

Matematika v devíti kapitolách

8. Paralelní ohodnocení

In: Jiří Hudeček (author): Matematika v devíti kapitolách. Sbíрка početních metod z doby Han s komentářem Liu Huie z doby Wei a Li Chunfenga a dalších z doby Tang. Překlad, vysvětlivky a úvod. (Czech). Praha: Katedra didaktiky matematiky MFF UK, 2008. pp. 185–208.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/400845>

Terms of use:

© Hudeček, Jiří

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

8 Paralelní ohodnocení

Fang Cheng 方程¹ – Pro určení přeházeného a promíchaného, kladného a záporného

Tato kapitola v mnohém vyniká: je tématicky nejsevěřenější, obsahuje patrně nejnáročnější a historicky nejvýznamnější materiál, a většina „metod“ v ní jsou pouze stručné pokyny k aplikaci dvou centrálních metod „Paralelní ohodnocení“ a „Kladná a záporná“. I z těchto důvodů je to jistě jedna z nejmladších kapitol, nic podobného se v *Knize výpočtů* nevyskytuje. Na druhou stranu je zřejmě spojená s předchozí kapitolou „Přebytek a nedostatek“, na kterou přímo navazuje už tím, že začíná **trojicí** „ohodnocení“, tedy nejjednodušším rozšířením vztahů pro dva odhady. Dalším společným bodem je práce s množstvím opačného smyslu, jež jsou zde zobecněna na v podstatě abstraktní kladná a záporná čísla.

Na rozdíl od předchozí kapitoly, alespoň do jisté míry založené na úlohách ze života, se v této kapitole vyskytují v podstatě pouze ilustrativní příklady – nejen tím, jak speciální čísla jsou v zadáních, ale především samotnou podstatou úlohy. Je jistě obtížné si představit, že by v praxi někdo potřeboval zjišťovat jednotkové objemy různých plodin z objemů jejich směsí, když by tyto směsi předtím musely být uměle vytvořeny, aby se v nich plodiny vyskytovaly v předem známých poměrech.

Všimněme si také, že přestože text se nezabývá existencí a jednoznačností řešení, úlohy se omezují na soustavy, kde je jednoduchým trikem zaručena lineární nezávislost koeficientů: v každé soustavě se minimálně jedno číslo opakuje právě jednou v každém sloupci, vždy na jiné pozici. Zdá se, že autoři úloh vědomě používali takovouto metodu konstrukce jako určitou heuristiku, bohužel ani Liu Hui se o ní nezmiňuje.

Zatímco poznámky Li Chunfengovy skupiny k této kapitole se nedochovaly (nebo nebyly vůbec napsány), Liu Hui zde opět prokazuje svou schopnost zapojit veškerou matematiku *Devíti kapitol* do souvislé explicitní teorie. Navrhuje také alternativní metodu výpočtu pro složitější úlohy, jejíž popis v dochovaných zdrojových edicích bohužel nedává jasný smysl a musí být rekonstruován na základě dohadů.

Zajímavá místa:

- Úvodní metoda (8.I), popisující obecnou eliminaci soustavy tří rovnic, a Liu Huiův komentář vysvětlující její základ v pojmu „poměru“ a úpravu „sjednocení“ a „přízpůsobení“.

¹ Překládám podle Liu Huiova výkladu. Originál *fang cheng* je možné bezprostředněji přeložit jako „čtvercově uspořádaná měření“, přičemž *fang* je v původním významu „upevnění dvou lodí vedle sebe“.

Termín *fangcheng* měl v rámci čínské matematiky velmi bohatou a komplikovanou historii, až nakonec získal dnešní význam „rovnice“. O tomto problému více viz [Chemla & Guo Shuchun 2004], str. 600–602.

- Metoda (8.IV) s předpisem pro sčítání a odčítání všech kombinací kladných a záporných čísel, a Liu Huiův komentář, dokumentující význam těchto pojmů a zápis různých čísel v průběhu výpočtu.
- Liu Huiovy alternativní metody, směřující k homogenním tvarům „ohodnocení“, tj. nalezení poměrů ekvivalence jednotlivých „věcí“ (neznámých) – (8.X) a zejména (8.XIX).
- Neurčitá úloha (8.13), vyžadující volbu parametru (na to poukazuje až komentář).

Důležité pojmy této kapitoly (k. = „pouze v komentářích“):

Eliminovat (*zhi chu* 直除) – odečíst od sebe dvě čísla tolikrát, kolik je potřeba, aby větší bylo zcela eliminováno. Liu Hui někdy pro tutéž operaci používá jen *chu*, které jinak konzistentně používá ve významu „dělit“.

Jména (*ming* 名) – označení čísel různých „znamének“, tedy čísla označená jako kladná a jako záporná. Toto naznačuje, že odlišení na kladná a záporná bylo chápáno jako virtuální, jako pracovní výhodné pojmenování, nikoli reálná vlastnost těchto čísel.

Kladná a záporná (*zheng fu* 正負) – toto rozlišení čísel se používá pouze v této kapitole, i když by bylo výhodné už v 7. kapitole namísto zvláštní klasifikace případů s přebytkem a nedostatkem, dvěma přebytky, dvěma nedostatky apod. Kladnost a zápornost je vnímána pouze jako relativní vlastnost čísel v kontextu metody „Paralelní ohodnocení“. Mimo tuto metodu nemá smysl, běžná čísla nejsou „kladná“ – to také vysvětluje obarvení kladných tyčinek červeně a záporných černě, běžné tyčinky nebyly velmi pravděpodobně nijak barvené.

Nemít do čeho vstoupit (*wu ru* 無入) – situace, kdy počet tyčinek, který se má při odčítání nebo „přičítání“ odebrat, převyšuje počet tyčinek, které skutečně leží na daném místě.

Ohodnocení (*cheng* 程) – původně vážení, tj. vyjádření neznámé hodnoty ekvivalencí se známou hodnotou (závažím). Kromě názvu se však v této kapitole tento termín nepoužívá, nelze v něm vidět obecný pojem rovnice.

Pozice (*wei* k. 位) – konkrétní řádek konkrétního sloupce, tedy koeficient (obvykle množství jednotek) jedné neznámé v jednom „ohodnocení“.

Protějšek (*dui* k. 對) – Liu Huiův termín pro tyčinky, které je třeba při přičítání nebo odečítání odebrat – „nemít protějšek“ znamená „nemít do čeho vstoupit.“

Přidávat (*yi* 益) – jeden ze členů opozice „přidávat“ – „ubírat“, která se používá pro popis (v moderní terminologii) „převedení na druhou stranu“. Nutnost „přidávat“, aby vznikla rovnováha, znamená existenci nedostatku, proto se „přidávané“ musí „odebrat“ od výsledného obsahu, abychom zjistili původní obsah.

Rozestavit (*lie* 列) – méně časté synonymum „pozice“.

Sloupec (*hang* 行) – jedno „ohodnocení“, rozestavené odspodu (od obsahu) nahoru (s poměry jednotlivých „pozic“).

Ubírat (*sun* 損) – jeden ze členů opozice „přidávat“ – „ubírat“ (viz „přidávat“). Nutnost „ubírat“ znamená existenci přebytku, proto se „ubírané“ musí „přidat“ k výslednému obsahu, abychom zjistili celý původní obsah.

Věc (*wu* k. 物) – složka směsi, jejíž neznámou vlastnost (objem, cenu) chceme zjistit. Pro neznámou kvantitativní vlastnost samotnou není žádný abstraktní termín, „věc“ nelze přímo chápat jako „neznámou“.

- (8.1) Mějme 3 snopy lepšího obilí, 2 snopy středního obilí a 1 snop horšího obilí, obsah je [celkem] 39 *dou*. Mějme 2 snopy lepšího, 3 snopy středního a 1 snop horšího, obsah je 34 *dou*. Mějme 1 snop lepšího, 2 snopy středního a 3 snopy horšího, obsah je 26 *dou*. Ptáme se, kolik je obsah 1 snopy lepšího, středního a horšího obilí?

Odpověď zní:

1 snop lepšího obilí je 9 celých a 1 ze 4 dílů *dou*.

1 snop středního obilí jsou 4 celé a 1 ze 4 dílů *dou*.

1 snop horšího obilí jsou 2 celé a 3 ze 4 dílů *dou*.

(8.I) Paralelní ohodnocení²

Ohodnocení znamená porovnání. Je to více věcí promíchaných, pro každou rozestavíme³ její množství a vyjadřuje se celkový obsah. Stanovíme, že každý sloupec vytvoří poměry, za dvě věci je dvojitě ohodnocení, za tři věci trojitě ohodnocení, vždy se ohodnotí [opakovaně] podle množství věcí. Položením rozestavených [pozic] vedle sebe vytváříme sloupce, proto se to nazývá „paralelní ohodnocení“. Když levý a pravý sloupec neobsahují stejné [množství] zároveň,⁴ jen tehdy máme na základě čeho to vyjádřit.

Toto je univerzální metoda, kdyby se vyjadřovala abstraktně, byla by těžko pochopitelná, proto je svázána speciálně s obilím, aby byla úplně jednoznačná.⁵

Dále rozestavíme střední a levý sloupec podle pravého.

Metoda zní: Položíme 3 snopy lepšího, 2 snopy středního, 1 snop horšího a obsah 39 *dou* na pravou stranu. Obilí ve středním a levém [sloupci] se rozmístí

² Metoda nemá v nejstarších edicích textu název. Protože však Liu Hui vysvětluje název kapitoly v komentáři k této metodě, označuje se již od prvních moderních edic metoda tímto názvem.

³ Klasický text i Liu Hui používají termín *lie* 列, doslova „rozestavit“ pro jednu „věc“, tedy jednu neznámou, které byly rozmístěny odshora dolů (v souladu s označením jakostí – nejvyšší, střední, nejnižší). Naopak termín *hang* 行 označuje jedno „ohodnocení“, tedy jednu rovnici, které byly rozmístěny zprava doleva. Staročínské rozložení soustavy rovnic na početní tabulce bylo proti naší dnešní konvenci otočené o 90° po směru hodinových ručiček (stejně jako celý styl psaní), proto *hang* (které překládám „sloupec“) *de facto* odpovídá řádce matice a *lie* („rozestavená pozice“) sloupci matice. Dodejme pro dovršení zmatku, že v **moderní** čínštině znamená *lie* sloupec a *hang* řádek tabulky.

⁴ Tato věta se zřejmě týká vzájemné nezávislosti jednotlivých rovnic, v moderní terminologii je to požadavek, aby žádný řádek matice nebyl lineární kombinací ostatních, nebo také aby matice měla plnou hodnotu. Liu Hui zde tento požadavek jen lehce naznačuje a nezabývá se podrobněji tím, jak zjistit, jestli sloupce „neobsahují stejné zároveň“. Všimněme si ale, že většina úloh v této kapitole je (díky využití kladných a záporných hodnot) konstruována tak, že lineární nezávislost je zaručena.

⁵ V originále *gu te ji zhi he yi jue zhi* 故特繫之禾以決之. Liu Hui zde opět sahá po obrazných, konkrétních pojmech pro vysvětlení úmyslu „tvůrců metod“. *Ji* znamená přivázat, zde spojit; *jue* znamená například prorazit hráz, ale také rozhodnout, vyřešit. [Chemla & Guo Shuchun 2004] překládá „on la relie au (cas) de millets pour en éliminer l'obstacle“.

jako vpravo. Lepším obilím vpravo násobíme všechny ve středním sloupci a eliminujeme ho.⁶

Myšlenka tvůrce metody je stanovit, že se menší sloupec odečte od většího sloupce, budou se od sebe odečítat znovu a znovu, a pak se nutně nejprve vyčerpá první pozice. Když na nejvyšší pozici nic není, chybí v tomto sloupci jedna věc. Přitom když se jednotlivé poměry odečítají od sebe, nekazí to porovnání zbylých množství. Pokud vyrušíme první pozici, odstraníme zespoda obsah jedné věci.⁷ Takto stanovíme, že se násobně odečítají pravý a levý sloupec, a když posoudíme, co z toho je kladné a záporné, je možné zjistit [výsledek]. Když se nejprve stanovilo, že lepším obilím z pravého sloupce vynásobíme střední sloupec, myšlenkou je přizpůsobit a sjednotit. Po přizpůsobení a sjednocení se od středního sloupce [může] eliminovat pravý sloupec. Kvůli jednoduchosti se to sice nevyjadřuje jako přizpůsobení a sjednocení, ale když v tom vidíme myšlenku přizpůsobit a sjednotit, je význam právě takový.⁸

Násobíme další a také jej eliminujeme.

Opět odstraníme první člen levého sloupce.

Pak násobíme nevyčerpaným středním obilím ve středním sloupci všechny v levém sloupci a eliminujeme jej.

Neboli stanovíme, že si oba sloupce vzájemně odstraní obilí střední jakosti.⁹

⁶ „Eliminovat“ je v originále *zhi chu* 直除. Jde o odečítání do nuly, tzn. opakované odečítání celého pravého sloupce, dokud není odstraněno lepší obilí.

Průběh znázorníme tabulkou:

1	2	3	→	1	6	3	→	1	3	3	→	1		3
2	3	2	→	2	9	2	→	2	7	2	→	2	5	2
3	1	1	→	3	3	1	→	3	2	1	→	3	1	1
26	34	39	→	26	102	39	→	26	63	39	→	26	24	39

Lin. nez. je zaručena permutací všech koeficientů.

⁷ Tj. protože porovnání se nekazí a počet jednotek jedné neznámé byl odstraněn z horní části, musel nutně být odstraněn i veškerý obsah příslušný k této neznámé z dolní části. Toto je jednak ukázková dedukce a jednak doklad, že Liu Hui velmi dobře chápal princip úprav rovnic („porovnání“ nebo „měření“).

⁸ Připomeňme opozici reálného významu *yi* 義 a teoretického úmyslu *yi* 意. Zároveň je zde vidět zobecněný pojem přizpůsobení a sjednocení. V případě odčítání zlomků označuje nalezení společného jmenovatele a přizpůsobení čísel, v případě odčítání sloupců „měření vedle sebe“ je to nalezení společného koeficientu pro jednu neznámou a přizpůsobení ostatních koeficientů. V obou případech se nemění vztahy mezi několika čísly, která tvoří skupinu poměrů. Po přizpůsobení a sjednocení mají odčítané zlomky společný jmenovatel, odečítané sloupce společný koeficient.

⁹ Zde se zřejmě jedná o textovou chybu Guo Shuchunovy edice, pravděpodobněji se mi zdá původní znění Dai Zhenovo „že se oba sloupce vzájemně vynásobí a odstraní obilí střední jakosti [v pravém sloupci].“

Pokračujeme v tabulce:

→	3		3	→			3	→			3	→			3
→	6	5	2	→	4	5	2	→	20	5	2	→		5	2
→	9	1	1	→	8	1	1	→	40	1	1	→	36	1	1
→	78	24	39	→	39	24	39	→	195	24	39	→	99	24	39

Nevyčerpané horší obilí v levém sloupci tvoří pravidlo nahoře, dole je obsah. Obsah je obsah horšího obilí.

Lepší a střední obilí byla již obě odstraněna, proto zbylé množství je obsah horšího obilí, ale ne jen jednoho snopu. Chceme zkrátit obsah pro více snopů, pak by bylo na místě vzít množství snopů horšího obilí jako pravidlo. Kdybychom to takto rozestavili, násobili to množstvím snopů horšího obilí a z obou [ostatních] sloupců ho eliminovali, pozice horšího obilí by byla všude vypuštěna.¹⁰ U obou [sloupců] by se vydělil jeho obsah dole snopy u jeho jediného zbývajícího obilí.¹¹ Když se však spočítá, kolik se použije výpočtů, je to složité a nic se nešetří. Proto bylo vytvořeno jiné pravidlo, které je kratší. Avšak zdá se, že je lepší používat nadále postaru toto pravidlo, které platí obecně i pro zvláštní případy.

Když hledáme střední obilí, pravidlem se vynásobí obsah dole ve středním sloupci a eliminuje se obsah horšího obilí.

Zde se mluví o obsahu obou obilí ve středním sloupci, obsah na jeden snop horšího obilí se vyjevil již předtím, bereme snopy ve středním sloupci a hledáme střední obilí, takže se obsah této pozice [horšího obilí] odečte od obsahu dole. Ale i když se odstraní 1 snop z horšího obilí podle toho, jak je to nalevo, má pravidlo ve jmenovateli, takže není uveden do propojení s [ostatními] poměry. Proto se nejprve násobí pravidlem, tím se uvedou do propojení a sjednotí. Všem se stanoví pravidlo jako jmenovatel a pak se eliminuje obsah horšího obilí.

Když násobíme obsahem horšího obilí, který se vyjevil již předtím, množství snopů pozice horšího obilí, získáme tak obsah horšího obilí. Odečteme je od obsahu dole, a pak jeho množství je obsah středního obilí.¹²

Za zbytek, [dokud je] jako množství snopů středního obilí, [přidáváme] 1, a to je obsah středního obilí.

¹⁰ Liu Hui zde popisuje hypotetický další postup pomocí přímého dosazení vypočtené neznámé, aby se z dalších sloupců odstranilo horší obilí. Tato metoda je intuitivnější (provádí se stále stejná operace eliminace, navíc se lze vyhnout práci se zlomky), ale Liu Hui ji následně zavrhuje jako pracnější.

¹¹ Tj. odečítaný obsah by musel být vydělen původním množstvím, viz tabulka (všimněte si krácení devíti):

		3
	5	2
4		
11	$24 - 11/4$	$39 - 11/4$

¹² Výsledek se bude vyjadřovat jako čítec zlomku, jehož jmenovatelem je dělitel obilí nejnižší jakosti, proto se zde nenásobí dělitelem počet snopů střední jakosti. Dělení „pravidlem“ se provádí až v samotném závěru algoritmu.

Viz tabulka:

		3
	$5*4$	2
4		1
11	$24*4 - 11 = 85$	39

Zbytek je obsah jediné pozice, středního obilí. Proto když jej zkrátíme množstvím snopů jediné pozice, získáme obsah na 1 snop.

Když hledáme lepší obilí, také se pravidlem vynásobí obsah v pravém sloupci dole a eliminuje se obsah středního a horšího obilí.

Zde tři druhy obilí v pravém sloupci sdílejí obsah, obsahy tří pozic jsou spojené. Proto když ho [chceme] krátit množstvím snopů jedné pozice,¹³ abychom získali obsah jednoho snopu, a nyní se obsahy středního a horšího obilí již oba vyjevily, necháme jimi násobit snopy v pravém sloupci a odečteme je, proto se postupuje také jako předtím, pro každého hledáme obsahy a odečteme je od obsahu dole.¹⁴

Za zbytek, [dokud je] jako množství snopů lepšího obilí, [přidáváme] 1, a to je obsah lepšího obilí. U všech [za každý] obsah jako pravidlo získáme 1 *dou* příslušného obilí.

Všechny tři obsahy se použijí zároveň. Co neaplní pravidlo, označíme pravidlem. Jmenovatele i obsahy by bylo na místě všechny zkrátit.¹⁵

(8.2) Mějme 7 snopů lepšího obilí, uber z obsahu 1 *dou*. Když přidáme 2 snopy horšího obilí, je obsah 10 *dou*. Když je 8 snopů horšího obilí, přidej obsah 1 *dou*. Když je to s 2 snopy lepší obilí, je obsah 10 *dou*. Ptáme se, kolik je obsah jednoho snopu lepšího a horšího obilí?

Odpověď zní:

Obsah snopu lepšího obilí je 1 celé a 18 z 52 dílů *dou*.

Obsah snopu horšího obilí je 41 z 52 dílů *dou*.

(8.II) (Ubírání a přidávání obilí)

Metoda zní: Jako paralelní ohodnocení, uber znamená přidávat, přidej znamená ubírat.

Co znamená formulace tázajícího? K tomu poznamenejme: Ve skutečnosti to znamená, že 7 snopů lepšího obilí a 2 snopy horšího má obsah 11 *dou*. Dva snopy lepšího a 8 snopů horšího má obsah 9 *dou*. „Uber znamená přidávat“ vyjadřuje, že když se ubírá 1 *dou*, byl by na místě zbytek 10 *dou*. Nyní chceme celý obsah, máme přičíst to, co se ubírá. „Přidej znamená ubírat“ vyjadřuje, že když se přidá k obsahu

¹³ Čínské edice zde z nevysvětleného důvodu opravují „množstvím snopů jediné pozice“ na „množstvím snopů dvou pozic“. Pokud nemáme chápat „krátit“ ve smyslu odčítat, pro což neexistuje žádná opora, je podle mého názoru i zde potřeba krátit množstvím snopů jediné pozice, tj. lepšího obilí. Liu Hui pouze zařazuje tuto větu na začátek svého komentáře, zatímco logičtější by byla až na konci, ale tento logický rozpor je jen zdánlivý – komentář ozřejmuje „myšlenku“ operace, tj. vysvětluje, že se odečítá obsah středního a horšího obilí, aby bylo možné zkrátit množstvím snopů **jediné** pozice.

¹⁴ Výsledné rozložení tabulky:

		$3 \cdot 4$	→			4
	4		→		4	
4			→	4		
11	17	$39 \cdot 4 - 11 - 2 \cdot 17 = 111$	→	11	17	37

¹⁵ Liu Hui upozorňuje, že je možné v průběhu algoritmu krátit (jako jsme to provedli v předcházejících tabulkách), což klasický text nezdůrazňuje.

1 *dou*, je to plných 10 *dou*; nyní chceme znát původní obsah, máme odečíst to, co se přidalo a získáme to.

Uber z hmoty 1 *dou* znamená, že jeho obsah přesahuje 10 *dou*. Přidej obsah 1 *dou* znamená, že není plných 10 *dou*.

Znovu se vysvětluje, že ubírání a přidávání množství je ubírání a přidávání množství, které se ubírá a přidává.¹⁶

- (8.3) Mějme 2 snopy lepšího obilí, 3 snopy středního obilí a 4 snopy horšího obilí, obsah žádného není plné *dou*. Když lepší vezme střední, střední vezme horší a horší vezme lepší vždy po jednom snopu, je obsah plné *dou*. Ptáme se, kolik je obsah snopu lepšího, středního a horšího obilí?

Odpověď zní:

1 snop lepšího obilí má obsah 9 z 25 dílů *dou*.

1 snop středního obilí má obsah 7 z 25 dílů *dou*.

1 snop horšího obilí má obsah 4 z 25 dílů *dou*.

(8.III) (Výměna obilí)

Metoda zní: Jako paralelní ohodnocení, pro každé položíme to, co ubíráme.

Položíme nahoru v pravém sloupci 2 snopy lepšího obilí, doprostřed ve středním sloupci 3 snopy středního obilí a dolů v levém sloupci 4 snopy horšího obilí, odebraný 1 snop a obsah 1 *dou* vždy přiřadíme na příslušnou pozici. Vždy, když si sloupce od sebe půjčují a berou věci, je to podle tohoto příkladu.

Vložíme metodou kladných a záporných.¹⁷

(8.IV) Kladná a záporná

Metoda zní:

¹⁶ Není zcela jasné, jaké vztahy jsou mezi jednotlivými členy této tautologie (která je v klasické čínštině zcela ojedinělá a vypadá téměř jako neúspěšný překlad z flektivního jazyka). V originále: *Sun yi zhi shu zhe, ge yi sun yi zhi shu sun yi zhi ye* 損益之數者, 各以損益之數損益之也.

Postup metody:

<table style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 20px;"> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">7</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">8</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">10-1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">10+1</td></tr> </table>	2	7	8	2	10-1	10+1	→	<table style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 20px;"> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">14</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">7</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">56</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">63</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">11</td></tr> </table>	14	7	56	2	63	11	→	<table style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 20px;"> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;"></td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">7</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">52</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">41</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">11</td></tr> </table>		7	52	2	41	11	→	<table style="border-collapse: collapse; width: 100px; height: 20px;"> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;"></td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">7*52</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">52</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;"></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">41</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">572 - 82 = 490</td></tr> </table>		7*52	52		41	572 - 82 = 490	→	<table style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 20px;"> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;"></td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">52</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">52</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;"></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">41</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">70</td></tr> </table>		52	52		41	70
2	7																																					
8	2																																					
10-1	10+1																																					
14	7																																					
56	2																																					
63	11																																					
	7																																					
52	2																																					
41	11																																					
	7*52																																					
52																																						
41	572 - 82 = 490																																					
	52																																					
52																																						
41	70																																					

Lineární nezávislost je zaručena pravidelným rozložením koef. „2“.

¹⁷ Ačkoli původní zadání neobsahuje záporná čísla, vzniknou nevyhnutně v průběhu metody:

<table style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 20px;"> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;"></td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;"></td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">4</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;"></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</td></tr> </table>	1		2		3	1	4	1		1	1	1	→	<table style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 20px;"> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;"></td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;"></td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">-1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">8</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;"></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</td></tr> </table>			2	-1	3	1	8	1		1	1	1	→	<table style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 20px;"> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;"></td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;"></td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;"></td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">25</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;"></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">4</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</td></tr> </table>			2		3	1	25	1		4	1	1	→	<table style="border-collapse: collapse; width: 100px; height: 20px;"> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;"></td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;"></td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;"></td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3*25</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">25</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;"></td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;"></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">4</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">25 - 4</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;"></td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">=21</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;"></td></tr> </table>			2		3*25	1	25			4	25 - 4	1		=21		→	<table style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 20px;"> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;"></td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;"></td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">25</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;"></td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">25</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;"></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">25</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;"></td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;"></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">4</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">7</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">9</td></tr> </table>			25		25		25			4	7	9
1		2																																																																					
	3	1																																																																					
4	1																																																																						
1	1	1																																																																					
		2																																																																					
-1	3	1																																																																					
8	1																																																																						
1	1	1																																																																					
		2																																																																					
	3	1																																																																					
25	1																																																																						
4	1	1																																																																					
		2																																																																					
	3*25	1																																																																					
25																																																																							
4	25 - 4	1																																																																					
	=21																																																																						
		25																																																																					
	25																																																																						
25																																																																							
4	7	9																																																																					

Lineární nezávislost je zaručena pravidelným rozložením nul.

Nyní jsou dvě množství tyčinek vzájemně opačně zisk a ztráta, chceme je stanovit jako kladná a záporná, abychom je pojmenovali. Kladné tyčinky jsou rudé, záporné černé, někdo je odlišuje šikmostí a kolmostí.¹⁸ Pro „Paralelní ohodnocení“ máme metodu vzájemného odebrání rudých a černých a vzájemného vyvozování pravidla a obsahu. Jejich rozložení při sčítání a odčítání nelze uvést všeobecně do propojení, proto vzájemné odstranění a odebrání¹⁹ rudé a černé vyjádřeno v tyčinkách je někdy ubírání, někdy přidávání. Ve stejném sloupci mají různé věci zvláště dvě třídy, rozdíl jejich sčítání a odčítání se objeví dole.²⁰ Při psaní těchto dvou [bodů]²¹ se konkrétně navázaly na obilí, aby se realizovala jejich myšlenka. Proto i při vzájemném promíchání rudých a černých je možné určit váhy lepšího a horšího, i přes odlišnosti přidávání a odčítání je možné uvést množství vpravo a vlevo do propojení, i přes rozdělení na obsahy a rozdíly je možné, aby na sebe poměry stejného a různého reagovaly. Díky tomu když kladné nemá čím vstoupit a učiníme to záporné nebo když záporné nemá čím vstoupit a učiníme to kladné, nejsou poměry zmařeny.²²

Když se stejná jména od sebe odčítají

Zde se červeným eliminují červené nebo černým eliminují černé. Hledáme odečty sloupců, protože se tím odstraní první pozice. Proto tedy když první pozice má stejná jména, má se použít tento bod. Když mají první pozice různá jména, má se použít následující bod:

nebo různá jména k sobě přidávají,

Při přidávání a odčítání sloupců by bylo na místě [přičítání a odčítání provádět] s příslušnou kategorií. Je-li to různého jména, není to příslušné kategorie. Když to není příslušné kategorie, nemá to vlastně protějšek a nedá se to tedy [od sebe] odčítat. Proto když červené mají za protějšek černé, eliminujeme do černých, když nemají protějšek, eliminujeme [také] do černých; když černé mají za protějšek červené, eliminujeme do červených, když nemají protějšek, eliminujeme [také] do černých. Červené i černé jsou součtem původních množství.²³ Zde se vzájemným přidáváním

¹⁸ V pozdějších čínských matematických knihách, kde máme vyobrazení tyčinkových číslic, se někdy záporná čísla označují šikmým přeškrtnutím. Jestli Liu Hui mluví o stejném způsobu odlišení není z jeho formulace příliš jasné, zdálo by se, že spíše byly šikmo nebo přímo všechny tyčinky.

Běžné tyčinky v případě, kdy nebylo třeba rozlišovat kladná a záporná čísla, byly pravděpodobně nebarvené. Skrovné popisy tyčinek ve starých slovnících se o barvě nezmiňují, byly nejspíše vyráběny prostým naštípáním bambusu. Kladná a záporná čísla jsou chápána jen jako relativní označení, tzn. „přirozená“ čísla nejsou vlastně ani kladná, ani záporná. To je zřejmě také důvod, proč nikdy v historii čínské matematiky nebyly akceptovány záporné výsledky rovnic.

¹⁹ V originále *xiao duo* 消奪, tato slova označují u Liu Huie (v klas. textu se nevyskytují) operace při práci s čísly různých znamének.

²⁰ Tj. v jednom sloupci jsou zároveň záporné i kladné hodnoty u různých věcí. Konec věty znamená odkazuje buď na poslední řádek tabulky (obsahy), nebo na „text níže“ v této metodě.

²¹ Tj. následující části klas. textu o práci se stejnými a různými znaménky.

²² V originále *wang* 妄, což znamená „libovolný, nepodložený“, zde navíc s významem narušení delikátního vyvážení poměrů.

²³ Liu Hui zde komentuje případ odčítání: když se odečítá kladné od záporného (červené mají za protějšek černé), je výsledek záporný, když se odečítá od nuly (není protějšek), je také

provádí rušení a odebrání. Rušení a odebrání a [proti tomu] odčítání a přidávání vytvářejí stejný obsah.

Metoda je základní a vybírá to nejdůležitější, musí se eliminovat první [pozice] sloupce, co se týče ostatních pozic, nevádí nám, kolik v nich je, proto se někdy nechají vzájemně odečíst, někdy se nechají vzájemně sečíst, princip je stejný, jako když nejsou žádná stejná a různá [jména].

když kladné nemá do čeho vstoupit, učiníme to [výsledek] záporné, když záporné nemá do čeho vstoupit, učiníme to [výsledek] kladné.

Nemít do čeho vstoupit znamená nemít protějšek. Není od čeho odečíst, takže se nechá na pozici umístit [výsledek] rušení a odebrání. Zde se má obsah pozice odečíst od spodního obsahu a na různé kladné a záporné na prostřední [pozici] ve sloupci se také použije tento bod. Podle tohoto bodu si různá jména odčítají obsahy, stejná jména přidávají obsahy, když kladné nemá do čeho vstoupit, učiníme to záporné, když záporné nemá do čeho vstoupit, učiníme to kladné.

Jinak když se různá jména od sebe odčítají nebo stejná jména k sobě přidávají, když kladné nemá čím vstoupit, učiníme to kladné, když záporné nemá čím vstoupit, učiníme to záporné.

Tento bod má jako příklad vzájemnou eliminaci různých jmen, proto spolu s předchozím bodem vzájemně přebírají.²⁴ Kdykoli se kladnými a zápornými označují shody a rozdíly, způsobí to, že se od sebe obě třídy vzájemně odebírají. Když se říká záporné, nemusí to nutně záporně snižovat, když se říká kladné, nemusí to nutně kladně zvyšovat.²⁵ Proto i když v každém sloupci opět [změníme] černé a červené do opačných tyčinek, není to žádná újma [původním sloupcům]. Tím pádem lze způsobit, aby první pozice byly vždy navzájem opačných jmen.²⁶ Obsahy po těchto bodech jsou uvedeny navzájem do propojení, následně se opakováním obou bodů [vytvoří] jediný poměr. Když pozorujeme, jak každý z nich navzájem bere pozici jeden druhému, pak když to vyjádříme jen podle tyčinek, je to vlastně jedna metoda.

Dále, když na začátku rozestavíme sloupce, chceme, aby se výsledky navzájem právě odstranily, proto není omezené, kolik budou, a necháme tedy horní s dolními spolu zmnožit. Pokud odečítáme kladná a záporná a pokud množství původně byla navýšena o pravidlo, lze každý sloupec použít stejně, ne jen pravý a levý od [eliminovaného] množství věci.²⁷

záporný; naopak když se odečítá záporné od kladného nebo od nuly, je výsledek kladný. Přitom výsledek je součet, ne rozdíl.

²⁴ Tj. jsou vzájemně opačné.

²⁵ V této větě někteří vidí rozchod s naivním pojmem záporných čísel jako dluhů (v čínštině je pro „záporné“ použit znak právě s významem „dlužit“), podle mého názoru však je třeba tuto pasáž chápat přímočařeji jako vysvětlení toho, že přičtením záporného čísla se původní číslo navýší a naopak odečtením kladného se sníží.

²⁶ Protože kladná a záporná čísla jsou jen konvence, je možné celý sloupec změnit z kladných do záporných a obráceně, aby sloupce, které se od sebe mají odečíst, měly první pozice s různými znaménky.

²⁷ Interpretace této pasáže je nejasná v mnoha bodech. Dohad, který zde prezentuji, a který je částečně založen na podobné nejistých pokusech v [Chemla & Guo Shuchun 2004] a [Li Jimin 1993], je založen na výkladu slova *jun* 均 v poměrně základním významu „stejně“, nikoli v hypotetickém odborném významu „krátit“. Řečeno jinak, Liu Hui zde upozorňuje, že pokud se po zmnožení (vzájemném vynásobení) musí odečítat metodou kladných a záporných, lze vybrat pro odečtení libovolný sloupec, kde bylo příslušně navýšeno „pravi-

- (8.4) Mějme 5 snopů lepšího obilí, ubereme z obsahu 1 *dou* a 1 *sheng* a odpovídá to 7 snopům horšího obilí. Při 7 snopech lepšího obilí ubereme z obsahu 2 *dou* a 5 *shengů* a odpovídá to 5 snopům horšího obilí. Ptáme se, kolik je obsah snopu lepšího a horšího obilí?

Odpověď zní:

1 snop lepšího obilí je 5 *shengů*,
1 snop horšího obilí jsou 2 *shengy*.

(8.V) (Ubírání obilí I)

Metoda zní: Jako paralelní ohodnocení. Položíme 5 snopů lepšího obilí kladné, 7 snopů horšího obilí záporné, ubraný obsah 1 *dou* a 1 *sheng* kladný.

Tím se vyjadřuje, že obsah 5 snopů lepšího obilí je větší, ale když od něj odečteme 1 *dou* a 1 *sheng*, zbytek je množství odpovídající 7 snopům horšího obilí. Proto se vzájemně [zamění typy] tyčinek, nechají se vzájemně eliminovat a 1 *dou* a 1 *sheng* je rozdíl. To, co tvoří rozdíl, je zbylý obsah lepšího obilí.

Následně položíme 7 snopů lepšího obilí kladné, 5 snopů horšího obilí záporné, ubraný obsah 2 *dou* a 5 *shengů* kladné. Vložíme metodou kladných a záporných.

Poznámka: Když metodou kladných a záporných původně rozestavíme sloupce, není omezené, kolik budou měření věcí, [ale] vždy musí být ve správném pořadí obsah, lepší a horší, pak každý sloupec vytvoří sám sobě poměry. Takto když se někdy odečítají a někdy přičítají, různá místa ve stejném sloupci jsou odlišená do dvou kategorií, pak rozdíly jejich součtů nebo odečtení jsou vidět dole.²⁸

- (8.5) Mějme 6 snopů lepšího obilí, ubereme z obsahu 1 *dou* a 8 *shengů* a odpovídá to 10 snopům horšího obilí. Při 15 snopech horšího obilí ubereme z obsahu 5 *shengů* a odpovídá to 5 snopům lepšího obilí. Ptáme se, kolik je obsah snopu lepšího a horšího obilí?

Odpověď zní:

Obsah 1 snopu lepšího obilí je 8 *shengů*.
Obsah 1 snopu horšího obilí jsou 3 *shengy*.

(8.VI) (Ubírání obilí II)

Metoda zní: Jako paralelní ohodnocení. Položíme 6 snopů lepšího obilí kladné, 10 snopů horšího obilí záporné, ubraný obsah 1 *dou* a 8 *shengů* kladný. Následně 5 snopů lepšího obilí záporné, 15 snopů horšího obilí kladné, ubraný obsah 5 *shengů* kladné. Vložíme metodou kladných a záporných.

dlo“ (koe cient příslušného členu, tj. který už byl například jednou násoben), nejen bezprostředně sousedící sloupec. Velkým nedostatkem této interpretace – jakož i všech ostatních, které byly dodnes prezentovány – je, že nijak nezapadají do kontextu výkladu o kladných a záporných číslech.

²⁸ Co se děje v této metodě:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 7 & 5 \\ \hline -5 & -7 \\ \hline 25 & 11 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 35 & 5 \\ \hline -25 & -7 \\ \hline 125 & 11 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & 5 \\ \hline 24 & -7 \\ \hline 48 & 24 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & 5 \\ \hline 1 & \\ \hline 2 & 11+14 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline 2 & 5 \\ \hline \end{array}$$

Lin. nez. je zaručena úplnou permutací.

Tím se vyjadřuje, že obsah 6 snopů lepšího obilí je větší, když od něj odečteme a připravíme ho o 1 *dou* a 8 *shengů*, je zbytek množství odpovídající si vzájemně s 10 snopy horšího obilí. Proto se také navzájem [zamění] tyčinky a 1 *dou* a 8 *shengů* se vezme jako rozdíl obsahů. Rozdíl obsahů je zbytek obsahu lepšího obilí.²⁹

- (8.6) Mějme 3 snopy lepšího obilí, přidáme k obsahu 6 *dou* a odpovídá to 10 snopům horšího obilí. Při 5 snopech horšího obilí přidáme k obsahu 1 *dou* a odpovídá to 2 snopům horšího obilí. Ptáme se, kolik je obsah snopu lepšího a horšího obilí?

Odpověď zní:

1 snop lepšího obilí má obsah 8 *dou*.

1 snop horšího obilí má obsah 3 *dou*.

(8.VII) (Přidávání obilí)

Metoda zní: Jako paralelní ohodnocení. Položíme 3 snopy lepšího obilí kladně, 10 snopů horšího obilí záporně, přidaný obsah 6 *dou* záporně. Následně položíme 2 snopy lepšího obilí záporně, 5 snopů horšího obilí kladně, přidaný obsah 1 *dou* záporně. Vložíme metodou kladných a záporných.

Tím se vyjadřuje, že obsah 3 snopů lepšího obilí je menší, když k němu přidáme 6 *dou*, je odpovídající 10 snopům horšího obilí. Proto se také navzájem [zamění] tyčinky a 6 *dou* se vezme jako rozdíl obsahů. Rozdíl obsahů je zbytek obsahu horšího obilí.³⁰

- (8.7) Mějme 5 buvolů a 2 ovce, to má cenu 10 *liangů* zlata. 2 buvoli a 5 ovcí má cenu 8 *liangů* zlata. Ptáme se, kolik zlata má cenu buvol a ovce?

Odpověď zní:

Buvol má cenu 1 celý a 13 z 21 dílů *liangu* zlata.

Ovce má cenu 20 z 21 dílů *liangu* zlata.

(8.VIII) (Cena buvola a ovce)

Metoda zní: Jako paralelní ohodnocení.

Kdybychom prováděli sjednocení a přizpůsobení, první pozice jsou buvoli a ti by se měli spolu vynásobit. Pravý sloupec je určený, nově položíme, že 10 buvolů a 4 ovce má cenu 20 *liangů* zlata. V levém sloupci 10 buvolů a 25 ovcí má cenu 40 *liangů* zlata. Množství buvolů je identické, zlata je víc o 20 *liangů*, to je způsobeno rozdílem 21 ovcí. Menší sloupec odečteme od většího sloupce, pak se množství buvolů vyčerpá a je

²⁹ Zápís metody:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline -5 & 6 \\ \hline 15 & -10 \\ \hline 5 & 18 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline -15 & 3 \\ \hline 45 & -5 \\ \hline 15 & 9 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & 3 \\ \hline 20 & -5 \\ \hline 60 & 9 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & 3 \\ \hline 1 & \\ \hline 3 & 9+15=24 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline 3 & 8 \\ \hline \end{array}$$

Zde použitá metoda konstrukce sloupců, aby byly lin. nezávislé, není jasná.

³⁰ Zápís metody:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline -2 & 3 \\ \hline 5 & -10 \\ \hline -1 & -6 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline -6 & 3 \\ \hline 15 & -10 \\ \hline -3 & -6 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & 3 \\ \hline -5 & -10 \\ \hline -15 & -6 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & 3 \\ \hline 1 & \\ \hline 3 & -6+30=24 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline 3 & 8 \\ \hline \end{array}$$

Lin. nez. podobně jako v předchozím případě není dána jednoduchým pravidlem.

vidět pouze množství ovcí a cena ve zlatě, z toho to lze poznat. Z menšího usuzujeme na větší, to se neliší, i když je 4 nebo 5 sloupců.³¹

- (8.8) Mějme prodej 2 buvolů a 5 ovcí, za to se koupí 13 prasat a Zbude 1000 měďáků. Za prodej 3 buvolů a 3 prasat se koupí 9 ovcí a peněz je právě dost. Za prodej 6 ovcí a 8 prasat se koupí 5 buvolů a chybí 600 měďáků. Ptáme se, kolik je cena buvola, ovce a prasete?

Odpověď zní:

Cena buvola je 1200 měďáků.

Cena ovce je 500 měďáků.

Cena prasete je 300 měďáků.

(8.IX) (Ceny buvolů, ovcí a prasat)

Metoda zní: Jako paralelní ohodnocení. Položíme 2 buvolů a 5 ovcí kladně, 13 prasat záporně, zbylé měďáky kladně. Následně 3 buvolů kladně, 9 ovcí záporně, 3 prasata kladně. Následně 5 buvolů záporně, 6 ovcí kladně, 8 prasat kladně, chybějící měďáky záporně. Vložíme metodou kladných a záporných.

Zde se nákup a prodej ve středním sloupci vyredukuje a měďáků je právě dost, proto jsou pouze proti sobě množství nákupu a prodeje, proto dole není žádná hodnota v měďácích. Předpokládejme, že chceme tento sloupec vložit pravidlem „Paralelní ohodnocení“, pak nejdříve necháme 2 buvolů vynásobit celý střední sloupec a eliminujeme pravý sloupec. Proto bude trvale ve spodním obsahu prázdno, proto komentář říká, že když kladné nemá obsah, je [výsledek] záporný, když záporné nemá obsah, je [výsledek] kladný, je to podobné jako ve čtverci. Ve čtverci se přidá jiný obsah k množství, při kterém je nedostatek, a vytvoří obsah spolu se skutečnou věcí.³²

³¹ Liu Hui zde přechází od „eliminace“, jak je naznačena v klas. textu, ke zkrácenému zápisu, kdy se oba sloupce rovnou křížově násobí. Zápis metody:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 5 \\ \hline 5 & 2 \\ \hline 8 & 10 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 10 & 10 \\ \hline 25 & 4 \\ \hline 40 & 20 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & 10 \\ \hline 21 & 4 \\ \hline 20 & 20 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & 10*21 \\ \hline 21 & \\ \hline 20 & 420-80=340 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & 21 \\ \hline 21 & \\ \hline 20 & 34 \\ \hline \end{array}$$

Lin. nez. je dána permutací.

³² Další nepřliš srozumitelná pasáž, navíc odkazující na neexistující text (citace „Komentář praví“). Patrně zde Liu Hui hovoří o geometrické analogii při výpočtu odmocniny, kdy se obdélník doplňuje na čtverec. Z jeho komentáře není zcela jasné, jakým způsobem má řešení této úlohy probíhat, zda se skutečně eliminuje pravý sloupec od středního (tím by se ve středním objevil rozdíl obsahu), nebo se uchovává prázdno ve středním sloupci. Z druhé interpretace vychází tento hypotetický průběh metody:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline -5 & 3 & 2 \\ \hline 6 & -9 & 5 \\ \hline 8 & 3 & -13 \\ \hline -600 & & 1000 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline -5 & 1 & 2 \\ \hline 6 & -3 & 5 \\ \hline 8 & 1 & -13 \\ \hline -600 & & 1000 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1 & \\ \hline -9 & -3 & 11 \\ \hline 13 & 1 & -15 \\ \hline -600 & & 1000 \\ \hline \end{array}$$

[Metoda] (Váha zlata a stříbra)³³ v kapitole „Přebytek a nedostatek“ je s tímto rovnocenná. „Stanovme jakoby³⁴ 9 kousků zlata a 11 kousků stříbra, když je zvážíme, jsou si právě rovny. Jeden za jeden vyměníme a zlato je o 13 *liangů* lehčí. Ptáme se, kolik váží 1 kousek zlata a stříbra?“ – to je stejné jako zde.

(8.9) Mějme 5 vrabců a 6 vlaštovek, když je zvážíme v [těchto] skupinkách, jsou vrabci těžší a vlaštovky lehčí. Když vyměníme jednomu vrabci s vlaštovkou místa, vahadlo se právě vyrovná. Vrabci a vlaštovky dohromady váží 1 *jin*. Ptáme se, kolik váží jeden vrabec a jedna vlaštovka?

Odpověď zní:

Vrabec váží 1 celý a 13 z 19 dílů *liangu*.

Vlaštovka váží 1 celý a 5 z 19 dílů *liangu*.

(8.X) (Váha vrabců a vlaštovek)

Metoda zní: Jako paralelní ohodnocení. Když je vyměníme a vyjádříme hmotu,³⁵ každý váží 8 *liangů*.

Zde mají 4 vrabci a 1 vlaštovka a 1 vrabec a 5 vlaštovek vahadlo právě vyrovnané. Celkem váží 1 *jin*, proto každá [strana vah] 8 *liangů*. Rozložíme dva sloupce měřených množství. Levý sloupec má na první pozici množství 1, necháme všechny v pravém sloupci vydělit [aby i pravý sloupec měl na první pozici 1], nebo také můžeme nechat [pravý sloupec odečíst] od levého sloupce a vzít příslušné pravidlo a obsah vlevo. V levém sloupci je větší množství,³⁶ odebereme tedy množství podle pravého sloupce. První pozice vlevo se zcela odečte, tyčinky na střední a dolní pozici odpovídají vlaštovkám a obsahu. Pravý sloupec se nemění, horní [pozice] vlevo je prázdná. Střední je pravidlo, spodní obsah, takže váhu odpovídající jednomu kusu je možné poznat.

Poznámka: Zde mají 4 vrabci a 1 vlaštovka a 1 vrabec a 5 vlaštovek rovnou váhu, tedy váha 3 vrabců a 4 vlaštovek si navzájem odpovídá. Vrabec v poměru³⁷ váží 4,

→	<table style="border-collapse: collapse; width: 100px; height: 100px;"> <tr><td style="width: 33px; height: 33px;"></td><td style="width: 33px; height: 33px; text-align: center;">1</td><td style="width: 33px; height: 33px;"></td></tr> <tr><td style="text-align: center;">-99</td><td style="text-align: center;">-3</td><td style="text-align: center;">11</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">143</td><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">-15</td></tr> <tr style="border-top: 1px solid black;"><td style="text-align: center;">-6600</td><td></td><td style="text-align: center;">1000</td></tr> </table>		1		-99	-3	11	143	1	-15	-6600		1000	→	<table style="border-collapse: collapse; width: 100px; height: 100px;"> <tr><td style="width: 33px; height: 33px;"></td><td style="width: 33px; height: 33px; text-align: center;">1</td><td style="width: 33px; height: 33px;"></td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">-3</td><td style="text-align: center;">11</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">8</td><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">-15</td></tr> <tr style="border-top: 1px solid black;"><td style="text-align: center;">2400</td><td></td><td style="text-align: center;">1000</td></tr> </table>		1			-3	11	8	1	-15	2400		1000	→	<table style="border-collapse: collapse; width: 100px; height: 100px;"> <tr><td style="width: 33px; height: 33px;"></td><td style="width: 33px; height: 33px; text-align: center;">1</td><td style="width: 33px; height: 33px;"></td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">-3</td><td style="text-align: center;">11</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">-15</td></tr> <tr style="border-top: 1px solid black;"><td style="text-align: center;">300</td><td></td><td style="text-align: center;">1000</td></tr> </table>		1			-3	11	1	1	-15	300		1000
	1																																								
-99	-3	11																																							
143	1	-15																																							
-6600		1000																																							
	1																																								
	-3	11																																							
8	1	-15																																							
2400		1000																																							
	1																																								
	-3	11																																							
1	1	-15																																							
300		1000																																							

→	<table style="border-collapse: collapse; width: 100px; height: 100px;"> <tr><td style="width: 33px; height: 33px;"></td><td style="width: 33px; height: 33px; text-align: center;">1</td><td style="width: 33px; height: 33px;"></td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">-3</td><td style="text-align: center;">11</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">1</td><td></td></tr> <tr style="border-top: 1px solid black;"><td style="text-align: center;">300</td><td></td><td style="text-align: center;">1000 + 4500 = 5500</td></tr> </table>		1			-3	11	1	1		300		1000 + 4500 = 5500	→	<table style="border-collapse: collapse; width: 100px; height: 100px;"> <tr><td style="width: 33px; height: 33px;"></td><td style="width: 33px; height: 33px; text-align: center;">1</td><td style="width: 33px; height: 33px;"></td></tr> <tr><td></td><td></td><td style="text-align: center;">1</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">1</td><td></td><td></td></tr> <tr style="border-top: 1px solid black;"><td style="text-align: center;">300</td><td style="text-align: center;">1500 - 300 = 1200</td><td style="text-align: center;">500</td></tr> </table>		1				1	1			300	1500 - 300 = 1200	500
	1																										
	-3	11																									
1	1																										
300		1000 + 4500 = 5500																									
	1																										
		1																									
1																											
300	1500 - 300 = 1200	500																									

³³ (7.XII).

³⁴ Komentář zde cituje jinak, než zní skutečný text metody, místo obvyklého „Mějme“ používá „Stanovme jakoby“ (*ja ling*), což je výraz typický pro Liu Huie.

³⁵ Hmota = *zhi* 質.

³⁶ Tj. množství vlaštovek i váha po vydělení obou sloupců čtyřmi je větší v levém sloupci, budeme proto odečítat od něj, aby vyšla kladná čísla.

³⁷ Zde je nezvyklý pořádek slov, kdy „váha“ (*zhong*) je až za „poměrem“ (*lü*). V obvyklém pořadí *zhong lü* by překlad zněl „poměr váhy“ a vztah mezi oběma pojmy by byl jasný.

vlaštovka v poměru váží 3. Všechny poměry dvojího ohodnocení lze tedy také hledat [touto] jinou metodou a bude to příslušné množství [stejně jako původní metodou].³⁸

- (8.10) Mějme pány A a B, kteří mají u sebe neznámé množství měďáků. Kdyby A získal polovinu od B, měl by 50 měďáků, kdyby B získal dvě třetiny od A, měl by také 50 měďáků. Ptáme se, kolik měďáků mají u sebe A a B?

Odpověď zní:

A má u sebe 37 a půl měďáku.

B má u sebe 25 měďáků.

- (8.XI) (Měďáky u sebe)

Metoda zní: Jako paralelní ohodnocení. Ubíráme a přidáváme.

Tato úloha vyjadřuje to, že 1 A a půl B dá 50, větší polovina A a 1 B dá také 50. Když u obou jmenovatelem dílu násobíme celky a zahrneme čitatele, jsou sloupce určeny takto: 2 A a 1 B dá 100 měďáků, 2 A a 3 B dá 150 měďáků. Tímto tedy známe paralelní ohodnocení. Ve všech [případech], kdy mají věci díly, se napodobuje toto.

- (8.11) Mějme 2 koně a 1 buvola, jejich cena přesahuje 10 000 o polovinu ceny koně. Cena 1 koně a 2 buvolů nenaplnuje 10 000 o polovinu ceny buvola. Ptáme se, kolik je cena buvola a koně?

Odpověď zní:

Cena koně je 5454 celých a 6 z 11 dílů měďáku.

Cena buvola je 1818 celých a 2 z 11 dílů měďáku.

- (8.XII) (Cena koně a buvola)

Metoda zní: Jako paralelní ohodnocení. Ubíráme a přidáváme.

Tj. 1 a půl koně a 1 buvol má cenu 10 000 a 2 a půl buvola a 1 kůň má také cenu 10 000. Jeden a půl koně a 1 buvol má cenu 10 000, uvedeme do propojení celky a zahrneme čitatele, pravý sloupec je 3 koně, 2 buvoli, cena 20 000. 2 a půl buvola a 1 kůň mají cenu 10 000, uvedeme do propojení celky a zahrneme čitatele, levý sloupec je 2 koně, 5 buvolů, cena 20 000.

- (8.12) Mějme 1 válečného koně, 2 střední koně a 3 horší koně, na všechny [skupiny] naložíme 40 *shi*, když přijdou ke svahu, žádná nemůže nahoru. Když k válečnému koni vypůjčíme jednoho středního, ke střed-

V tomto převráceném pořadí slovo „poměr“ modí kuje slovo „váha“ (nebo „vážit“). Nejsnazší by bylo překládat „poměrná váha“, ale protože slovo *lü* nikdy nevystupuje jako adjektivum, překládám poněkud méně plynule „v poměru váží“, abych upozornil na tuto zvláštnost. Přivlastňovací vztah mezi oběma slovy, který by čistě teoreticky přicházel v úvahu, vede k obtížně přijatelné představě, že *lü* může mít váhu.

³⁸ Připomeňme – 1 *jīn* = 16 *liangů*. Klasická metoda postupuje takto:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline 5 & 1 \\ \hline 8 & 8 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 5 & 1/4 \\ \hline 8 & 2 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline 19 & 1/4 \\ \hline 24 & 2 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & 19 \\ \hline 19 & \\ \hline 24 & 38-6=32 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & 19 \\ \hline 19 & \\ \hline 24 & 32 \\ \hline \end{array}$$

Liu Hui navrhuje oba sloupce odečíst, čímž by vznikla rovnice 3 vrabci = 4 vlaštovky, i zde by však pak bylo nutné dosadit do jednoho ze sloupců.

Lineární nezávislost je zaručena pravidelným rozložením jedniček.

ním koňům půjčme 1 horšího nebo k horším koňům půjčme jednoho válečného, všichni mohou nahoru. Ptáme se, kolik je tah 1 válečného, středního a horšího koně?

Odpověď zní:

1 válečný kůň má tah 22 celých a 6 ze 7 dílů *shi*.

1 střední kůň má tah 17 celých a 1 ze 7 dílů *shi*.

1 horší kůň má tah 5 celých a 5 ze 7 dílů *shi*.

(8.XIII) (Tah válečného, středního a horšího koně)

Metoda zní: Jako paralelní ohodnocení. Pro každý položíme vypůjčené. Vložíme metodou kladných a záporných.³⁹

- (8.13) Mějme 5 rodin se společnou studnou. Dva provazy rodiny A nestačí o provaz rodiny B. 3 provazy rodiny B nestačí o provaz rodiny C. 4 provazy rodiny C nestačí o provaz rodiny D. 5 provazů rodiny D nestačí o provaz rodiny E. 6 provazů rodiny E nestačí o provaz rodiny A. Kdyby všechny dostaly jeden provaz, který jim chybí, všechny by dosáhly [na dno]. Ptáme se, kolik je hloubka studny a délka jednotlivých provazů?

Odpověď zní:

Hloubka studny je 7 *zhangů*, 2 *chi* a 1 *cun*.

Provaz A je dlouhý 2 *zhangy*, 6 *chi* a 5 *cunů*.

Provaz B je dlouhý 1 *zhang*, 9 *chi* a 1 *cun*.

Provaz C je dlouhý 1 *zhang*, 4 *chi* a 8 *cunů*.

Provaz D je dlouhý 1 *zhang*, 2 *chi* a 9 *cunů*.

Provaz E je dlouhý 7 *chi* a 6 *cunů*.

(8.XIV) (Rodiny se společnou studnou)

Metoda zní: Jako paralelní ohodnocení. Vložíme metodou kladných a záporných.

Tyto poměry nejprve provedeme jako měření vedle sebe, jako by všechny jednou dosáhly na dno. Potom získáme pravidlo 721 a obsah 76, to jest 721 provazů⁴⁰ dosáhne na dno studny 76krát. Když navíc množstvím použitých [provazů] k dosažení studny jakožto pravidlem zmenšíme obsah, množství dosažení na dno studny 1 provazu E je

³⁹ Provedení:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & & 1 \\ \hline & 2 & 1 \\ \hline 3 & 1 & \\ \hline 40 & 40 & 40 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 1 \\ \hline -1 & 2 & 1 \\ \hline 3 & 1 & \\ \hline & 40 & 40 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 1 \\ \hline & 2 & 1 \\ \hline 7 & 1 & \\ \hline 40 & 40 & 40 \\ \hline \end{array} \rightarrow$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 1 \\ \hline & 14 & 1 \\ \hline 7 & & \\ \hline 40 & 240 & 40 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 7 \\ \hline & 7 & \\ \hline 7 & & \\ \hline 40 & 120 & 160 \\ \hline \end{array}$$

Lineární nezávislost zaručuje pravidelné rozložení nul.

⁴⁰ Nejkratších, tj. rodiny E.

pak určeno, dosáhne do 76 ze 721 dílů. Proto tedy je 721 hloubka studny a 76 délka provazu E, což je vyjádřeno poměry.⁴¹

- (8.14) Mějme [pole] bílého prosa 2 kroky, modrého prosa 3 kroky, hnědého prosa 4 kroky, černého prosa 5 kroků, obsah žádného nenaplní *dou*. Když bílé vezme z modrého a hnědého, modré vezme z hnědého a černého, hnědé vezme z černého a bílého a černé vezme z bílého a modrého vždy po jednom kroku, je obsah plně *dou*. Ptáme se, kolik je obsah z kroku [pole] bílého, modrého, hnědého a černého prosa?

Odpověď zní:

Z 1 kroku bílého prosa je obsah 33 ze 111 dílů *dou*.

Z 1 kroku modrého prosa je obsah 28 ze 111 dílů *dou*.

Z 1 kroku hnědého prosa je obsah 17 ze 111 dílů *dou*.

Z 1 kroku černého prosa je obsah 10 ze 111 dílů *dou*.

- (8.XV) (Pole 4 druhů prosa)

Metoda zní: Jako paralelní ohodnocení. Pro každý položíme to, co vezmeme. Vložíme metodou kladných a záporných.⁴²

- (8.15) Mějme 2 snopy obilí A, 3 snopy obilí B a 4 snopy obilí C, váha vždy přesahuje *shi*. 2 A je těžší jako⁴³ 1 B, 3 B je těžší jako 1 C, 4 C je těžší jako 1 A. Ptáme se, kolik váží 1 snop A, B a C?

Odpověď zní:

1 snop A váží 17 z 23 dílů *shi*.

1 snop B váží 11 z 23 dílů *shi*.

1 snop C váží 10 z 23 dílů *shi*.

⁴¹ Komentář naráží na to, že úloha nemá dost podmínek pro skutečný výpočet hloubky studny a délky provazů, pomocí zvolené jednotky (1 *cun*) pouze vyjadřuje jejich vzájemné poměry.

Řešení zapíšeme zkráceně jen pro levý sloupec, který se jediný mění:

1				2	→		→		→		→						721
			3	1	→	-1	→		→		→						721
		4	1		→		→	1	→		→			721			
	5	1			→		→		→	-1	→		721				
6	1				→	12	→	36	→	144	→	721					
1	1	1	1	1	→	1	→	4	→	15	→	76	129	148	191	265	

Absolutní řešení pak vychází ze zvolení hloubky studny 721 *cunů*. Všimněme si opět očividné lineární nezávislosti této soustavy.

⁴² Zapíšeme zkráceně podobně jako v poznámce výše:

1	1		2	→			→			→			→				111
1		3	1	→	1	-1	→			→			→				111
	4	1	1	→	-1	7	→	4	22	→			→		111		
5	1	1		→	10	2	→	-29	7	→	-333		→	111			
1	1	1	1	→	1	1	→	-2	4	→	-30		→	10	17	28	33

Lineární nezávislost je zaručena pravidelným rozložením nul.

⁴³ Toto „jako“ zde neznamená „než“! Viz Liu Huiův komentář.

(8.XVI) (Obilí přesahující *shi*)

Metoda zní: Jako paralelní ohodnocení. Položíme to, o co váha přesahuje *shi*, jako záporné.

Tato úloha vyjadřuje, že váha 2 snopů obilí A přesahuje *shi*. A jaké je to, o co přesahuje? Jako váha 1 snopu B. Vzájemně vyjádříme příslušné tyčinky, necháme je spolu eliminovat a redukovat a jeden [snop] má za rozdíl obsahu *shi*.⁴⁴

Vložíme metodou kladných a záporných.

Toto „vložit“ znamená, že na první pozici se množství s různými jmény odečítají tak, že když kladné nemá co vložit, je [výsledek] kladný, když záporné nemá co vložit, je [výsledek] záporný.⁴⁵

- (8.16) Mějme 1 hejtmana, 5 pobočnicků a 10 sluhů, kteří sní 10 kuřat. 10 hejtmanů, 1 pobočnick a 5 sluhů sní 8 kuřat. 5 hejtmanů, 10 pobočnicků a 1 sluha sní 6 kuřat. Ptáme se, kolik kuřat sní hejtman, pobočnick a sluha?

Odpověď zní:

1 hejtman sní 45 ze 122 dílů kuřete.

1 pobočnick sní 41 ze 122 dílů kuřete.

1 sluha sní 97 ze 122 dílů kuřete.

(8.XVII) (Hejtmani, nižší úředníci a sluhové jedí kuřata)

Metoda zní: Jako paralelní ohodnocení. Vložíme metodou kladných a záporných.⁴⁶

⁴⁴ Znění této věty je sporné. Zde se řídím Qian Baocongovým výkladem, přijatým a citovaným také ve zdrojovém vydání pro tento překlad [Guo Shuchun 2004b]: *er yi yi shi wei cha shi* 而一以石為差實. Podle tohoto výkladu se „jedna“ vztahuje k počtům snopů různých druhů obilí, o jejichž váhu se jiné druhy liší od 1 *shi*, tedy i opačně, rozdíl váhy základního počtu snopů typu X a „přebytečného“ snopu typu Y je právě *shi*.

Alternativní čtení vyháží z prohození 2. a 3. znaku, což by vedlo k plynulejší větě „a jako rozdíl obsahu mají jeden *shi*.“ Ačkoliv Guo Shuchun tvrdí, že je to takto „méně správné než původní text“ (pozn. 149), podle mého názoru mezi těmito čteními není žádný obsahový rozdíl. Je ovšem pravda, že původní text díky své formální neobvyklosti více upozorňuje na povahu operace, kterou zde provádíme, a tento formální rys je vhodné uchovat.

⁴⁵ Zápis pravděpodobného řešení:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & & 2 \\ \hline & 3 & -1 \\ \hline 4 & -1 & \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 2 \\ \hline -1 & 3 & -1 \\ \hline 8 & -1 & \\ \hline 3 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 2 \\ \hline & 3 & -1 \\ \hline 23 & -1 & \\ \hline 10 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 23 \\ \hline & 23 & \\ \hline 23 & & \\ \hline 10 & 11 & 17 \\ \hline \end{array}$$

⁴⁶ Zápis pravděpodobného řešení:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 5 & 10 & 1 \\ \hline 10 & 1 & 5 \\ \hline 1 & 5 & 10 \\ \hline 6 & 8 & 10 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 1 \\ \hline 15 & 49 & 5 \\ \hline 49 & 95 & 10 \\ \hline 44 & 92 & 10 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 1 \\ \hline & 49 & 5 \\ \hline 976 & 95 & 10 \\ \hline 776 & 92 & 10 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 122 \\ \hline & 122 & \\ \hline 122 & & \\ \hline 97 & 41 & 45 \\ \hline \end{array}$$

Lin. nez. zaručena pravidelnou permutací koeficientů.

- (8.17) Mějme 5 ovcí, 4 psy, 3 kuřata a 2 králíky, kteří mají hodnotu 1496 měďáků. 4 ovce, 2 psi, 6 kuřat a 3 králíci mají hodnotu 1175 měďáků. 3 ovce, 1 pes, 7 kuřat a 5 králíků má hodnotu 958 měďáků. 2 ovce, 3 psi, 5 kuřat a 1 králík mají hodnotu 861. Ptáme se, kolik je cena ovce, psa, kuřete a králíka?

Odpověď zní:

Cena ovce je 177.

Cena psa je 121.

Cena kuřete je 23.

Cena králíka je 29.

- (8.XVIII) (Cena ovce, psa, kuřete a králíka)

Metoda zní: Jako paralelní ohodnocení. Vložíme metodou kladných a záporných.⁴⁷

- (8.18) Mějme 9 *dou* konopí, 7 *dou* pšenice, 3 *dou* sóji, 2 *dou* bobů a 5 *dou* prosa, to má hodnotu 140 měďáků. 7 *dou* konopí, 6 *dou* pšenice, 4 *dou* sóji, 5 *dou* bobů a 3 *dou* prosa má hodnotu 128 měďáků. 3 *dou* konopí, 5 *dou* pšenice, 7 *dou* sóji, 6 *dou* bobů a 4 *dou* prosa má hodnotu 116 měďáků. 2 *dou* konopí, 5 *dou* pšenice, 3 *dou* sóji, 9 *dou* bobů a 4 *dou* prosa má hodnotu 112 měďáků. 1 *dou* konopí, 3 *dou* pšenice, 2 *dou* sóji, 8 *dou* bobů a 5 *dou* prosa má hodnotu 95 měďáků. Ptáme se, kolik má hodnotu 1 *dou* každého?

Odpověď zní:

1 *dou* konopí 7 měďáků.

1 *dou* pšenice 4 měďáky.

1 *dou* bobů 3 měďáky.

1 *dou* sóji 5 měďáků.

1 *dou* prosa 6 měďáků.

⁴⁷ Zápis jednoho možného způsobu řešení:

2	3	4	5	→	10	15	20	5	→				5
3	1	2	4	→	15	5	10	4	→	7	-7	-6	4
5	7	6	3	→	25	35	30	3	→	19	26	18	3
1	5	3	2	→	5	25	15	2	→	1	19	7	2
861	958	1175	1496	→	4305	4790	5875	1496	→	1313	302	-109	1496

			5	→				5	→				5
7			4	→	7			4	→	7			4
19	45	240	3	→	19	9	48	3	→	19	9		3
1	20	55	2	→	1	4	11	2	→	1	4	93	2
1313	1615	7115	1496	→	1413	323	1423	1496	→	1413	325	2697	1496

Lin. nez. zaručena pravidelným rozložením trojek.

(8.XIX) (Hodnota 5 druhů plodin)

Metoda zní: Jako paralelní ohodnocení. Vložíme metodou kladných a záporných.

Toto „konopí“ a „boby“ je stejně zásadní záležitost jako dvojí poměry a sebrané díly v kapitolách „Rovnoměrná dodávka“ a „Menší šířka“. Ti, kdo nejsou vnitřně k nejjemnější vnitřní struktuře a pouze se drží základních metod, někdy jakmile používají tyčinky a rozloží si koženou podložku, milují nudné [výpočty] a radují se z [toho, co jsou jen] chyby. Vůbec netuší, jak je to nesprávné, naopak chtějí mnohost [početních úkonů] považovat za něco cenného. Proto když počítají, tápou v temnu, co se týče vytváření propojení [mezi metodami], a soustředí se jen na jeden výběžek.⁴⁸ Co se tohoto druhu [matematiky] týče, jestliže považují za nejdůležitější úspěšný výsledek, ale občas jej minou, nelze [takové výpočty] nazvat „to nejdůležitější krátce“.⁴⁹

Jsou ještě jiné metody, jako když kuchař Ding porcoval býčka, jeho čepel se volně toulala mezi vlákny vnitřní struktury, a proto si ji mohl trvale uchovat jako novou.⁵⁰ Výpočty jsou jako čepel, když se užívají prostě a snadno, zasahují onu strukturu kuchaře Dinga, proto můžeme být v harmonii s vyšším duchem a šetřit ostří, rychleji [dělat] málo chyb.

Na to, co je zásadní v *Devíti kapitolách*, nevyčerpáme podle [příslušné] metody ani sto početních úkonů.⁵¹ Jakkoliv se nerozkládá mnoho tyčinek, stačí to k vypočtení velkého množství. Mnoho lidí dnes považuje „Paralelní ohodnocení“ za obtížná, někdy pouze rozloží obrazec z tyčinek, přidají kladné a záporné a tím skončí, nejsou s to prodiskutovat, jak postupovat v tom, pro co není metoda. Toto je [slepé následování minulosti] téhož druhu, jako když chceme ladit citeru, ale přilepili jsme struny podle původního vyladění. Znovu a znovu jsem se tím zabýval a přehrával si postup, až jsem vytvořil novou metodu, kterou zde zaznamenávám, snad také otevře cestu mezi různými názory. Sít je děravá a cesta tak jemná,⁵² jakpak bych to předal prázdnými slovy. Zapiší příklad jejího použití, zaznamenám množství úkonů, vždy tím ukázu jeden roh.⁵³

Paralelní ohodnocení – Nová metoda zní: Vložíme podle metody kladných a záporných. Necháme se pravý a levý sloupec od sebe odečíst, nejprve odstraníme spodní obsahy a pak postupně odstraňujeme pozice věcí, tím usilujeme o to, aby ze dvou věcí v jednom sloupci jedna kladná a druhá záporná si od sebe půjčovaly, to

⁴⁸ Soustředí se na *duan* 端, což je jednak „krajnost, extrém“, ale také špička, výběžek nebo větev ve smyslu, v jakém Liu Hui popisuje rozčlenění matematiky v předmluvě.

⁴⁹ V originále *yao yue* 要約.

⁵⁰ Toto je narážka na příběh v díle *Zhuangzi* o kuchaři, který dokázal porcovat býka bez jediného nárazu do kostí a s minimem námahy, protože byl absolutně soustředěn na bezprostřední (neanalytické) vnímání struktury jeho těla. Jak záhy uvidíme, Liu Huiova metoda je skutečně založená na intuitivních krocích, vycitěných jako nejlepší na cestě k výsledku s nejmenší výpočetní námahou.

⁵¹ V originále *suan*, což může znamenat též číslo z početních tyčinek nebo samotnou početní tyčinku.

⁵² Cesta (*dao*) zde zřejmě znamená Liu Huiovu novou metodu či ještě spíš její myšlenkový základ. Tento obraz se podobá literární narážce, ale nikdo zatím na její pramen nenarazil, je to tedy možná Liu Huiova vlastní vyjádření.

⁵³ Narážka na pasáž v Konfuciových *Hovorech*, srv. pozn. 3 v kapitole 2.

budou poměry toho, jak si odpovídají jedna druhé.⁵⁴ Dále necháme obě věci navzájem odstranit s jiným sloupcem, postupným odstraněním množství, které si dvě věci navzájem od sebe půjčují, vždy získáme poměry, jak si odpovídají jedna druhé. V každém jednotlivém případě podle poměrů dvou věcí jedné k druhé postavíme proti sobě a změníme příslušné množství a pak budou každá v odpovídajících poměrech. Znovu rozestavíme výsledný sloupec spolu s dolními obsahy, s každou věcí provedeme metodu „Mějme“ s jejími původními poměry, čímž hledáme její sjednocený [poměr], a pak je sečteme na pravidlo. Když se mají sečíst a v jednom sloupci jsou promíchány kladné a záporné, stejná jména se spolu následují, různá jména se spolu ruší, zbytek je pravidlo. Spodní množství položíme jako obsah, [dokud je] obsah jako pravidlo, [přidáváme 1], a to odpovídá tomu, co bylo hledáno. Pro každou jednotlivou věc provedeme metodu „Mějme“ podle jejího původního poměru a všechny odpovídají tomu, co bylo hledáno. Pokud nejsou poměry uvedené do propojení, přizpůsobíme je.⁵⁵

Ještě jedna metoda zní: Položíme poměry v propojení všech věcí jako rozestavené stupně. Dále položíme množství věcí ve výsledných sloupcích, každou násobíme jejím poměrem, sečteme je na pravidlo. Tam, které se mají spolu sečíst a jsou ve sloupci různě kladné a záporné, se stejná jména spolu následují, různá jména se spolu ruší, zbytek je pravidlo. Spodním obsahem výsledného sloupce násobíme rozestavené stupně, každý sám vytvoří obsah. [Dokud je] obsah jako pravidlo, [přidáváme] 1 a získáme [výsledek].

Provedeme to starou metodou, musíme celkem položit 5 sloupců.⁵⁶ Chceme [získat] to nejdůležitější krátce. Nejprve položíme 3. sloupec, odečítáme ho od 4. sloupce [až odstraníme jeho první pozici], dále ho odečítáme od 5. sloupce [až odstraníme jeho první pozici]. Následně položíme 2. sloupec, odečítáme od něj 1. sloupec, až od-

⁵⁴ Odstraněním absolutního členu nutně vznikne kladný a záporný člen (úloha má vždy pouze kladná řešení), které jsou si rovny, takže udávají přímo poměry dvou pozic vůči sobě.

⁵⁵ Podstatou metody je sčítání a odčítání řádků, na rozdíl od původní metody se vyhýbá násobení. Proto má poněkud více kroků než standardní metoda, ale je snazší vyhnout se početní chybě. Liu Hui metodu dále předvádí na konkrétních číslech.

⁵⁶ Následující popis je v dochovaných verzích textu zřejmě porušen, protože na základě jeho současného znění nelze sestavit konzistentní pořadí eliminace, tj. takové, kde by se plodiny eliminovaly v opačném pořadí, než v jakém se nakonec vypočítávají, a které vede na trojúhelníkovou matici. Doplnění textu v [Guo Shuchun 2004b] je nahodilé a podle mého názoru by vedlo ke zbytečně pracným výpočtům. Můj popis operací proto je moje vlastní rekonstrukce, která se částečně vrací k původnímu textu tam, kde ho Guo Schuchun změnil, částečně přijímá Guo Shuchunovy emendace a částečně jde vlastní cestou.

Počáteční stav tabulky podle zadání:

1	2	3	7	9	konopí
3	5	5	6	7	pšenice
2	3	7	4	3	sója
8	9	6	5	2	boby
5	4	4	3	5	proso
95	112	116	128	140	obsah

Lin. nez. je opět zřejmá z pravidelného rozložení trojek a pětěk.

straníme jeho první pozici. Následně položíme pravý sloupec a 3. sloupcem⁵⁷ odstraníme jeho první pozici.⁵⁸ Následně od pravého sloupce odečítáme levý sloupec až odstraníme jeho první pozici. Následně levým sloupcem odstraníme první pozici 4. a 2. sloupce. Zbytek je možné pūlit.⁵⁹ Následně 1. sloupcem odstraníme první pozici 2. a 4. sloupce.⁶⁰ Druhým sloupcem odstraníme první pozici 4. sloupce.⁶¹ Zbytek zkrátíme na pravidlo a obsah, [dokud je] obsah jako pravidlo, [přidáváme] 1. Získáme 6, to je cena prosa. Pravidlem upravíme druhý sloupec a získáme cenu bobů, v pravém sloupci získáme cenu sóji, v levém sloupci získáme cenu pšenice, ve třetím sloupci cenu konopí. Na toto se potřebuje celkem 77 početních úkonů.⁶²

⁵⁷ Zde nahrazuji Guo Schuchunovu interpolaci „2. sloupcem“, protože odečítání 3. sloupce je číselně jednodušší (třikrát 3 od 9).

⁵⁸ Nyní vypadá matice takto:

			3			konopí
1	5	5	5	5	-8	pšenice
1	-5	7	15	15	-18	sója
7	15	6	31	31	-16	boby
6	4	4	-8	-8	-7	proso
78	104	116	172	172	-208	obsah

⁵⁹ Tato část je textově velmi neustálená. Vypouštím celou jednu větu, která zřejmě vznikla únavou pisáře („Následně 5. sloupcem odečítáme první pozici 2. sloupce“ – v Guo Schuchunově edici je upravena jinak). Tyto úpravy a následné „pūlení“ jak ve 4., tak ve 2. sloupci zachycují následující tabulky:

		3			→			3		
1		5			→	1		5		
1	-10	7	10	-10	→	1	-5	7	5	-10
7	-20	6	-4	40	→	7	-10	6	-2	40
6	-26	4	-38	41	→	6	-13	4	-19	41
78	-286	116	-218	416	→	78	-143	116	-109	416

⁶⁰ Toto je můj doplněk, který v původním textu není.

⁶¹ Výsledná tabulka:

		3			→			3		
1		5			→	1		5		
1		7		-10	→	1		7		-10
7	-60	6	36	40	→	7		6	36	40
6	-67	4	3	41	→	6	186	4	3	41
78	-702	116	198	416	→	78	1116	116	198	416

⁶² V originále *suan*. Tuto větu je zvykem vykládat a překládat jako „77 početních úkonů“ ([Chemla & Guo Shuchun 2004] – „étapes de calcul“). Pokud bereme jako početní úkon výpočet jedné položky tabulky, je těchto úkonů mnohem méně ($5 \times 4 + 4 \times 3 + 3 \times 2 + 2 = 40$ – ani pokud bychom za početní úkony považovali výpočet „nul“, nedostaneme se přes 60).

Novou metodou to provedeme takto:⁶³ Nejprve odečteme 4. sloupec od třetího. Následně třetím sloupcem odstraníme spodní pozici pravého, 2. a 4. sloupce. Dále jím odčítáme spodní pozici levého sloupce, přestaneme, když nepostačuje k odečtení. Následně levým sloupcem odečteme spodní pozici 3. sloupce, následně 3. sloupcem odstraníme spodní pozici levého sloupce.⁶⁴

Když je to hotovo, zlikvidujeme 3. sloupec.⁶⁵ Následně 4. sloupcem odstraníme spodní pozici levého sloupce a dále jím zmenšíme spodní pozici pravého sloupce. Následně pravým sloupcem odstraníme spodní pozici 2. a 4. sloupce. Následně 2. sloupcem zmenšíme první pozici 4. a levého sloupce. Následně 4. sloupcem zmenšíme pozici sóji v levém sloupci, přestaneme, když nepostačuje k odečtení.⁶⁶

Následně levým sloupcem zmenšíme první pozici 2. sloupce, zbytek lze dvakrát pūlit. Následně 4. sloupcem odstraníme první pozici levého a 2. sloupce. Následně

Pokud by se počítalo samostatně každé násobení a sčítání/odčítání, je jich k získání výsledné tabulky potřeba naopak více (nejméně 80).

⁶³ Celá řada míst v popisu Liu Huiovy metody byla na začátku 19. století emendována Li Ruiem, tyto emendace přebírají všechna následná vydání. Viz [Guo Shuchun 2004b].

⁶⁴ Vycházíme z úvodní matice zadání (pozn. 56), změněné sloupce jsou tučně zvýrazněny. První 4 úpravy (zleva doprava):

1	2	1	7	9	1	-26	1	-25	-26	-22	-26	1	-25	-26
3	5		6	7	3	5		6	7	3	5		6	7
2	3	4	4	3	2	-109	4	-124	-137	-90	-109	4	-124	-137
8	9	-3	5	2	8	93	-3	101	107	77	93	-3	101	107
5	4		3	5	5	4		3	5	5	4		3	5
95	112	4	128	140	95		4			3		4		

⁶⁵ V originále *fei qu* 废去, doslova „zavrhnout, zbavit se“.

⁶⁶ Pro úsporu místa odstraním řádek obsahů, který je nyní prázdný:

-91	-26	23	-25	-26	39	-26		-25		39	-26		-25	
12	5	-3	6	7	-13	5		6	2	-13	-3			2
-372	-109	94	-124	-137	173	-109		-124	-28	173	3		-40	-28
317	93	-80	101	107	-148	93		101	14	-148	37		59	14
20	4	-5	3	5		4		3	1					1

14	-1		-25		17	-1		-25	
-13	-3			2	-4	-3			2
133	43		-40	-28	4	43		-40	-28
-89	-22		59	14	-23	-22		59	14
				1					1

druhým sloupcem odstraníme první pozici levého sloupce, zbytek krátíme, nahoře získáme 5, dole získáme 3, tj. 5 sóji odpovídá 3 bobů.⁶⁷

Následně levým sloupcem odstraníme pozici sóji 2. sloupce, dále jím zmenšíme pozici sóji ve 4. a pravém sloupci, přestaneme, když nepostačuje k odečtení. Následně pravým sloupcem odečteme první pozici 2. sloupce, přestaneme, když nepostačuje k odečtení. Následně 2. sloupcem odstraníme první pozici pravého sloupce. Následně levým sloupcem odstraníme první pozici pravého sloupce. Jako zbytek získáme nahoře 6, dole získáme 5.⁶⁸ Tj. 6 bobů odpovídá 5 prosa.

Následně levým sloupcem odstraníme pozici bobů pravého sloupce. Zbytek krátíme, nahoře jsou 2, dole je 1. Následně pravým sloupcem odstraníme spodní pozici 2. sloupce, 2. sloupcem odstraníme spodní pozici 4. sloupce a dále jím zmenšíme spodní pozici levého sloupce. Následně levý sloupec odstraní spodní pozici 2. sloupce. Jako zbytek získáme nahoře 3, dole 4.⁶⁹ Tj. 3 pšenice odpovídá 4 sóji.

Následně 2. sloupcem zmenšíme spodní pozici 4. sloupce. Následně 4. sloupcem odstraníme spodní pozici 2. sloupce. Jako zbytek získáme nahoře 4, dole 7, tj. 4

⁶⁷ Další postup výpočtu (šedě je vyznačen první výsledek):

17	-1		-2			-1				-1					-1				
-4	-3		-1	2	-55	-3		5	2		-3		5	2		-3		5	2
4	43		-9	-28	735	43		-95	-28	-310	43		-95	-28	-5	43		-95	-28
-23	-22		9	14	-397	-22		53	14	186	-22		53	14	3	-22		53	14
				1															1

⁶⁸ Všimněme si, že Liu Hui ponechává bez komentáře výskyt jednoho z výsledků (v prvním kroku):

	-1				-1				-1					-1					
	-3		5	2		-3		5	2		-3		1			-3		1	
-5	43		0	-28	-5	3		-3	-5	3	6	-15	-5	3	6				
3	-22		-4	14	3	2		-4	-1	3	2	-2	3	3	2	-2		-2	-6
				1									-2	5				-2	5

⁶⁹ Pokračujeme v úpravách matice:

	-1				-1				-1				-1						
	-3		1		-3		1		1	-2		1		1	-2		3		
-5	3		6	-2	-5	3	2	-2	-3	5	2	-2	-3	5		-4		-2	
3	2		-2		3	2	-2		1			-2	1						
			-2	1					1				1						1

konopí odpovídají 7 pšenice.⁷⁰ Takto byly získány všechny poměry, jimiž si odpovídají vůči sobě. Podle toho, že 4 konopí odpovídají 7 pšenícím, tedy je poměr ceny konopí 7 a poměr ceny pšenice 4. Dále 3 pšenice odpovídají 4 sóji, tedy je poměr ceny pšenice 4 a poměr ceny sóji 3. Dále 6 bobů odpovídá 5 prosa, tedy je poměr ceny bobů 5 a poměr ceny prosa 6, čímž jsou poměry uvedeny do propojení.

Znovu položíme 3. sloupec, odečteme od něj 4. sloupec, výsledek je 1 *dou* konopí, 4 *dou* sóji – kladných, 3 *dou* bobů – záporných, spodní obsah 4 – kladných. Hledáme množství, kterým budou sjednoceny na konopí, násobíme množství *dou* každého poměrem sóji 3 a poměrem bobů 5, každá část, která je jako poměr konopí 7, dá 1. Pro sóju získáme 1 celé a 5 ze 7 dílů *dou* kladných, pro boby získáme 2 celé a 1 ze 7 dílů *dou* záporných. Tedy změním sóju a boby na konopí, sečteme, necháme se stejná jména následovat, různá jména rušit, jako zbytek určíme 4 ze 7 dílů *dou* pro konopí, to je pravidlo. Položíme 4 jako obsah, násobíme ho jmenovatelem, získáme obsah 28 a čítec se změni na pravidlo. Dělíme pravidlem a získáme 7, to je cena 1 *dou* konopí. Položíme poměry pšenice 4, sóji 3, bobů 5, prosa 6, všechny je vynásobíme [cenou] konopí, každý vytvoří obsah. Poměr konopí 7 je pravidlo, výsledky jsou ceny pro každý případ.

Také je možné položit základní obsahy sloupců a sjednocené množství pro věci a uvést je do propojení, pro každou podle základního poměru provést metodu „Mějme“, výsledek hledání podle původního poměru sečíst na pravidlo. Takto se nerozlišují kladná a záporná, jen se vybírají různé a sjednotí.

Ještě je možné provést to jednou metodou: Položíme poměry v propojení 5 sloupců, to je konopí 7, pšenice 4, sója 5, prosa 6 jako jednotlivá rozdílná množství. Ve výsledném sloupci je 1 *dou* konopí, 4 *dou* sóji – kladné, 3 *dou* bobů – záporné, každé násobíme příslušným poměrem, když je to hotovo, necháme se stejná jména následovat, různá jména rušit, zbytek je pravidlo. Dále položíme spodní obsah a násobíme ho rozestavenými stupni, výsledky jsou obsahy pro každou věc. Zde je možné krátit pravidlo, potom se už znovu nenásobí rozestavené stupně, pro každou věc se vezmou za cenu. Takto se celkem použije 124 početních úkonů.⁷¹

⁷⁰ Poslední úpravy:

	-1					-1		-4	
1	1		3		1	1		7	
-3	1		-4	-2	-3	1			-2
1					1				
				1					1

⁷¹ Opět je velmi obtížné k Liu Huiem udávanému počtu úkonů nějak logicky dojít. Považujeme-li za jeden úkon změnu některého čísla tabulky, napočítáme jich v první fázi výpočtu (tj. úpravy matice) 135, eventuálně o 8 méně, pokud jako úkony nebereme krácení. To je velmi blízko Liu Huiově údají, ale také to není přesně ono. Je také otázka, zda by mělo smysl porovnávat počet úkonů bez závěrečné fáze (ve staré metodě postupné dosazování a výpočet, v Liu Huiově metodě výpočet ceny sjednocené plodiny a přepočet na ostatní podle zjištěných poměrů).