6 Zlatý řez v hodinách matematiky na středních školách

V této kapitole se podíváme na posun učiva během posledních přibližně sta let. Co se dnes žáci dozví ve škole o zlatém řezu a co se asi dozvěděli dříve? S jakou částí středoškolské matematiky zlatý řez souvisí a kde bychom ho tedy měli hledat ve středoškolských učebnicích? Poslední dvě podkapitoly tvoří návody na skládanky z papíru související nějak se zlatým řezem a řešení pracovních listů z přílohy B. Vyučující mohou tyto příklady využít přímo v hodinách, ať už jako učební materiál nebo jako zábavné zpestření výuky. Pracovní listy také mohou posloužit jako inspirace k přípravě vlastních zadání na stejné nebo podobné téma.

6.1 Učebnice

Následující podkapitola je tematicky rozdělena na tři části. V první části se podíváme na některé učebnice vycházející od počátku 20. století do 2. světové války. V druhé části jsou zařazeny učebnice používané v období od konce 2. světové války přibližně do roku 1989 a konečně ve třetí části učebnice používané v současnosti. Je zajímavé sledovat posun obsahu učiva i stylu výkladu (nejen zlatého řezu), který se bezesporu zjednodušuje, aby byl čitelnější a záživnější. Úlohy důkazového typu, které vyžadují po studentech hlubší zamyšlení a pochopení souvislostí, postupně vystřídaly úlohy jednodušší, často spočívající v dosazení do nějakého daného vzorce. To, co bývalo ve starších učebnicích podáváno jako příklad, který má student sám vyřešit (často důkaz nějaké matematické věty nebo odvození jistého vztahu) bývá dnes součástí autorem vysvětlené teorie (nebo v učebnici zcela chybí). Zda je to posun správný, nechť si každý zváží sám. Zde se podívejme na konkrétní ukázky výkladu i příkladů včetně jejich řešení.

6.1.1 Učebnice vydané před 2. světovou válkou

V žádné učebnici planimetrie (z těch, které jsem měla možnost prohlédnout) vydané v tomto období nechybí kapitola nebo alespoň odstavec o zlatém řezu. V různých sbírkách úloh jejich autoři při tvorbě zadání předpokládali, že studenti zlatý řez znají. Není-li zlatému řezu vyčleněna samostatná kapitola, bývá zařazen do kapitoly *Střední měřicky úměrná*, *Pythagorova věta*, popřípadě *Mocnost bodu ke kružnici.* Nejčastěji se vyskytující příklady na užití zlatého řezu jsou úlohy o pravidelném pětiúhelníku a pravidelném desetiúhelníku, a to početní i konstrukční. Příklady se v různých učebnicích s drobnými obměnami opakují, uvedu zde tedy jen určitý výběr. Čtenáře upozorňuji, že v tomto období se body občas značily malými písmeny a úsečky či přímky velkými – tedy přesně obráceně, než jak jsme zvyklí nyní.

Definici zlatého řezu často předchází definice střední (měřicky) úměrné (dnes bychom řekli střední geometricky úměrná nebo častěji geometrický průměr). Jedno z mnoha znění je následující (podle [30]):

> *Rovnají-li se v úměře oba vnitřní členy* ($a : b = b : c$)*, nazýváme úměru spojitou, člen vnitřní* (b) *slove střední (měřicky) úměrnou.*

Zlatý řez pak bývá často definován následujícím způsobem (podle [18]):

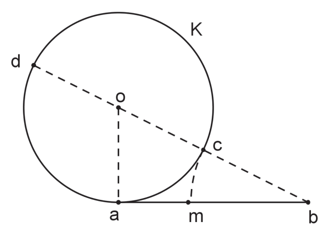
> *Úsečka* a *je rozdělena dle zlatého řezu, když její větší úsek* x *je střední úměrnou úseku menšího* ($a - x$) *a celé úsečky* a*.*

V dalších učebnicích jsou definice střední úměrné i zlatého řezu obdobné, popřípadě je místo definice zlatého řezu uvedena úloha, jejímž cílem je zlatý řez úsečky sestrojit či poměr zlatého řezu vypočítat. Zadání je pak následováno řešením a konstatováním, že takovému rozdělení úsečky se říká zlatý řez (není-li toto již uvedeno jako součást zadání). Například:[1]

> *Rozděliti danou úsečku tak ve dva díly, aby větší byl střední úměrnou menšího a celku.*

nebo

> *Danou úsečku rozděliti jest zlatým řezem, tj. tak, aby menší díl měl se k většímu jako tento k celku.*



Obrázek 6.1: Dělení úsečky zlatým řezem

[1] První ukázka je z knihy [37], kde je úloha řešena pomocí mocnosti bodu ke kružnici, druhá ukázka je z knihy [32], řešení je provedeno obdobně a pro zajímavost je zde uvádím.

Řešení[2] (obr. 6.1): Učiňme

$$\begin{aligned} ao &\perp ab,\ ao = \frac{1}{2}ab, \\ oc &= oa,\ bm = bc; \end{aligned}$$

bod m dělí úsečku ab způsobem žádaným.

Důkaz: Sestrojíme-li kružnici K, jest

$$\begin{aligned} bd : ba &= ba : bc \\ (bd - ba) : ba &= (ba - bc) : bc \\ bm : ba &= am : bm, \end{aligned}$$

čili

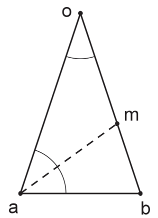
$$am : bm = bm : ab.$$

Dodatek: Kdybychom ab za bod b prodloužili a učinili pak $bn = bd$, byla by délka an v bodě b zlatým řezem rozdělena a body a, b, m, n tvořily by harmonickou čtveřinu.[3]

V souvislosti se zlatým řezem se často (v různých obměnách) uvádí následující dvě věty:[4]

Strana pravidelného pětiúhelníku je větším úsekem zlatým řezem rozdělené úhlopříčky pravidelného pětiúhelníku.

Strana pravidelného desetiúhelníku do kružnice vepsaného rovná se většímu dílu poloměru rozděleného zlatým řezem.



Obrázek 6.2: Strana desetiúhelníku

[2]Konstrukce popsaná v řešení odpovídá Herónově konstrukci zlatého řezu, důkaz je proveden s užitím mocnosti bodu ke kružnici.

[3]O čtyřech kolineárních bodech (kolineární body jsou takové body, které leží na jedné přímce) říkáme, že tvoří harmonickou čtveřinu, je-li jejich dvojpoměr roven jedné (zjednodušeně řečeno, absolutní hodnotu dvojpoměru čtyř různých kolineárních bodů A, B, C, D vypočteme jako podíl výrazů $\frac{|AC|}{|BC|}$, $\frac{|AD|}{|BD|}$. Znaménko dvojpoměru pak závisí na vzájemném uspořádání těchto bodů).

[4]První věta je podle [9], druhá, pro zajímavost opět včetně důkazu, podle [32]. Často jsou tyto věty formulovány jako důkazová úloha pro žáky, nikoli jako výklad.

Důkaz (obr. 6.2): Budiž ab strana pravidelného 10tiúhelníka vepsaného do kružnice středu o. V rovnoramenném trojúhelníku abo jest úhel ramen 36°, úhel při podstavě 72°. Rozpůlíme-li úhel a příčkou am, bude

$$ab = am = om.$$

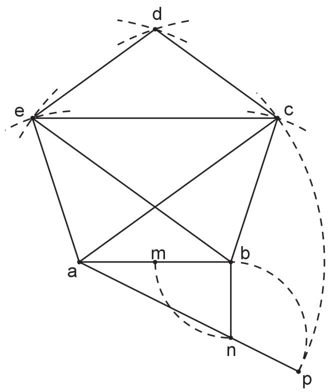
Ježto $\triangle abm \sim \triangle abo$, jest

$$bm : ab = ab : ob$$

čili $bm : om = om : ob$.

Často se objevují úlohy konstrukční, zejména úlohy na konstrukci pravidelného pětiúhelníku (samozřejmě s využitím zlatého řezu). Zde opět nabízím několik ukázek. Jsou po řadě z učebnic [32], [9] a [17], ve všech případech se jedná o konstrukci pravidelného pětiúhelníku, je-li dána délka jeho strany. Přesto se řešení vždy něčím liší.

Konstrukce 1: *Sestrojiti jest pravidelný pětiúhelník, dána-li jeho strana.*



Obrázek 6.3: Konstrukce 1

Rozbor (obr. 6.3): Je-li $\overline{ab} = a$ daná strana, x úhlopříčka žádaného pětiúhelníka, platí dle věty Ptolemaeovy[5] pro čtyřúhelník $abce$

$x^2 = ax + a^2$ aneb $x^2 - ax - a^2 = 0$; odtud $x = \dfrac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + a^2}$.

Ježto x může míti jen hodnotu absolutní, jest $x = \sqrt{a^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} + \dfrac{a}{2}$.

[5]Ptolemaeova (v současné době se používá tvar Ptolemaiova) věta říká, že v tětivovém čtyřúhelníku[6] se součin délek úhlopříček rovná součtu součinů délek obou dvojic protilehlých stran. Ve čtyřúhelníku $ABCD$, který má úhlopříčky e, f tedy (při dnešním běžně používaném značení) platí: $ef = ac + bd$. Díky této větě se v úloze objeví rovnice pro zlatý řez a aniž by jej bylo využito, vyplývá z řešení, že délka úhlopříčky je rovna délce strany vynásobené zlatým číslem.

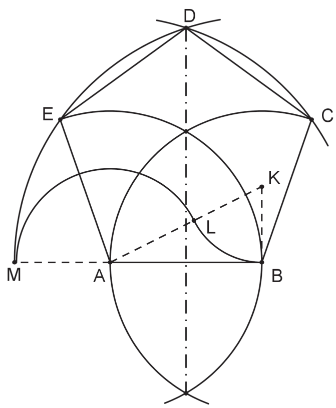
Sestrojení patrno z obrazce, v němž

$bn \perp ab$, $\quad \overline{am} = \overline{bm} = \overline{bn} = \overline{np}$; $\quad \overline{ap} = x$.

Konstrukce 2: *Konstrukce pravidelného pětiúhelníka, je-li dána jeho strana. Sestrojení úhlopříčky ze strany (obr. 6.4):*[7]

1. stranu rozpůlíme symetrálou

2. na kolmici ve vrcholu B naneseme $\frac{1}{2}$ strany, totéž naneseme na spojnici $\overline{AK}$ v úsečce $\overline{KL}$.



Obrázek 6.4: Konstrukce 2

Poloměrem $\overline{AL}$ rýsovaná kružnice protne prodlouženou stranu $\overline{AB}$ v bodě M; úsečka $\overline{BM}$ rovná se úhlopříčce pětiúhelníka. Poloměrem $\overline{MB}$ protneme původní kružnice z A i B a obdržíme body C, E, jakož i D.

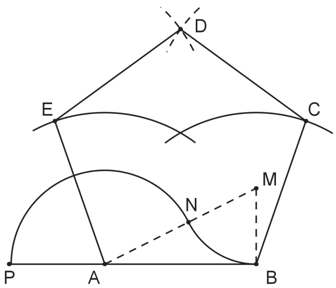
Konstrukce 3: *Sestrojení pravidelného pětiúhelníka ze známé strany $a = AB$ pomocí sestrojení úhlopříčky.*

Řešení (obr. 6.5): Veď $BM \perp AB$, $\overline{BM} = \dfrac{1}{2}\overline{AB}$, $\overline{MN} = \dfrac{1}{2}\overline{AB}$. Poloměrem $\overline{AN}$ opiš oblouk z A do P, pak $\overline{BP}$ je úhlopříčka pravid. pětiúhelníka.

Ze známé strany a úhlopříčky sestrojí se pětiúhelník podle obrazce snadno.[8]

[7] V popisu konstrukce autor využívá skutečnosti, že poměr délek úhlopříčky a strany pravidelného pětiúhelníku je zlaté číslo. Tento fakt ovšem nezmiňuje.

[8] Bod P je zkonstruován v podstatě podle Herónovy konstrukce tak, aby podíl $\overline{BP} : \overline{AB}$ (tedy podíl délek úhlopříčky a strany pravidelného pětiúhelníku) byl roven zlatému číslu. Řešení je ale podáno jen jako strohý návod, bez bližšího vysvětlení. Otázkou je, zda v tuto chvíli měl student zlatý řez znát. Myslím si, že ne, protože kapitola zaměřená na zlatý řez se v této učebnici vyskytuje později a pojem zlatý řez u této úlohy není vůbec zmíněn.



Obrázek 6.5: Konstrukce 3

Kromě konstrukčních úloh jsou v učebnicích pochopitelně i úlohy početní. Podívejme se na některé z nich (včetně jejich řešení). Odkaz na knihu, ze které příklad pochází, je vždy na konci zadání.

Příklad 1: *Vypočítati jest goniometrické funkce úhlů 18° a 72°.* [31]

Řešení: V pravidelném desetiúhelníku jest strana $a = \frac{r}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$.

Jelikož jest $\sin 18° = \frac{a}{2} : r$, vypočítáme $\sin 18° = \cos 72° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, a dle § 2.2 $\cos 18° = \sin 72° = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$, $\operatorname{tg} 18° = \operatorname{cotg} 72° = \sqrt{\sqrt{5}-2}$.[9]

Příklad 2: *Řešte:* $\cos x = \operatorname{tg} x$. [31]

Řešení:[10]

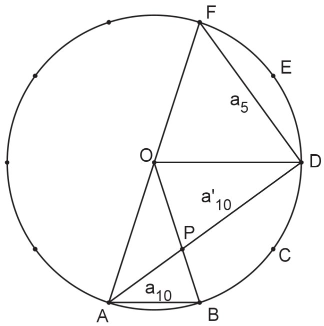
$$\begin{aligned}\sin^2 x + \sin x - 1 &= 0\\ \sin x &= \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.61803\\ x_1 &= 38°10',\ x_2 = 2R - x_1\end{aligned}$$

Příklad 3: *Vepíšeme-li do kružnice pravidelný desetiúhelník*

[9] Autor v řešení předpokládá povědomí o výskytu daných úhlů v pravidelném desetiúhelníku a znalost vztahu mezi délkou strany desetiúhelníku a poloměrem kružnice jemu opsané. Mezivýpočty neuvádí. Paragraf 2.2, na který se odkazuje, pojednává o vztazích mezi goniometrickými funkcemi. Ve výsledku hodnoty funkce tangens pro úhel 18° (respektive funkce cotangens pro úhel 72°) je v učebnici chyba, správný výsledek je (po úpravě) $\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$.

[10] Řešení je uvedeno jen na intervalu $\langle 0; 2\pi\rangle$, ačkoliv v zadání toto omezení není. V takovém případě dnes automaticky předpokládáme, že řešení hledáme v celém oboru reálných čísel. Výpočty jsou opět provedeny velmi stručně. Označení pravého úhlu velkým písmenem R se dnes na středních školách, pokud je mi známo, běžně nepoužívá. Úlohu zde uvádím pro její zajímavý mezivýsledek – $\sin x$ je roven převrácené hodnotě zlatého čísla.

$ABCDEFG\ldots$ a spojíme-li jeho vrcholy ob jeden, dostaneme pravidelný pětiúhelník $ACEG\ldots$ Spojíme-li jeho vrcholy ob dva, vznikne pravidelný desetiúhelník hvězdovitý $ADG\ldots$ Jak vypočítáme jejich strany? [37]



Obrázek 6.6: Hvězdovitý desetiúhelník

Všimněme si (obr. 6.6), že (P budiž průsečík úseček OB, AD) platí: $\triangle ADO \sim \triangle AOP$ (proč?), tedy $AD : AO = AO : AP$ čili $AD : r = r : a_{10}$ (a_{10} a r jsou díly strany $AD = a'_{10}$, rozdělené zlatým řezem). Odtud vychází pro stranu pravidelného desetiúhelníku hvězdovitého

$$a'_{10} = \frac{r^2}{a_{10}} = r\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Stranu pravid. pětiúhelníku a_5 vypočítáme z pravidelného trojúhelníku ADF, kde známe $AD = a'_{10}$ a $AF = 2r$. Jest $a_5{}^2 = \overline{DF}^2 = \overline{AF}^2 - \overline{AD}^2 = 4r^2 - r^2\frac{3+\sqrt{5}}{2} = r^2\frac{5-\sqrt{5}}{2}$; proto $a_5 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$.

Příklad 4: *Jest vypočítati obsah měsíčku, který vytvořují dvě kružnice téhož poloměru r, je-li rozdělen podle zlatého řezu poloměr jedné kružnice středem kružnice druhé.* [5]

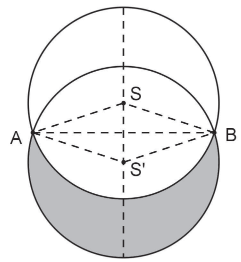
Řešení (obr. 6.7): Poněvadž je $\overline{SS'}$ větší částí poloměru rozděleného zlatým řezem, rovná se straně pravidelného desetiúhelníku vepsaného do kružnice; v rovnoramenném trojúhelníku $SS'A$ jest

$$\sphericalangle S'AS = 36^\circ, \sphericalangle AS'S = 72^\circ, \sphericalangle ASB = \sphericalangle AS'B = 144^\circ.$$

Obsah měsíčku $P = U_2 - U_1$, kde

$$U_2 = \frac{\pi r^2(360^\circ - 144^\circ)}{360^\circ} + \triangle AS'B, \quad U_1 = \frac{\pi r^2 \cdot 144^\circ}{360^\circ} - \triangle ASB.$$

Ježto $\triangle AS'B \cong \triangle ASB$, jest po dosazení $P = \dfrac{\pi r^2}{5} + \dfrac{\overline{SS'} \cdot \overline{AB}}{2}$.



Obrázek 6.7: Obsah měsíčku

Danou podmínkou (dělením zlatým řezem) je podán známý vztah

$$\overline{SS'} = \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$$

a podle Pythagorovy věty je $\dfrac{\overline{AB}}{2} = \sqrt{r^2 - \left[\dfrac{r}{4}(\sqrt{5}-1)\right]^2}$; i jest po krátké úpravě hledaný obsah měsíčku $P = \dfrac{\pi r^2}{5} + \dfrac{r^2}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ neboli

$$P = \frac{r^2}{20}\left(4\pi + 5\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right).$$

Příklad 5: *Eliptické okno má býti 5,4 m^2 veliké. Jest vypočítati délku poloos, je-li vedlejší osa větším úsekem hlavní osy rozdělené zlatým řezem.* [5]

Řešení: Pro vedlejší poloosu platí z dané podmínky známý vztah pro zlatý řez $b = \frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)$, který řešíme s rovnicí pro obsah elipsy $\pi ab = 5,4$.

Řešením této soustavy obdržíme

$$a = \sqrt{\frac{2\cdot 7(\sqrt{5}+1)}{\pi}}, \quad b = \sqrt{\frac{2\cdot 7(\sqrt{5}-1)}{\pi}}.$$

Pomocí pětimístných tabulek logaritmických[11] dospějeme k výsledkům $a = 1,6676\ldots$, $b = 1,0306\ldots$

Hledané poloosy elipsy jsou $a = 1,668\,m$, $b = 1,031\,m$.

Příklad 6: *Jest vypočítati plášť*[12] *přímého rotačního kužele, jehož výška je středem opsané koule o poloměru r rozdělena zlatým řezem.* [5]

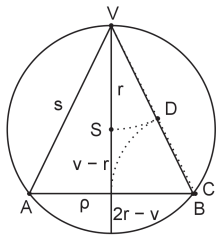
[11] Dnešní student by pravděpodobně místo pětimístných logaritmických tabulek použil kalkulačku.

[12] Zadáním „jest vypočítati plášť“ se zde myslí obsah pláště.

Řešení (obr. 6.8): Plášť přímého rotačního kužele je podán vzorcem

$$p = \pi \varrho s,$$

v němž je ϱ poloměr podstavy a s strana kužele.



Obrázek 6.8: Plášť kužele

Podle 2. Euklidovy věty[13] je

$$\varrho^2 = v(2r - v), \tag{6.1}$$

podle 1. Euklidovy věty

$$s^2 = 2rv, \tag{6.2}$$

kde je v výška kužele.

Ježto má býti výška v rozdělena středem koule zlatým řezem, platí úměra

$$(v - r) : r = r : v$$

totožná s rovnicí

$$v^2 - rv - r^2 = 0,$$

z jejíchž kořenů $v_{1,2}$ má smysl jen kladná hodnota

$$v = \frac{r}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right). \tag{6.3}$$

Dosadíme-li hodnotu (6.3) do rovnic (6.1) a (6.2), obdržíme po úpravě součin $\varrho^2 s^2 = 2r^4$ neboli $\varrho s = r^2\sqrt{2}$, z čehož hledaný plášť $p = \pi r^2 \sqrt{2}$.

[13] První Euklidovou větou je zde míněna věta o odvěsně, druhou věta o výšce.

Nakonec uveďme ještě několik neřešených úloh:

> *Je-li přepona trojúhelníka pravoúhlého výškou dělena dle zlatého řezu, jest menší odvěsna rovna většímu dílu přepony.* [32]
>
> *Větší díl strany pravidelného desetiúhelníka (pětiúhelníka) rozdělené dle zlatého řezu rovná se rozdílu poloměru opsané kružnice a strany (úhlopříčky a strany).* [32]
>
> *Stanoviti stranu a_{10} pravid. 10tiúhelníka vepsaného do kružnice poloměru r.* [17]

6.1.2 Učebnice vydané po 2. světové válce

Situace gymnázií po 2. světové válce nebyla jednoduchá. Stručně (ale přehledně) je shrnut vývoj v přednášce RNDr. Daga Hrubého proslovené na konferenci Matematika – základ evropské vzdělanosti, která se konala ve dnech 20. a 21. září 2007 v Hradci Králové. Tato přednáška je uvedena ve sborníku [12]. V roce 1953 byla gymnázia zrušena. Ke studiu na vysoké škole od té doby připravovala Jedenáctiletá střední škola. V roce 1960 vznikly tříleté Střední všeobecně vzdělávací školy (SVVŠ) a byly pro ně vytvořeny i nové učebnice matematiky. Planimetrie je zahrnuta v učebnici pro první ročník, ovšem o zlatém řezu jsem zde nenašla ani zmínku. Pouze je vysvětlen pojem střední geometrická úměrná, ale v kapitole, která je celá psaná menším písmem jako rozšiřující učivo. V roce 1964 byly SVVŠ rozšířeny na školy čtyřleté a opět se jim vrátil název gymnázium. Nové učebnice vycházely v letech 1977–1980, další v letech 1984–1987. V prvním případě šlo o osm takzvaných sešitů, v druhém o čtyřdílnou řadu, kde každá kniha odpovídala jednomu ročníku studia. Ani v těchto knihách jsem zlatý řez nenašla (hledala jsem v kapitolách o geometrii v rovině).

Jedinou učebnicí (z těch, do kterých jsem měla možnost nahlédnout) vydanou po roce 1945 zmiňující se o zlatém řezu je *Geometrie pro V.třídu středních škol* z roku 1947 [11]. Tato učebnice je psána ještě ve stylu prvorepublikové literatury. Zlatému řezu je věnována celá podkapitola v kapitole páté: *Stejnolehlost a podobnost*. Je zde vyložena konstrukce zlatého řezu úsečky pomocí mocnosti bodu ke kružnici (v podstatě se jedná o Hérónovu konstrukci). Dále se autoři zmiňují, že se úsečky rozdělené zlatým řezem vyskytují v pravidelném pětiúhelníku a desetiúhelníku a uvádějí následující dvě věty, z nichž první i odvozují.

> *Strana pravidelného desetiúhelníka je rovna většímu dílu poloměru kružnice desetiúhelníku opsané, rozděleného zlatým řezem.*
>
> *Strana pravidelného pětiúhelníka se rovná většímu dílu jeho úhlopříčky, rozdělené zlatým řezem.*

Na konci výše uvedené podkapitoly následuje cvičení obsahující sedm neřešených úloh souvisejících se zlatým řezem (číslovaných 178–184). Doslovně zde jako ukázku uvádím tři z nich:

Sestrojte pravidelný 10tiúhelník a pak 5tiúhelník, dána-li strana a_{10}, resp. a_5.

Vyjádřete stranu pravidelného 10tiúhelníka a_{10} a stranu pravidelného 5tiúhelníka a_5 poloměrem opsané kružnice, a to vzorcem: $a_{10} = \frac{1}{2}r(\sqrt{5}-1)$, $a_5 = \frac{1}{2}r\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

Sestrojte euklidovsky úhly a) 36°, 54°, b) 12°, 42°, 78°.

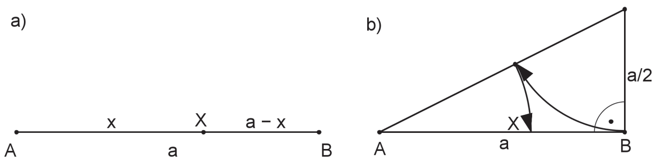
6.1.3 Současné učebnice

Za současné učebnice považuji ty, podle kterých se nyní na gymnáziích vyučuje. Je to zejména řada tematicky zaměřených učebnic matematiky pro gymnázia vydaná v nakladatelství Prometheus (učebnice vycházejí opakovaně od roku 1992, některé díly byly postupně upraveny a rozšířeny, zde je čerpáno ze 4. vydání učebnice *Planimetrie*). Dále se jako doplněk využívají různé sbírky úloh a přehledy matematiky, pro ukázku dále uvádím výňatek z Polákova *Přehledu středoškolské matematiky.* Nemálo učitelů sáhne i po starších učebnicích.

Učebnice *Planimetrie* E. Pomykalové [24] je členěna na tři kapitoly (*Geometrické útvary v rovině, Konstrukční úlohy, Zobrazení v rovině*), každá kapitola má několik podkapitol. V kapitole 2. *Konstrukční úlohy* je podkapitola 2.6 *Konstrukce na základě výpočtu*, ve které je sedm řešených úloh a 11 neřešených příkladů. Řešená úloha číslo 6 na straně 119 je následující:

> *Úsečku AB rozdělte na dvě části tak, aby poměr menší části k větší byl stejný jako poměr větší části k celé úsečce.*
>
> Řešení:
>
> Předpokládejme, že bod X dělí úsečku AB podle podmínek úlohy. Označme $|AB| = a$, $|AX| = x$; potom $|BX| = a - x$. Nechť $|AX| > |BX|$ (obr. 6.9 a). Má platit
>
> $$(a-x) : x = x : a$$
>
> a po úpravách
>
> $$x^2 = a \cdot (a-x), \text{ neboli } x^2 + a \cdot x - a^2 = 0.$$
>
> Řešením této rovnice je
>
> $$x_1 = \frac{1}{2}a \cdot (\sqrt{5}-1), \;\; x_2 = \frac{1}{2}a \cdot (-\sqrt{5}-1),$$
>
> $x_2 < 0$, proto nevyhovuje úloze; x_1 pro konstrukci upravíme na tvar
>
> $$x_1 = \sqrt{a^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2} - \frac{1}{2}a.$$

Úsečku $\sqrt{a^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2}$ sestrojíme užitím Pythagorovy věty (obr. 6.9 b) Úloha má vždy jediné řešení.



Obrázek 6.9: Dělení úsečky zlatým řezem

> O úsečce AB říkáme, že je rozdělena podle zlatého řezu. Konstrukce pochází od Herona.

Žádný další příklad o zlatém řezu jsem v knize neobjevila, stejně jako věty o zlatém řezu a pravidelném pětiúhelníku (desetiúhelníku).

Kniha *Přehled středoškolské matematiky* J. Poláka [23] není učebnicí v pravém slova smyslu, ale uceleným přehledem středoškolského učiva matematiky. Stručně shrnuje látku, často ji i doplňuje, jsou připojeny řešené příklady. Obsah je členěn do deseti kapitol. Uvádím ukázky z 9. kapitoly: *Geometrie*, podkapitola 9.9 *Konstrukční planimetrické úlohy*, úloha číslo 3 na stranách 447–448:

> *Zlatým řezem dané úsečky AB se rozumí takové rozdělení bodem Z na dvě části (úsečky) AZ, BZ, že platí*
>
> $$|AZ| : |BZ| = |AB| : |AZ|; \; (|AZ| > |BZ|),$$
>
> *tj. poměr délky větší části a menší části úsečky je roven poměru délky celé úsečky a její větší části. Odvoďte konstrukci zlatého řezu úsečky AB na základě algebraické metody.*

Následuje řešení, kde je proveden obdobný výpočet jako v učebnici [24] a popsána konstrukce. Dále je v knize uvedena úloha 4 (strany 448–451):

> *Do kružnice o daném poloměru r vepište: a) pravidelný šestiúhelník, b) pravidelný desetiúhelník, c) pravidelný pětiúhelník.*

Při řešení úlohy b) je odvozeno (s využitím výsledku předchozí úlohy 3) pravidlo $a_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$, kde a_{10} je délka strany pravidelného desetiúhelníku a r poloměr kružnice opsané. Podobně při řešení úlohy c) vychází $a_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$, kde a_5 je délka strany pravidelného pětiúhelníku a r poloměr kružnice opsané.

6.2 Kdy, jak a proč zlatý řez učit

Začnu od konce – proč? Vynecháme-li historické důvody (neříkám tím ovšem, že nejsou významné) a diskuze o obsahu (a rozsahu) středoškolského vzdělání, zůstává tu ještě minimálně důvod jeden, a to využitelnost zlatého řezu v některých současných oborech (viz 10. kapitola) a také usnadnění řešení dalších geometrických úloh, což je jistě vidět na příkladech uvedených v předchozích kapitolách. Samozřejmě, pokud není zájem poznat vlastnosti pravidelného pětiúhelníku nebo pravidelného dvacetistěnu, nebude pravděpodobně ani zájem a důvod pochopit dělení úsečky v poměru zlatého řezu. Ale pokud alespoň jednoho studenta z celé třídy téma zlatý řez (nebo cokoliv jiného) zaujme, pak věřím, že tato výuka měla význam.

Populární jsou v současnosti hojně diskutované mezipředmětové vztahy. Zlatý řez není pouze záležitostí matematiky, ale objevuje se ve výtvarné výchově (kompozice výtvarného díla), architektuře, biologii či chemii (krystaly minerálů, ulity měkkýšů, uspořádání listů na stonku aj.), ale také v estetice aj.

Otázky kdy a jak spolu velmi úzce souvisí. Slovem „kdy“ mám na mysli návaznost na ostatní učivo (co je třeba, aby žák již znal, a co se má dozvědět později, aby přitom mohl zlatý řez aplikovat), slovem „jak“ je myšleno jakým způsobem zlatý řez vysvětlit, protože (jak je patrno z předchozích kapitol) způsobů je více.

Určitě bych jádro výkladu zlatého řezu ponechala matematice, konkrétně planimetrii. Vzhledem k současnému trendu zpřístupnit učivo širšímu spektru populace bych netrvala na podrobných důkazech, snad vyjma u matematicky zaměřených tříd. Myslím, že nejvhodnější je ukázat studentům zlatý řez v souvislostech tak, jak je uvedeno například v současné učebnici [24], t. j. v souvislostech s konstrukcemi na základě výpočtu, redukčním úhlem a pod. K tomu je nezbytné znát Pythagorovu větu a je vhodné znát věty Eukleidovy. Konstrukci zlatého řezu je také možné ukázat jako příklad na využití Pythagorovy věty. Zlatý řez samotný by pak měl být aplikován při řešení úloh o pravidelném pětiúhelníku (desetiúhelníku). Tyto mnohoúhelníky jsou ovšem v učebnici [24] vyloženy mnohem dříve (a učivo nejde do takové hloubky, aby bylo zlatého řezu potřeba). Při řešení stereometrických úloh se ke zlatému řezu můžeme vrátit (například u Platónových těles), stejně tak jako při probírání mocnosti bodu ke kružnici, díky níž lze pěkně zdůvodnit Hérónovu konstrukci (viz důkaz konstrukce 1 v kapitole 2).

Téma zlatý řez se objevuje i ve školních vzdělávacích programech[14] některých středních škol (například ŠVP Gymnázia Na Pražačce, Praha 3 nebo Gymnázia Brno, třída Kapitána Jaroše). V obou případech je zlatý řez uveden u matematiky jako mezipředmětový vztah s výtvarnou výchovou.

Zlatý řez bývá někdy vyučován v rámci volitelného semináře z matematiky. V roce 2008 rozeslala Marie Nečasová (v té době studentka Pedagogické fakulty Univerzity Karlovy v Praze) na 216 středních škol v České republice

[14] Školní vzdělávací program (ŠVP) je dokument, který si vypracovává každé gymnázium samostatně podle celorepublikově platného RVP G, což je kurikulární dokument vymezující závazné rámce vzdělávání pro gymnázia.

dotazník, ve kterém mimo jiné zjišťovala náplň seminářů z matematiky na jednotlivých školách. Na otázku „*Zabýváte se zlatým řezem?*“ bylo asi 36% z došlých 72 odpovědí kladných. Podrobněji jsou výsledky tohoto průzkumu zpracovány v diplomové práci [21]. Dle mého názoru tento výsledek není nízký, otázkou zůstává, do jaké hloubky je zlatý řez probírán.

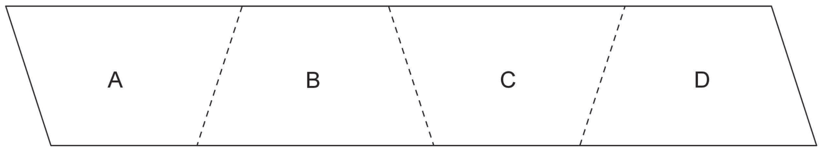
S výukou nejen zlatého řezu, ale geometrie a celé matematiky vůbec vyvstává i mnoho problémů, kterých jsem si vědoma. Jmenuji zde ty, které vnímám jako nejpalčivější, ale jistě by se našly i další. V posledních letech dochází ke značným škrtům v povinném učivu na středních školách; důvodů je mnoho. Klesá počet hodin matematiky na úkor jiných předmětů (netvrdím, že je to vždy špatně, záleží na konkrétní situaci), snižují se nároky na znalosti maturantů (ale zvyšuje se procento maturantů v populačním ročníku) atd. Nemají-li učitelé prostor probrat skutečně základní učivo, nikdo po nich nemůže chtít učit něco navíc (zlatý řez či cokoliv jiného). Výjimku by snad mohli tvořit studenti výtvarně zaměřených škol. Další problém, o kterém bohužel stále častěji slýchávám, je neobliba geometrie u některých učitelů, kteří ji pak, nevědomky, ale přesto, přenášejí na své studenty. Mnohem raději učí rovnice, funkce, úpravy algebraických výrazů a podobně, než planimetrii a stereometrii. Žáci pak nenávidí rýsovací potřeby, neumí s nimi pracovat, náčrtky kreslí propiskou a skutečně snadné planimetrické úlohy řeší raději pomocí analytických výpočtů či jinými metodami (pokud vůbec). Tyto učitele asi o kráse geometrie a užitečnosti zlatého řezu nepřesvědčím...

6.3 Skládanky z papíru

Postup, jak pomocí čtverce papíru složit zlatý řez úsečky, je na straně 35. Zde popíšu návody na složení pravidelného pětiúhelníku a zlatého obdélníku. Obě skládanky jsou samozřejmě (stejně jako zmíněná konstrukce ze strany 35) přesné jen teoreticky. Záleží na síle papíru, ze kterého skládáme, naší pečlivosti a dalších okolnostech.

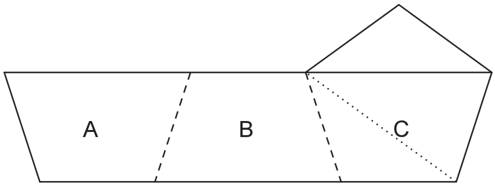
Pravidelný pětiúhelník

Vystřihněte proužek složený z lichoběžníků A, B, C, D na obrázku 6.10 a napřehýbejte jej podle přerušovaných čar.



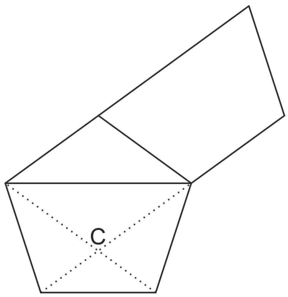
Obrázek 6.10: Pětiúhelník z papíru

Lichoběžník D přehněte dospodu (obr. 6.11).

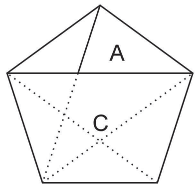


Obrázek 6.11: Krok 1

Dospodu přeložte také část s lichoběžníky A, B (obr. 6.12).



Obrázek 6.12: Krok 2



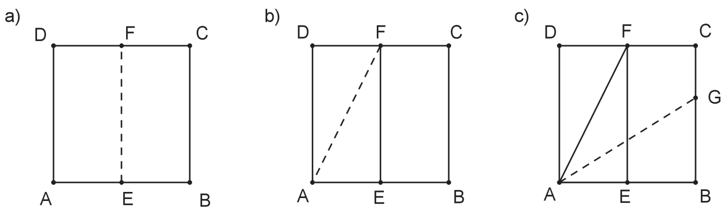
Obrázek 6.13: Krok 3

Nakonec přeložte lichoběžník A zpět dopředu a zasuňte jej pod lichoběžník C.

Pokud byste chtěli obrázek 6.10 přerýsovat, je třeba dodržet dvě pravidla. Lichoběžníky A, B, C, D jsou rovnoramenné, přičemž poměr délek delší základny a ramena je zlaté číslo, a vnitřní úhly každého lichoběžníku měří 72° a 108° stupňů.

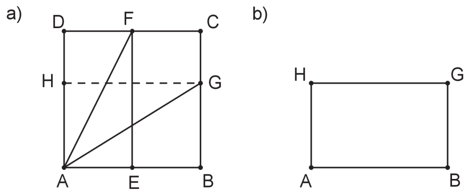
Zlatý obdélník

Vyjdeme ze čtverce $ABCD$, který přeložíme napůl podle přerušované úsečky EF (obr. 6.14 a). Dále přeložíme papír podle přerušované úsečky AF (obr.6.14 b). Nyní můžeme rozpůlit úhel BAF, získáme tak bod G (obr. 6.14 c).



Obrázek 6.14: Skládání zlatého obdélníku I

Horní část papíru nad bodem G přehneme dozadu rovnoběžně se stranou AB (obr. 6.15 a). Zbylý obdélník $ABGH$ (obr. 6.15 b) je zlatý.[15]



Obrázek 6.15: Skládání zlatého obdélníku II

6.4 Pracovní listy

Pracovní listy jsou dnes nepostradatelnou součástí výuky, zejména v nižších ročnících. V příloze A je pět připravených pracovních listů souvisejících nějakým způsobem se zlatým řezem (některé více, některé méně).

Úkoly jsou většinou snadné, vyžadují přesné rýsování nebo stříhání podle návodu, z početních operací se používá sčítání a dělení přirozených čísel. Tyto listy lze ale použít i ve vyšších ročnících. Návrhy, jak úlohy zkomplikovat, najdete spolu s řešením úkolů níže.

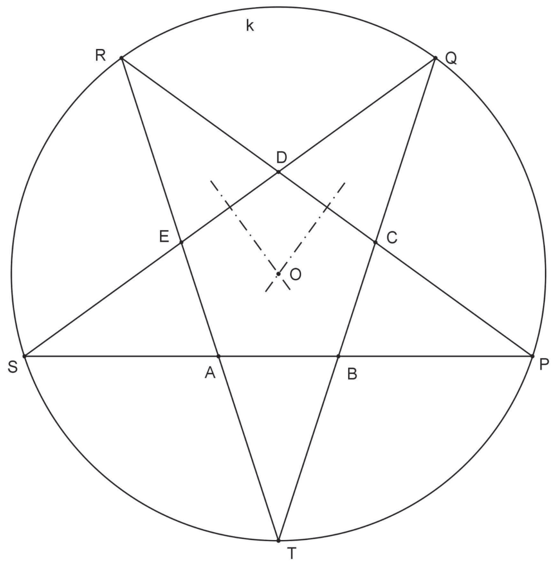
K řešení pracovních listů není zapotřebí znalost zlatého řezu, pouze se tento poměr v úlohách objevuje nebo jsou jeho vlastnosti použity při tvorbě zadání. Je jen na učiteli, zda žáka s pojmem zlatý řez seznámí.

[15] Tato skládanka je převzata z knihy [38].

Pracovní list I

Úloha 1:

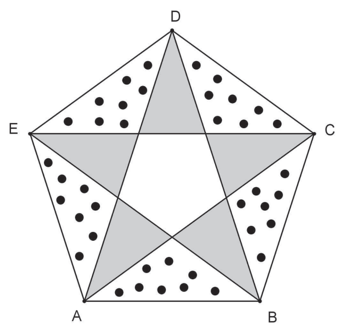
Vrcholy P, Q, R, S, T jsou vrcholy pravidelného pětiúhelníku, proto musí ležet na kružnici k (obr. 6.16). Velikost úhlu AOB je $72°$, velikost úhlu ADB je $36°$. Jedná se o středový a obvodový úhel příslušný oblouku AB kružnice opsané pětiúhelníku $ABCDE$. Všechny úhly v zadání (e) jsou shodné a měří $36°$. Jedná se o obvodové úhly příslušné opět oblouku AB kružnice opsané pětiúhelníku $ABCDE$.



Obrázek 6.16: Úloha 1 – řešení

Úloha 2:

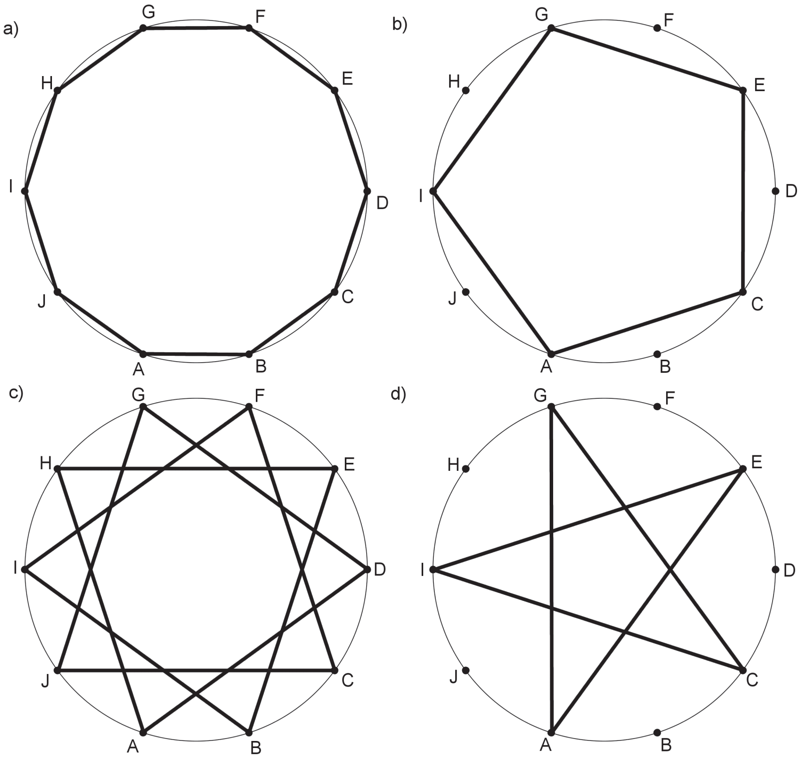
Řešení je patrné z obrázku (obr. 6.17), červená barva je nahrazena puntíky, „žluté“ trojúhelníky jsou šedé.



Obrázek 6.17: Úloha 2 – řešení

Úloha 3:

V obrázku a) vznikne pravidelný desetiúhelník, v obrázku b) pravidelný pětiúhelník, v obrázku c) hvězdovitý desetiúhelník a v obrázku d) hvězdovitý pětiúhelník (pentagram). Úlohu lze starším studentům zkomplikovat úkolem: „Vypočítejte délky stran vzniklých útvarů v závislosti na poloměru kružnice opsané.“



Obrázek 6.18: Úloha 3 – řešení

Úloha 4:

Fotbalový míč je příkladem využití Archimédova tělesa zvaného *zkosený dvacetistěn* v praxi. Na jeho povrchu je dvanáct pětiúhelníků a dvacet šestiúhelníků.

Pracovní list II

Úloha 1:

S jiným obdélníkem (respektive se čtverci odstřiženými od tohoto obdélníku) úloha nefunguje, protože poměry stran dvou po sobě jdoucích čtverců musí být stále stejné. To platí jen v případě, že původní obdélník je zlatý.

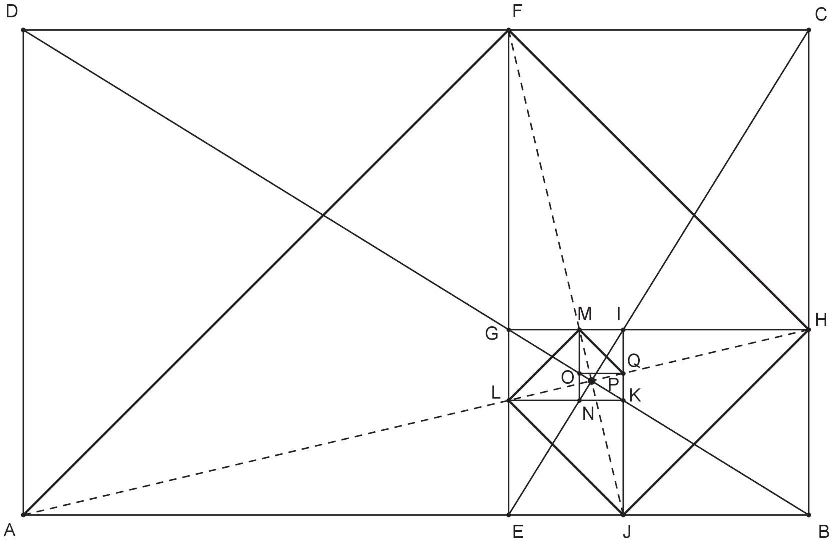
V našem příkladu platí

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \frac{a_3}{a_4} = \frac{a_4}{a_5} = \frac{a_5}{a_6} = \varphi,$$

kde a_1 je strana prvního (největšího) čtverce, a_2 je strana druhého čtverce atd.

Úloha 2:

Obrázek popsaný v bodech (a), (b), (c) by měl vypadat jako obr. 6.19.



Obrázek 6.19: Úloha 2 – řešení

Lomená čára se přibližuje k bodu P (analogie s logaritmickou spirálou vepsanou do zlatého obdélníku, viz podkapitola 3.3). Na úsečce BD leží body G, K, O, na úsečce CE body I, N. Po sobě jdoucí dvojice úseček spojujících vrchol lomené čáry s bodem P (na obrázku čárkovaně) svírají vždy pravý úhel.

Pracovní list III

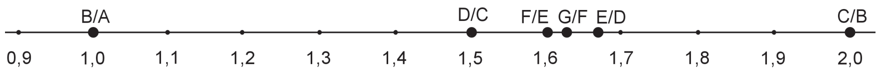
Vyplněná tabulka z bodu (a) vypadá následovně:

A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**J**
1	1	2	3	5	8	13	21	34

Součet čísel v posledním řádku je 88, král tedy skutečně rozdal všechny své zlaté cihly. Zaokrouhlování na tři desetinná místa v bodě (c) není bezpodmínečně nutné, je v zadání jen proto, aby bylo vidět, že je každý podíl jiný (při zaokrouhlení na dvě desetinná místa budou poslední dva podíly shodné). Další tabulka má vypadat takto:

$\frac{B}{A}$	$\frac{C}{B}$	$\frac{D}{C}$	$\frac{E}{D}$	$\frac{F}{E}$	$\frac{G}{F}$	$\frac{H}{G}$	$\frac{J}{H}$
$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{21}{13}$	$\frac{34}{21}$
1	2	$1,5$	$1,667$	$1,6$	$1,625$	$1,615$	$1,619$

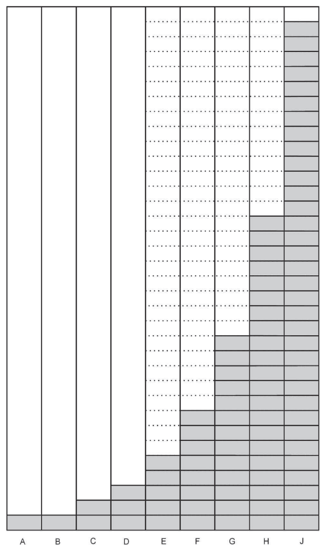
Vynesené podíly na číselné ose (obr. 6.20):



Obrázek 6.20: Číselná osa

Podíly se postupně blíží zlatému číslu (oscilují kolem něj), což žáci (pokud neznají zlatý řez) těžko objeví. Mohou si ale všimnout, že se přibližují k hodnotě přibližně 1,62.

Obrázek (obr. 6.21) znázorňuje správné vybarvení cihel. Jestli byl král spravedlivý nebo ne, je věcí názoru.

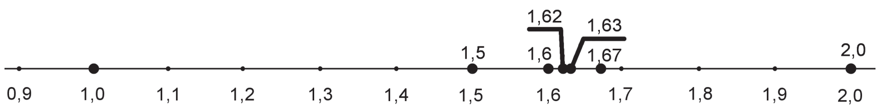


Obrázek 6.21: Zlaté cihly

Pracovní list IV

Největší možný obdélník, který se vejde na papír formátu A_4, má rozměry 13×21 cm. Zde je vyplněná tabulka z bodu (f) a zanesené body na číselnou osu (obr. 6.22):

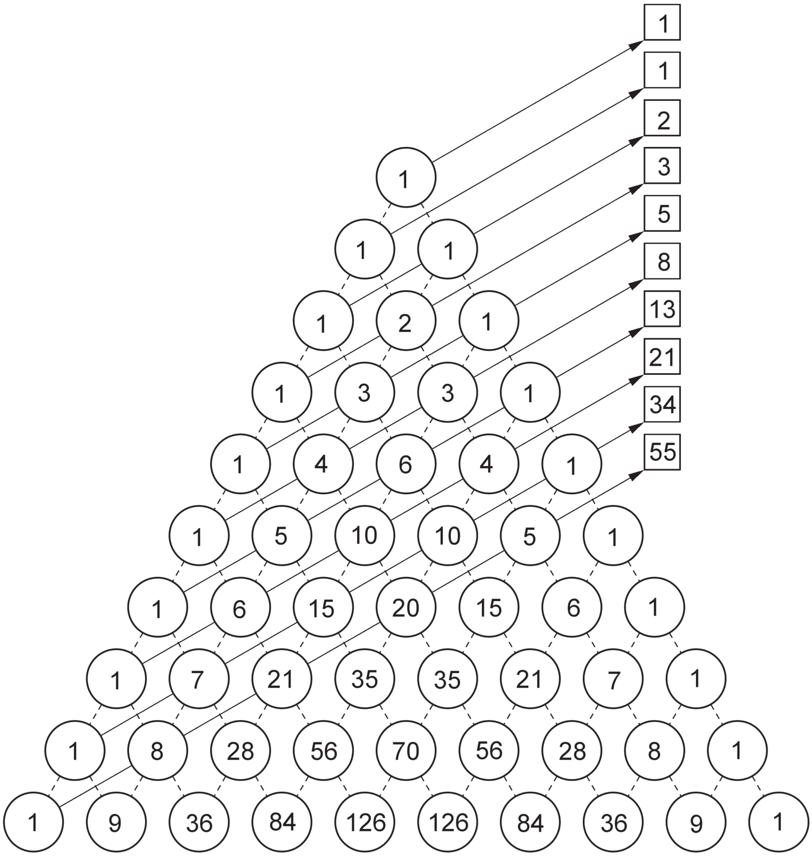
obdélník	1	2	3	4	5	6	7	...
delší strana (a)	2	3	5	8	13	21		
kratší strana (b)	1	2	3	5	8	13		
a:b	2,00	1,50	1,67	1,6	1,63	1,62		



Obrázek 6.22: Číselná osa

Pracovní list V

Středoškoláci by měli poznat, že jde o Pascalův trojúhelník. Úloha je ale určena spíše mladším žákům, kteří si na ní procvičí sčítání přirozených čísel. Součty ve směru šipek jsou prvky Fibonacciho posloupnosti. Díky tomu dává součet dvou po sobě jdoucích čísel v rámečku hodnotu čísla následujícího. Toto ověření platí pro libovolnou dvojici, ne jen pro dvojici popsanou v bodě (c). Z čísel uvedených v bodě (d) by se v červeném čtverečku po čase objevila čísla 144, 233 a 987 (jsou to členy Fibonacciho posloupnosti). Vyplněná pyramida je na následující straně.



Obrázek 6.23: Pyramida