9. Kratší a delší odvěsna

In: Jiří Hudeček (author): Matematika v devíti kapitolách. Sbírka početních metod z doby Han s komentářem Liu Huie z doby Wei a Li Chunfenga a dalších z doby Tang. Překlad, vysvětlivky a úvod. (Czech). Praha: Katedra didaktiky matematiky MFF UK, 2008. pp. 209–228.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/400846

9 Kratší a delší odvěsna

Gou Gu 句股 – Pro určení výšek, hloubek, šířek a dálek

I tato kapitola patří k mladší vrstvě *Devíti kapitol*. Sdružuje řadu metod, jejichž společným rysem je výskyt pravého úhlu; před vznikem klasického textu zřejmě patřily k částečně samostatným tradicím. Některé byly patrně součástí nauk *Chongcha* a *Pangyao*, které Zheng Zhongův komentář k *Zhouským obřadům* řadil k „Devatero počtům“ (viz pozn. 10 k Liu Huiově předmluvě). Znalost speciální pythagorejské trojice „3, 4, 5“ je doložena v *Matematické klasice zhouského gnómonu*, která jinak neobsahuje mnoho matematiky, a metodu *chongcha*, „dvojí rozdíl“, zrekonstruoval Liu Hui jako 10. kapitolu (nynější „Matematická klasika mořského ostrova“). V „Knize výpočtů“ se však Pythagorova věta nevyskytuje a tak se tato část matematiky zřejmě rozvinula až za dynastie Západní Han.

Staročínská ortogonometrie je typická svým těsným sepětím s výpočtem obsahů ploch a s výpočtem odmocnin. Liu Hui se v této kapitole snaží ověřit či dokázat všechny metody a využívá k tomu především principu ekvivalence ploch („to, co vchází, se doplní tím, co vychází“), nikoli poměrů. I tam, kde se s poměry pracuje – v úlohách s podobnými pravoúhlými trojúhelníky (samotný pojem podobnosti přitom není zaveden), lze metodu řešení vždy snáze odvodit z diagramu rozdílů ploch, založené na jejich ekvivalenci. Liu Hui pracuje s několika základními diagramy, jejichž platnost vyplývá právě z principu ekvivalence ploch, a jejich superpozicí dokazuje platnost různých vztahů mezi odvěsnami a přeponou, jejich součty a rozdíly i dalšími rozměry.

Zajímavá místa:

- ☐ Pravděpodobná rekonstrukce důkazu Pythagorovy věty v Liu Huiově komentáři k metodě (9.I).
- ☐ Použití doplňkových ploch k výpočtu rozdílů odvěsny a přepony – metoda (9.III) a Liu Huiův komentář.
- ☐ Úloha s rozdílem odvěsen – v Liu Huiově komentáři fundamentální diagram odvěsen a přepony (9.IX).
- ☐ Použití podobných pravoúhlých trojúhelníků k výpočtu chůze dvou lidí ze stejného místa – (9.XI); metodu lze také použít k výpočtu libovolné pythagorejské trojice.
- ☐ Výpočty vepsaných útvarů v pravoúhlém trojúhelníku – čtverec (9.13), kruh (9.14).
- ☐ Nalezení neznámé délky pomocí odmocňování s „podélným pravidlem“ – kvadratická rovnice s lineárním členem (9.XVII).
- ☐ Zaměřování vzdálenostmi pomocí čtveřice tyčí rozestavených do čtverce – (9.20).
- ☐ Výpočet rozměrů dveří (odvěsen) podle délky přepony jejích rozdílů s jednotlivými odvěsnami, Liu Huiův důkaz použitím superpozice doplňkových diagramů – (9.XXII).

Důležité pojmy této kapitoly (k. = „pouze v komentářích“):

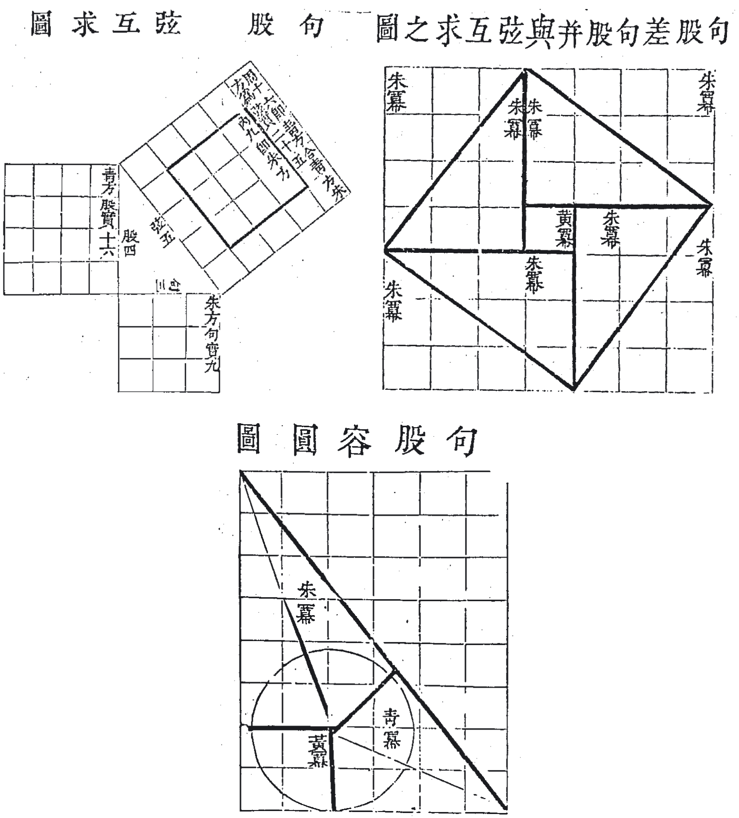
Podélné pravidlo (*zong fa* 從法) – rozdíl délek stran obdélníku, který funguje jako vstupní položka početní tabulky pro „rozklad čtverce“ (viz pozn. 16 a 45).

Tři vzájemně přímé (*san xiang zhi* k. 參相直) – tři body v přímce (pozorovatel, pozorovaný objekt a pomocný objekt), referenční zeměměřičská přímka.

Úhelník (*ju* k. 矩) – tesařské náčiní pro tvorbu pravého úhlu – dva obdélníky složené do tvaru L.

Vstoupit (*ru* 入) – odchylovat se v kolmém směru od spojnice dvou bodů, která slouží jako pomocná při zaměřování vzdáleného bodu. Míra „vstoupení“ optické spojnice bližšího bodu pomocné přímky a zaměřovaného bodu se odměří na úrovni vzdálenějšího bodu pomocné přímky. V textu ani komentáři se tyto zeměměřičské techniky však výslovně nepopisují, proto se také nedozvíme, jestli si zeměměřiči byli vědomi, že je nutné vytyčit pomocnou spojnici rovnoběžně s hlavní (referenční a měřenou) spojnicí, případně jak této vlastnosti říkali a jak jí dosahovali. Viz úlohy (9.20) a (9.22).

Pozn. Obě odvěsny a přepona jsou jakožto termíny vysvětleny v obecném slovníčku, protože se vyskytují ještě v Liu Huiově předmluvě a komentáři k první kapitole.



Dai Zhenovy ilustrace v prvním vydání „Devíti kapitol“ pohyblivými typy

Mějme kratší odvěsnu 3 *chi*, delší odvěsnu 4 *chi*. Ptáme se, jak velká je přepona?

Odpověď zní: 5 *chi*.

(9.1) Mějme přeponu 5 *chi*, kratší odvěsnu 3 *chi*. Ptáme se, jak velká je delší odvěsna?

Odpověď zní: 4 *chi*.

(9.2) Mějme přeponu 5 *chi*, delší odvěsnu 4 *chi*. Ptáme se, jak velká je kratší odvěsna?

Odpověď zní: 3 *chi*.[1]

(9.I) Kratší a delší odvěsna

Kratší strana se nazývá kratší odvěsna, delší strana se nazývá delší odvěsna, vzájemné spojení jejich rohů se nazývá přepona. Kratší odvěsna je kratší než příslušná delší odvěsna, delší odvěsna je kratší než příslušná přepona. Bude se to používat pro všechny další poměry, proto tu nejprve je tato metoda, aby se ukázal jejich původ.

Metoda zní: Kratší i delší odvěsna se každá násobí sama sebou. Sečteme to a zmenšujeme rozkladem čtverce, to je přepona.

Kratší odvěsna násobená sama sebou vytvoří rumělkový čtverec, delší odvěsna násobená sama sebou vytvoří tyrkysový čtverec, necháme ať to, co vchází, se doplní tím, co vychází, každý k svému druhu, proto jelikož ostatní části se nepřesunuly, vytvoří spojením výplň čtverce ke přeponě. Když zmenšujeme rozkladem čtverce, je to přepona.[2]

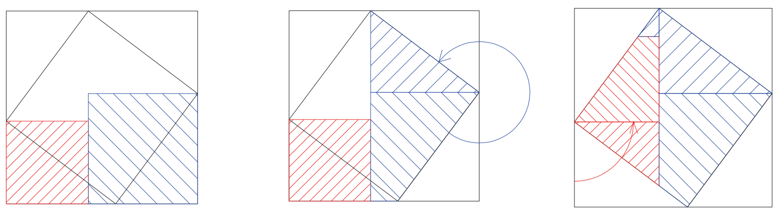
(9.Ia) Dále: Delší odvěsna se násobí sama sebou, odečte se od přepony násobené sebou samou a zbytek zmenšujeme rozkladem čtverce, to je kratší odvěsna.

Váš poddaný Chunfeng a další pokorně poznamenávají: V této metodě se výplně kratší a delší odvěsny spojí do výplně přepony. Čtverec kratší odvěsny je uvnitř, tedy kratší odvěsna je kratší než delší odvěsna. Necháme delší odvěsnu vynásobit sebe

---

[1] Poznamenejme na tomto místě, že všechna číselná zadání v této kapitole jsou volena tak, aby odmocněním nevznikl iracionální výsledek. Tam, kde je třeba vypočítat všechny tři strany trojúhelníka, tvoří vždy pythagorejské trojice nebo jejich racionální násobky. Tam, kde se nepracuje s přeponou, je naopak vždy iracionální – viz [Chemla & Guo Shuchun 2004], str. 664.

[2] Liu Hui popisuje velmi neurčitě, jak lze gra cky potvrdit platnost metody „Kratší a delší odvěsny“. Karine Chemla ([Chemla & Guo Shuchun 2004], str. 680) ukazuje, že nejpravděpodobnější průběh důkazu je tento:



Přesun částí mimo přeponový čtverec dovnitř je to, co Liu Hui míní principem „to, co vchází, se doplní tím, co vychází“.

samu a odečteme ji od přepony vynásobené sebou samou, zbytek je výplň kratší odvěsny. Proto když to zmenšujeme rozkladem čtverce, je to kratší odvěsna.

(9.Ib) Dále: Kratší odvěsna se násobí sama sebou, odečte se od přepony násobené sebou samou a zbytek zmenšujeme rozkladem čtverce, to je delší odvěsna.

Výplně kratší a delší odvěsny spojením vytvoří výplň přepony, když necháme jednu odstranit, lze vždy poznat tu, která zůstává.

(9.3) Mějme kulaté poleno s průměrem 2 *chi* a 5 *cunů*, chceme z něj udělat hranaté prkno s tloušťkou 7 *cunů*. Ptáme se, kolik bude šířka?

Odpověď zní: 2 *chi* a 4 *cuny*.

(9.II) (Ořezávání kulatiny na prkno)

Metoda zní: Necháme průměr 2 *chi* a 5 *cunů* vynásobit sebe sama, odečteme od něj 7 *cunů* násobených sebou samými, zbytek zmenšujeme rozkladem čtverce, to je šířka.

Zde průměr kruhu 2 *chi* a 5 *cunů* je přepona, tloušťka prkna 7 *cunů* je kratší odvěsna, hledaná šířka je delší odvěsna.

(9.4) Mějme strom dlouhý 2 *zhangy* s obvodem 3 *chi*. Roste pod ním kudzu,[3] obtočí se kolem stromu sedmkrát a je nastejno s vrškem stromu. Ptáme se, kolik je délka kudzu?

Odpověď zní: 2 *zhangy* a 9 *cunů*.

(9.III) (Kudzu ovíjející strom)

Metoda zní: 7 obtočení násobí obvod a to je kratší odvěsna, délka stromu je delší odvěsna,[4] hledáme pro ně přeponu. Přepona je délka kudzu.

Podle šířky v obvodu hledáme rozsah, který má podélnou [složku] jako délka[5] stromu a tvar je [vytvořen] obalováním kudzu. Když se otáčí surová hedvábná nit kolem násady štětce, je to podobné jako obtáčení kudzu kolem stromu. Když ji rozmotáme a prohlédneme si ji, mezi každou otočkou jsou intervaly vytvářející kratší a delší odvěsnu a přeponu. Tedy délka kudzu mezi [otočkami] je přepona. Sedm otáček násobí obvod, tím sečteme všechny kratší odvěsny na jedinou kratší odvěsnu. Délka stromu je delší odvěsna, je přitom kratší, metoda nazývá délku stromu kratší odvěsnou, je to přehozené vyjádření. Když z kratší a delší odvěsny hledáme přeponu, už nemáme obvod. Výplň samonásobení přepony vychází z prvního obrázku výše, to, že se výplně kratší a delší odvěsny spojí do výplně přepony, je zcela jasné. Přitom

---

[3] Kudzu je popínavá rostlina z čeledi bobovitých (Pueraria lobata) rozšířená v Číně, Koreji a Japonsku.

[4] Překládáme *gou* jako „kratší odvěsna“, což zde vede k paradoxu: ačkoli původně je délka jedné otočky (obvod) skutečně kratší než „delší odvěsna“ (*gu*), po násobení tomu tak už není. Liu Hui na tento rozpor upozorňuje, což zdůrazňuje, jak byla vzájemná délka pro volbu termínu – alespoň v jeho chápání – důležitá. *Gou* je zpravidla skutečně kratší než *gu*. Zůstává ovšem důležitá otázka, zda tato anomálie neukazuje spíše neodůvodněnost Liu Huiova přesvědčení, že tomu tak je vždy a že jsou tím tyto dva pojmy de novány.

[5] Zde se vyskytují 3 termíny, které všechny znamenají délku: hledaný rozsah, *mao*, je délka třírozměrných předmětů od základny (vyskytuje se hlavně v 5 kapitole a lze ji občas také chápat jako hloubku), „podélná“, *zong*, je druhý člen dvojice šířka – podélná (*zong*) a „délka“ (*chang*) stromu je v tomto případě výška.

velikosti obou výplní jsou, dá se říci, jen převrácené uprostřed výplně přepony, mohou se navzájem měnit ve vnějšek a vnitřek,[6] vnitřek vytváří čtvercovou výplň, vnějšek vytváří výplň úhelníku. Obě mění tvar vnitřku na vnějšek, ale jejich velikosti [jako vnitřku a vnějšku] jsou vyrovnané.

Další poznámka: v tomto obrázku je úhelník výplně kratší odvěsny tyrkysový, ovinuje bílý vnějšek, tedy jeho výplň má jako šířku rozdíl přepony a delší odvěsny, jako délku součet přepony a delší odvěsny a čtverec výplně delší odvěsny je uvnitř. Když je úhelník výplně delší přepony tyrkysový, ovinuje bílý vnějšek, tedy jeho výplň má jako šířku rozdíl přepony a kratší odvěsny, jako délku součet přepony a kratší odvěsny a čtverec výplně kratší odvěsny je uvnitř. Proto tvoříme rozdíly a součty, abychom jimi vydělili, je to vzájemné násobení krátkého a dlouhého.[7]

(9.5) Mějme rybníček se stranou 1 *zhang*, uprostřed něho je rákos, z nějž trčí z vody 1 *chi*. Když přetáhneme rákos ke břehu, je právě ve výšce břehu. Ptáme se, kolik je hloubka vody a délka rákosu?

Odpověď zní:
Hloubka vody 1 *zhang* a 2 *chi*.
Délka rákosu 1 *zhang* a 3 *chi*.

(9.IV) (Rákos rostoucí v rybníčku)

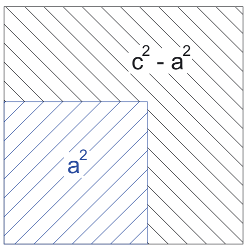
Metoda zní: Polovina strany rybníčku se násobí sama sebou.

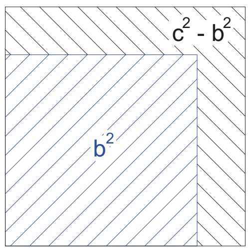
Zde když půlíme stranu rybníčku, získáme 5 *chi* jako kratší odvěsnu, hloubka vody je delší odvěsna a délka rákosu je přepona. Z kratší odvěsny a přepony se vyjevuje

---

[6] Zde Liu Hui používá dvojici slov *biao* a *li* 表裏, doslova „vnější povrch šatů“ a „podšívka“. Použití těchto slov v abstraktním významu je nicméně velmi časté.

[7] Logické vysvětlení tohoto odstavce se hledá těžko. Pravděpodobně se zde hovoří o těchto dvou obrazcích (které dále nazývám „doplňkové diagramy“):





Bohužel je zcela nejasné, jak se vypořádat s obarvením těchto obrázků. Liu Hui jasně říká, že úhelník (*ju* 矩) má být tyrkysový a že obaluje bílý vnějšek. Vnějšek však má podle toho, co předchází, mít právě tvar úhelníku. Jistým východiskem by bylo předpokládat, že tyrkysově jsou obarveny jen hrany úhelníku a jeho vnitřek je bílý, pak by však stejně nebyla určena barva čtverce (jehož přítomnost v obrázku a identi kace s „vnitřkem“ vyplývá z předchozího textu). Další problém je rozhodnout, na co Liu Hui naráží svou poslední větou – pouhým zkoumáním těchto dvou obrázků a jejich číselných vztahů žádný trik, kde by se využilo dělení, nesestavíme. Přitom se nezdá ani pravděpodobné, že by se v tomto popise skrýval otočený obrázek (viz pozn. 39), jehož obarvení a identi kace jeho částí s „vnitřky“ a „vnějšky“ by byly také velmi nepřirozené.

Musíme se zřejmě spokojit s identi kací hlavního poselství Liu Huiova komentáře, kterým se zdá v tomto případě být důraz na vzájemnou zaměnitelnost *gou* a *gu*, vyvolaný anomálií v jejich pojmenování v této metodě.

delší odvěsna, proto když dáme, aby se kratší odvěsna vynásobila sebou samou, vyjeví se nejprve výplň úhelníku.[8]

Odečteme od ní 1 *chi* trčící z vody násobené samo sebou.

To, co trčí z vody, je rozdíl přepony a delší odvěsny. Když odečteme výplň tohoto rozdílu od úhelníku, zmenšíme ho.

Zbytek zmenšujeme dvojnásobkem trčící části a získáme hloubku vody.

Rozdíl je šířka výplně úhelníku, hloubka vody je delší odvěsna. Necháme z této výplně získat délku [odpovídající] trčení z vody 1 *chi*, proto když vytvoříme úhelník, získáme délku rákosu.[9]

Přičteme velikost trčící z vody a získáme délku rákosu.

Váš poddaný Chunfeng a další pokorně poznamenávají: Tento rákos původně trčel z vody o 1 *chi*, nyní se již projevila hloubka vody, proto přičteme množství *chi* trčících z vody a získáme délku rákosu.

(9.6) Mějme zasazený strom, k jehož konci uvážeme provaz, jehož leží na zemi 3 *chi*. Když chytneme provaz a kráčíme, dojdeme 8 *chi* od kořene a provaz je vyčerpán. Ptáme se, kolik je délka provazu?

Odpověď zní: 1 *zhang*, 2 celé a 1 ze 6 dílů *chi*.

(9.V) (Uvázaný provaz)

Metoda zní: Vzdálenost od kořene násobíme samu sebou.

Zde se vzdálenost od kořene 8 *chi* bere za kratší odvěsnu, hledaný provaz je přepona. Tažení provazu nadoraz a pootevřené dveře jsou obě na stejnou metodu kratší odvěsny a rozdílu delší odvěsny a přepony. Násobení vzdálenosti od kořene sebou samou znamená, že nejprve rozprostřeme výplň úhelníku.

Stanovíme, že [dokud] je to jako ležící množství, [přidáváme] 1.

To, co leží na zemi, je rozdíl delší odvěsny a přepony. Když jím zmenšujeme výplň úhelníku, je to součet delší odvěsny a přepony.

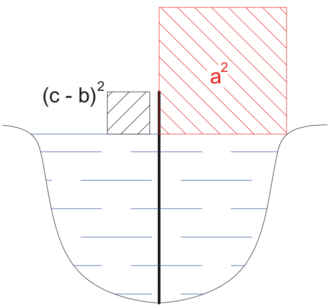
K výsledku přičteme množství ležící na zemi a půlíme, to je délka provazu.

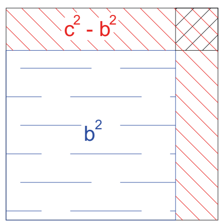
Když se čitatel nedá půlit, dvojnásobíme jeho jmenovatele. Součet po přičtení rozdílu jsou dvě délky, proto se opět půlí. Součet po odečtení rozdílu a navíc půlený je délka stromu.

---

[8] Viz předchozí poznámka.

[9] Liu Hui ve svém ověření pracuje s doplňkovými diagramy, které se na tuto úlohu velmi hodí (dalo by se až spekulovat, že byla zařazena právě pro jejich osvětlení). Doplňkový diagram (vpravo) vychází přímo z ekvivalence $b^2 = c^2 - a^2$:





Gra cké řešení pomocí těchto ploch je velmi přímočaré.

(9.7) Mějme zeď, vysokou 1 *zhang*, o níž je opřený strom vrcholem naroveň zdi. Když táhneme strom a kráčíme pryč o 1 *chi*, dotkne se země. Ptáme se, kolik je délka stromu?

Odpověď zní: 5 *zhangů* a 5 *cunů*.

(9.VI) (Odsazený strom)

Metoda zní: Každá část výšky zdi 10 *chi* vynásobené sebou samou, která je jako množství *chi* chůze pryč, dá 1. Výsledek přičteme k množství *chi* chůze pryč a půlíme, to je délka stromu.

Zde se výška zdi 1 *zhang* bere jako kratší odvěsna, hledaný opřený strom je přepona, tažení 1 *chi* pryč je rozdíl delší odvěsny a přepony. Myšlenka tvůrce metody je stejná jako v úloze „uvázaný provaz“.[10]

(9.8) Mějme poleno zasazené ve stěně, jehož velikost neznáme. Řežeme ho pilou do hloubky 1 *cun* a délka řezu je 1 *chi*. Ptáme se, kolik je průměr?

Odpověď zní: Průměr polena je 2 *chi* a 6 *cunů*.

(9.VII) (Řezání polena)

Metoda zní: Polovina řezu se násobí sama sebou.

V této metodě se 1 *chi* řezu bere jako kratší odvěsna, průměr polena jako přepona a hloubka řezu 1 *cun* jako polovina rozdílu delší odvěsny a přepony, proto se délka řezu půlí.

Váš poddaný Chunfeng a další pokorně poznamenávají: Níže získáme hloubku řezu 1 *cun* jako polovinu rozdílu delší odvěsny a přepony, to, o čem komentář říká, že je to rozdíl delší odvěsny a přepony, je délka řezu.[11]

[Dokud je to] jako *cuny* hloubky, [přidáváme] 1, navýšíme to o *cuny* hloubky a to je průměr polena.

Také se navyšuje o polovinu, jako v minulé metodě, původně se mělo půlit, zde jsou to všechno poloviční rozdíly, proto se už znovu nepůlí.

(9.9) Mějme pootevřené dveře, které jsou od prahu 1 *chi* a nedovírají se o 2 *cuny*.[12] Ptáme se, kolik je šířka dveří?

Odpověď zní: 1 *zhang* a 1 *cun*.

(9.VIII) (Pootevřené dveře)

Metoda zní: 1 *chi* od prahu se násobí samo sebou. Každá část výsledku podle půlených 2 *cunů* nedovření dá 1. Výsledek navýšíme o polovinu nedovření a tím získáme šířku dveří.

Zde je 1 *chi* od prahu kratší odvěsna, polovina šířky dveří přepona, když půlíme nedovření 2 *cuny*, získáme 1 *cun* jako rozdíl delší odvěsny a přepony, hledáme přeponu. Proto se to má půlit. Ovšem následně se berou dvě přepony jako velikost šířky, proto se znovu nepůlí.

---

[10] Tj. v metodě (9.V).

[11] Li Chunfeng zde naráží patrně na porušení Liu Huiova textu, které se v dnešních edicích amenduje, proto jeho poznámka vypadá poněkud nesmyslně.

[12] Tj. mezi konci jejich 2 veřejí je mezera 2 *cuny*

(9.10) Mějme dveře, jejichž výška je víc než šířka o 6 *chi* a 8 *cunů* a dva [protější] rohy jsou od sebe přesně 1 *zhang*. Ptáme se, kolik je výška a šířka dveří?

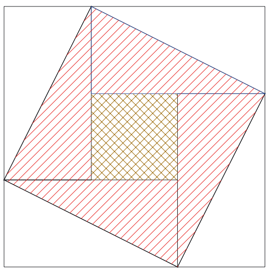
Odpověď zní:
Šířka 2 *chi* a 8 *cunů*.
Výška 9 *chi* a 6 *cunů*.

(9.IX) (Rozdíl výšky a šířky dveří)

Metoda zní: Necháme 1 *zhang* vynásobit sebe sama na obsah. Půlíme, o kolik jsou od sebe navíc, necháme vynásobit sebou samým, dvojnásobíme, odečteme od obsahu. Půlíme zbytek, zmenšujeme jej rozkladem čtverce. Od výsledku odečteme polovinu rozdílu, to je šířka dveří. Přičteme polovinu rozdílu, to je výška dveří.

Učiníme šířku dveří kratší odvěsnou, výšku delší odvěsnou, 1 *zhang* vzájemné vzdálenosti rohů přeponou, 6 *chi* a 8 *cunů* navíc výšky nad šířku rozdílem kratší a delší odvěsny. Mají-li pozice dle obrázku, výplň přepony právě naplní 10 000 *cunů*. Dvojnásobíme, odečteme výplň rozdílu kratší a delší odvěsny, zmenšujeme rozkladem čtverce. Výsledek toho je pak velikost výšky a šířky v součtu. Odečteme rozdíl od součtu a půlíme, to je pak šířka dveří. Přidáme množství, o kolik jsou navíc proti sobě, a to je pak výška dveří. Ovšem tato metoda nejprve hledá polovinu tohoto. Když se 1 *zhang* násobí sám sebou, jsou to 4 rumělkové výplně a 1 hnědá výplň. Když se polovina rozdílu násobí sama sebou a pak se to dvojnásobí, jsou to 2 ze 4 dílů hnědé výplně. Odečteme obsah, půlíme zbytek, to jsou 2 rumělkové výplně a 1 ze 4 dílů hnědé výplně.[13] Je to 1 ze 4 dílů ve velkém čtverci. Proto když ho zmenšujeme roz-

[13] Tento text byl do současné podoby upraven Dai Zhenem (původní Dai Zhen zachoval v editorské poznámce – viz [Guo Shuchun 2004b], str. 439, pozn. 73 – 77). Liu Hui zde popisuje obrázek, který jakožto fundamentální diagram používá i Zhao Shuang, první komentátor *Matematické klasiky zhouského gnómonu* (*Zhou bi suan jing*), k vysvětlení platnosti vztahů mezi stranami pravoúhlého trojúhelníka. Jedná se o tento obrázek:



Jak je vidět, čtverec přepony se skládá ze 4 rumělkových ploch (jednoduše šrafovaných, odpovídající polovině plochy dveří v úloze, o níž se tu jedná) a 1 hnědé plochy (křížem šrafované, odpovídající čtverci rozdílu odvěsen, v tomto případě výšky a šířky). Doplněním rumělkových ploch na obdélníky (což odpovídá zdvojení čtverce přepony a odečtení hnědého čtverce) získáme čtverec nad součtem obou odvěsen – vyjádřeno algebraicky, $(a + b)^2 = 2c^2 - (a - b)^2$.

Metoda klasického textu však postupuje jinak, aby získala rovnou polovinu součtu, která je potřeba pro další výpočet. Odečte od čtverce přepony polovinu hnědého čtverce a zbytek půlí, čímž získá obrázek vlevo, který se dá přesunutím částí rumělkových ploch upravit na kladem čtverce, získáme polovinu velikosti součtu šířky a výšky. Když odečteme polovinu rozdílu, získáme šířku. Když přičteme, získáme výšku dveří.

Další poznámka k výplním v tomto obrázku: K výplni součtu kratší a delší odvěsny přičteme výplň jejich rozdílu a také odečteme výplň přepony, to je sebrání. To asi [použijeme] když se nejprve projeví přepona a pak poznáme její kratší a delší odvěsnu. Zde jsou však právě rovné, když se násobí samy sebou, každá vytvoří čtverec, které se spojí na výplň přepony. Necháme polovinu toho, o co jsou vzájemně větší, násobit sebou samým, dvojnásobíme, dále půlíme součet a násobíme sebou samým, dvojnásobíme, to se také spojí na výplň přepony. Když nemají rozdíl velikostí, násobí se každá sama sebou a spolu s velikostí společného násobení každá vytvoří obsah dveří. Co se týče toho, že delší odvěsna [má být] delší a kratší kratší, mají stejný původ a do tohoto [rozdílu] samostatně plynou.

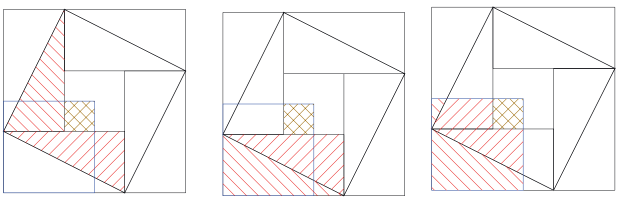
Dejme tomu, že kratší i delší odvěsna je 5, výplň přepony je 50, když zmenšujeme rozkladem čtverce, získáme 7 *chi*, zbytek 1 nejde vyčerpat. Dejme tomu, že přepona je 10, její výplň je 100, když ji půlíme na výplně kratší a delší odvěsny, pro každou získáme 50, to také musí být nerozložitelné. Proto se říká obvod 3 – průměr 1, strana 5 – šikmá 7, tím sice nemůžeme úplně vyčerpat jejich strukturu, přesto to lze nazvat blízké.

Jinak výplň spojení kratší a delší odvěsny násobícího sama sebe: necháme přeponu vynásobit samu sebou, zdvojnásobíme to, to jsou dvě výplně přepony, odečteme to od ní [výplně spojení]. Zbytek zmenšujeme rozkladem čtverce, to je rozdíl kratší a delší odvěsny. Přičteme k spojení a půlíme, to je delší odvěsna. Když odečteme rozdíl od spojení a půlíme, je to kratší odvěsna. Kratší odvěsna, delší odvěsna a přepona jsou vlastně výška, šířka a šikmá.[14] A z tohoto obrázku vychází, že zdvojená přepona je jeho rozsah.[15]

Když dáme [vytvořit] úhelník ke kratší odvěsně, vytvoří výplň; získaná šířka je rozdíl kratší a delší odvěsny. Když výplň úhelníku ke kratší odvěsně rozkládáme s dvojnásobkem kratší odvěsny jako podélným pravidlem, je to také rozdíl kratší a delší odvěsny. Když výplň rozdílu kratší a delší odvěsny odečteme od výplně přepony a půlíme zbytek, zmenšujeme rozkladem čtverce s rozdílem jako podélným pravidlem, je to kratší odvěsna.[16]

---

obrázek vpravo – čtvrtinu čtverce součtu. Všimněme si, že klasický text zbytečně nejprve dvojnásobí čtvrtinu hnědé plochy, pak odečítá a pak půlí zbytek, čímž dosahuje stejného účinku, jako by odečítal čtvrtinu od poloviny čtverce přepony.



.

[14] Zde čtu „šikmá“ *xie* 衺 (jiný výraz pro přeponu) místo „rozsah“ *mao* 袤. [Guo Shuchun 2004b] tuto emendaci, která je poměrně stará a všeobecně přijímaná, kupodivu ve své verzi mění na „šikmá ve směru rozsahu“ *mao xie* bez logického vysvětlení (str. 444, pozn. 93).

[15] Opět *mao*. Znění zdrojových edic zde také není zcela jisté.

[16] „Podélné pravidlo“ je termín použitý zde Liu Huiem pro nenulovou počáteční hodnotu „určeného pravidla“ při odmocňování, která označuje rozdíl délky (*zong*) proti šířce. Při prostém odmocňování se „usoudí“, výsledek násobí „vypůjčenou tyčinkou“ a položí na pozici

(9.11) Mějme bambus výšky 1 *zhang*, konec ohneme a dotkne se země ve vzdálenosti 3 *chi* od kořene. Ptáme se, jaká je výška ohybu?

Odpověď zní: 4 celé a 11 z 20 dílů *chi*.

(9.X) (Přelomený bambus)

Metoda zní: Násobíme vzdálenost od kořene sebou samou.

Zde jsou 3 *chi* od kořene kratší odvěsna, když to ohneme, zbylá výška je delší odvěsna, tím se nejprve nechá [vytvořit] výplň samonásobení kratší odvěsny.

Necháme každou část, která je jako výška, dát 1.

Celková výška 1 *zhang* vznikne sečtením delší odvěsny a přepony, když tím zmenšujeme tuto výplň, získáme rozdíl [delší odvěsny a přepony].

Výsledek se odečte od výšky bambusu a půlíme zbytek, to je výška ohybu.

Tato metoda je opět převrácením typu „uvázaný provaz“.[17] Také by bylo možné jako v předchozí metodě nechat výšku násobit sebou samou na výplň součtu delší odvěsny a přepony, vzdálenost od kořene násobená sama sebou je výplň úhelníku, když ji odečteme, zbytek je obsah. Dvojnásobíme výšku na pravidlo, a tak získáme velikost výšky po přelomení.

(9.12) Mějme dva lidi stojící na stejném místě, poměr chůze A je 7, poměr chůze B je 3. B jde na východ, A jde na jih 10 kroků a šikmo na severovýchod, až se setká s B. Ptáme se, kolik ujdou A a B?

Odpověď zní:

B ujde na východ 10 a půl kroku.

A ujde šikmo 14 a půl kroku a dostihne ho.

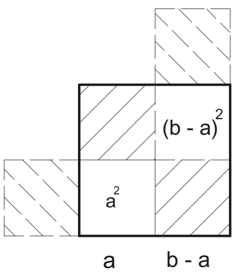
(9.XI) (Dva lidé ze stejného místa)

Necháme 7 vynásobit sebou samými, 3 také vynásobit sebou samými, sečteme a půlíme to, vezmeme za poměr chůze A šikmo. Poměr chůze šikmo

---

pravidla. Dále se „usuzuje“ s ohledem na velikost určeného pravidla. Zde se tedy „podélné pravidlo“ přičítá v prvním kroku k prvnímu usouzenému číslu stejně, jako v dalších krocích již vzniklé „určené pravidlo“ k dalším číslicím, např. při odmocňování 7 s „podélným pravidlem“ 6 hledáme nejvyšší číslo a, pro které platí $a^2 + 6a \leq 7$. Jedná se tedy vlastně o kvadratickou rovnici s kladným lineárním koe cientem.

Tuto situaci popisuje obrázek:



„Úhelník“ je možné změnit přesunutím cípu na dva různé obdélníky se stejnou plochou, $a(a + 2e)$ nebo $e(e + 2a)$, kde e je rozdíl $(b - a)$. Protože plocha úhelníku je známá, můžeme z ní vypočítat pomocí rozkladu s podélným pravidlem jak kratší odvěsnu a, tak rozdíl obou odvěsen e, přičemž druhá z těchto hodnot je vždy podélné pravidlo.

[17] Tj. v metodě (9.V).

odečteme od 7 násobených sebou samými, zbytek je poměr chůze na jih. Sedm násobených třemi je poměr chůze B na východ.

Zde chůze na jih tvoří kratší odvěsnu, chůze na východ delší odvěsnu, chůze šikmo přeponu. Poměr součtu kratší odvěsny a přepony je 7. Kdybychom chtěli aplikovat[18] [standardní metodu], měli bychom vzít jako výplň poměr delší odvěsny násobený sám sebou, [dokud] je to jako součet, [přidáváme] 1 a výsledek je poměr rozdílu kratší odvěsny a přepony.[19] Polovina po přičtení součtu je poměr přepony, odečteme poměr rozdílu, výsledek je poměr kratší odvěsny. Takto někdy budou díly, měli bychom je uvést do propojení a zkrátit, tím se to teprve určí.[20]

Metoda používá sjednocené a tím působí, že nejsou jmenovatele,[21] proto nechává součet kratší odvěsny a přepony vynásobený sám sebou vytvořit spojený čtverec z hnědé a rumělkové [výplně]. Násobení delší přepony sebou samou je úhelník tyrkysové výplně, který má jako délku součet kratší odvěsny a přepony a jako šířku jejich rozdíl. Hodnoty, které se navzájem vyvozují,[22] přidáme a ubereme stejně jako v předchozích [metodách]. Tento obrázek je velké těleso, má jako délku dvě přepony a jako šířku součet kratší odvěsny a přepony. Vedeme[23] podélný řez a polovina je poměr přepony, z dalších použitých poměrů 7 násobené samo sebou je z poměru součtu přepony a kratší odvěsny, proto když odečteme přeponu, zbytek je poměr kratší odvěsny.[24] Místo, na kterém společně stáli, je uprostřed, všechny mají za poměr

---

[18] Zde Liu Hui používá sloveso *yin* 引 „táhnout“, které zde zřejmě znamená „převzít, použít“. Je možné, že má i poněkud negativní konotaci slepého následování paradigmatické metody.

[19] Tj. relativní velikost rozdílu kratší odvěsny a přepony ku ostatním veličinám. Tato metoda je opět založená na ekvivalenci čtverce odvěsny a a „úhelníku“ mezi čtvercem odvěsny b a čtvercem přepony c, který má plochu $(c + b)(c - b)$.

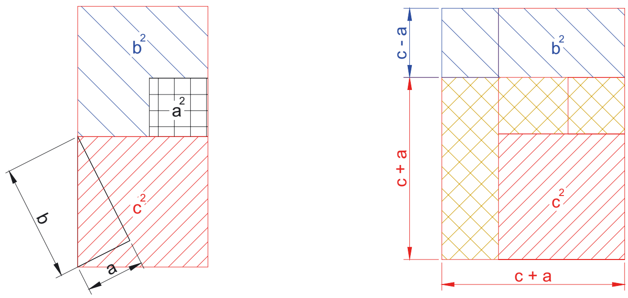
[20] Tím se mimochodem říká, že výsledné poměry mohou být nesoudělná přirozená čísla, tedy pythagorejské trojice. Viz níže pozn. 27.

[21] Tj. jako poměry se berou plochy se stejnou stranou, nikoli poměřované strany těchto ploch.

[22] Také sloveso *yin* (viz pozn. 18).

[23] Rovněž *yin*.

[24] Obarvení jednotlivých ploch nevyplývá z Liu Huiova popisu jednoznačně, smysl jeho komentáře nicméně vystihují tyto obrázky:



Čtverec přepony se skládá ze čtverce a doplňujícího úhelníku odvěsen. Tyrkysový (hrubě šrafovaný) úhelník je možné změnit přesunutím „cípu“ na obdélník se stranami $(c - a)$ a $(c + a)$. Přidáme-li ho ke čtverci součtu $(c + a)^2$, složeného z rumělkového (jemně šrafoavného) čtverce a hnědého (síťovaného) úhelníku, získáme obdélník $2c(c + a)$, který má tedy zároveň plochu $(c + a)^2 + b^2$. Půlením a dělením $c + a$ tedy získáme c.

součet kratší odvěsny a přepony, proto také poměr kratší odvěsny sjednotíme délkou.[25]

Položíme chůzi na jih 10 kroků, násobíme to poměrem chůze A šikmo. Vedle položíme 10 kroků, násobíme to poměrem chůze B na východ. Každý je obsah, každá část dělenců, která je jako poměr chůze na jih, dá 1, pro každý získáme míru chůze.

Deset kroků chůze na jih je daná zjevná[26] kratší odvěsna, kterou hledáme zjevnou přeponu a delší odvěsnu, proto násobíme poměry přepony nebo delší odvěsny a každá část, která je jako kratší odvěsna, dá 1.[27]

(9.13) Mějme kratší odvěsnu 5 kroků, delší odvěsnu 12 kroků. Ptáme se, kolik je čtverec vložený do kratší odvěsny?[28]

Odpověď zní: Čtverec je 3 celých a 9 ze 17 dílů kroku.

(9.XII) (Vepsaný čtverec v trojúhelníku)

Metoda zní: Sečteme kratší a delší odvěsnu na pravidlo, kratší a delší odvěsna se spolu vynásobí na obsah. [Dokud je] obsah jako pravidlo, [přidáváme] 1, získáme 1 krok čtverce.

Kratší a delší odvěsna se spolu vynásobí a vytvoří po dvou rumělkových, tyrkysových a hnědých výplních. Dáme délku hnědé výplně do rohu, rumělkové a tyrkysové podle jejich kategorie přiřadíme podél jejich průměrů, dohromady vytvoří podlouhlou výplň.[29] Střední hnědý čtverec je šířka, součet kratší a delší odvěsny je délka.[30] Proto sečteme kratší a delší odvěsnu na pravidlo.

---

[25] Toto je vysvětlení posledního kroku komentované části metody – „Sedm násobených třemi je poměr chůze B na východ."

[26] V originále *xian* 現. Zde se tímto přívlastkem zřejmě odlišuje skutečná délka od poměru.

[27] Tato metoda mohla sloužit pro výpočet pythagorejských trojic (celočíselných řešení rovnice $x^2 + y^2 = z^2$). Platí totiž vztahy $z = (A^2 + B^2)/2$, $y = AB$, $x = A^2 - z$, kde A a B jsou kladná reálná čísla (A > B). Tyto vztahy jsou ekvivalentní výpočtům „poměrů chůze" v této metodě. K tomu, aby x, y i z byla přirozená čísla, zřejmě stačí, aby A i B byla přirozená čísla a $A^2 + B^2$ bylo sudé.

I když klasický text ani komentář toto využití metody nezmiňují, existuje silná indicie, že její účel byl právě tento: téměř všechna zadání v této kapitole vedou na různé pythagorejské trojice, což potvrzuje znalost nějakého postupu, jak takové trojice sestavit. Přitom právě tato úloha vede pouze na trojici racionálních čísel.

[28] Tj. jak velká může být strana čtverce vepsaného do trojúhelníka.

[29] Zde je pro délku použito netypické *xiu* 修, komentář možná cituje z jiného zdroje. Úlohy o vepsaných obrazcích totiž patří k nejstarším typům úloh v této kapitole.

[30] Smysl opět nejlépe objasní obrázek:

Na obrázku výplní je čtverec v kratší odvěsně, tedy po obou okrajích čtverce jsou malé kratší a delší odvěsny[31] a jejich rozložení vůči sobě se neodchyluje od základních poměrů.[32] Malé kratší a delší odvěsny na straně kratší odvěsny a malé kratší a delší odvěsny na straně delší odvěsny se sečtou na poměr vnitřku. Dáme delší odvěsnu jako poměr vnitřku, součet kratší a delší odvěsny jako [druhý] poměr, provedeme metodu „Mějme“ podle zjevné kratší odvěsny 5 kroků a získáme vnitřní čtverec. Také když dáme kratší odvěsnu jako poměr vnitřku, vezmeme součet kratší a delší odvěsny jako poměr a provedeme metodu „Mějme“ podle zjevné delší odvěsny, je vnitřní čtverec možné poznat. I když se to nebere jako pravidlo, obsah a pravidlo se z tohoto rodí.[33]

Níže se vyjadřuje poměr vloženého kruhu podobně metodami „Mějme“ a „Odstupňované rozdělení“, tím se to také dá odhalit.

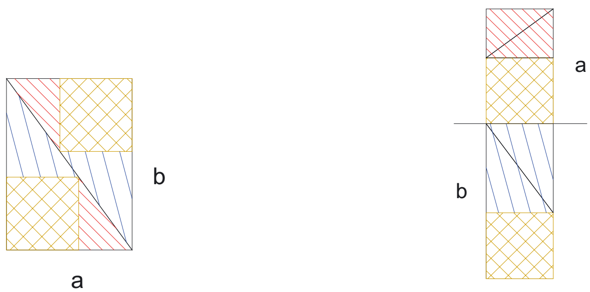
(9.14) Mějme kratší odvěsnu 8 kroků, delší odvěsnu 15 kroků. Ptáme se, kolik je průměr kruhu vloženého do kratší odvěsna?

Odpověď zní: 6 kroků.

(9.XIII) (Vepsaný kruh v pravoúhlém trojúhelníku)

Metoda zní: 8 kroků je kratší odvěsna, 15 kroků je delší odvěsna, hledáme k nim přeponu. Sečteme tři pozice na pravidlo. Kratší odvěsnou násobíme delší odvěsnu, dvojnásobíme, to je obsah. [Za každý] obsah jako pravidlo získáme 1 krok průměru.

Když se kratší a delší odvěsna spolu vynásobí, vytvoří vlastní těleso obrázku, rumělkové, tyrkysové i hnědé výplně jsou po dvou, když je dvojnásobíme, jsou po čtyřech. Lze to namalovat na malé papírky, odstřihnout na stycích kolmých a šikmých, nechat převrátit, otočit a vzájemně doplnit, spojit každý s jeho kategorií a vytvořit podlouhlou výplň. Průměr kruhu je šířka, součet kratší odvěsny, delší odvěsny a přepony je délka. Proto sečteme kratší odvěsnu, delší odvěsnu a přeponu na pravidlo.[34]



To, co Liu Hui nazývá „průměry“, jsou zřejmě úhlopříčky obou obdélníků, které složením vzniknou.

[31] Myslí se tím ovšem celé tvary, tedy malé pravoúhlé trojúhelníky.

[32] Tato věta je důležitá pro celý zbytek kapitoly: definují se v ní vlastně podobné pravoúhlé trojúhelníky a říká se, že jejich strany tvoří vždy stejné poměry.

[33] Liu Hui upozorňuje na abstraktní závislost, která je z předchozích obrázků zřejmá – strana vepsaného čtverce („vnitřek“) je ke každé odvěsně ve stejném poměru jako druhá odvěsna k součtu obou odvěsen. Závislost je natolik abstraktní, že poměr celku ani nemá speciální pojmenování.

[34] Všimněme si, že se zde zmiňuje manipulace s papírovými obrázky, která je zřejmě i zdrojem čínského důkazu Pythagorovy věty. Viz obrázek:

Když dále vyjádříme totéž ve velkém tělese kruhu, tyrkysová v delší odvěsně nutně nechá postavit kružnici/kružidlo na příčné šířce, všechny tři průměry ke kratší i delší odvěsně i šikmé jsou vyrovnané, takže když kružnici znovu spojíme a změříme podélně a příčně kratší a delší odvěsnu, nutně jejich spojením vznikne malý čtverec.[35]

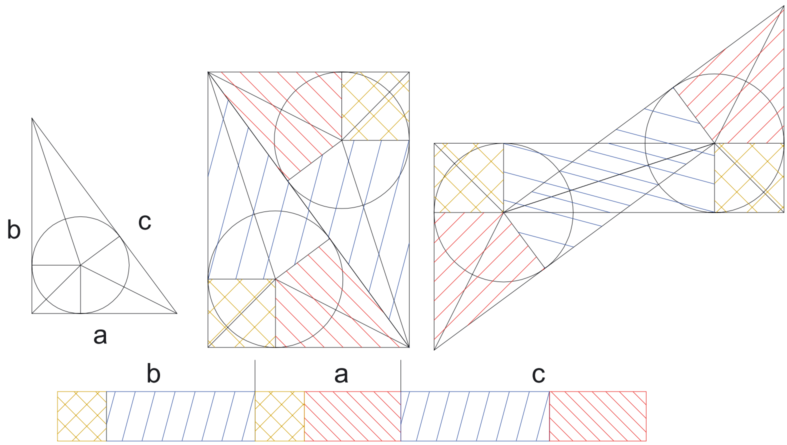
Dále když načrtneme střední přeponu, abychom pozorovali zmenšování a setkání,[36] jsou malé kratší odvěsny, delší odvěsny a přepony v kratší a delší odvěsně takové, že malá delší odvěsna v kratší odvěsně a malá kratší odvěsna v delší odvěsně jsou strany malého čtverce, obě jsou poloviny průměru kruhu. Jejich velikosti lze proto [vzít za] stupně. Vezmeme kratší odvěsnu, delší odvěsnu a přeponu jako rozestavené stupně, vedle je sečteme na pravidlo. Kratší odvěsnou násobíme nesečtené [strany], každá vytvoří obsah. [Dokud je] obsah jako pravidlo, [přidáváme] 1 a malou delší odvěsna ve straně kratší odvěsny je tím možné poznat. Když násobíme rozestavené stupně delší odvěsnou na obsahu, je tím pak možné poznat malou kratší odvěsnu ve straně delší odvěsny. I když jsou vyjádření odlišná, když dojdeme k vytvořeným dělencům a dělitelům, redukují se na stejný základ.[37] Potom tedy lze průměr kruhu

---

[35] Tato pasáž je opět objektem mnoha dohadů o správném znění a výkladu. [Guo Shuchun 2004b], pozn. 164, a podle něj i [Chemla & Guo Shuchun 2004] vidí v tomto textu předpis, jak se má správně narýsovat obrázek, analyzovaný v předchozím odstavci. Domnívám se, že pasáž ve skutečnosti přirozeně zapadá mezi předcházející popis z hlediska trojúhelníku a následující argumentaci o rovnosti obvodů „malých trojúhelníků" a délek odvěsen. Všimněme si zejména kontrastu „vlastní těleso obrázku" v předchozím odstavci a „těleso kruhu" zde.

[36] Další sporná pasáž. Odchyluji se zde od výkladu v [Guo Shuchun 2004b] str. 460, pozn. 165, že „zmenšovat" *chu*, které zde chápu jako „oddělovat", zde má význam „poskytovat, umožňovat", doložený v Knize písní, lépe řečeno v glose k ní z doby Západní Han. Liu Hui neměl důvod používat právě zde běžné sloveso *chu* ve významu, který byl v jeho době již několik set let archaismem.

[37] Tato pasáž říká, že strany čtverce (čili poloměr kruhu) lze také získat poměrným přepočtem. Malé trojúhelníky po stranách malého čtverce jsou podobné velkému a jejich obvod je roven kratší resp. delší odvěsně, jak plyne z obrázku:



také [vyjádřit] rozdíly a součty vnějšku: rozdíl kratší odvěsny a přepony odečtený od delší odvěsny je průměr, dále když přeponu odečteme od součtu kratší a delší odvěsny, zbytek je průměr kruhu.[38] Když rozdíl kratší odvěsny a přepony násobíme rozdílem delší odvěsny a přepony a dvojnásobíme to, když to pak zmenšujeme rozkladem čtverce, je to také průměr kruhu.[39]

(9.15) Mějme město se stranou 200 kroků, uprostřed každé je otevřená brána. 15 kroků z východní brány je strom. Ptáme se, po kolika krocích z jižní brány strom uvidíme?

Odpověď zní: 666 a velká polovina[40] kroku.

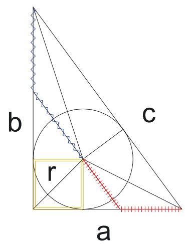
(9.XIV) (Strom u čtvercového města se známou stranou)

Metoda zní: Množství kroků z východní brány je pravidlo.

Tzn. poměr kratší odvěsny je pravidlo.

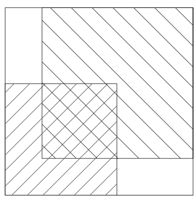
Polovina strany města, násobená sama sebou, je obsah. [Za každý] obsah jako pravidlo získáme 1 krok.

Zde 15 kroků z východní brány tvoří poměr kratší odvěsny, 100 kroků z východní brány na jih do rohu poměr delší odvěsny, 100 kroků z jižní brány východně do rohu tvoří zjevné kroky kratší odvěsny. Chceme podle zjevné kratší odvěsny hledat delší



[38] Oba tyto vztahy opět vyplývají z rozdělení trojúhelníka podle prvního obrázku – označíme-li poloměr vepsaného kruhu r, pak platí $a = r + x$, $b = r + y$, $c = x + y$, tedy $a + b - c = 2r$.

[39] Tato identita je pravděpodobně odvozena ze superpozice doplňkových diagramů:



Ze základní metody kratší a delší odvěsny vyplývá, že plocha úhelníku je vždy rovna ploše čtverce ve sdruženém doplňkovém diagramu, který je v tomto superponovaném obrázku umístěn do stejného rohu jako zmíněný úhelník. Proto součet bílých ploch na kraji úhelníků musí být roven ploše dvojitě vyšrafovaného čtverce. Součet obou bílých ploch $2(c - a)(c - b)$ je tedy roven $(b - (c - a))^2$. Protože z předchozích Liu Huiových poznámek k této metodě již víme, že $2r = a + b - c$, je strana dvojitě vyšrafovaného čtverce právě rovna průměru vepsané kružnice.

[40] Zde jsou dvě třetiny zapsány odlišně od běžného vyjádření *tai ban* 太半 jako *da ban* 大半. Obě slova *tai* a *da* znamenají „velký“, jsou etymologicky příbuzná a píší se natolik podobnými znaky, že mohlo jít jen o chybu písaře při psaní.

odvěsnu, což je množství [kroků] z jižní brány. To přesně odpovídá polovině strany města násobené sebou samou, bylo by na místě poměrem delší odvěsny násobit zjevnou kratší odvěsnu, ovšem tato dvě množství jsou stejná.[41]

(9.16) Mějme město, jež má od východu na západ 7 *li* a od jihu na sever 9 *li*, uprostřed každé [strany] je otevřená brána. 15 *li* z východní brány je strom. Ptáme se, po kolika krocích z jižní brány uvidíme strom?

Odpověď zní: 315 kroků.

(9.XV) (Strom u obdélníkového města se známými stranami)

Metoda zní: Množstvím kroků z východní brány do rohu na jih násobíme množství kroků z jižní brány do rohu na východ, to je obsah. Množství kroků [vzdálenosti] stromu od brány je pravidlo. [Dokud je] obsah jako pravidlo, [přidáváme] 1.

Zde 4 a půl *li* z východní brány na jih do rohu tvoří poměr kratší odvěsny, 15 *li* z východní brány poměr delší odvěsny, 2 a půl *li* z jižní brány na východ do rohu zjevnou delší odvěsnu. Dotazovaná je [vzdálenost] z jižní brány čili kratší odvěsna ke zjevné delší odvěsně. Myšlenka tvůrců metody je stejná jako u předchozí.

(9.17) Mějme město, jehož velikost strany neznáme, uprostřed každé je otevřená brána. Třicet kroků ze severní brány je strom, po 750 krocích ze západní brány strom uvidíme. Ptáme se, kolik je strana města?

Odpověď zní: 1 *li*.

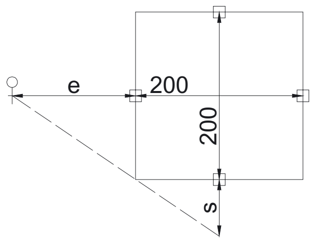
(9.XVI) (Strom u čtvercového města s neznámou stranou I)

Metoda zní: Dáme obě množství kroků z bran spolu vynásobit, poté je 4-násobíme, to je obsah. Zmenšujeme rozkladem čtverce, tím získáme stranu města.

Poznámka: Když půlíme stranu města, necháme polovinu strany města násobit sebe samu a zmenšujeme to [vzdáleností] z brány, jsou to kroky. Dáme obě [vzdálenosti] z bran spolu vynásobit, proto polovina strany města násobená sebou samou zabírá sebrání dílů v jednom rohu,[42] Poté je 4-násobíme, tím získáme sebrání dílů ve čtyřech rozích. Proto když vytvoří obsah a zmenšujeme ho rozkladem čtverce, je to strana města.

(9.18) Mějme město, jehož velikost strany neznáme, uprostřed každé je otevřená brána. Když vyjdeme 20 kroků ze severní brány, je tam strom.

[41] Tj. protože „zjevná kratší odvěsna“ ve východním trojúhelníku a „poměr delší odvěsny“ v jižním trojúhelníku jsou obě právě polovina strany města, metoda je bere jako jednu veličinu a umocňuje místo násobení. Situaci schematicky zachycuje obrázek:



[42] Je tím míněn součin dvou polovin strany města, který vytváří „sebrání“ (čtvrtinu).

Když vyjdeme 14 kroků z jižní brány, otočíme se a jdeme na západ 1775 kroků, uvidíme strom. Ptáme se, jak veliká je strana města?

Odpověď zní: 250 kroků.

(9.XVII) (Strom u čtvercového města s neznámou stranou II)

Metoda zní: Násobíme množstvím kroků, o kolik vyjdeme ze severní brány, množství kroků, o kolik jdeme na západ, zdvojíme to, a to je obsah.

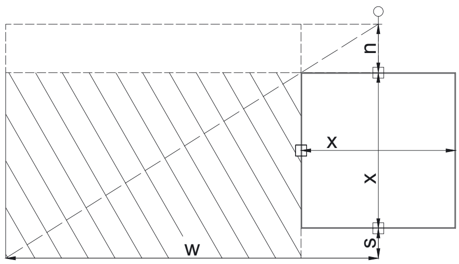
Zde chůze po otočení na západ tvoří delší odvěsnu, vzdálenost od stromu do místa 14 kroků jižně od města tvoří kratší odvěsnu, 20 kroků od severní brány poměr kratší odvěsny, vzdálenost severní brány od západního rohu je [poměr delší odvěsny a to je] polovina šířky.[43] Proto když násobíme vzdáleností od severní brány delší odvěsnu – chůzi po otočení na západ, je to výplň vzniklá násobením kratší odvěsny poměrem delší odvěsny. Ale tato výplň zabírá polovinu, protože jdeme na západ, proto ji zdvojíme a spojíme s východní, čímž je úplná.[44]

Sečteme množství kroků ze severní a jižní brány, to je podélné pravidlo.[45] Zmenšujeme rozkladem čtverce a to je strana města.

---

[43] Část v hranatých závorkách je v Guo Shuchunově vydání do textu doplněna jako emendace, podle mého názoru se však jedná spíš o zbytnou novodobou vysvětlivku.

[44] Schematické znázornění situace:



Zorná linie tvoří úhlopříčku – osu symetrie příslušného obdélníka, proto dělí šrafovanou plochu a tím pádem i zbytek obdélníka na dvě stejné poloviny. Z toho vyplývá, že $nw = (n + x + s)x/2$. Aby se získala plocha celá, převádí se na $2nw = (n + x + s)x$.

Podobným způsobem se aritmetika poměrů geometrizuje také v úlohách zaměřování, jež zmiňuje Liu Hui v předmluvě (viz tamtéž pozn. 22). Doplňme, že tento princip je ekvivalentní 43. výroku v I. knize Euklidových „Základů“.

[45] Označíme-li stranu města jako *x,* získáme rovnici $x(x + 34) = 71000$, což odpovídá řešení kvadratické rovnice v kanonickém tvaru $x^2 + 34x - 71000 = 0$. Její řešení spočívá v odmocnění čtverce s tím, že se v každé iteraci k určenému pravidlu přičítá „podélné pravidlo“ *zong fa* 從法. Tabulkově:

usouzené	1	100	200	200	210	250	250
obsah	71000	71000	71000	24200	24200	24200	
pravidlo	34	3400	23400	43400	4340	4840	4840
vypůjčená tyčinka	1	10000	20000	20000	100	500	500

Tato metoda řešení kvadratických rovnic byla v dalším vývoji čínské matematiky rozšířena i o případ, kdy „podélné pravidlo“ je záporné a podobným způsobem byly od 7. století řešeny i ekvivalenty rovnic třetího stupně. Další matematici za dynastií Song (960 – 1279) a

Výplň v této metodě je od východu na západ jako strana města, od severu k jihu dlouhá od stromu až 14 kroků ven z jižní brány města. Severní i jižní kroky jsou šířka, strana města je délka, proto spojíme obě šířky do podélného pravidla a sečteme je, aby vytvořily výplň mimo čtverec.[46]

(9.19) Mějme město se stranou 10 *li*, uprostřed jehož každé strany je otevřená brána. A a B společně vycházejí ze středu města, B jde na východ, A jde na jih, nevíme kolik kroků vyjde z brány, namíří šikmo na severovýchod tak, že se dotkne[47] rohu města, a právě se setká s B. V poměrech A ujde 5, B ujde 3. Ptáme se, kolik ujdou A a B?

Odpověď zní:

A vyjde z jižní brány 800 kroků, jde šikmo na severovýchod 4887 a půl kroku a dostihne B.

B jde na východ 4312 a půl kroku.

(9.XVIII) (Dva lidé vycházející z města)

Metoda zní: Necháme 5 vynásobit sebe sama, 3 také vynásobit sebe sama, sečteme a půlíme je, to je poměr chůze šikmo. Poměr chůze šikmo se odečte od 5 násobených sebou samými, zbytek je poměr chůze na jih. Třemi násobíme 5 a to je poměr chůze B na východ.

Myšlenka pro hledání [těchto] tří poměrů je stejná jako pro A a B výše.[48]

Položíme stranu města, půlíme ji, násobíme ji poměrem chůze na jih, [dokud] je to jako poměr chůze na východ, [přidáváme] 1, a tím získáme množství kroků z jižní brány.

Zde je poloviční strana 5 *li* od jižní brány na východ do rohu. Polovina [strany] města znamená malou delší odvěsnu. Hledanou [neznámou] tvoří množství kroků z jižní brány. Proto položíme stranu města, půlíme ji, násobíme to poměrem kratší odvěsny chůze na jih, [dokud] je to jako poměr delší odvěsny, [přidáváme] 1.

Navýšíme tím polovinu strany a to je chůze na jih.

Polovina [strany] města znamená z jádra města zastavit uprostřed [strany].

Položíme kroky chůze na jih, hledáme přeponu tak, že to násobíme poměrem šikmé chůze. Hledáme chůzi na východ tak, že to násobíme poměrem chůze na východ, každé je obsah. Za každý obsah jako pravidlo, poměr chůze na jih, získáme 1 krok.

Tato metoda je stejná jako A a B výše.

(9.20) Mějme strom, vzdálený neznámo kolik od člověka. Postavíme 4 tyče navzájem vzdálené 1 *zhang*, necháme dvě levé tyče s pozorovaným stromem vytvořit tři vzájemně přímé.[49] Když [strom] pozorujeme od

---

Yuan (1279 – 1368) byli schopni najít reálná řešení rovnic vyšších stupňů s kladnými i zápornými koe cienty, a to i v soustavách s až čtyřmi neznámými (Zhu Shujie).

[46] „Čtverec“ (*yu* 隅, též „roh“) je druhá mocnina poslední usouzené číslice.

[47] Doslova „otře“ *mo* 磨.

[48] Viz metoda (9.XI) (Dva lidé ze stejného místa). Výpočty poměrů jsou opět ekvivalentní konstrukci pythagorejské trojice.

[49] V originále *san xiang zhi* 參相直, tedy tři body, které jsou v jedné přímce.

pravé zadní tyče, vstupuje od pravé přední tyče o 3 *cuny*.[50] Ptáme se, kolik je strom od člověka?

Odpověď zní: 33 *zhangů*, 3 *chi*, 3 a menší polovinu *cunu*.[51]

(9.XIX) (Zaměřování vzdálenosti stromu čtyřmi tyčemi)

Metoda zní: Necháme 1 *zhang* vynásobit sebe sama na obsah, 3 *cuny* budou pravidlo. [Dokud je] obsah jako pravidlo, [přidáváme] 1.

Zde se 3 *cuny*, o které vstupuje od pravé přední tyče, berou jako poměr kratší odvěsny, 1 *zhang*, o který jsou obě pravé tyče vzájemně od sebe, jako poměr delší odvěsny, 1 *zhang*, o který jsou od sebe pravé a levé tyče, jako zjevná kratší odvěsna, dotazovaná je [vzdálenost] stromu od člověka, což je delší odvěsna ke zjevné kratší odvěsně. Poměr delší odvěsny by měl násobit zjevnou kratší odvěsnu, tyto dva poměry[52] jsou oba 1 *zhang*, proto se říká „vynásobit sebe sama". Tři *cuny* jsou pravidlo. [Za každý] obsah jako pravidlo získáme 1 *cun*.

(9.21) Mějme horu západně od stromu, její výšku neznáme. Hora je 53 *li* od stromu, výška stromu je 9 *zhangů* a 5 *chi*. Člověk stojí 3 *li* východně od stromu a když hledí na strom, je jeho vrchol právě naroveň s vrcholem hory. Výška očí člověka je 7 *chi*. Ptáme se, kolik je výška hory?

Odpověď zní: 164 *zhangy*, 9 *chi*, 6 celých a větší polovinu *cunu*.

(9.XX) (Výška hory na západ od stromu)

Metoda zní: Položíme výšku stromu, odečteme výšku očí člověka 7 *chi*.

Zde se od výšky stromu odečítá výška očí člověka 7 *chi*, zbytek je 8 *zhangů* a 8 *chi*, to je poměr kratší odvěsny. Tři *li* od očí člověka je poměr delší odvěsny, 53 *li* od stromu k hoře je zjevná delší odvěsna, tímto hledáme kratší odvěsnu. Přidáme výšku stromu, proto je to výška hory.

Zbytkem násobíme 53 *li* na obsah. Tři *li* člověka od stromu je pravidlo. [Dokud je] obsah jako pravidlo, [přidáváme] 1. K výsledku přičteme výšku stromu a to je výška hory.

Tato metoda má význam „Kratší a delší odvěsny".

(9.22) Mějme studnu s průměrem 5 *chi* a neznámou hloubkou. Postavíme nad studnu dřevo 5 *chi* a když z vrcholu dřeva hledíme na břeh vody,[53] vstupuje do průměru o 4 *cuny*. Ptáme se, kolik je hloubka studny?

Odpověď zní: 5 *zhangů*, 7 *chi* a 5 *cunů*.

(9.XXI) (Hloubka studny)

Metoda zní: Položíme průměr studny 5 *chi*, odečteme vstup do průměru 4 *cuny*, zbytek násobený 5 *chi* postaveného dřeva vytvoří obsah. Vstup do průměru 4 *cuny* je pravidlo. [Za každý] obsah jako pravidlo získáme 1 *cun*.

---

[50] Jde o zdánlivou vzdálenost stromu a pravé přední tyče, měřenou na spojnici obou předních tyčí (zadní znamená dál od stromu, přední blíž ke stromu). „Vstupovat" zde znamená, že strom je blíž ke středu čtverce, tvořeného tyčemi. Připomeňme, že 1 *zhang* byl něco kolem 2 m, 3 *cuny* zhruba 6 cm.

[51] Je pozoruhodné, že odpověď není vyjádřena rovnou jako 33 a „menší polovina" (1/3) *zhangu*, ale tímto zbytečně obšírným (a o nic přesnějším) způsobem.

[52] Ze zmíněných veličin je pouze jedna poměr, Liu Huie je terminologicky nedůsledný.

[53] „Břehem" se zde míní hrana dna, na kterou se díváme od vrcholu tyče.

Zde vstup do průměru 4 *cuny* vytvoří poměr kratší odvěsny, stojící dřevo 5 *chi* poměr delší odvěsny a zbytek průměru studny 4 *chi* a 6 *cunů* zjevnou kratší odvěsnu. Dotazovaná hloubka studny je delší odvěsna ke zjevné kratší odvěsně.[54]

(9.23) Mějme dveře neznáme výšky a šířky a prut neznámé délky. Napříč neprojde ven o 4 *chi*, nadél neprojde ven o 2 *chi*, našikmo právě projde ven. Ptáme se, kolik je výška, šířka a šikmá [délka úhlopříčky] dveří?

Odpověď zní:
Šířka 6 *chi*.
Výška 8 *chi*.
Šikmo 1 *zhang*.

(9.XXII) (Rozměry dveří podle přesahů prutu)

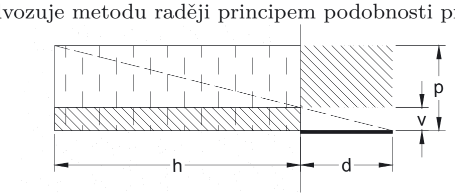
Metoda zní: Podélné a příčné neprošlé [délky] se spolu vynásobí, zdvojnásobíme a zmenšujeme rozkladem čtverce. K výsledku přičteme podélnou neprošlou a to je šířka dveří.

Zde šířka dveří tvoří kratší odvěsnu, výška dveří delší odvěsnu, šikmá dveří tvoří přeponu. Kratší odvěsna v delší je obecně buď úhelník vně nebo čtverec uvnitř. Když je spojíme, stýkají se oba vnější úhelníky v okraji. Dále když z čtverce kratší odvěsny uvnitř necháme udělat tyrkysový úhelník vně, nenaplní hnědý čtverec. Naplnění tohoto čtverce je šikmým překrytím obou okrajů ve čtverci, každý z nich má jako šířku rozdíl delší odvěsny a přepony a jako délku rozdíl kratší odvěsny a přepony. Proto když se oba rozdíly na kraji spolu vynásobí a dále se to dvojnásobí, vytvoří výplň hnědého čtverce. Když ji zmenšujeme rozkladem čtverce, získáme stranu hnědého čtverce. Tyrkysová [výplň] mimo něj [hnědý čtverec] má také jako šířku rozdíl delší odvěsny a přepony. Proto když přičteme rozdíl delší odvěsny a přepony, je to pak kratší odvěsna.[55]

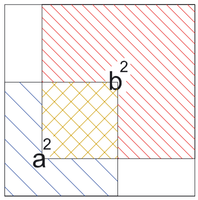
Přičteme příčnou neprošlou a to je výška dveří. Přičteme obě neprošlé a to je šikmá dveří.

---

[54] I když princip ekvivalence ploch v tomto případě vede přímo k výsledku (průměr (p) bez „vstoupení“ (v) krát výška dřeva (d) je hloubka (h) krát „vstoupení“ – viz obrázek), Liu Hui odvozuje metodu raději principem podobnosti pravoúhlých trojúhelníků.



[55] Zde Liu Hui popisuje superpozici diagramů, se kterou nejspíše pracoval i při ověřování předchozích metod (viz metoda (9.III) a (9.XIII), resp. pozn. 7 a 39). Viz obrázek:



Protože úhelník v levém dolním rohu musí mít stejný obsah jako čtverec ve stejném rohu, bílé okraje musí mít v součtu stejnou plochu jako dvojitě hnědý (síťovaný) čtverec.