(n-3)^2 \qquad \text{pro} \quad n = 1, 3, 5, \dots,$$

$$\alpha(K_n) \leq h_n = 2^{-6}n(n-2)^2(n-4) \qquad \text{pro} \quad n = 2, 4, 6, \dots.$$

Důkaz tohoto tvrzení byl proveden pomocí dvou konstrukcí, které umožňují nakreslit grafy K_n s h_n průsečíky.

Pozdější rozsáhlou Komanovu práci [440] z roku 1969, která se zabývala průsečíkovými čísly, citovali autoři ruského překladu Hararyho knihy [359]. V 11. kapitole této knihy nalezneme mnoho výsledků týkajících se rovinných grafů, které byly získány v 50. a 60. letech.

Jednu zajímavou skutečnost o rovinných grafech dokázal však již v roce 1936 K. Wagner. V práci [281] ukázal, že rovinný graf můžeme v rovině znázornit bez průsečíků dokonce tak, že všechny hrany jsou úsečky. Wagnerovu větu nezávisle formuloval a dokázal o 12 let později I. Fáry v práci [441]. V roce 1951 pak stejného výsledku dosáhl i S. K. Stein v práci [442]. Dnes víme, že uvedené tvrzení platí i pro grafy nekonečné.

Některé další práce, které se objevily v 50. a 60. letech v Československu, můžeme zařadit do tzv. *extremální teorie grafů*. Vznik této teorie klademe do roku 1941, kdy maďarský matematik P. Turán vyřešil následující problém:

Jsou dána kladná celá čísla $3 \leq k \leq n$. Máme určit maximální počet $M(n,k)$ hran grafu s n uzly, který neobsahuje jako podgraf K_k.

Turánovo řešení problému je následující:

Definujme čísla t a r vztahem

$$n = (k-1)t + r, \qquad 1 \leq r \leq k-1.$$

Pak platí:

$$M(n,k) = \frac{k-2}{2(k-1)}(n^2 - r^2) + \binom{r}{2}.$$

Maxima je přitom dosaženo pro úplný $(k-1)$-chromatický graf $K_{n_1, n_2, \dots, n_{k-1}}$, kde $n_1 = n_2 = \dots = n_r = t+1$ a $n_{r+1} = n_{r+2} = \dots = n_{k-1} = t$.[7]

[7] Nový důkaz tohoto tvrzení podali v roce 1965 T. S. Motzkin a E. G. Straus v práci [443] (viz. [359, str. 33]).

Jako důsledek dostáváme:

Maximální počet hran grafu G s n uzly, který neobsahuje trojúhelníky, je $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$.

Tento Turánův výsledek je často citován v literatuře. Byl ovšem znám již na počátku tohoto století (viz. [150, 151]).

S řešením stejného problému přišel v roce 1947 K. Zarankiewicz. V práci [444] ukázal, že pokud je l minimální stupeň uzlů grafu G s n uzly a platí

$$l > \frac{k-2}{k-1}n,$$

pak graf G obsahuje podgraf K_k. Vzájemný vztah mezi oběma výsledky je diskutován v Turánově práci [445].

V roce 1951 Zarankiewicz formuloval v práci [446] jiný problém. Vyjádřeme jej nejprve maticově. Je dána čtvercová matice A řádu n, jejímiž prvky jsou pouze čísla 0 a 1. Nechť j je přirozené číslo, pro které platí $2 \leq j \leq n-1$. Ptáme se, jaký nejmenší počet $k_j(n)$ jedniček v A zajišťuje existenci čtvercové podmatice řádu j, která neobsahuje žádný nulový prvek.

Definujme si nyní pojem **matice sousednosti bipartitního grafu**. Bipartitnímu grafu $G = (V_1, V_2)$ s $2n$ uzly přiřadíme čtvercovou matici M řádu n tak, že uzlům třídy V_1 odpovídají řádky a uzlům třídy V_2 sloupce matice M. Prvek m_{ij} je roven počtu hran spojující uzly i a j.

Díváme-li se pak na matici A jako na matici sousednosti nějakého bipartitního grafu $G = (V_1, V_2)$, kde $|V_1| = |V_2| = n$, pak Zarankiewiczův problém spočívá v nalezení minimálního počtu hran, které v grafu G zajišťují existenci úplného bipartitního podgrafu $K_{j,j}$. Takto formulovali Zarankiewiczův problém autoři práce [447].

K. Čulík se zabýval tímto Zarankiewiczovým problémem poprvé v roce 1955 v práci *Poznámka k problému K. Zarankiewicze* [295].[8] Problém zde formuloval zcela obecně takto:

Nechť symbol $A_n^m(k)$ označuje matici typu m/n vytvořenou z k čísel rovných nule a z $mn - k$ čísel různých od nuly (např. reálných), takže $0 \leq k \leq mn$. Řekneme, že matice $A_n^m(k)$ má vlastnost $z(i,j)$, jestliže existuje její podmatice $P_j^i(ij)$, tj. podmatice typu i/j a hodnosti nula. Konečně nechť K je množina všech čísel k, pro něž platí, že každá matice $A_n^m(k)$ má vlastnost $z(i,j)$. Pro přirozená čísla i, j, m, n, která splňují nerovnosti $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, definujeme funkci

$$Z_{i,j}(m,n) = \min_{k \in K} k.$$

Problém spočívá v nalezení hodnot této funkce.

Čulík navázal na článek polského matematika Waclawa Sierpińského (1882–1969), který odvodil několik hodnot této funkce. Čulík určil hodnoty $Z_{3,3}(m,n)$ pro $3 \leq m \leq 8$, $3 \leq n \leq 8$.

[8] Tato práce je první Čulíkovou prací, kterou můžeme zařadit k teorii grafů.

Vzorec pro výpočet hodnot funkce $Z_{i,j}(m,n)$ odvodil Čulík v roce 1956 v práci *Teilweise Lösung eines verallgemeinerten Problems von K. Zarankiewicz* [301].

Platí (str. 165):

$$Z_{i,j}(m,n) = (i-1)n + (j-1)\binom{m}{i} + 1$$

pro

$$n \geq (j-1)\binom{m}{i}.$$

Při řešení problému Zarankiewicze má smysl zkoumat vlastnosti řešení rovnice $\sum_{i=1}^{k} r_i = n$. Čulík se touto otázkou zabýval v práci *O jedné vlastnosti celočíselných nezáporných řešení rovnice* $\sum_{i=1}^{k} r_i = n$ [307] v roce 1957. Možnost zesílení některých tvrzení, která jsou v této práci uvedena, ukázal Ladislav Kosmák v práci [320].