3 Zlatý řez v planimetrii

Zlaté číslo – poměr zlatého řezu – se objevuje v mnoha rovinných i prostorových geometrických útvarech, a to často na místech, kde by je nikdo nečekal. Některé útvary si dokonce vysloužily adjektivum *zlatý* (zlatý obdélník, zlatý trojúhelník, zlatá spirála). V této kapitole se seznámíme s výskytem zlatého řezu v rovinných obrazcích a ukážeme si několik zajímavých planimetrických úloh, jejichž řešení nějakým způsobem se zlatým řezem souvisí.

3.1 Zlatý obdélník

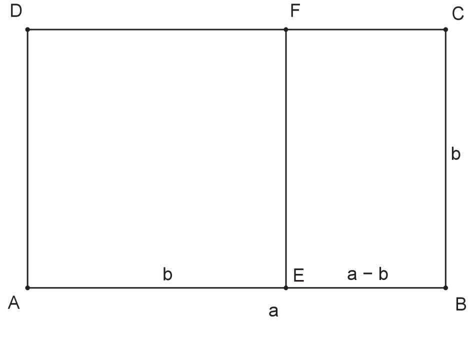
Zlatým obdélníkem nazýváme takový obdélník s rozměry $a \times b$, $a > b$, pro který platí:

$$\frac{a}{b} = \varphi,$$

neboli délky jeho stran jsou v poměru zlatého řezu.

Zlatý obdélník má jako jediný ze všech obdélníků následující zajímavou vlastnost:

> *Oddělíme-li od zlatého obdélníku $ABCD$ $(a \times b)$ čtverec $AEFD$ $(b \times b)$, bude zbylý obdélník $BCFE$ $(b \times (a-b))$ opět zlatý* (obr. 3.1).



Obrázek 3.1: Oddělení čtverce od zlatého obdélníku

Ukážeme si, že výše zmíněné pravidlo platí pouze pro zlatý obdélník (neboli neexistuje jiný poměr délek stran obdélníku, který by se zachoval po odebrání čtverce, než zlaté číslo).

Předpokládejme libovolný obdélník s rozměry $a \times b$, kde $a > b$. Poměr $\frac{a}{b}$ označme m. Hledáme m takové, aby platilo

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b},$$

což je ekvivalentní podmínka s podmínkou

$$\frac{b}{a} = \frac{a-b}{b}.$$

Dosadíme $\frac{a}{b} = m$ (respektive $\frac{b}{a} = \frac{1}{m}$):

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} &= m-1, \\ 0 &= m^2 - m - 1. \end{aligned} \tag{3.1}$$

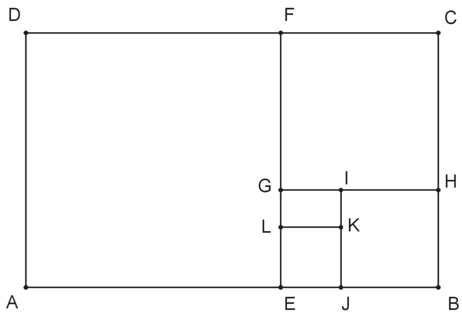
Rovnice 3.1 má kořeny

$$m_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, m_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

přičemž druhý kořen nepřichází v úvahu, jelikož je záporný a m značí poměr délek stran, tedy podíl dvou kladných čísel. Získali jsme tedy pouze jedno řešení:

$$m = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi,$$

což znamená, že uvedená vlastnost platí pouze pro obdélník, jehož strany jsou v poměru φ.



Obrázek 3.2: Postupné oddělování čtverců

V oddělování čtverců lze stejným způsobem pokračovat. Získáme tak stále menší a menší zlaté obdélníky $EBHG$, $GEJI$, $IGLK, \dots$ (obr. 3.2).

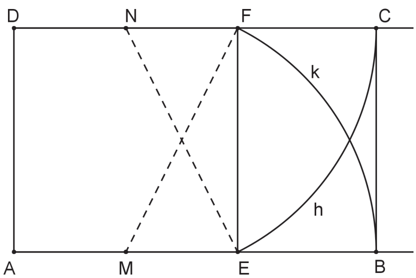
Zlatý obdélník lze narýsovat mnoha způsoby. Vždy můžeme postupovat tak, že pomocí některé z konstrukcí v kapitole 2 narýsujeme dvě úsečky, jejichž poměr délek je zlaté číslo, a tyto úsečky použijeme jako strany hledaného obdélníku. Existují ale i konstrukce zaměřené přímo na hledání zlatého obdélníku.

Konstrukce 1

Sestrojte zlatý obdélník $ABCD$, je-li dána jeho kratší strana AD.

Řešení (obr. 3.3):

1. $E, F; AEFD$ je čtverec,
2. $M; M \in \frac{1}{2}|AE|$,
3. $N; N \in \frac{1}{2}|DF|$,
4. $k; k(M; |FM|)$,
5. $h; h(N; |EN|)$,
6. $B; B \in (\mapsto AE \cap k)$,
7. $C; C \in (\mapsto DF \cap h)$,
8. obdélník $ABCD$.



Obrázek 3.3: Konstrukce 1

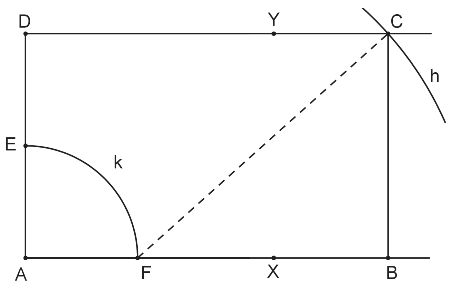
Tato konstrukce vychází z konstrukce 2 uvedené na straně 25.

Konstrukce 2

Sestrojte zlatý obdélník $ABCD$, je-li dána jeho kratší strana AD.

Řešení (obr. 3.4):

1. $\mapsto AX; AX \perp AD$,
2. $\mapsto DY; DY \perp AD$,
3. $E; E \in \frac{1}{2}|AD|$,
4. $k; k(A; |AE|)$,
5. $F; F \in (\mapsto AX \cap k)$,
6. $h; h(F, 3|AE|)$,
7. $C; C \in (\mapsto DY \cap h)$,



Obrázek 3.4: Konstrukce 2

8. $B; B \in \mapsto AX, |AB| = |DC|$,
9. obdélník $ABCD$.

Ukážeme si, že zde uvedená konstrukce dává korektní výsledek:

Nechť $|AD| = b$, potom:

$$\begin{aligned}
|AE| &= |AF| = \frac{b}{2}, \\
|CF| &= 3 \cdot |AE| = \frac{3b}{2}, \\
|BC| &= |AD| = b, \\
|BF| &= \sqrt{|CF|^2 - |CB|^2} = \sqrt{\frac{9b^2}{4} - b^2} = \frac{b}{2}\sqrt{5}, \\
|AB| &= |AF| + |BF| = \frac{b}{2} + \frac{b}{2}\sqrt{5} = \frac{b}{2}(1+\sqrt{5}), \\
\frac{|AB|}{|AD|} &= \frac{\frac{b}{2}(1+\sqrt{5})}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi.
\end{aligned}$$

Poměr stran narýsováného obdélníku je tedy skutečně roven zlatému číslu.

Další dvě konstrukce byly inspirovány konstrukcemi uvedenými v [35] na stranách 27 a 29.

Konstrukce 3

K pravoúhlému trojúhelníku s odvěsnami dlouhými 3 a 4 jednotky délky a s přeponou dlouhou 5 jednotek délky připište zlatý obdélník tak, aby jeho kratší strana byla shodná s delší odvěsnou.

Řešení (obr. 3.5):

Pravoúhlý trojúhelník popíšeme ABC, kde BC je delší odvěsna a AC přepona. K odvěsně BC připíšeme podle následujícího postupu obdélník $BEFC$.

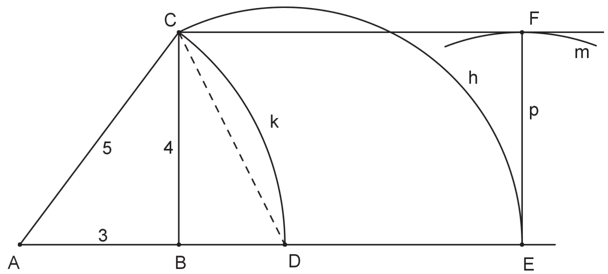
1. $k; k(A, |AC|)$,
2. $D; D \in (\mapsto AB \cap k)$,
3. $h; h(D, |CD|)$,
4. $E; E \in (\mapsto AB \cap h)$,
5. $\leftrightarrow p; p \perp BE, E \in p$,
6. $m; m(E, |BC|)$,
7. $F; F \in (p \cap m)$,

8. obdélník $BEFC$.

Ještě ověříme, že obdélník $BEFC$ je opravdu zlatý. Víme, že $|AB| = 3$, $|BC| = 4$, $|AC| = 5$. Dále platí:

$$\begin{aligned}
|AD| &= 5, \\
|BD| &= |AD| - |AB| = 5 - 3 = 2, \\
|CD| &= |DE| = \sqrt{|BC|^2 + |BD|^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}, \\
|BE| &= |BD| + |DE| = 2 + 2\sqrt{5} = 2(1 + \sqrt{5}), \\
\frac{|BE|}{|BC|} &= \frac{2(1+\sqrt{5})}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi.
\end{aligned}$$

Poměr délek delší a kratší strany obdélníku $BEFC$ je roven φ, obdélník je tedy zlatý.



Obrázek 3.5: Konstrukce 3

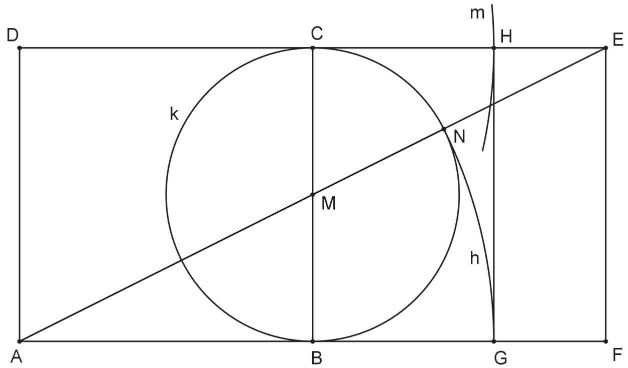
Konstrukce 4

Mějme dva shodné čtverce $ABCD$, $BCEF$ (stranu BC mají společnou). Úkolem je oddělit od čtverce $BCEF$ obdélník $EFGH$ tak, aby obdélník $AGHD$ byl zlatý.

Řešení (obr. 3.6):

1. $M; M \in (CB \cap AE)$,
2. $k; k(M, |BM|)$,
3. $N; N \in (EM \cap k)$,
4. $h; h(A, |AN|)$,
5. $G; G \in (BF \cap h)$,
6. $m; m(D, |AN|)$,

7. $H; H \in (CE \cap m)$,
8. obdélník $AGHD$.



Obrázek 3.6: Konstrukce 4

Opět ověříme, že obdélník $AGHD$ je skutečně zlatý. Nechť strany daných čtverců mají délku a. Tedy $|AB| = |BC| = \cdots = a$. Potom:

$$\begin{aligned}
|BM| &= |MN| = \frac{a}{2}, \\
|AM| &= \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{5}, \\
|AN| &= |AG| = |MN| + |AM| = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{5} = \frac{a}{2}(1+\sqrt{5}), \\
\frac{|AG|}{|AD|} &= \frac{\frac{a}{2}(1+\sqrt{5})}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi,
\end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat.

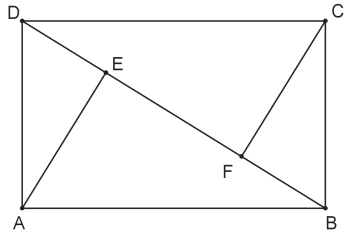
V souvislosti se zlatým obdélníkem uvedu dále jednu zajímavou planimetrickou úlohu převzatou z knihy [38].

Úloha

Je dán zlatý obdélník $ABCD$. Sestrojíme úhlopříčku BD a z bodů A, C na ni spustíme kolmice. Paty kolmic označíme E, F. Porovnejte délky úseček AE, EF, FC (obr. 3.7).

Řešení:

Označme velikost úhlu ABE jako α, velikost úhlu BAE jako β. Jelikož úhel AEB je pravý, platí, že $\alpha + \beta = 90^\circ$ (aby součet



Obrázek 3.7: Úloha

úhlů v trojúhelníku byl 180°). Díky tomu je ale i $|\sphericalangle DAE| = \alpha$, $|\sphericalangle FBC| = \beta, \dots$ a trojúhelníky ABD, EBA, EAD jsou podobné (podle věty uu). Platí:

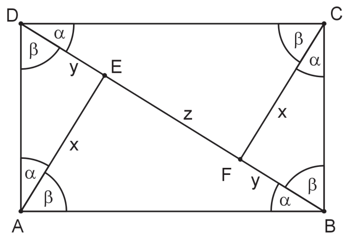
$$\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|EB|}{|EA|} = \frac{|EA|}{|ED|}. \tag{3.2}$$

Navíc z předpokladů víme, že $\dfrac{|AB|}{|AD|} = \varphi$. Označme dále $|AE| = |FC| = x$, $|EF| = z$, $|DE| = |BF| = y$ (obr. 3.8) a dosaďme do vztahu (3.2):

$$\varphi = \frac{z+y}{x} = \frac{x}{y}$$

Odtud plyne, že úsečka délky $z + y$ je rozdělena zlatým řezem na části x a y, neboli $z + y = x + y$, a tedy $z = x$.

Zjistili jsme, že $|AE| = |EF| = |FC|$.



Obrázek 3.8: Řešení úlohy

Z průběhu odvození této vlastnosti je navíc zřejmé, že pro obdélník jiných rozměrů tato vlastnost neplatí. Délky úseček AE, EF, FC se dají zjistit samozřejmě i početně. Za jednotku délky zvolíme $|AD|$, pro delší stranu obdélníku potom platí: $|AB| = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Délku x

určíme například takto:

$$
\begin{aligned}
|BD| &= \sqrt{|AB|^2+|AD|^2} = \sqrt{1^2+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}},\\
S_{ABD} &= \frac{|AB|\cdot|AD|}{2} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot 1}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{4},\\
S_{ABD} &= \frac{|BD|\cdot x}{2} \Rightarrow x = \frac{2\cdot S_{ABD}}{|BD|}.
\end{aligned}
$$

Do posledního vztahu můžeme dosadit (obsah trojúhelníku ABD i délku úsečky BD známe) a vyjádřit hodnotu x číselně. Dopočítání hodnot y a z je pak už pouze záležitostí Pythagorovy věty a práce se zlomky a odmocninami.

Dodatek

Nakonec ještě upozorním na „vlastnost zlatého obdélníku“, která se v literatuře o zlatém řezu velmi často objevuje, ale dle mého názoru trochu neprávem. Jako výsada zlatého obdélníku bývá uváděno následující tvrzení:

Vepíšeme-li zlatý obdélník do čtverce tak, že strany obdélníku jsou rovnoběžné s úhlopříčkami čtverce, budou vrcholy obdélníku dělit jednotlivé strany čtverce zlatým řezem.

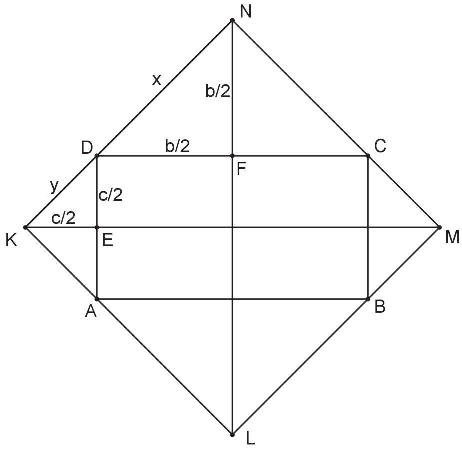
Problém je v tom, že uvedená vlastnost funguje pro obdélník, jehož strany jsou v libovolném poměru, nikoliv pouze v poměru zlatého řezu. Bude-li mít například vepisovaný obdélník strany v poměru 3 : 4, budou jeho vrcholy dělit strany čtverce také v poměru 3 : 4. Obecně lze tedy říci:

Vepíšeme-li obdélník, jehož strany jsou v poměru $b : c$ do čtverce tak, že strany obdélníku jsou rovnoběžné s úhlopříčkami čtverce, budou vrcholy obdélníku dělit jednotlivé strany čtverce v poměru $b : c$.

Důkaz:

Daný čtverec označíme $KLMN$, obdélník $ABCD$. Nechť $|AB| = b$, $|BC| = c$, tedy strany obdélníku jsou v poměru $\frac{b}{c}$. Délky úseček, na které dělí vrcholy obdélníku jednotlivé strany čtverce, označíme x, y. Průsečík úseček CD a LN označíme písmenem F, průsečík úseček AD a KM písmenem E (obr. 3.9). Trojúhelníky KED, DFN jsou podobné (podle věty uu). Oba jsou rovnoramenné a pravoúhlé. Platí:

$$
\begin{aligned}
|DN| &= x,\\
|DF| &= |FN| = \frac{b}{2},\\
|DK| &= y,\\
|EK| &= |DE| = \frac{c}{2}.
\end{aligned}
$$



Obrázek 3.9: Obdélník ve čtverci

Z podobnosti trojúhelníků KED a DFN plyne:

$$\begin{aligned}\frac{|DF|}{|EK|} &= \frac{|DN|}{|DK|},\\ \frac{\frac{b}{2}}{\frac{c}{2}} &= \frac{x}{y},\\ \frac{b}{c} &= \frac{x}{y}.\end{aligned}$$

$\boxtimes$

Uvedené tvrzení tedy není výsadou zlatého obdélníku, ale platí pro obdélník libovolných rozměrů.

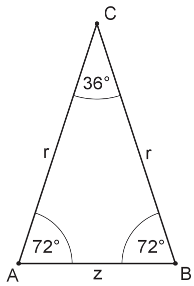
3.2 Zlatý trojúhelník

Zlatý trojúhelník je takový rovnoramenný trojúhelník s ramenem délky r a základnou délky z, pro který platí:

$$\frac{r}{z} = \varphi,$$

neboli poměr délek ramene a základny je zlaté číslo. Každý zlatý trojúhelník má proti základně úhel o velikosti 36° a při základnách úhly velké 72° (obr. 3.10). Tuto skutečnost si dokážeme:

Za jednotku délky zvolíme základnu trojúhelníku. Nyní, aby byl trojúhelník zlatý, musí mít ramena délku $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Velikost úhlu při



Obrázek 3.10: Zlatý trojúhelník

základně označíme α a trojúhelník rozdělíme výškou k základně na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky. Pro úhel α platí:

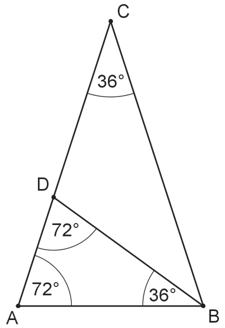
$$\cos\alpha = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{1+\sqrt{5}}. \tag{3.3}$$

Zbývá nám dokázat, že $\cos 72^\circ = \frac{1}{1+\sqrt{5}}$. Potom by úhel α měřil 72°, druhý úhel při základně musí být shodný (jedná se o rovnoramenný trojúhelník) a na úhel naproti základně zbývá 36° (součet úhlů v trojúhelníku musí být 180°). Vztahu $\cos 72^\circ = \frac{1}{1+\sqrt{5}}$ budeme muset prozatím věřit. Jeho platnost je dokázána v podkapitole 3.4, protože pomocí pravidelného pětiúhelníku je důkaz poměrně elegantní a snadnější, než důkazy jiné.

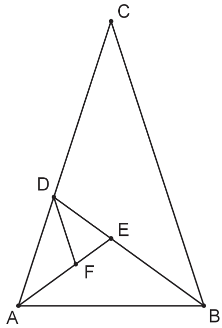
Tvrzení platí i obráceně. Má-li rovnoramenný trojúhelník velikosti vnitřních úhlů 72°, 72° a 36°, je tento trojúhelník zlatý. Platí-li totiž, že $\cos 72^\circ = \frac{1}{1+\sqrt{5}}$, potom je poměr délek poloviny základny a ramene $\frac{1}{1+\sqrt{5}}$, poměr délek základny a ramene tedy bude $\frac{2}{1+\sqrt{5}}$ a převrácená hodnota tohoto zlomku udává poměr délek ramene a základny daného trojúhelníku: $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$.

Vepíšeme-li do zlatého trojúhelníku ABC se základnou AB rovnoramenný trojúhelník DAB s ramenem AB a základnou AD, bude tento trojúhelník opět zlatý. Trojúhelník DAB má totiž shodné úhly s trojúhelníkem ABC. Úhel u vrcholu A mají oba trojúhelníky společný. Tento úhel měří 72°. Trojúhelník DAB je rovnoramenný se zákaldnou AD, proto úhel u vrcholu D musí být shodný s úhlem u vrcholu A a měří tedy také 72°. Na třetí vnitřní úhel zbývá 36°. Jelikož mají vnitřní úhly trojúhelníku DAB velikosti 72°, 72° a 36°, je zlatý (obr. 3.11).

Stejně jako u zlatého obdélníku můžeme do sebe vepisovat stále menší a menší zlaté trojúhelníky ADB, DEA, $EFD, \ldots$ (obr. 3.12).



Obrázek 3.11: Vepsaný trojúhelník



Obrázek 3.12: Další vepsané trojúhelníky

3.3 Zlatá spirála

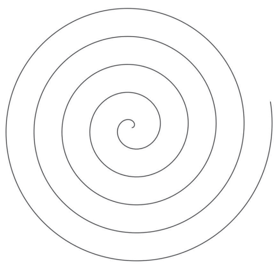
Spirála, které se občas říká zlatá, je speciálním případem logaritmické spirály. Proto nejprve stručně vysvětlím, co je logaritmická spirála (a spirála vůbec).

Spirály jsou rovinné křivky, které lze zavést tak, že vznikají jako trajektorie bodu pohybujícího se nějakým předepsaným způsobem po polopřímce (vzdaluje se od počátku polopřímky), přičemž se tato polopřímka současně otáčí okolo svého počátku. (Obecně se bod může pohybovat po přímce, která se otáčí okolo libovolného pevného bodu, nám však postačí toto zjednodušení.) Část polopřímky ohraničená jejím počátkem a bodem spirály se nazývá průvodič daného bodu. Počátek otáčející se polopřímky bývá nazýván pólem spirály. Mezi nejznámější spirály patří Archimédova spirála a logaritmická spirála.

Archimédova spirála (obr. 3.13) vzniká jako trajektorie bodu, který se od počátku polopřímky vzdaluje rovnoměrně. Jinými slovy, kolikrát zvětšíme úhel otočení polopřímky, tolikrát se vzdálí bod od počátku polopřímky. Vzdálenost jednotlivých závitů je pak konstantní. Rovnice Archimédovy spirály v polárních souřadnicích (r, Θ) vypadá následovně[1]

$$r = a \cdot \Theta,$$

kde a je libovolná kladná konstanta. S touto spirálou se setkáme například při pohledu z boku na srolovaný koberec.



Obrázek 3.13: Archimédova spirála

Definice logaritmické spirály je trochu složitější. Její rovnice v polárních souřadnicích má tvar

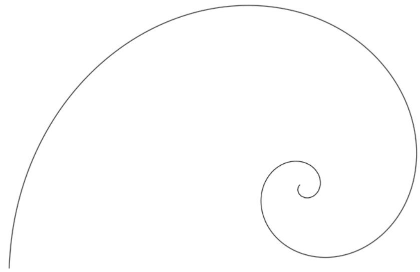
$$r = a \cdot e^{b \cdot \Theta}, \tag{3.4}$$

[1] Polární souřadnice udávají polohu bodu A pomocí jeho vzdálenosti r od počátku soustavy souřadnic P a úhlu Θ (theta), který svírá polopřímka PA s kladným směrem osy x. (Úhel Θ se zadává v radiánech.)

kde a, b jsou kladné reálné konstanty a e je základ přirozeného logaritmu.

Tato křivka (obr. 3.14) má spoustu zajímavých vlastností. Je to transcendentní křivka,[2] která protíná průvodiče svých bodů pod konstantním úhlem ω, (úhel průvodiče a křivky se měří jako úhel průvodiče daného bodu a tečny křivky v tomto bodě) přičemž pro tento úhel platí [26]:

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{1}{b}.$$



Obrázek 3.14: Logaritmická spirála

Aritmetické posloupnosti úhlů Θ přísluší geometrická posloupnost délek průvodičů r. V tabulce jsou uvedeny hodnoty úhlu Θ zvyšující se s diferencí jedna. Kvocient příslušné geometrické posloupnosti délek průvodičů je potom e^b.

Θ	0	1	2	3	4	...
r	a	ae^b	ae^{2b}	ae^{3b}	ae^{4b}	...

S rostoucí hodnotou úhlu Θ se křivka vzdaluje od svého pólu, naopak s klesající hodnotou úhlu Θ se k pólu nekonečně přibližuje. Přitom má „stále stejný tvar". Kdybychom vzali její část blízko pólu a zvětšili jí, dostali bychom část téže logaritmické spirály, jen dál od pólu.

Zlatou spirálu získáme speciální volbou konstanty b, a to takovou, aby pro $\Theta = \frac{\pi}{2}$ bylo $e^{b\cdot\Theta} = \varphi$. To znamená, že $b = \frac{2\ln\varphi}{\pi}$. Dosazením této hodnoty b do předpisu (3.4) dostáváme:

$$\begin{aligned} r &= a\cdot e^{\frac{2\ln\varphi}{\pi}\cdot\Theta}, \\ r &= a\cdot e^{\ln\varphi\cdot\frac{2\Theta}{\pi}}, \\ r &= a\cdot\varphi^{\frac{2\Theta}{\pi}}. \end{aligned}$$

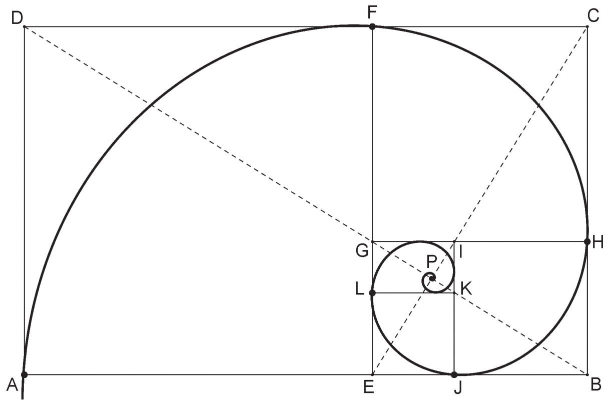
Konstantu a můžeme zvolit za jednotku délky. Potom má rovnice zlaté spirály v polárních souřadnicích tvar

$$r = \varphi^{\frac{2\Theta}{\pi}}.$$

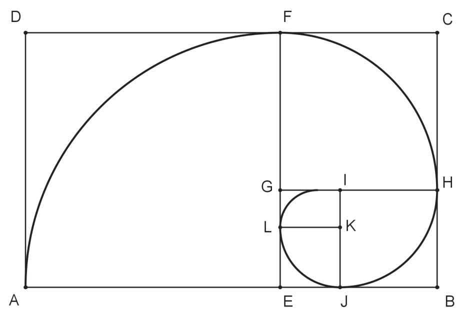
Tuto spirálu lze vkreslit do obrázku, který jsme získali vepisováním stále menších zlatých obdélníků do sebe. Spirála směřující do svého pólu bude procházet po řadě vrcholy A, F, H, J, $L, \ldots$ Její pól P je průsečík úseček BD, CE. Při změně úhlu o 90° $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ se změní délka průvodiče φ krát (obr. 3.15).

Zlatou spirálu lze poměrně dobře aproximovat pomocí čtvrtkružnic. Sestrojíme-li oblouk $\widehat{AF}$ se středem E, na něj připojíme oblouk $\widehat{FH}$ se středem G atd., získáme křivku, která je na první pohled téměř totožná se zlatou spirálou (obr. 3.16).

[2] Transcendentní křivka je taková křivka, kterou lze vyjádřit pouze transcendentním předpisem (transcendentní předpis je každý předpis, který není algebraický), oproti tomu algebraické křivky lze vyjádřit algebraickou rovnicí: $a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_ny^n = 0$.



Obrázek 3.15: Zlatá spirála a zlaté obdélníky

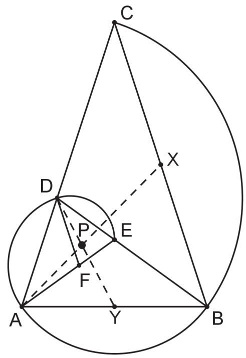


Obrázek 3.16: Aproximace zlaté spirály ve zlatém obdélníku

Logaritmickou spirálou lze proložit i vrcholy do sebe vepsaných zlatých trojúhelníků. Na spirále budou ležet po řadě body C, B, A, D, $E, \ldots$, pólem je průsečík úseček AX, DY, kde X je střed strany BC a Y střed strany AB. I tato logaritmická spirála má (podle [4]) předpis, ve kterém figuruje číslo φ:

$$r = \varphi^{\frac{5\Theta}{3\pi}}.$$

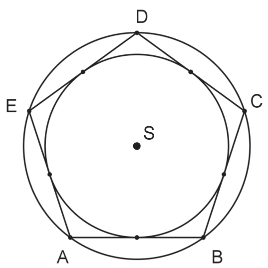
Tento předpis obdržíme, dosadíme-li do rovnice (3.4) $b = \frac{2\ln\varphi}{3\pi}$ a konstantu a zvolíme za jednotku délky. Délka průvodiče se změní φ krát, změníme-li úhel Θ o 108° $\left(\frac{3\pi}{5}\right)$. Spirálu lze opět aproximovat pomocí kružnicových oblouků (obr. 3.17). Oblouk $\widehat{BC}$ je částí kružnice se středem D, oblouk $\widehat{AB}$ je částí kružnice se středem E, oblouk $\widehat{AD}$ je částí kružnice se středem F atd.



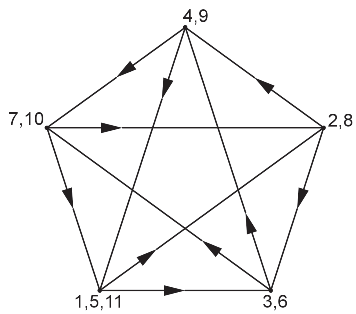
Obrázek 3.17: Aproximace logaritmické spirály ve zlatém trojúhelníku

3.4 Pravidelný pětiúhelník

Konvexní mnohoúhelník, který má pět shodných stran a pět shodných vnitřních úhlů, se nazývá pravidelný pětiúhelník. Stejně jako všem dalším pravidelným mnohoúhelníkům, můžeme pravidelnému pětiúhelníku opsat i vepsat kružnici, přičemž tyto kružnice mají tentýž střed (obr. 3.18).



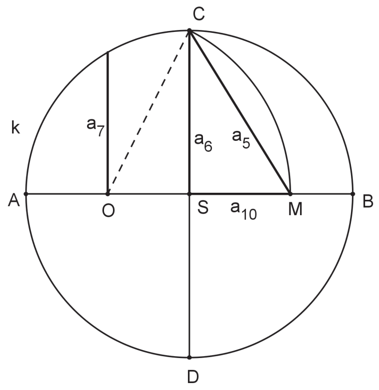
Obrázek 3.18: Kružnice opsaná a vepsaná



Obrázek 3.19: Pětiúhelník jedním tahem

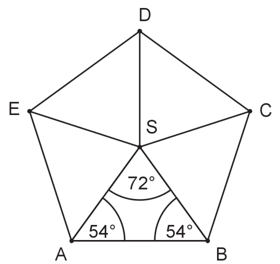
Pro zajímavost podotkněme, že je to jediný pravidelný mnohoúhelník, který má stejný počet stran a úhlopříček, a také mnohoúhelník s nejmenším počtem vrcholů, který lze včetně úhlopříček nakreslit jedním tahem (obr. 3.19).

Na středních školách se žáci většinou učí, jak sestrojit pravidelný pětiúhelník, známe-li poloměr kružnice opsané. K tomu slouží pomocná konstrukce (obr. 3.20). Vyjdeme od dané kružnice k se středem S, sestrojíme její průměr AB a průměr k němu kolmý CD. Dále najdeme střed O poloměru AS a sestrojíme kružnici h se středem O a poloměrem OC. Průsečík kružnice h s úsečkou BS označíme M. Nyní se délka úsečky CM rovná délce strany pravidelného pětiúhelníku vepsaného do kružnice k. Navíc délka úsečky MS je velikost strany pravidelného desetiúhelníku, poloměr kružnice k je velikost strany pravidelného



Obrázek 3.20: Konstrukce mnohoúhelníků

šestiúhelníku a polovina tětivy kolmé na průměr AB a procházející bodem O je přibližně délka pravidelného sedmiúhelníku vepsaného do kružnice k. Tato konstrukce bývá vyučována jako návod, bez důkazu.



Obrázek 3.21: Vnitřní úhly

Další možnou a snadnou konstrukcí je konstrukce pomocí úhloměru. Využijeme toho, že libovolný pravidelný n-úhelník je sjednocením n shodných rovnoramenných trojúhelníků se společným vrcholem ve středu n-úhelníku. Základnami těchto trojúhelníků jsou strany n-úhelníku, velikost vnitřního úhlu u vrcholu proti základně je $\frac{360°}{n}$. Pravidelný pětiúhelník (dále jen pětiúhelník) můžeme tedy rozdělit na pět shodných rovnoramenných trojúhelníků se společným vrcholem ve středu pětiúhelníku. Vnitřní úhel každého trojúhelníku u společného vrcholu má velikost $72°$, úhly u základny musí být shodné, každý tedy měří $54°$ (obr. 3.21). Mimochodem jsme tímto postupem zjistili i velikost vnitřního úhlu pětiúhelníku; stačí sečíst dva vnitřní úhly u základen trojúhelníků a obdržíme $108°$. Známe-li vnitřní úhly trojúhelníků, můžeme pomocí úhloměru tyto trojúhelníky narýsovat a postupně tak získat celý pětiúhelník. Lze v tomto případě začít i od dané strany pětiúhelníku. Nejedná se ovšem o pravou eukleidovskou konstrukci (t.j. o konstrukci prováděnou pouze pomocí kružítka a pravítka, na kterém navíc není žádné měřítko a „nemá druhý okraj“ – nelze jím kreslit rovnoběžky).

Uvedu zde tři tvrzení o zlatém řezu v pravidelném pětiúhelníku (včetně důkazů). Použití některých z nich umožňuje narýsovat pětiúhelník, je-li dána jeho strana, bez použití úhloměru. Také si ukážeme, proč je hodnota $\cos 72°$ rovna $\frac{1}{1+\sqrt{5}}$ a proč je konstrukce pětiúhelníku popsaná ve druhém odstavci této podkapitoly správná.

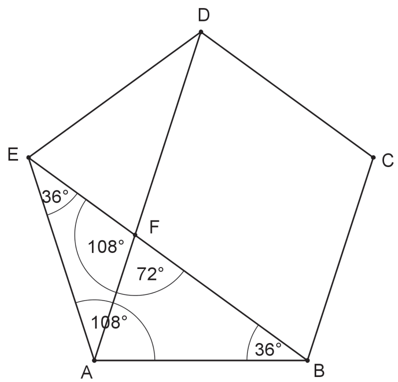
Tvrzení 1:

V pravidelném pětiúhelníku dělí průsečík dvou úhlopříček, které nemají společný krajní bod, každou z nich ve zlatém řezu.

Důkaz (obr. 3.22):

Mějme pětiúhelník $ABCDE$. Průsečík úhlopříček AD, BE označíme F. Trojúhelník ABE je rovnoramenný, protože jeho strany AB, AE jsou shodné. Vnitřní úhel trojúhelníku ABE u vrcholu A měří 108°. Úhly u základny BE musí být shodné, každý tedy měří 36° $(108 + 36 + 36 = 180)$. Trojúhelník EAF je také rovnoramenný. Víme, že úhel AEB měří 36°. Úhel EAD je shodný s úhlem AEB, protože trojúhelníky ABE, EAD jsou shodné, měří tedy také 36°. Na vnitřní úhel u vrcholu F v trojúhelníku EAF zbývá 108°. Trojúhelníky BEA, EAF jsou tedy podobné podle věty *uu*. Platí

$$\frac{|BE|}{|AE|} = \frac{|AB|}{|EF|}. \tag{3.5}$$



Obrázek 3.22: Tvrzení 1

Dopočítáním úhlů zjistíme, že trojúhelník ABF je také rovnoramenný se základnou AF. Proto $|AB| = |BF|$. Navíc platí, že $|AB| = |AE|$. Dosadíme-li do vztahu (3.5) za $|AE|$ a $|AB|$ velikost $|BF|$, obdržíme

$$\frac{|BE|}{|BF|} = \frac{|BF|}{|EF|},$$

přičemž bod F leží na úsečce BE. Znamená to tedy, že bod F dělí úsečku BE zlatým řezem.

$\boxtimes$

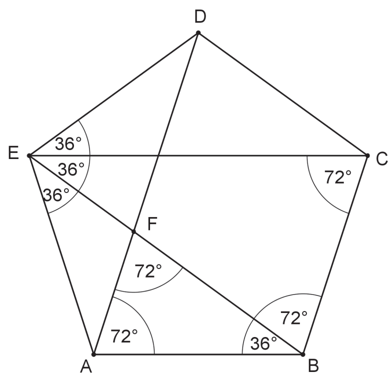
Tvrzení 2:

Poměr délek úhlopříčky a strany pravidelného pětiúhelníku je zlaté číslo.

Důkaz (obr. 3.23):

Z předchozího víme, že $|\sphericalangle AEB| = 36°$. Stejně tak $|\sphericalangle CED| = 36°$. Na úhel BEC zbývá také 36°, protože $|\sphericalangle AED| = 108°$. Trojúhelník BCE je rovnoramenný se základnou BC. Úhly u základny musí být shodné, mají tady velikost 72°. Stejné úhly, jak víme z předchozího důkazu, jsou i v trojúhelníku AFB. Trojúhelníky BCE, FAB jsou podobné podle věty *uu*. Proto

$$\frac{|BE|}{|AB|} = \frac{|BC|}{|FA|}. \tag{3.6}$$



Obrázek 3.23: Tvrzení 2

Dále platí:

$$\begin{aligned} |BC| &= |AB| = |BF|, \\ |FA| &= |EF|, \end{aligned}$$

tedy $\dfrac{|BC|}{|FA|} = \dfrac{|BF|}{|EF|}$.

Podle tvrzení 1 platí: $\dfrac{|BF|}{|EF|} = \varphi$.

Vrátíme-li se zpět ke vztahu (3.6), dostáváme:

$$\frac{|BE|}{|AB|} = \frac{|BC|}{|FA|} = \frac{|BF|}{|EF|} = \varphi.$$

$\boxtimes$

Tvrzení 3:

Sestrojíme-li všechny úhlopříčky pravidelného pětiúhelníku, dostaneme pěticípou hvězdu, uvnitř které je opět pravidelný pětiúhelník. Poměr délek stran původního a nového pětiúhelníku se rovná druhé mocnině zlatého čísla.

Důkaz (obr. 3.24):

Původní pětiúhelník označme $ABCDE$ a délku jeho strany a, nový pětiúhelník označme $KLMNO$, délku jeho strany x. Platí:

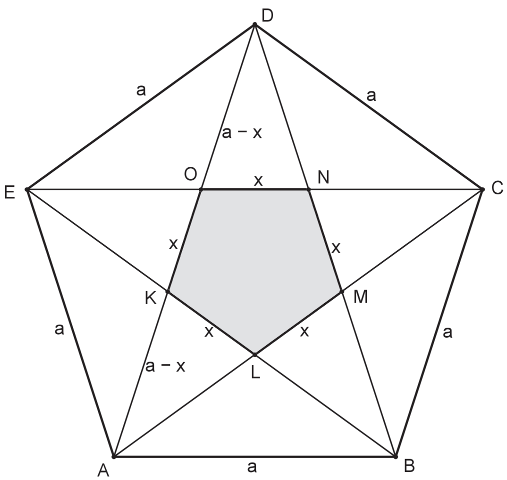
$$\begin{aligned} |AE| &= |AO| = a, \\ |AK| &= |DO| = a - x. \end{aligned}$$

Podle tvrzení 2 dále víme, že $\dfrac{|AO|}{|DO|} = \varphi$. Dále platí:

$$\frac{|AO|}{|DO|} = \frac{|AO|}{|AK|} = \frac{a}{a-x},$$

neboli

$$\varphi = \frac{a}{a-x}.$$



Obrázek 3.24: Tvrzení 3

Poslední rovnost dále upravíme:

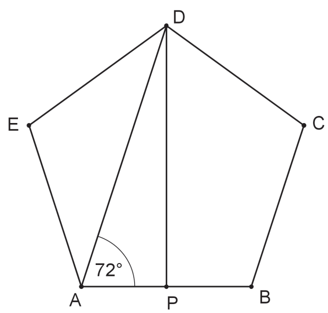
$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\varphi} &= \frac{a-x}{a}, \\
\frac{1}{\varphi} &= 1-\frac{x}{a}, \\
\frac{x}{a} &= 1-\frac{1}{\varphi}, \\
\frac{x}{a} &= \frac{\varphi-1}{\varphi}, \\
\frac{a}{x} &= \frac{\varphi}{\varphi-1}, \\
\frac{a}{x} &= \frac{\varphi}{\frac{1}{\varphi}}, \\
\frac{a}{x} &= \varphi^2,
\end{aligned}
$$

což jsme chtěli dokázat. Při úpravách jsme využili vlastnost zlatého čísla $\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}$ dokázanou v podkapitole 1.2.

$\boxtimes$

Nyní můžeme ukázat, proč $\cos 72^\circ = \dfrac{1}{1+\sqrt{5}}$, jak jsme použili v podkapitole 3.2. Délku strany pětiúhelníku $ABCDE$ můžeme zvolit za jednotku délky, tedy $|AB| = 1$. Potom (podle tvrzení 2) $|AD| = \varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Víme, že $|\sphericalangle DAB| = 72^\circ$. Spustíme-li z bodu D kolmici na úsečku AB a označíme-li její patu P (obr. 3.25), pak v trojúhelníku APD platí:

$$\cos 72^\circ = \frac{|AP|}{|AD|} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{1+\sqrt{5}}.$$



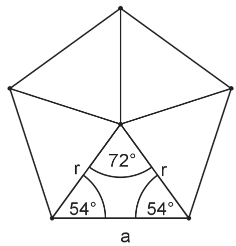
Obrázek 3.25: Trojúhelník APD

Dále si ukážeme, že „středoškolská“ konstrukce pětiúhelníku vepsaného do dané kružnice (obr. 3.20) je korektní. Je-li poloměr dané kružnice r, potom

$$\begin{aligned} |OC| &= |OM| = \sqrt{|OS|^2 + |SC|^2} = \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 + r^2} = \frac{r}{2}\sqrt{5}, \\ |SM| &= |OM| - |OS| = \frac{r}{2}\sqrt{5} - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1), \\ |CM|^2 &= |CS|^2 + |SM|^2 = r^2 + \left[\frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)\right]^2 = \frac{r^2}{2}(5 - \sqrt{5}). \end{aligned}$$

Rozdělíme-li pětiúhelník na shodné rovnoramenné trojúhelníky, pak v každém trojúhelníku podle kosinové věty platí (obr. 3.26):

$$\begin{aligned} a^2 &= r^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot r \cdot \cos 72°, \\ a^2 &= 2r^2(1 - \cos 72°), \\ a^2 &= 2r^2\left(1 - \frac{1}{1 + \sqrt{5}}\right), \\ a^2 &= \frac{r^2}{2}(5 - \sqrt{5}), \end{aligned}$$



Obrázek 3.26: Kosinová věta

neboli $a^2 = |CM|^2$. Odtud $a = |CM|$, konstrukce je tedy správná.

Nyní si (již bez důkazů) ukážeme několik konstrukcí pravidelného pětiúhelníku, které jsou založeny na tvrzeních 1, 2 (strany 52, 53). S využitím postupů, jak sestrojit zlatý řez úsečky, uvedených v kapitole 2 bychom podobných konstrukcí vymysleli jistě mnoho. Zde popsané návody byly vytvořeny na základě konstrukcí z knihy [35].

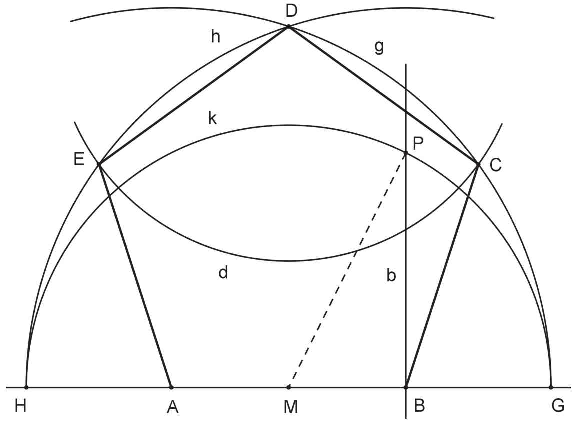
Konstrukce 1

> Je dána strana AB pravidelného pětiúhelníku $ABCDE$. Sestrojte tento pětiúhelník.

Postup konstrukce (obr. 3.27):

1. $\leftrightarrow b; b \perp AB, B \in b,$
2. $P; P \in b, |BP| = |AB|,$
3. $M; M \in \frac{1}{2}|AB|,$
4. $k; k(M, |MP|),$
5. $G; G \in (\mapsto AB \cap k),$
6. $H; H \in (\mapsto BA \cap k),$

7. $g; g(A, |AG|)$,
8. $h; h(B, |BH|)$,
9. $D; D \in (g \cap h)$,
10. $d; d(D, |AB|)$,
11. $C; C \in (d \cap g)$,
12. $E; E \in (d \cap h)$,
13. pětiúhelník $ABCDE$.



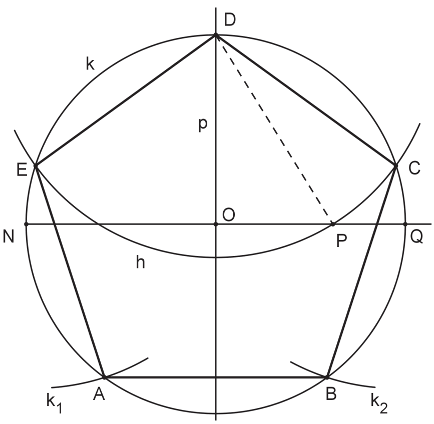
Obrázek 3.27: Konstrukce 1

Konstrukce 2

Narýsujte pravidelný pětiúhelník, je-li dán poloměr r kružnice jemu opsané.

Postup konstrukce (obr. 3.28):

1. $k; k(O, r)$,
2. $N; N \in k$,
3. $Q; Q \in (\hookrightarrow ON \cap k)$,
4. $P; P \in OQ, \dfrac{NP}{NO} = \dfrac{NO}{OP}$ (O dělí NP zlatým řezem),
5. $\leftrightarrow p; p \perp ON, O \in p$,
6. $D; D \in (\leftrightarrow p \cap k)$,
7. $h; h(D, |DP|)$,
8. $C, E; C, E \in (h \cap k)$,
9. $k_1; k_1(E, |DP|)$,
10. $k_2; k_2(C, |DP|)$,
11. $A; A \in (k_1 \cap k)$,
12. $B; B \in (k_2 \cap k)$,
13. pětiúhelník $ABCDE$.



Obrázek 3.28: Konstrukce 2

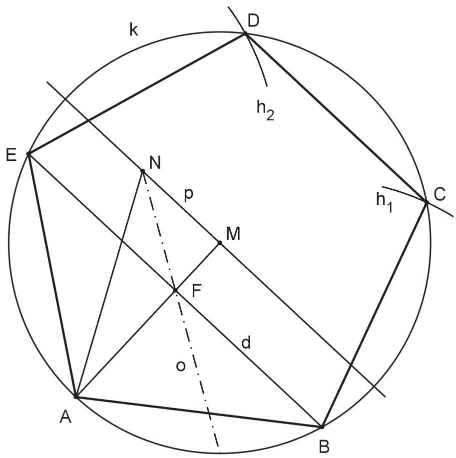
Tento postup v podstatě odpovídá středoškolské konstrukci popsané na straně 50.

Konstrukce 3

Narýsujte pravidelný pětiúhelník, je-li dán poloměr r kružnice jemu opsané.

Postup konstrukce (obr. 3.29):

1. $k; k(M, r)$,
2. $A; A \in k$,
3. $\leftrightarrow p; p \perp AM, M \in p$,
4. $N; N \in p, |MN| = \frac{1}{2}|AM|$,
5. $o; o$ je osa úhlu MNA,
6. $F; F \in (AM \cap o)$,
7. $\leftrightarrow d; d \perp AM, F \in d$,
8. $B, E; B, E \in (\leftrightarrow d \cap k)$,
9. $h_1; h_1(B, |AB|)$,
10. $h_2; h_2(E, |AB|)$,
11. $C; C \in (h_1 \cap k)$,
12. $D; D \in (h_2 \cap k)$,
13. pětiúhelník $ABCDE$.



Obrázek 3.29: Konstrukce 3

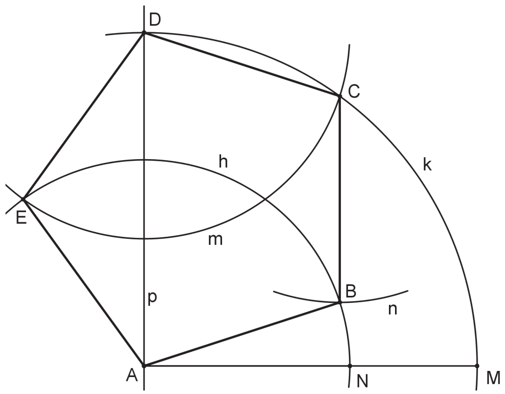
Konstrukce 4

Narýsujte pravidelný pětiúhelník, je-li dána délka jeho úhlopříčky u.

Postup konstrukce (obr. 3.30):

1. $AM; |AM| = u$,
2. $N; N \in AM, \dfrac{|AM|}{|AN|} = \dfrac{|AN|}{|NM|}$ (N dělí AM zlatým řezem),
3. $\leftrightarrow p; p \perp AM, A \in p$,
4. $k; k(A, |AM|)$,
5. $D; D \in (\leftrightarrow p \cap k)$,
6. $h; h(A, |AN|)$,
7. $m; m(D, |AN|)$,

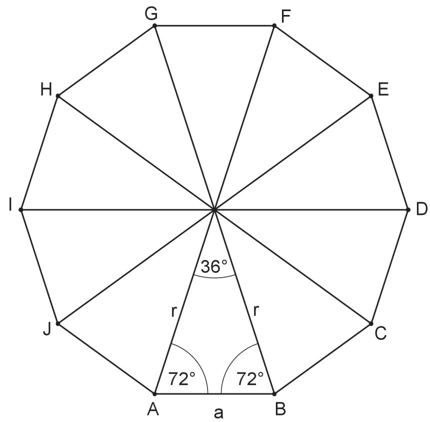
8. $E; E \in (h \cap m)$,
9. $C; C \in (k \cap m)$,
10. $n; n(C, |AN|)$,
11. $B; B \in (h \cap n)$,
12. pětiúhelník $ABCDE$.



Obrázek 3.30: Konstrukce 4

3.5 Pravidelný desetiúhelník

Pravidelný desetiúhelník (dále jen desetiúhelník) je konvexní mnohoúhelník, který má deset shodných stran a deset shodných vnitřních úhlů.



Obrázek 3.31: Pravidelný desetiúhelník

Tento obrazec rozdělíme na deset shodných rovnoramenných trojúhelníků, jejichž základny jsou strany desetiúhelníku a ramena jsou poloměry kružnice desetiúhelníku opsané (všechny trojúhelníky mají společný vrchol – střed této kružnice), a dopočítáme velikosti vnitřních úhlů rovnoramenných trojúhelníků (obr. 3.31). Plný úhel okolo středu kružnice opsané jsme rozdělili na deset shodných úhlů, každý má tedy velikost 36°. Na úhly při základně v každém trojúhelníku zbývá 144°, každý z nich má tedy velikost 72° (musí být shodné).

V podkapitole 3.2 jsme se dozvěděli, že trojúhelník, jehož vnitřní úhly mají velikosti 36°, 72°, 72° je zlatý. To znamená, že poměr délek ramena a základny je zlaté číslo φ. V případě desetiúhelníku to znamená, že poměr poloměru kružnice opsané r a strany desetiúhelníku a_{10} je φ, neboli

$$\frac{r}{a_{10}} = \varphi,$$

což znamená, že

$$r = a_{10} \cdot \varphi. \tag{3.7}$$

Tato skutečnost nás opravňuje k tvrzení, že délka úsečky SM (obr. 3.20) je skutečně délkou pravidelného desetiúhelníku vepsaného do kružnice k. Z výpočtu na straně 56, při kterém jsme dokazovali správnost středoškolské konstrukce pravidelného pětiúhelníku vepsaného do dané kružnice, totiž vyplývá:

$$\begin{aligned} |OM| &= |OC| = \frac{r}{2}\sqrt{5}, \\ |OS| &= \frac{r}{2}, \\ |SM| &= |OM| - |OS| = \frac{r}{2}\sqrt{5} - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1). \end{aligned}$$

Poslední řádek je při označení $|SM| = a_{10}$ ekvivalentní se vztahem (3.7).

3.6 Další rovinné útvary a úlohy

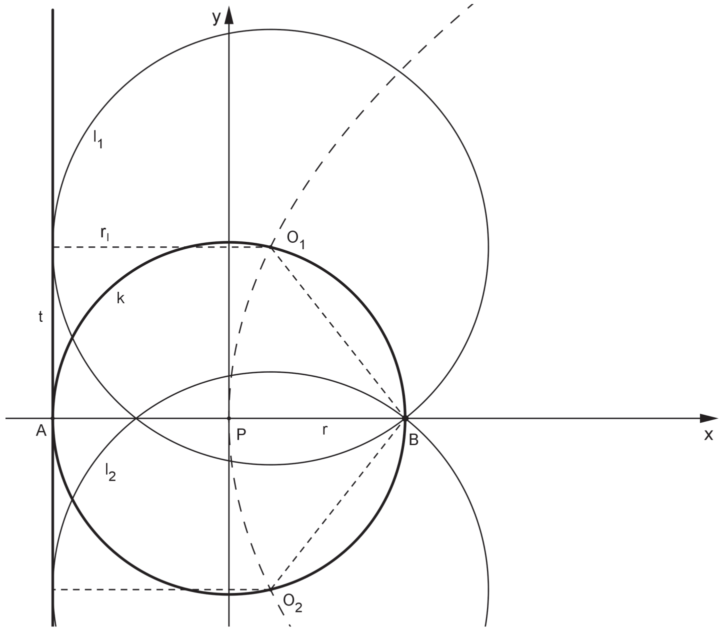
V této podkapitole bych ráda ukázala některé zajímavé úlohy nebo konstrukce v rovině, které nešlo tematicky zařadit do předchozích částí.

Úloha 1

> Je dána kružnice k. V koncovém bodě A průměru AB je vedena tečna t. Jest sestrojiti kružnici l, jejíž střed je na kružnici k a která se dotýká přímky t a prochází bodem B. (Tato úloha je z knihy [5].)

Řešení (obr. 3.32):

> Úlohu můžeme řešit analyticky. Nejprve vhodně zvolíme kartézskou soustavu souřadnic. Její počátek P umístíme do středu kružnice k (s poloměrem r), průměr AB nechť leží na ose x. Dané objekty mají tedy rovnice:
>
> $$\begin{aligned} k : x^2 + y^2 = r^2, \\ t : x = -r, \\ A[-r; 0], B[r; 0]. \end{aligned}$$
>
> Střed O hledané kružnice l musí splňovat dvě podmínky. Za prvé má ležet na kružnici k, čili jeho souřadnice musí vyhovovat rovnici kružnice k, za druhé jeho vzdálenosti od přímky t a od bodu B musí být stejné, protože kružnice l se má dotýkat přímky t a současně procházet bodem B. To znamená, že střed O bude ležet na



Obrázek 3.32: Úloha 1

parabole, jejíž řídící přímkou je přímka t a ohniskem bod B. Tato parabola má rovnici $y^2 = 4rx$. Její vrchol je uprostřed mezi ohniskem a řídící přímkou, t. j. v počátku, a její parametr je vzdálenost ohniska a řídící přímky, tedy $2r$.

Bod O má vyhovovat rovnicím $x^2 + y^2 = r^2$ a $y^2 = 4rx$. Řešíme-li soustavu těchto rovnic, vyjde

$$x_1 = r(\sqrt{5} - 2),$$
$$x_2 = -r(\sqrt{5} + 2).$$

Evidentně vyhovuje první výsledek (x-ová souřadnice bodu O musí být větší než $(-r)$, aby kružnice l ležela ve stejné polorovině určené přímkou t jako bod B). Poloměr r_l kružnice l získáme, přičteme-li k výsledku x_1 ještě vzdálenost r. Tedy

$$r_l = x_1 + r = r(\sqrt{5} - 2) + r = r(\sqrt{5} - 1).$$

Z výsledku můžeme dále odvodit:

$$\begin{aligned}
\frac{r}{r_l} &= \frac{1}{\sqrt{5} - 1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}, \\
\frac{2r}{r_l} &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi,
\end{aligned}$$

neboli poloměr hledané kružnice l je větší částí průměru kružnice k rozděleného zlatým řezem. Úloha má dvě řešení (průsečíky kružnice k s parabolou jsou dva, oba mají shodnou x-ovou souřadnici a v obou případech má hledaná kružnice týž poloměr r_l).

V knize [5] je řešení této úlohy provedeno synteticky s užitím Pythagorovy věty a vět Eukleidových. Závěr je však stejný.

Úloha 2

Určete velikosti vnitřních úhlů rovnoramenného lichoběžníku $ABCD$, jestliže trojúhelníky ABC, ACD jsou rovnoramenné (zadání této úlohy je přeformulovaným zadáním úlohy z učebnice [17].)

Řešení (obr. 3.33):

Označíme $|\sphericalangle DAC| = \alpha_2$, $|\sphericalangle CAB| = \alpha_1$, $|\sphericalangle ABC| = \beta$, $|\sphericalangle BCA| = \gamma_1$, $|\sphericalangle ACD| = \gamma_2$, $|\sphericalangle CDA| = \delta$ a ujasníme si, co pro tyto úhly platí:

$$\alpha_1 = \gamma_2 \text{ (střídavé úhly)}, \tag{3.8}$$
$$\alpha_2 = \gamma_2 \text{ (rovnoramenný trojúhelník } ACD\text{)}, \tag{3.9}$$
$$\gamma_1 = \beta \text{ (rovnoramenný trojúhelník } BCA\text{)}, \tag{3.10}$$
$$\beta = \alpha_1 + \alpha_2 \text{ (rovnoramenný lichoběžník } ABCD\text{)}. \tag{3.11}$$

Podle (3.8) a (3.9) platí

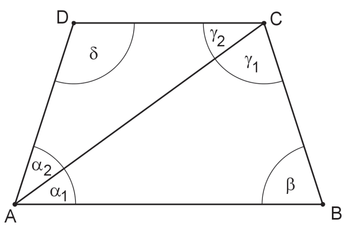
$$\alpha_1 = \alpha_2, \tag{3.12}$$

podle (3.11) a (3.12) platí

$$\beta = 2\alpha_1 \tag{3.13}$$

a podle (3.10) a (3.13) je

$$\gamma_1 = 2\alpha_1. \tag{3.14}$$



Obrázek 3.33: Úhly v rovnoramenném lichoběžníku

Proto pro součet úhlů v trojúhelníku BCA platí:

$$\begin{aligned}\alpha_1+\beta+\gamma_1 &= 180^\circ,\\ \alpha_1+2\alpha_1+2\alpha_1 &= 180^\circ,\\ 5\alpha_1 &= 180^\circ,\\ \alpha_1 &= 36^\circ.\end{aligned}$$

Nyní už není problém dopočítat velikosti dalších úhlů:

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= 2\alpha_1 = 72^\circ,\\ \beta &= \gamma_1 = 72^\circ,\\ \alpha_2 &= \alpha_1 = 36^\circ,\\ \gamma_2 &= \alpha_2 = 36^\circ,\\ \delta &= \gamma_1+\gamma_2 = 108^\circ.\end{aligned}$$

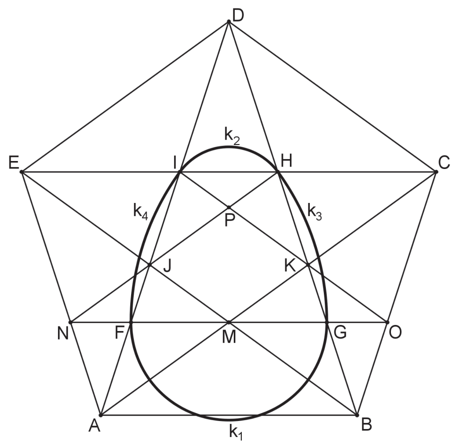
A proč tento příklad uvádím? Aniž bychom o to usilovali, souvisí výsledek se zlatým číslem. Trojúhelník BCA je podle velikostí vnitřních úhlů zlatý. Poměr délek úhlopříčky a ramena lichoběžníku je díky tomu roven φ.

Úloha 3

Kresba „obrysu vejce“ (podle konstrukce uvedené v [35]).

Postup konstrukce (obr. 3.34):

1. pravidelný pětiúhelník $ABCDE$,
2. $H; H \in (BD \cap CE)$,
3. $I; I \in (AD \cap CE)$,
4. $M; M \in (AC \cap BE)$,
5. $J; J \in (AD \cap BE)$,
6. $K; K \in (BD \cap AC)$,
7. $N; N \in (\mapsto HJ \cap AE)$,
8. $O; O \in (\mapsto IK \cap BC)$,
9. $F; F \in (AD \cap NO)$,
10. $G; G \in (BD \cap NO)$;
    navíc $M \in NO$,
11. $P; P \in (HJ \cap IK)$,



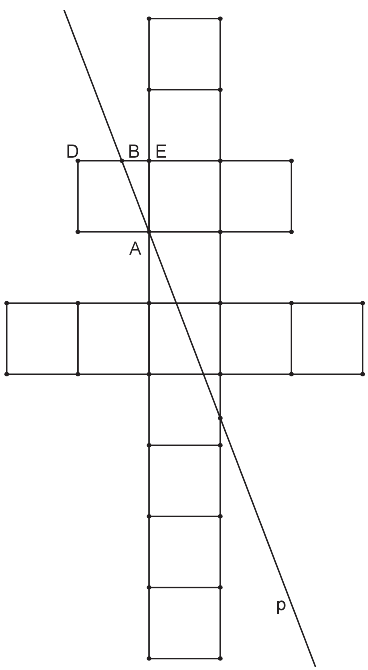
Obrázek 3.34: „Obrys vejce“

12. $k_1; k_1(M, |MF| = |MG|)$; stačí oblouk $\widehat{FG}$,
13. $k_2; k_2(P, |PI| = |PH|)$; stačí oblouk $\widehat{HI}$,
14. $k_3; k_3(N, |NH| = |NG|)$; stačí oblouk $\widehat{GH}$,
15. $k_4; k_4(O, |OI| = |OF|)$; stačí oblouk $\widehat{IF}$.

Nyní křivka složená z oblouků $\widehat{FG}$, $\widehat{GH}$, $\widehat{HI}$, $\widehat{IF}$ velmi připomíná obrys vejce. Přitom zlaté číslo najdeme v obrázku hned několikrát, protože jsme pracovali s úhlopříčkami pravidelného pětiúhelníku. Například $\frac{|CE|}{|EH|} = \frac{|CE|}{|CI|} = \frac{|AD|}{|AI|} = \cdots = \varphi$.

Úloha 4

Bodem A veďte přímku a tak, aby rozdělila plochu Lotrinského kříže[3] na dvě části stejného obsahu. Průsečík přímky a s úsečkou DE označte B (obr. 3.35). V jakém poměru dělí bod B úsečku DE?



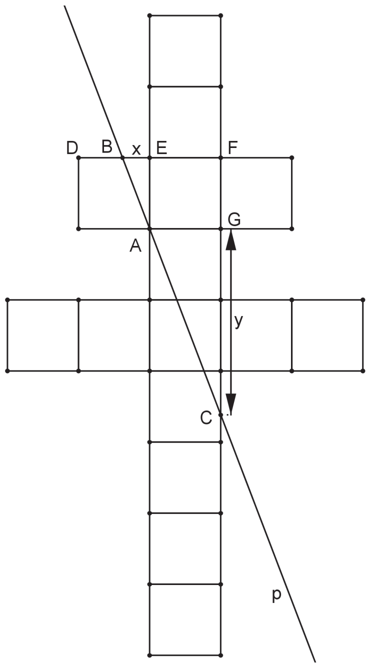
Obrázek 3.35: Lotrinský kříž – zadání

[3] Lotrinský kříž, původně snad znak Jany z Arku, složený z patnácti jednotkových čtverců byl za 2. světové války symbolem svobodných francouzských sil.

Řešení (obr. 3.36):

Jelikož je obsah celého kříže 15 čtverečných jednotek, plocha každé oblasti, na kterou jsme kříž rozdělili, je 7,5 jednotek čtverečných. Označme druhý průsečík přímky a s hranicí kříže písmenem C a podívejme se na pravoúhlé trojúhelníky BFC, BEA, AGC. Označíme-li délku úsečky BE písmenem x a délku úsečky CG písmenem y, potom

$$\begin{aligned} S_{BFC} &= \frac{(x+1)(y+1)}{2}, \\ S_{BEA} &= \frac{x}{2}, \\ S_{AGC} &= \frac{y}{2}. \end{aligned}$$



Obrázek 3.36: Lotrinský kříž – řešení

Pro tyto trojúhelníky ale také platí

$$\begin{aligned} S_{BFC} &= 7,5-5, \\ S_{BEA}+S_{AGC} &= 7,5-6, \end{aligned}$$

protože plocha horní části kříže musí mít velikost 7.5 čtverečných jednotek a obsah každého čtverce je jedna. Spojíme-li uvedené vztahy dohromady, dostáváme

$$\begin{aligned}\frac{(x+1)(y+1)}{2} &= 7.5-5 \Leftrightarrow xy+x+y=4,\\ \frac{x}{2}+\frac{y}{2} &= 7.5-6 \Leftrightarrow x+y=3.\end{aligned}$$

Řešením této soustavy jsou uspořádané dvojice

$$\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2};\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right],\ \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2};\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right],$$

přičemž druhé řešení nevyhovuje, jelikož (jak je patrné z obrázku) přímka BC musí mít takový sklon, aby $y > x$, jinak by plochu kříže nerozdělila na stejné části. Zjistili jsme tedy, že $|BE| = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Dopočítáme ještě délku úsečky BD a zjistíme hodnoty příslušných poměrů:

$$\begin{aligned}|BD| &= |DE|-|BE| = 1-\frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},\\ \frac{|BD|}{|BE|} &= \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} = \varphi.\end{aligned}$$

Bod B dělí úsečku DE na dvě části, jejichž poměr je zlaté číslo. Tedy bod B dělí tuto úsečku ve zlatém řezu.