Výpočty obsahů a objemů ve starověké matematice

In: Štefan Schwabik (author); Petra Šarmanová (author): Malý průvodce historií integrálu. (Czech). Praha: Prometheus, 1996. pp. 7–20.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/400854

Kapitola I.

Výpočty obsahů a objemů ve starověké matematice

1. Egypt a Mezopotámie

Do doby asi 30 tisíc let před n. l. se datuje první, i když ne příliš průkazný doklad číselného záznamu, tzv. věstonická vrubovka. Od 8. tisíciletí před n. l., kdy se objevují nejstarší opevněná sídliště městského typu, se začíná rozšiřovat obdělávání půdy, pěstování zemědělských plodin a s tím také snaha o předvídání pravidelně se opakujících změn počasí. V 5. až 4. tisíciletí před n. l. se v oblasti velkých vodních toků Eufratu, Tigridu a Nilu rozvíjí výstavba zavodňovacích děl, při nichž se začíná používat zeměměřičských pomůcek. V téže době se zdokonalilo vyměřování zaplavených ploch, jež dalo základ prvým poznatkům geometrie a vzniku geometrické terminologie.

Různé kultury se v tomto ranném období civilizace vyvíjely samostatně a uzavřeně. Naše znalosti o jejich matematice jsou závislé na množství a kvalitě dochovaných písemných památek. V Mezopotámii se psalo na hliněné destičky, které se pak vypalovaly, takže přežily tisíciletí. V Egyptě se zapisovalo na papyrus, který se v suchém egyptském podnebí také mohl zachovat. Ale v Číně a Indii se zaznamenávalo na kůru a bambus, které rychle podléhaly zkáze. To je hlavní příčinou, proč známe hlavně egyptskou a mezopotámskou matematiku.

Většina našich znalostí pochází ze dvou matematických papyrů. Jsou jimi tzv. Moskevský papyrus pocházející z 19. století před n. l. a Londýnský (Rhindův) papyrus, který je asi o 200 let mladší. První z nich je značně poškozen; lze v něm přečíst 25 úloh s řešeními. Londýnský papyrus obsahuje 85 úloh a jejich řešení; asi 20 z nich se týká výpočtu ploch polí a objemu sýpek. Každý problém je řešen v konkrétních číslech. Přináší vždy recept řešení bez specifikace vzorce nebo metody, neboť pojem proměnné veličiny je v tomto období neznámý.

Egypťané prováděli výpočty obsahů ploch tak, že danou plochu rozdělili na trojúhelníky, spočítali jejich obsahy a ty potom sečetli. Obsahy trojúhelníků přitom určovali podle známého vzorce jako součin poloviny základny a výšky. Obsah kruhu o průměru d se v Rhindově papyru udává jako $(d - \frac{d}{9})^2$, což by vedlo k hodnotě $\pi = \frac{256}{81} = 3,1605$. Nalezneme zde také několik formulí pro výpočet objemů, např. krychle, rovnoběžnostěnu a kruhového válce, obvykle ve zcela konkrétním tvaru (výpočty objemů nádob užívaných převážně k uchování obilí).

Jednou z nejpozoruhodnějších egyptských matematických úloh je příklad uvedený v Moskevském papyru, ve kterém se počítá objem kolmého komolého jehlanu se čtvercovou základnou, tj. objem pyramidy. Je zde uveden náčrt a slovní popis výpočtu, který souhlasí s dnes používaným vztahem pro objem $\frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$, kde a, b jsou délky stran čtverců základen a h výška. Tento výsledek je tím pozoruhodnější, že nemáme doklad o znalosti Pythagorovy věty u Egypťanů, kromě několika nepodložených pověstí o „napínačích lan", kteří údajně konstruovali pravý úhel provazcem, na němž bylo $3 + 4 + 5$ uzlů.

O poměrně vysokém stupni matematických znalostí Egypťanů svědčí i pyramidy, které byly v Egyptě postaveny v letech 3600 – 2700 před n. l. Stavba takových pyramid vyžadovala velké zručnosti v počítání s velkými čísly a v geometrických měřeních. Podobných znalostí bylo třeba i při stavbě kanálů, přehrad a vodních nádrží. Velký podíl na rozvoji matematiky měla samozřejmě astronomie, která sloužila hlavně k výpočtu kalendáře a k předvídání pravidelně se opakujících záplav.

Např. řecký matematik a historik Hérodotos (asi 484 – 430 před n. l.) napsal, že zemské daně okolo Nilu byly vybírány podle plochy a tak, když každoroční záplavy odnesly část půdy, bylo úkolem geometrů zjistit, kolik jí ubylo. To samozřejmě vedlo k rozvoji elementárních technik měření a příslušných výpočtů.

Současně s matematikou ve starém Egyptě se vyvíjela matematika v Mezopotámii. Nalezené hliněné tabulky s matematickými texty svědčí o vysoké úrovni jak aritmeticko-algebraických, tak i geometrických znalostí. Matematika v obou zemích měla mnoho společného. Vznikala jako praktická věda, aby usnadnila výpočet kalendáře, řízení sklizní, organizaci veřejných staveb a vybírání daní. Zpočátku byla přirozeně věnována pozornost praktické aritmetice a zeměměřictví. Až postupem času se uvažování vyvíjí směrem k abstrakci. Nikde v ní nenalezneme ani pokus o to, čemu říkáme důkaz. Nebyla podávána žádná argumentace, nýbrž jen popis jistých pravidel typu „udělej to tak a tak".

2. Řecko

Během posledních staletí 2. tisíciletí před n. l. se odehrály v oblasti kolem Středozemního moře nesmírné ekonomické a politické změny. Bronzová doba byla vystřídána dobou železnou. Na scénu dějin vstoupily nové národy – Židé, Asyřané, Foiničané a Řekové. Nahrazení bronzu železem vedlo ke zlevnění výrobních nástrojů, k rozvoji obchodu a také k zavedení ražených peněz. Významnou novinkou bylo také nahrazení těžkopádného písma starověkého Orientu lehko zvládnutelnou abecedou. Města se stávají obchodními centry a během 8. – 6. stol. před n. l. přerůstají v samosprávné městské státy „polis". Otrokářství se mění v otrokářskou demokracii, v níž se svobodní občané mohou aktivně podílet na politickém životě, na volbách apod. Občané pohrdají prací otroků, přemýšlí o abstraktních otázkách a zabývají se vědou nikoliv k praktickým účelům, ale k budování filozofického obrazu světa.

A v této atmosféře se zrodila i nová matematika, která si nekladla, tak jako doposud v Orientu, jen otázku „jak?“, ale též novou vědeckou otázku „proč?“. Zprvu se řecká matematika skoro neodlišovala od egyptské, která měla převážně ráz konkrétní a praktický. Avšak počínaje 6. stol. před n. l. se stále více v matematickém myšlení Řeků posiluje teoretická stránka, což nakonec vedlo k oddělení teoretické a praktické matematiky. Teoretická matematika neobsahovala pouze návody na řešení úloh, ale také zdůvodňovala správnost řešení.

Prakticky celý skutečně tvůrčí soubor děl, který dnes nazýváme „řeckou matematikou“, vznikl v relativně krátkém období od roku 350 do roku 200 před n. l., od Eudoxa k Apolloniovi. Nejstarším zcela zachovaným dílem řecké matematiky jsou Eukleidovy *Základy*, ve kterých jsou shrnuty téměř všechny v té době známé matematické poznatky.

Historie řecké matematiky začíná v 6. století před n. l. Tradičně bývá pokládán za otce řecké matematiky kupec **Thalés** z Mílétu (asi 624 – 543 před n. l.), který na svých obchodních cestách navštívil v první polovině 6. století Babylonii a Egypt, kde se seznámil s matematikou a astronomií. V matematice jsou mu přisuzovány následující výsledky:

- průměr dělí kruh na dvě poloviny,
- vrcholové úhly jsou shodné,
- všechny obvodové úhly sestrojené nad průměrem kružnice jsou pravé (Thaletova věta),
- úhly při základně rovnoramenného trojúhelníka jsou shodné,
- dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se stranou a přilehlými úhly.

Vůbec však nevíme, jaký charakter tyto výsledky měly; nevíme, zda byly jen zformulovány, či dokázány a jak. Zdá se, že Thalés dobře ovládl podobnost trojúhelníků a využíval ji nejen k měření výšky pyramid, ale i ke zjišťování vzdáleností lodí na moři. Užíval prý kružítko a úhloměr.

V tomto období byla matematika součástí filozofie a pěstovala se tudíž ve filozofických školách ve velkých přístavních městech, kde se střetávala kultura a vzdělanost egyptská, babylónská a řecká. Připomeňme školu milétskou (Thalés), eleaty (Zénón) nebo atomisty (Démokritos).

Z hlediska dalšího vývoje matematiky se stala významnou skupina filozofů, jejímž zakladatelem byl **Pythagoras** (asi 580 – 500 před n. l.). Ti studovali geometrii, aritmetiku, astronomii a hudbu. Jejich aritmetika byla založená na zkoumání čísel a jejich vlastností, což je vedlo k filozofii „všechno je číslo“. Pythagorejci byli fascinováni světem přirozených čísel. Snažili se v něm hledat řád, zákonitosti a harmonii, snažili se je klasifikovat. Tak dospěli k číslům trojúhelníkovým, čtvercovým, přímkovým, kubickým, mnohoúhelníkovým a mnoha dalším.

Před koncem 5. století před n. l. zformulovali a dokázali základní věty o trojúhelnících a jiných plošných obrazcích.

Jejich nejzávažnějším objevem však bylo odhalení iracionality jako nesouměřitelnosti úseček. Pythagorejci říkali, že dvě úsečky a, b jsou souměřitelné, jestliže existuje taková „měrná“ úsečka m, jejímiž celočíselnými násobky jsou obě úsečky, tj. $a = p \cdot m$ a $b = q \cdot m$. Původně se domnívali, že každé dvě úsečky jsou souměřitelné. V posledním desetiletí 5. století před. n. l. však dokázali, že strana a úhlopříčka čtverce jsou nesouměřitelné, tj. že jejich poměr nelze vyjádřit „číslem“ (tím, co nyní nazýváme kladným racionálním číslem).

Objev nesouměřitelnosti úseček byl pro pythagorejce patrně velkým překvapením. Ukázalo se, že svět geometrických veličin (reprezentovaných délkami úseček) je bohatší než svět „čísel“ (přirozených a kladných racionálních). Způsobilo to zhroucení původní pythagorejské představy o vzájemném vztahu čísel a geometrických veličin. Často se uvádí, že došlo k tzv. první krizi matematiky.

Hlavním východiskem z této krize se stala řecká geometrická algebra. Znamenala přechod od aritmetického pohledu na veličiny k pohledu geometrickému. Veličiny přestaly být chápány jako přirozená či racionální čísla a začaly být chápány jako délky, obsahy a objemy. Za svět veličin byl přijat svět veličin geometrických, přičemž některé z nichž nebylo možno vyjádřit „čísly“. Součástí tohoto přístupu byl i tzv. zákon homogenity: sčítat a odčítat bylo možno jen veličiny stejného „rozměru“ – délky s délkami, obsahy s obsahy, objemy s objemy. Součinem délky s délkou byl obsah, součinem obsahu s délkou byl objem apod.

Objev nesouměřitelných veličin, tedy z dnešního pohledu iracionálních čísel, vedl k přechodu od diskrétního chápání veličin ke spojitému. Dále přivedl matematiky k pojmu nekonečnosti.

Problémem nekonečnosti se zabývali nejenom matematikové, ale i filozofové. Jedním z nejznámějších je **Zénón** z Eleje (asi 490 – 430 před n. l.). Je autorem tzv. aporií, „slepých uliček rozumu“, které se snaží poukázat na rozpory mezi naším smyslovým vnímáním a jeho logickým výkladem. Nejznámější z nich jsou *Achilles a želva, Letící šíp, Dichotomie* a *Stadion.* Ty oživily spory o nekonečné veličiny a také diskuse o problémech týkajících se vztahu mezi potenciálním a aktuálním nekonečnem. Řekové přitom chápali nekonečno jen potenciálně, jako „možnost jít dál“.

V tomto období se začali studovat tři proslulé matematické problémy starověku, kterými jsou:

- trisekce úhlu, tj. rozdělení daného úhlu na tři stejné části neboli nalezení úhlu, jehož trojnásobkem je daný úhel,
- zdvojení krychle, tj. nalezení hrany krychle, jejíž objem je dvojnásobkem objemu dané krychle,
- kvadratura kruhu, tj. nalezení strany čtverce, jehož obsah je stejný jako obsah daného kruhu.

Často jsou k nim přidávány ještě tyto dva problémy:

- rektifikace kružnice, tj. nalezení úsečky, jejíž délka je rovna obvodu dané kružnice,
- konstrukce pravidelných n-úhelníků, tj. nalezení postupů, které v konečně mnoha krocích vedou k sestrojení pravidelných n-úhelníků.

Řekové se snažili všechny tyto úlohy řešit konstrukcí spočívající v sestrojení konečného počtu přímek a kružnic. Často se hovoří o konstrukcích pravítkem a kružítkem či o eukleidovských konstrukcích. Právě tímto způsobem je totiž budována geometrie v Eukleidových *Základech.*

Závažnost těchto problémů tkví ve skutečnosti, že nemohou být řešeny (až na poslední úlohu pro některá n) bez aproximace, tj. konstrukcí užívajících konečného počtu přímek a kružnic. Snahy o řešení těchto problémů vedly k objevování nových oblastí matematiky, k objevení kuželoseček, některých kubických křivek, křivek čtvrtého řádu a jedné transcendentní křivky – kvadratrix.

Teprve v 19. století bylo dokázáno, že první čtyři úlohy jsou pravítkem a kružítkem neřešitelné.

Řeckými matematiky tohoto období, kteří se zabývali problematikou obsahů a objemů byli Hippokrates a Démokritos.

Hippokrates (asi 460 – 370 před n. l.) je autorem mnoha prací, o nichž, i když se nám nezachovaly, se předpokládá, že jejich obsah byl v podstatě stejný jako obsah prvních čtyř Eukleidových knih. Snažil se mj. vyřešit problém kvadratury kruhu a zdvojení krychle využitím pouze pravítka a kružítka. Dokázal, že poměr obsahů dvou kruhů je roven poměru druhých mocnin jejich průměrů. Pravděpodobně k tomuto výsledku došel tak, že vepsal do obou kruhů pravidelné mnohoúhelníky a potom „vyčerpával“ plochy kruhů postupným zvětšováním počtu vrcholů mnohoúhelníků do nekonečna. Vyslovil také domněnku, že kužel může být podobně „vyčerpáván“ jehlany s pravidelnou mnohoúhelníkovou základnou vepsanou do kruhové základny kužele. Domníval se, že objem kužele je jedna třetina válce s toutéž základnou a výškou. K tomuto výsledku dospěl podobnými úvahami i Démokritos. Avšak ani ten jej neopatřil důkazem. Teprve o padesát let později byly tyto výsledky dokázány Eudoxem.

Démokritos z Abdér (asi 460 – 370 před n. l.) je představitelem atomistů. Ve svých geometrických pracích vycházel z toho, že body jsou prostorové atomy mající konečný objem. Představoval si, že v každé úsečce existuje konečný, i když „větší než lze smysly poznat“ počet bodů. Této představy využil k určování obsahů a objemů velkého počtu útvarů. Tělesa si představuje, jako by byla „složena z rovnoběžných destiček“ silných jeden atom, a usuzuje z toho, že dvě tělesa „složená ze stejných destiček“ ve stejných výškách od základny by měla mít stejné objemy. Tento princip rozpracoval Cavalieri v 17. století.

Démokritos zřejmě věděl, že trojboký jehlan může být doplněn na hranol s toutéž základnou a výškou. Tento hranol se pak skládá ze tří stejných jehlanů a proto objem uvažovaného jehlanu je jedna třetina objemu hranolu o stejné základně a výšce. Pro Démokrita bylo přirozené zobecnit tuto větu na jehlany s mnohoúhelníkovou základnou. A protože pro něj byl kruh mnohoúhelníkem, jehož každou stranu tvořily pouze dva atomy, byly pro něj kruhové válce a kužele hranoly a jehlany o velmi velkém počtu stran základny. Z toho vyplývalo i zobecnění jeho věty pro kužel a válec – objem kužele je jedna třetina objemu válce o stejné základně a výšce.

Eudoxova exhaustivní metoda

Ve 4. stol. před n. l. dochází k velkému rozvoji hospodářství. Vzdělaní lidé se zvýšenou měrou obracejí ke studiu filozofie a etiky. Tato intelektuální atmosféra, kterou ztělesňují Platón a Aristoteles, byla mimo jiné příznivá i diskusím o základech matematiky. Platón (427 – 347 před n. l.) stál v čele athénské filozofické školy nazývané Akademie, která kladla velký důraz na matematické znalosti. O tom svědčí i nápis, který byl prý nad vchodem do Akademie: „Nevstupuj, kdo neovládáš geometrii“. Platónská filozofie byla založená na tom, že všechny věci jsou jen stínem idejí. Stejně tak byly chápány matematické pravdy jen jako poučky, neboť řešení jakékoliv úlohy jen formuluje to, co už existuje zcela nezávisle na tom, zda jsme to poznali či ne. Přímo opačné názory měli stoupenci Eudoxovy matematické školy, kteří tvrdili, že nestačí matematické pravdy pouze definovat, musí se ověřit a dokázat.

Eudoxos z Knidu (asi 408 – 355 před n. l.) je dnes znám především díky své teorii proporcí a exhaustivní metodě.

Eudoxova teorie proporcí, kterou pak Eukleides vložil do své páté knihy *Základů*, překonala aritmetickou teorii pythagorejců, jež platila pouze pro souměřitelné veličiny. Jeho teorie byla geometrická a svým způsobem nahrazovala teorii reálných čísel. Dnešní teorie reálných čísel, jak ji vytvořil Dedekind, sleduje téměř doslova Eudoxův myšlenkový postup.

Teprve po rozpracování Eudoxovy teorie proporcí bylo možno „rozumně“ pracovat se „spojitými“ veličinami, vyšetřovat v plné obecnosti podobnost geometrických útvarů atd.

Tehdejší matematikové se domnívali, že obsah plochy, která je vymezena jednoduchou křivkou (kružnice, elipsa ...), je roven obsahu nějakého mnohoúhelníka a platí následující vlastnosti:

1. monotonie (je-li útvar A obsažen v B pak obsah $s(A)$ je menší nebo roven obsahu $s(B)$);
2. aditivita (je-li útvar C sjednocením nepřekrývajících se útvarů A a B, pak pro jejich obsahy platí $s(C) = s(A) + s(B)$).

Řekové se snažili plochu neznámého obrazce získat pomocí mnohoúhelníků $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \cdots$, kterými obrazec „vyčerpávali“. Podstatou jejich přístupu bylo to, že obsah tohoto mnohoúhelníku snadno vypočítali tím, že jej rozložili na vzájemně se nepřekrývající trojúhelníky. Obsah mnohoúhelníku je pak dle vlastnosti 2 roven součtu obsahů jednotlivých trojúhelníků. Tuto metodu, která byla později nazvána exhaustivní, rozpracoval Eudoxos, i když podobné myšlenky se objevovaly už dříve, např. u Hippokrata.

Exhaustivní (vyčerpávací) metoda umožňuje již poměrně přesné výpočty obsahů a objemů a je považována za geniální předchůdkyni pozdějších infinitezimálních úvah (termín exhaustivní se objevuje poprvé roku 1647 u Grégoira de Saint Vincentia (1584 – 1667); vyčerpat je latinsky exhaurire). Zpočátku se exhaustivní metody využívalo jen k důkazu vět, ke kterým se došlo jinými metodami, např. pomocí Démokritových nedělitelných destiček.

Exhaustivní metoda je založena na nekonečném dělení veličiny a jejím základem je následující tvrzení:

($\star$) *Jestliže od dané veličiny odečteme její část větší než její polovina a od zbytku opět jeho část větší než jeho polovina a budeme tak činit stále, zbude nějaká veličina, jež bude menší než libovolná kladná veličina.*

Ilustrujme tuto metodu na výpočtu obsahu $s(A)$ nějakého útvaru A. Máme-li najít obsah útvaru A, budeme do něj vepisovat jiné útvary $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_n$ jejichž obsahy jsou známé, tvoří monotonní posloupnost $s(\mathcal{P}_1) < s(\mathcal{P}_2) < \cdots < s(\mathcal{P}_n)$, a pro něž platí:

$$s(A) - s(\mathcal{P}_1) < \frac{s(A)}{2},\ s(A) - s(\mathcal{P}_2) < \frac{(s(A) - s(\mathcal{P}_1))}{2} < \frac{s(A)}{4}, \cdots$$

$$\cdots, s(A) - s(\mathcal{P}_n) < \frac{s(A)}{2^n}.$$

Při dostatečně velkém n je podle ($\star$) rozdíl $s(A) - s(\mathcal{P}_n)$ menší než libovolná kladná veličina. Dnes bychom napsali, že $s(A) = \lim_{n\to\infty} s(\mathcal{P}_n)$. Pro Eudoxa byl však pojem limity neznámý; hledal tudíž takové B, aby rozdíl $B - s(\mathcal{P}_n)$ byl menší než libovolná kladná veličina. K nalezení obsahu $s(A)$ zbývá dokázat, že $s(A) = B$. Tady Eudoxos využívá důkazu sporem.

Nechť $s(A) \neq B$, tj. $s(A) < B$ nebo $s(A) > B$. V obou případech dojdeme ke sporu. V prvním případě položme $B - s(A) = \varepsilon$. Víme však, že k ε lze najít takové n, že platí $B - s(\mathcal{P}_n) < \varepsilon$. Odtud plyne $B - s(\mathcal{P}_n) < B - s(A)$, tedy $s(\mathcal{P}_n) > s(A)$, což je spor. Podobně lze postupovat ve druhém případě.

Tímto způsobem Eudoxos např. dokazuje, že obsah kruhu K lze s libovolnou přesností aproximovat obsahem pravidelného mnohoúhelníka $\mathcal{P}$ vepsaného do kruhu K, tj. je-li dán kruh K a číslo $\varepsilon > 0$, pak existuje pravidelný mnohoúhelník $\mathcal{P}$ vepsaný do K tak, že $s(K) - s(\mathcal{P}) < \varepsilon$. Eudoxovi přísluší kromě jiného důkazy vět, které vyslovil, ale nedokázal Démokritos.

Koncem 4. století před n. l. vytvořil Alexander Makedonský (356 – 323 před n. l.) na krátkou dobu ohromnou říši, která zahrnovala Řecko, Egypt, Mezopotámii, Persii a řadu dalších zemí v oblasti Středozemního moře a Blízkého a Středního Východu. Tím došlo k vzájemnému styku různých národů, což mělo obrovský vliv na rozvoj kultury a vzdělanosti. Toto tzv. helénistické období řeckých dějin trvalo až do prvního století n. l., kdy byly již všechny helénistické země podrobeny římským impériem.

V helénistickém období dospěla matematika na nejvyšší stupeň rozvoje, jaký kdy byl ve starověku. Z nejvýznamnějších matematiků jmenujme Eukleida, Archiméda a Apollónia.

Eukleides je jeden z nejvýznamnějších matematiků všech dob. Žil v Alexandrii za panování Ptolemaia I., které spadá do let 306 – 283 před n. l. Přesná data jeho života nejsou známa. Jeho nejvýznamnějším dílem, a současně nejstarším zcela zachovaným dílem řecké matematiky, je třináct knih *Základů* (*Stoicheia*). Toto dílo je pravděpodobně hned po bibli nejvíce tištěnou a studovanou knihou v dějinách západního světa. Eukleidův výklad je budován přísně axiomaticky, vychází ze soustavy definic, postulátů a axiomů. Je zde vyložena rovinná geometrie, Eudoxova teorie nesouměřitelných veličin, teorie čísel a geometrie těles. Exhaustivní metoda je zahrnuta ve dvanácté knize, kde jsou dokázány vztahy mezi objemy těles, zejména jehlanů, kuželů, válců a koulí. Je třeba zdůraznit, že Eukleides nikde nevypočítává obsahy nebo objemy jednotlivých těles, neboť výpočty tohoto typu byly v té době zahrnovány do praktické, nikoliv do teoretické geometrie.

Mimo jiné zde Eukleides odvozuje pomocí exhaustivní metody následující tvrzení:

- obsahy kruhů jsou v témže poměru jako čtverce jejich poloměrů, tj. $S_1 : S_2 = r_1^2 : r_2^2$,
- objemy válců o stejné výšce jsou v témže poměru jako čtverce poloměrů jejich podstav, tj. $V_1 : V_2 = r_1^2 : r_2^2$,
- objemy jehlanů o stejné výšce jsou v témže poměru jako obsahy jejich podstav, tj. $V_1 : V_2 = A_1 : A_2$,
- objem kužele je třetina objemu válce, který má stejnou výšku a podstavu, tj. $V_k = \frac{1}{3}V_v$,
- objemy koulí jsou v témže poměru jako třetí mocniny jejich poloměrů, tj. $V_1 : V_2 = r_1^3 : r_2^3$.

Všimněme si, že všechna tvrzení se týkají srovnávání obsahů nebo objemů dvou útvarů, nikoliv výpočtu těchto obsahů nebo objemů.

Máme-li např. dokázat, že pro obsahy $s(A)$ a $s(B)$ dvou rovinných útvarů A a B platí $s(B) = ks(A)$, kde k je kladná konstanta, postupujeme takto: konstruujeme dvě posloupnosti mnohoúhelníků $\{\mathcal{P}_n\}_1^\infty$ vepsaných do A a $\{\mathcal{Q}_n\}_1^\infty$ vepsaných do B tak, že $s(\mathcal{Q}_n) = k \cdot s(\mathcal{P}_n)$ pro každé n. Dále podle tvrzení $(\star)$ ke každému $\varepsilon > 0$ existuje n tak, že $s(A) - s(\mathcal{P}_n) < \varepsilon$ a $s(B) - s(\mathcal{Q}_n) < \varepsilon$.

Dnes bychom napsali

$$s(B) = \lim_{n\to\infty} s(\mathcal{Q}_n) = \lim_{n\to\infty} ks(\mathcal{P}_n) = k \lim_{n\to\infty} s(\mathcal{P}_n) = ks(A).$$

Řekové samozřejmě metodu limitního přechodu neznali. Důkaz vedli tak, že předpokládali, že $s(B) > ks(A)$ a tudíž $s(B) - ks(A) = \varepsilon$. Dále vepsali mnohoúhelník $\mathcal{P}$ do A a mnohoúhelník $\mathcal{Q}$ do B tak, že $s(\mathcal{Q}) = ks(\mathcal{P})$ a $s(\mathcal{Q}) > s(B) - \varepsilon$. Po dosazení však dostáváme $ks(\mathcal{P}) > s(B) - \varepsilon = ks(A)$, tedy $s(\mathcal{P}) > s(A)$, což je spor. Obdobně dostaneme spor při předpokladu $s(B) < ks(A)$; musí tedy platit $s(B) = ks(A)$.

Výše uvedený příklad dokumentuje, že Řekové byli schopni provádět kompletní důkazy matematických tvrzení bez použití teorie limit, i když myšlenka limity je v nich obsažena. Neužívali přitom „nekonečně malé a nekonečně velké veličiny", ale pracovali s veličinami „velkými nebo malými jak je libo".

Všimněme si, že jestliže bychom vzorec udávající vztah mezi obsahy dvou kruhů a jejich poloměry přepsali do tvaru $\frac{S_1}{r_1^2} = \frac{S_2}{r_2^2}$ a označili tento poměr π, dostali bychom známý vztah pro výpočet obsahu kruhu $S = \pi r^2$. Řekové však takovou úvahu nemohli udělat, neboť pro ně byl výše uvedený vztah pouze poměrem obsahů a ne numerickou rovností. Proto se číslo π v této souvislosti v řecké matematice neobjevuje. Podobně vztah pro objemy dvou koulí lze přepsat na tvar $\frac{V_1}{r_1^3} = \frac{V_2}{r_2^3}$, odkud dostaneme $V = \alpha r^3$. Souvislost mezi čísly α a π ($\alpha = \frac{4}{3}\pi$) však objevil až Archimédes.

Archimédes

Archimédes

Archimédes (asi 287 – 212 před n. l.) byl největším matematikem helénistického období. O jeho osobnosti se traduje několik legend. Např. známá je historie objevení zákona o vztlaku ponořených těles, kdy Archimédes údajně vyběhl nahý přímo z vany na ulici s křikem „Nalezl jsem!“ (Heuréka). K dalším patří slavné „Dejte mi pevný bod a pohnu Zemí“, pronesené prý po objevu zákona páky, nebo jeho poslední slova „Neničte mé kruhy“. Za svého života proslul především svými technickými vynálezy, které byly použity při obraně Syrakus před Římany.

Archimédovým nejvýznamnějším přínosem v matematice jsou věty o obsahu rovinných útvarů a o objemu těles. Archimédovy práce zabývající se obsahy, objemy a délkami jsou: *Měření kruhu*, *Kvadratura paraboly*, *O kouli a válci*, *O spirálách*, *O konoidech a sféroidech* a *Metoda*.

Prvních pět rozvíjí exhaustivní metodu, kterou Archimédes aplikoval na širokou škálu problémů, které jsou dnes typickými aplikacemi integrálního počtu. Šestá práce, neznámá do roku 1906, popisuje heuristickou infinitezimální metodu.

Obsah uvedených prací lze ve stručnosti charakterizovat takto:

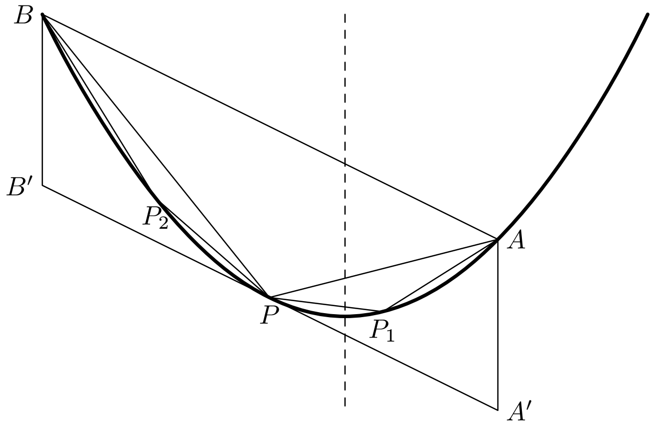
Měření kruhu: Již z dřívějších dob pochází vztahy pro obsah kruhu $S = \pi_1 r^2$ pro nějakou konstantu π_1, a pro obvod kruhu $O = 2\pi_2 r$ pro nějakou konstantu π_2. V knize *Měření kruhu* podal Archimédes první důkaz skutečnosti, že plocha kruhu je rovna ploše trojúhelníka se základnou rovnou obvodu a výškou rovnou poloměru uvažovaného kruhu, tj. $S = \frac{1}{2} rO$, což ovšem znamená, že $\pi_1 = \pi_2$.

Ve svých důkazech Archimédes rozpracovává Eudoxovu exhaustivní metodu. Kromě vepsaných mnohoúhelníků zavádí i opsané mnohoúhelníky. Plocha kruhu je tedy „stlačována“ mezi plochy opsaných a vepsaných mnohoúhelníků.

Kvadratura paraboly: V úvodu k této knize Archimédes poznamenal, že dřívější matematikové se úspěšně pokoušeli najít obsah úseče kruhu nebo hyperboly, ale nikdo se nepokusil o kvadraturu úseče paraboly – právě tu, která může být vyřešena exhaustivní metodou. Původně, jak sám říká, dospěl k výsledku „mechanicky“ metodou páky a teprve potom jej dokázal geometrickými prostředky.

Věnujme se Archimédově kvadratuře paraboly podrobněji.

Nechť je dána úseč paraboly se základnou AB (úseč konvexní křivky je oblast obraničená přímkou a částí dané křivky). Označme P bod nejvzdálenější od AB – tzv. vrchol úseče (je to dotykový bod tečny rovnoběžné s přímkou AB). Vzniklý trojúhelník APB má největší obsah ze všech trojúhelníků vepsaných do úseče. Archimédes dokázal, že obsah uvažované úseče je roven $\frac{4}{3}$ obsahu trojúhelníka APB.



Obr. 1. Archimédova kvadratura paraboly

Ukažme, jak Archimédes při tomto důkazu postupoval.

Opišme kolem parabolické úseče rovnoběžník $A'ABB'$, kde $A'B'$ je tečna sestrojená v bodě P a úsečky AA', BB' jsou rovnoběžné s osou paraboly.

Archimédes nejdříve dokazuje, že trojúhelník APB má obsah větší než $\frac{1}{2}$ obsahu $s(\widehat{APB})$ uvažované úseče, tj.

$$s(\triangle APB) = \frac{1}{2}s(A'ABB') > \frac{1}{2}s(\widehat{APB}).$$

Uvažujme nyní dvě menší parabolické úseče se základnami AP a PB a jejich vrcholy P_1 a P_2. Stejně tak, jako v předchozí situaci vepišme příslušným úsečím trojúhelníky AP_1P a PP_2B, které opět tvoří více než polovinu obsahu úsečí. Tím vyčerpáme plochu úseče $\widehat{APB}$ vepsaným mnohoúhelníkem AP_1PP_2B. Naznačený postup můžeme zřejmě opakovat.

Z Eudoxova principu přitom vyplývá (v dnešní řeči), že ke každému $\varepsilon > 0$ obdržíme po konečném počtu výše uvedených konstrukcí mnohoúhelník vepsaný do parabolické úseče $\widehat{APB}$, který se svým obsahem liší od obsahu úseče o méně než ε.

V dalším kroku Archimédes využívá obecných vlastností paraboly k důkazu faktu, že součet obsahů trojúhelníků AP_1P a PP_2B je $\frac{1}{4}$ obsahu trojúhelníku APB.

Mnohoúhelník $\mathcal{P}_n$ získaný po n krocích má tedy obsah

$$s(\mathcal{P}_n) = \alpha + \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{4^2} + \cdots + \frac{\alpha}{4^n}, \text{ kde } \alpha = s(\triangle APB).$$

K výpočtu $s(\mathcal{P}_n)$ Archimédes odvozuje vztah

$$\frac{1}{4^k} + \frac{1}{3}\frac{1}{4^k} = \frac{1}{3}\frac{1}{4^{k-1}}.$$

Postupnou aplikací tohoto vzorce na poslední dva členy následujícího součtu dostaneme

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + (\frac{1}{4^n} + \frac{1}{3}\frac{1}{4^n}) =$$

$$= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + (\frac{1}{4^{n-1}} + \frac{1}{3}\frac{1}{4^{n-1}}) = \cdots = 1 + (\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\frac{1}{4}) = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

Tedy

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^n} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^n}.$$

Pro dostatečně velká n můžeme člen $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^n}$ zanedbat (dnes bychom použili operace limity pro $n \to \infty$).

Odtud ihned plyne tvrzení věty, že $s(\widehat{APB}) = \frac{4}{3}s(\triangle APB)$.

Vraťme se nyní k popisu dalších Archimédových prací.

O kouli a válci: V této knize nalezneme výrazy pro výpočet povrchu koule (povrch koule je rovný čtyřnásobku plochy její hlavní kružnice) a objemu koule (objem koule se rovná 2/3 objemu jí opsaného válce). Tohoto výsledku si zřejmě Archimédes velice cenil, neboť si nechal válec opsaný kouli vytesat i na náhrobek[1].

O spirálách: Kniha obsahuje úvahy o tzv. „Archimédově spirále" včetně výpočtu obsahu úseče této spirály. Zde se také objevují zmínky o charakteristickém nekonečně malém trojúhelníku, které se staly v 17. století vzorem pro integrální a diferenciální metody.

O konoidech a sféroidech: Zde Archimédes odvozuje vztahy pro objemy konoidů a sféroidů a jejich částí. „Konoid" je to, co bychom nazvali rotačním paraboloidem nebo hyperboloidem a „sféroid" je rotační elipsoid. Archimédes ukazuje, že objem rotačního paraboloidu P vepsaného do válce C s poloměrem podstavy r a výškou h je $v(P) = \frac{1}{2}\pi r^2 h$. Důkazy provádí „rozsekáním" tělesa na tenké plátky, čímž navazuje na myšlenky Démokrita a zároveň je předchůdcem Keplera a Cavalieriho.

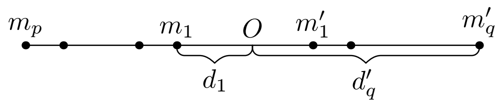
Archimédovy práce stěží přežily období let 500 – 1000 n. l., kdy matematické a technické vědy stagnovaly. Pouze dvě jeho díla, *Měření kruhu* a *O kouli a válci*, byla známa v 6. století. Téměř všechny jeho současné překlady se opírají o řecké rukopisy, které byly opsány z originálu v Cařihradě v 9. století, přeloženy do latiny ve 13. století a znovu objeveny v 16. století. Jedinou výjimkou je dílo *Metoda*, které bylo náhodou objeveno na pergamenu v Cařihradě až roku 1906.

[1]Píše o tom Cicero v knize *Tuskulské hovory* (nakl. Svoboda, Praha 1976).

Metoda neboli **Poselství Eratosthenovi o mechanické metodě na řešení geometrických úloh:** V tomto díle Archimédes podrobně vylíčil metodu, pomocí níž objevoval nové výsledky, dříve, než je opatřil důkazem. Jedná se o tzv. metodu páky, podle které je konečný systém bodů o hmotnostech $m_1, \cdots, m_p$ na jedné straně páky ve vzdálenostech $d_1, \cdots, d_p$ od podpěry O vyvážen jiným systémem bodů o hmotnostech $m'_1, \cdots, m'_q$ ve vzdálenostech $d'_1, \cdots, d'_q$ na druhé straně páky. Pak v souladu s přirozenými zákony mechaniky platí rovnost

$$\sum_{i=1}^{p} m_i d_i = \sum_{j=1}^{q} m'_j d'_j.$$

Na základě tohoto vztahu se na jednu stranu páky umístí rovinný útvar (resp. těleso), jehož obsah (resp. objem) určujeme, a na druhou stranu páky rovinný útvar (resp. těleso), jehož obsah (resp. objem) a těžiště známe.



Ilustrujme tuto metodu na jednoduchém příkladě určení obsahu oblasti ohraničené parabolou $y = x^2$ a přímkami $x = 1$, $y = 0$, viz obr. 2. Označme tuto oblast R. Budeme se snažit určit její obsah na základě znalosti obsahu a těžiště trojúhelníka T s vrcholy $(0, 0)$, $(1, \frac{1}{2})$, $(1, -\frac{1}{2})$. Jeho obsah $s(T) = \frac{1}{2}$ a těžiště má v bodě $(\frac{2}{3}, 0)$.

Nejprve umístěme trojúhelník i parabolu na stejnou strany páky se středem O v bodě $(0, 0)$. Nyní využijeme následujícího Archimédova principu:

Předpokládejme, že existuje konstanta k tak, že pro každou svislou přímku vedenou ve vzdálenosti x od středu páky O vytínající na ploše R úsek r a na ploše T úsek t platí

$$k \cdot r = x \cdot t.$$

Umístíme-li útvar R na druhou stranu páky tak, že těžiště je ve vzdálenosti k od středu O, pak „vyváží“ útvar T, které necháme na původním místě a platí

$$k \cdot s(R) = x_T \cdot s(T),$$

kde x_T je vzdálenost těžiště útvaru T od středu O.

Aplikujme nyní tento princip na náš konkrétní případ. Protože trojúhelník T je rovnoramenný, řez ve vzdálenosti x od středu O má velikost x $(t = x)$. Velikost řezu v oblasti R je x^2 $(r = x^2)$. Dosazením do výše zmíněného vztahu dostáváme

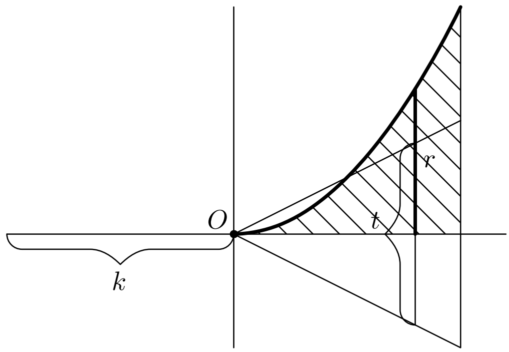
$$k \cdot x^2 = x \cdot x \quad \text{odkud} \quad k = 1.$$

Pak pomyslně přesuneme oblast R na druhou stranu páky tak, aby vzdálenost těžiště této oblasti od středu O byla k. Pro obsahy obou oblastí pak platí:

$$k \cdot s(R) = x_T \cdot s(T)$$

odkud dostáváme obsah oblasti R

$$s(R) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$



Obr. 2. Archimédova metoda páky

Tímto způsobem Archimédes odvozuje nejenom obsahy plošných útvarů, ale i objemy těles. Např. objem koule určuje pomocí známých objemů válce a kužele.

Přínos Archiméda k rozvoji matematiky je obrovský v jeho originalitě a přesnosti. Archimédova matematika se stále více orientuje k proměnným, zavádí do geometrie pohyb. Tím se liší např. od Eukleida, který přijímal změnu a pohyb velmi neochotně. Archimédes ve svých pojednáních podstatně rozvinul jak metodu na určení obsahů a objemů, tak i metodu na stanovení tečen ke křivkám a na určení extrémů. Metoda „nedělitelných veličin" mu byla pouze prostředkem, který pomáhal objevovat nová tvrzení. Pokládal však za povinnost každé takové tvrzení dokázat exhaustivní metodou, kterou za tímto účelem obohatil a vylepšil. Zavedl totiž kromě vepsaných mnohoúhelníků i mnohoúhelníky opsané a zkoumal jejich obsahy, které omezují hledaný obsah. Jinými slovy, zabýval se zkoumáním dolního a horního součtu omezujícího danou veličinu. Při výpočtech objemů používal stejným způsobem vepsaných a opsaných mnohostěnů. V souvislosti s tečnou křivky naznačil také myšlenku charakteristického trojúhelníka.

Archimédovy práce znamenaly obrovský krok ve výpočtech obsahů a objemů. Z dnešního pohledu však postrádají některé důležité nástroje matematické analýzy. Např. pojem limity (Archimédes sdílel řecké obavy z nekonečna, přikláněl se k řecké koncepci založené na dvojitém důkazu sporem místo jednoduché cesty pomocí limity), obecné algoritmy pro výpočet obsahů a objemů (při výpočtu vycházel vždy z geometrických vlastností daného tělesa) nebo vztah mezi obsahy ploch určených křivkami a problémem tečen k těmto křivkám (řecký pohled na tečnu jako dotykovou přímku byl nedostačující pro to, aby mohl vést k odhalení této souvislosti). K objasnění těchto pojmů a souvislostí směřoval další vývoj infinitezimálního počtu.

Archimédovy práce, stejně jako práce jeho velkého nástupce **Apollónia** z Pergy (asi 260 – 170 před n. l.), který proslul svým osmidílným pojednáním *Kuželosečky* (*Kónika*), měly široký vliv na celý další rozvoj matematiky. Metody a ideje obsažené v těchto pracích se prostřednictvím arabských překladů uchovaly do novověku a staly se východiskem k vytvoření matematické analýzy.

Starořecká matematika dosáhla vysoké úrovně; k matematice mezopotámské a egyptské přidala logické úvahy a důkazy. Ve 3. stol. před n. l. bylo v podstatě dovršeno budování základů geometrie, teorie čísel, učení o kuželosečkách a antické formy integrálních a diferenciálních metod. Posledním obdobím antické společnosti je období římské nadvlády, jež znamenalo stagnaci a úpadek veškeré vědy. Zájem se obrátil pouze k počtářské matematice. Střediskem matematiky zůstala Alexandrie, i když vědecká práce se omezovala často jen na komentáře a kompilace. Jedním z nejdůležitějších děl tohoto období je Ptolemaiova *Velká skladba* (*Megalé syntaxis*) (kolem 150 n. l.), známější pod arabským jménem *Almagest*. Je to práce astronomická, obsahuje též trigonometrii a formule pro siny a kosiny součtu a rozdílu úhlů atd. Z dalších matematiků jmenujme např. Héróna, který je znám především díky tzv. „Hérónovu vzorci“ pro výpočet obsahu trojúhelníka, jehož formulace se však připisuje už Archimédovi. Hérón je autorem několika geometrických prací, v nichž se věnuje jak výpočtům obsahů a objemů geometrických těles, tak i měření objemů staveb, divadel, plaveckých bazénů, studní, lodí apod. Za poslední originální dílo starověké matematiky je považována Diofantova *Aritmetika* ze 3. století.

V otrokářském Římě byl zájem o matematiku malý. Nejenže nevznikaly žádné nové matematické práce, ale navíc bylo zničeno velké množství řeckých písemných památek. Od 3. století n. l. začala římská ekonomika i politika upadat a během 5. století římská říše zanikla úplně. Tím také končí období starověké matematiky.

Po rozpadu antické otrokářské společnosti se matematické vědy během mnoha staletí rozvíjely hlavně v Číně, Indii a arabských zemích. Matematika zde měla podobný charakter jako v Mezopotámii a Egyptě, neboť vycházela z praxe a řešila otázky vzniklé při zavodňování, budování hrází, cest, palácových staveb, při vybírání daní a obchodu. Jen v některých centrech byly rozvíjeny exaktní přístupy a metody řecké matematiky. Nejvyšší úrovně dosáhla matematika v zemích Blízkého a Středního Východu, kde se výrazně projevil velký vliv řecké vědy. Ve školách arabských učenců byla opisována a překládána díla řeckých matematiků, díky čemuž se nám také zachovala.

⋆ ⋆ ⋆

Matematika starověku se ve vztahu k integrálu vyznačuje těmito rysy:

- intuitivní přístup a současně strach z počítání s nekonečně malými veličinami,
- rozvoj účinných technik k výpočtu obsahů a objemů založených na exhaustivní metodě.