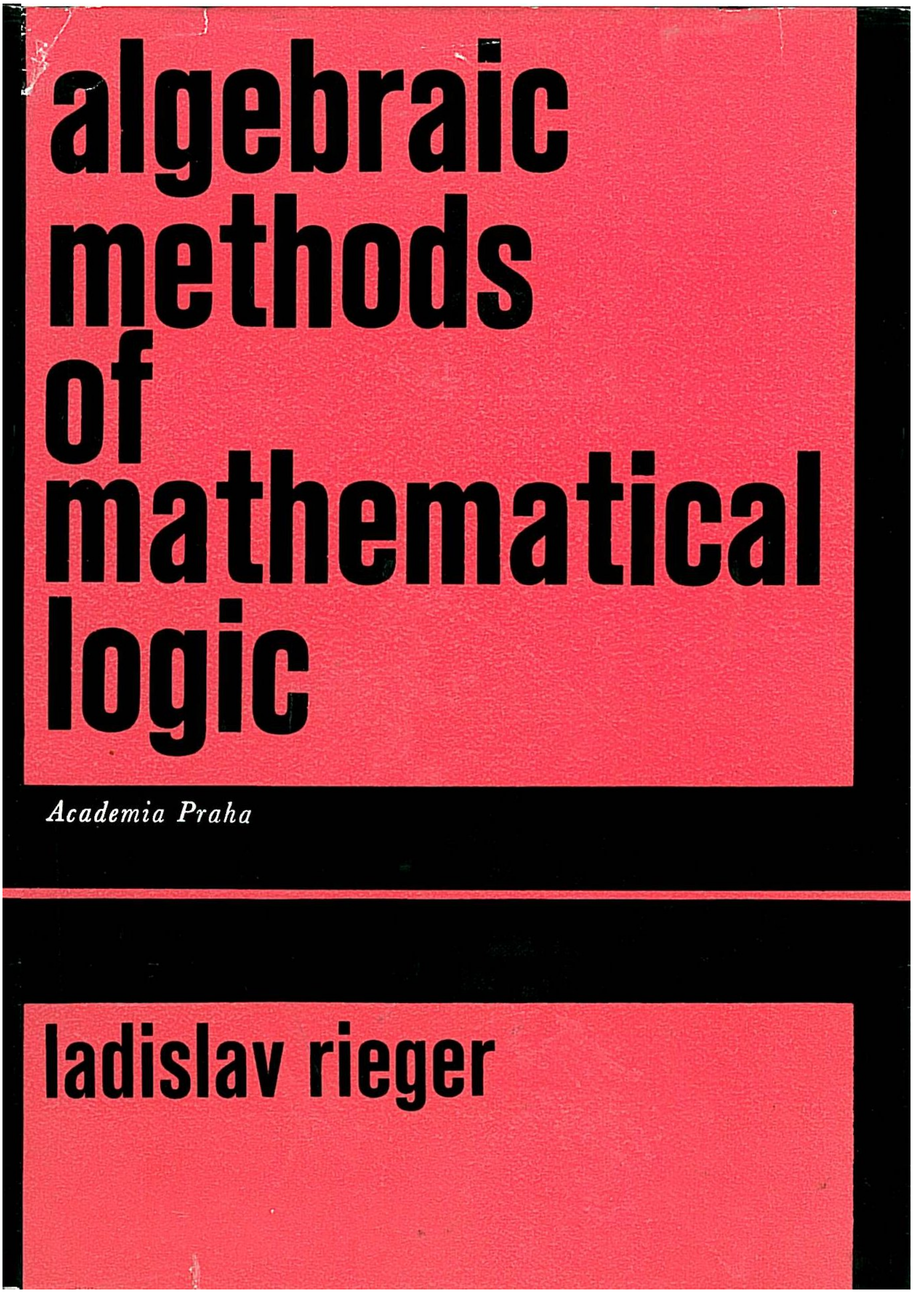
Ladislav Svante Rieger (1916–1963)

Ostatní vědecké práce

In: Eliška Pecinová (author): Ladislav Svante Rieger (1916–1963). (Czech). Praha: Matfyzpress, 2008. pp. 186–223.

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/400765`



Přebal knihy [R22].

Kapitola 5

Ostatní vědecké práce

5.1 Práce na okraji matematické logiky

5.1.1 *O teorii neuronových sítí* [R14] (1958)

V publikaci [R14] podává L.S. Rieger kritický výklad fundamentálních otázek souvisejících s oblastí strojového učení, konkrétně s *neuronovými sítěmi*[1]. Základním pramenem, na který se L.S. Rieger odkazuje (a který je odborníky citován do dneška), je kompendium *Automata studies* [SM56a], přesněji jeho ruský překlad *Avtomaty* [SM56b].

Teorie neuronových sítí je poměrně mladá disciplína, která je velmi důležitou součástí kybernetiky. Základní myšlenky této teorie byly poprvé vysloveny W.S. Mc Cullochem a W. Pittsem, kteří ukázali, že určitým způsobem idealizovaná nervová soustava může být studována prostředky výrokového kalkulu. Dále tuto teorii rozvinuli S.C. Kleene, J. von Neumann a Ju.T. Medvěděv. Všechny fundamentální výsledky těchto matematiků byly uveřejněny v [SM56b].

V Riegrově době byl výzkum v této oblasti teprve v počátcích. Za posledních téměř padesát let se tedy značně vyvinula a změnila nejen terminologie, ale i samotné pojetí neuronové sítě. My se však přidržíme pojetí i terminologie Riegrovy a výklad bude doplněn poznámkami o současných odlišnostech.

Neuronové sítě se rozdělují na dva základní typy: *biologické*, jež modelují biologické systémy, a *umělé*, které pouze vycházejí ze základního modelu fungování neuronových sítí – učení a rozpoznávání. Případné zájemce o tuto problematiku odkazujeme na monografii [Roj96].

L.S. Rieger chápal pojem neuronové sítě jako biologickou neuronovou síť. Ve svém článku se soustřeďuje na tři základní témata: analýza, syntéza a reprezentace událostí neuronovými sítěmi. Jedná se o práci z velké části referativní, původní je pouze část o syntéze. Přesto je tato publikace poměrně významná, neboť této problematice byla v dané době věnována pouze práce F. Svobody [Svo58].

[1] Teorie neuronových sítí byla tehdy též nazývaná *teorie konečných automatů*.

Hlavním smyslem práce je ukázat *pravou úlohu jistých pojmů, rozvinutých původně v matematické logice ... a aplikovaných v teorii diskrétních konečných automatů.*[2]

Značnou pozornost věnuje L.S. Rieger též snaze *vyjasnit přechod od společných zákonitostí, podmiňujících chod skutečných modelů neuronových sítí v čase*[3] *... až k abstraktnímu ryze matematickému pojmu konečného diskrétního automatu ve smyslu Medvěděvově* [viz dále].[4]

Jelikož je práce [R14] dosti rozsáhlá, budeme při dalším výkladu zachovávat její původní členění.

Část 2.: *Obecná charakterisace neuronové sítě*

Obecný popis neuronové sítě podává L.S. Rieger ve dvou fázích. Nejprve je zadána její *architektura* (tj. struktura či prostorový popis), poté je popsán *režim rozpoznávání* (tj. její charakteristické zákonitosti v čase).[5] Doplňme, že terminologie neuronových sítí je ve svých základech přejata z neurofyziologie, neboť vznik této teorie (jako součásti kybernetiky) je úzce spjat se studiem a modelováním některých funkcí centrální nervové soustavy člověka.

Architektura

Architektura neuronové sítě, kterou používal L.S. Rieger, je následující.

Každá *neuronová síť* sestává ze tří druhů základních prvků; *neuronů*, *synapsí* (ty se dále dělí na *budicí* a *tlumicí*)[6] a *vodicích vláken* (mezi neurony a synapsemi).

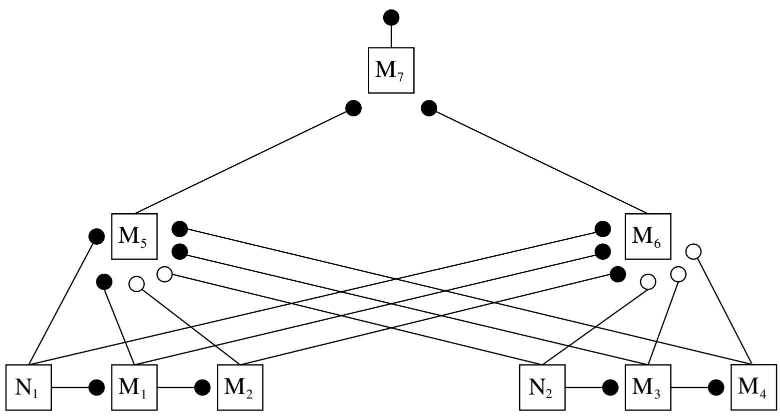
Do každé synapse sítě vede právě jedno vodicí vlákno z jednoho neuronu, říkáme, že tento neuron *ovládá* danou synapsi. Každá synapse může (ale také nemusí) tzv. *přiléhat* k jednomu neuronu sítě. Neurony, jež prostřednictvím synapsí přiléhajících k danému neuronu tento neuron ovládají, se nazývají *okolní* k tomuto neuronu.

Neurony, které nemají v dané síti žádné okolní neurony, se nazývají *vstupní* neurony sítě. Ostatní se nazývají *vnitřní* neurony sítě. Neurony, které ovládají alespoň jednu synapsi, jež nepřiléhá k žádnému neuronu sítě, se nazývají *výstupní* neurony sítě.

Poznámka: V současné době se vodicí vlákna u neuronových sítí nepoužívají – nepoužívají se tak termíny s nimi spojené, jako ovládání synapse, přiléhání synapse atp. Takto jsou dnes chápány synapse. Ty jsou dnes zároveň opatřeny tzv. *vahou*, tj. reálným číslem udávajícím jejich vliv na neurony, do kterých vedou. Riegrem uvažovaná synapse v podstatě odpovídá dnešní jednotkové váze.

---

[2] [R14], str. 243.
L.S. Rieger chápe neuronové sítě jako modely tzv. *diskrétních konečných automatů.*
[3] Tj. řídících funkci (biologických) neuronových sítí.
[4] [R14], str. 244.
[5] Jedná se o dnešní termíny.
[6] Dnes nazývané *excitační* a *inhibiční.*



Obrázek 5.1: Schéma neuronové sítě.

Současné neurony se rozdělují na vstupní, výstupní a ostatní, jenž se nazývají *skryté*.

Obrázek 5.1 zobrazuje schéma poměrně jednoduché neuronové sítě. Tato síť má dva vstupní neurony N_1 a N_2 a sedm vnitřních neuronů $M_1, \ldots, M_7$, z nichž M_7 je zároveň výstupním neuronem. Plná kolečka značí budicí synapse, prázdná tlumicí synapse. Např. k neuronu M_5 přiléhá šest synapsí a má tak šest okolních neuronů.

Poznamenejme, že z hlediska teorie grafů se nejedná o nic jiného než o orientované grafy určitého typu.

Neuronová síť, jak jsme ji právě popsali, může být chápána jako součást („jednotka“) konečného automatu. Vstupní neurony jedné (dílčí) sítě jsou tak výstupními neurony jiné (dílčí) sítě, na níž první síť navazuje.

Režim rozpoznávání

V čase je neuronová síť charakterizována následujícími třemi zákony:

1. *Zákon „vše nebo nic“*

   Každý neuron v síti se může nacházet pouze v jednom z těchto dvou relativně stabilních stavů: stav tzv. (úplné) *excitace* (aktivity) a stav tzv. (úplného) *útlumu* (nečinnosti). Tyto stavy se označují číslicemi 0 a 1.

   Poznámka: V Riegrově době se uvažovaly pouze binární stavy neuronů. Dnes bývá výstup neuronu určen tzv. *přenosovou funkcí*, jejímž oborem hodnot je interval $(0, 1)$.

2. *Zákon excitačního prahu*[7]

Předpokládáme, že každý vnitřní neuron N sítě má jednoznačně určenou tzv. *prahovou funkci* φ_N, což je libovolná neklesající funkce s celým nezáporným argumentem a celými nezápornými hodnotami. Nechť v čase t je x počet tlumicích synapsí přiléhajících k N takových, že neurony, které je ovládají, jsou v excitovaném stavu. Obdobně nechť v tomto čase je y počet budicích synapsí přiléhajících k N takových, že neurony, které je ovládají, jsou v excitovaném stavu. Pak neuron N bude v čase $t+1$ v excitovaném stavu právě tehdy, když je splněna nerovnost

$$y \geq \varphi_N(x),$$

tj. počet excitačních účinků na N dosáhl alespoň tzv. *excitačního prahu* φ_N vyvolaného současnými tlumicími účinky.

Poznámka 1: Příklady prahových funkcí:

- $$\begin{aligned} \varphi_N(x) &= p && \text{pro } x = 0, \\ &= m_N + 1 && \text{pro } x > 0, \end{aligned}$$

  kde $p \geq 0$ je pevná konstanta a $m_N(\geq p)$ je počet všech budicích synapsí přiléhajících k N.

  Toto je prahová funkce „absolutního utlumení“ vyvolaného pouze jediným tlumicím účinkem. Používal ji např. S.C. Kleene.

- $$\begin{aligned} \varphi_N(x) &= 0 && \text{pro } 0 \leq x < h, \\ &= m_N + 1 && \text{pro } x \geq h, \end{aligned}$$

  kde h je pevná konstanta.

  Toto je prahová funkce používaná J. von Neumannem, jedná se o jiný druh „absolutního utlumení“. Méně než h tlumicích účinků nestačí k vyvolání útlumu, alespoň h tlumicích účinků vždy útlum vyvolá.

- $\varphi_N(x) = x + p_N$, kde $p_N > 0$ je pevná konstanta.

  Nutná a postačující podmínka pro excitaci je, aby počet excitačních účinků byl alespoň o p_N větší než počet tlumicích účinků.

- $\varphi_N(x) = p$.

  Neuron se nikdy neexcituje méně než p excitačními účinky, zatímco alespoň p excitačních účinků jej vždy excituje.

Poznámka 2: Je zřejmé, že v současné teorii je výstup neuronu N určen modifikovaně. Po sečtení vlivů okolních neuronů (prostřednictvím jejich vah) a odečtení prahu neuronu N se získá tzv. *excitační potenciál.* Často bývá výstup neuronu N udán již zmiňovanou přenosovou funkcí excitačního potenciálu.

[7]Podle J. von Neumanna. Viz Neumann von, J., *Věrojatostnaja logika i sintěz naděžnych organizmov iz něnaděžnych komponent*, [SM56b], pp. 68–139.

3. *Zákon synchronizace*

   Existují společné intervaly stejných délek pro relativně stabilní stavy všech neuronů sítě, oddělené od sebe intervaly přechodu neuronů sítě ze stavu do stavu (tzv. aktualizace stavu sítě). Začátek společného intervalu stability je vzdálen od následujícího vždy o stejnou dobu, tzv. zpoždění či *takt*. (Takt je doba, kterou potřebují podněty – vyslané v daný okamžik k danému neuronu sítě z okolních neuronů sítě – k tomu, aby ovlivnily jeho stav.)

Na závěr této části L.S. Rieger uvádí příklady (biologických i umělých) neuronových sítí; síť centrální nervové soustavy člověka, elektrický, elektromagneticko-reléový a mechanický model neuronové sítě.

Část 3.: *Matematicko-logická analysa a synteza ideálních neuronových sítí*

Ideální neuronové sítě jsou takové, které splňují tři výše uvedené zákony. V celém článku [R14] se pracuje s ideálními sítěmi. Nejprve L.S. Rieger diskutuje roli času, pojmy přítomnost, minulost a budoucnost neuronové sítě a objasňuje volbu diskrétní časové proměnné. (Pro začátek činnosti sledované sítě klade $t = 0$.)

Ideální neuronová síť umožňuje aktualizovat stav svých vnitřních neuronů na základě aktuálního stavu všech neuronů (prostřednictvím tří zmíněných zákonů). Nechť m je počet vnitřních a n počet vstupních neuronů sítě. Celou její činnost lze popsat funkcí o $m + n$ nezávisle a m závisle proměnných, tzv. (booleovskou)[8] *charakteristickou funkcí.* Tato funkce je jednoznačně určena architekturou neuronové sítě, kde jsou zakresleny všechny neurony, synapse a vodicí vlákna a zadány prahové funkce.

Charakteristická funkce je nejčastěji zadána tabulkou o 2^{m+n} řádcích, která bývá vzhledem ke značné velikosti dosti nepřehledná. Přestože se takové tabulky dále zjednodušují, nepracuje se s nimi příliš pohodlně. Proto se zde využívá matematické logiky a pro každou závisle proměnnou se příslušná část tabulky nahrazuje přehledným „analytickým“ výrazem udávajícím nutnou a postačující podmínku stavu excitace daného vnitřního neuronu na základě předchozích stavů okolních neuronů, tzv. *booleovského ovládacího polynomu.* Tyto úvahy patří do tzv. analýzy neuronových sítí.

Příklad: Demonstrujme nyní právě uvedené pojmy na neuronové síti z obrázku 5.1. Nechť prahové funkce vnitřních neuronů $M_1, \ldots, M_7$ jsou typu

$$\begin{aligned} \varphi_N(x) &= m_N && \text{pro } x = 0, \\ &= m_N + 1 && \text{pro } x > 0. \end{aligned}$$

Potom jejich excitační prahy (pro $x = 0$) jsou po řadě 1, 1, 1, 1, 4, 3, 1 a jedná se o „absolutní útlum“ (viz poznámka výše). Tabulka pro charakteristickou funkci by v tomto případě měla $2^9 = 512$ řádků a 16 sloupců. Na ukázku uvádíme její tři řádky:

[8] Hodnoty závisle i nezávisle proměnných mohou nabývat pouze hodnot 0 či 1.

$N_1(t)$	$N_2(t)$	$M_1(t)$	$M_2(t)$	$M_3(t)$	$M_4(t)$	$M_5(t)$	$M_6(t)$	$M_7(t)$	$M_1(t+1)$	$M_2(t+1)$	$M_3(t+1)$	$M_4(t+1)$	$M_5(t+1)$	$M_6(t+1)$	$M_7(t+1)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1

Chceme-li určit hodnotu např. pro $M_5(t+1)$, bereme v úvahu pouze okolní neurony $N_1, N_2, M_1, M_2, M_3, M_4$. Z prahové funkce M_5 plyne, že M_5 bude v čase $t+1$ excitován právě tehdy, když v čase t budou excitovány neurony N_1, M_1, M_3, M_4 (s budicím účinkem) a nebudou excitovány neurony N_2 a M_2 (s tlumicím účinkem). Použitím symboliky výrokového kalkulu okamžitě dostáváme

$$M_5(t+1) \Leftrightarrow N_1(t)\ et\ M_1(t)\ et\ M_3(t)\ et\ M_4(t)\ et\ nonN_2(t)\ et\ nonM_2(t),$$

kde symbol $N(t)$ značí „neuron N je v čase t excitován“. Výraz na pravé straně není nic jiného než booleovský ovládací polynom.

Sítě bez kliček a s kličkami

Mějme dvě konečné k-členné posloupnosti $N_1, \dots, N_k$ navzájem různých neuronů a $S_1, \dots, S_k$ různých synapsí. Nechť neuron N_1 ovládá synapsi S_1, která přiléhá k neuronu N_2 ovládajícího synapsi S_2, jež přiléhá k N_3 atd. Říkáme, že tato dvojice posloupností tvoří *kličku*, jestliže $N_1 = N_k$. Rozeznáváme tak dva typy neuronových sítí: bez kliček (jednoduché) a s kličkami (značně složitější).[9]

Poznamenejme, že v současnosti se sítě bez kliček nazývají *sítě bez zpětné vazby* či *dopředné*, pro sítě s kličkami se užívá termín *sítě se zpětnou vazbou.* O rozdílu ve výpočetních schopnostech sítí bez kliček a s kličkami píše L.S. Rieger následující slova:

Prvé mohou jen reagovat, zpožďovat a kombinovat čerstvě došlé a nepříliš zpožděné podněty na vstupech ve výslednou reakci. Naproti tomu sítě s kličkami mají (v důsledku „zpětných vazeb“) navíc možnost si jednou došlý podnět na vstupu „pamatovat“ neomezenou dobu.[10]

L.S. Rieger nejprve provádí na konkrétních příkladech analýzu neuronových sítí bez kliček, kde je nutná a postačující podmínka excitace daného vnitřního neuronu převedena do symboliky výrokového kalkulu. Dále diskutuje sítě s kličkami a ukazuje, že k symbolicko-logickému vyjádření závislosti stavu výstupu

[9] Síť na obrázku 5.1 je bez kliček.
[10] [R14], str. 263.

na předcházejících vstupech[11] již nevystačíme s výrokovým kalkulem, neboť je zde třeba použít kvantifikátorů (a tedy predikátového kalkulu).

V závěru třetí části L.S. Rieger definuje pojem události a její reprezentace a pokládá přirozenou otázku, *jaký druh událostí mohou neuronové sítě reprezentovat.* Pro sítě bez kliček je odpověď poměrně jednoduchá a L.S. Rieger uvádí následující Kleeneho výsledek:[12]

Neuronové sítě bez kliček (vzhledem k tomu, že každá z nich po určité vždy stejné době l „zapomene", co se dělo do té doby) jsou schopny representovat ty a jen ty události …, o jejichž nastání, nebo nenastání rozhoduje určitý (pro danou událost pevný) počet l posledních sledovaných taktů na vstupu.[13]

Analogická otázka reprezentovatelnosti událostí pro sítě s kličkami je však podstatně složitější. K jejímu zodpovězení je nejprve potřeba vyřešit otázku tzv. syntézy neuronové sítě, čemuž je věnována čtvrtá část práce [R14].

Část 4.: *Synthesa sítě ze zadané charakteristické funkce*

Základní úloha syntézy neuronové sítě je následující:

Mějme booleovskou funkci $m+n$ nezávisle a m závisle proměnných zadanou tabulkou. Nalezněte neuronovou síť, resp. její schéma, které má danou funkci za svou charakteristickou funkci.

L.S. Rieger prezentuje v [R14] algoritmické řešení této úlohy, a to ve třech etapách.

V první etapě ke každému vnitřnímu neuronu (z celkového počtu m) nalezl okolní neurony a funkci pro závislost stavu tohoto neuronu na předchozích stavech okolních neuronů (danou booleovským ovládacím polynomem).

Ve druhé etapě ke každému vnitřnímu neuronu stanovil vhodnou prahovou funkci a sestrojil příslušnou část sítě udávající vztah tohoto neuronu a okolních neuronů.

Ve třetí etapě pak vzájemným napojením těchto dílčích sítí (tzv. bezprostředního ovládání) zkonstruoval celou síť.

K popsanému algoritmu L.S. Rieger dodává, že postup ve druhé etapě (nejsložitější část algoritmu) je spíše teoretický a pro praktickou syntézu nepříliš vhodný; na příkladu ukazuje úspornější řešení.

Část 5.: *Třída representovatelných událostí*

Na základě výše vyřešeného problému mohl nyní L.S. Rieger zformulovat jeden ze základních výsledků teorie neuronových sítí, tedy určení druhů událostí, které mohou být reprezentovány vhodnou neuronovou sítí.

[11] Což je hlavní úloha sítě.

[12] Kleene, S.C., *Predstavlenije sobytij v něrvnych setjach i koněčnych avtomatach*, [SM56b], pp. 15–67.

[13] [R14], str. 266.

Tento výsledek zformuloval (v přehledné formě) Ju.T. Medvěděv v [SM56b].[14] Uvažoval však abstraktní (ryze matematické) pojetí konečného automatu, tj. pracoval pouze s charakteristickými funkcemi a nikoli se samotnými sítěmi (schématy).

Závěr odvozený ve čtvrté části (tj. propojení charakteristické funkce sítě a příslušného schématu) umožnil vyslovit Medvěděvovu větu v Riegrově formulaci neuronové sítě.

Práce [R14] je citována v článku M. Mlezivy [Mle60] a J. Kopřivy [Kop62].

5.1.2 *Ke Kleeneho normální formě strojově vyčíslitelných funkcí* [R19] (1963)

V jedné ze svých posledních prací [R19] podává L.S. Rieger odvození tzv. Kleeneho normální formy strojově vyčíslitelných funkcí[15] s nezápornými celočíselnými argumenty a hodnotami. Nejprve je třeba zavést fundamentální pojem Turingova stroje (počítače).[16]

Část 1.: *Turingův počítač s páskou ohraničenou doleva*

Pojem *Turingův stroj T* byl objeven Alanem M. Turingem[17] v jeho slavné práci [Tur37] ve snaze charakterizovat, co znamená „něco vypočítat". Tím byl v podstatě položen základ moderní počítačové vědy a teorie vyčíslitelnosti. Turingův stroj je objekt matematický (ne fyzický), popsat jej lze takto:

Jedná se o *pásku*, v obou směrech neohraničenou a rozdělenou na jednotlivá políčka (*buňky*), která zastává úlohu neomezené paměti a je místem vstupu i výstupu Turingova stroje. L.S. Rieger uvažuje pásku doleva ohraničenou a

[14] Medvěděv, Ju.T., *O klasse sobytij, dopuskajuščich predstavlenie v konečnom avtomate*,[SM56b], pp. 385–401.

[15] Jedná se o funkce, jejichž hodnoty mohou být vypočítány tzv. *Turingovým strojem.*

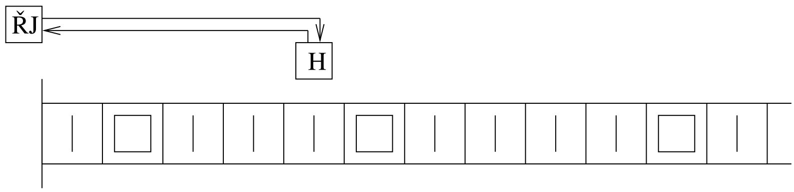
[16] Dnes se výlučně užívá termínu Turingův stroj, L.S. Rieger používal oba názvy.

[17] Alan Mathinson Turing (1912–1954) byl geniální britský matematik a průkopník umělé inteligence, který svými pracemi neobyčejným způsobem přispěl k rozvoji výpočetní techniky (často je nazýván jejím otcem). Studoval na přední střední škole v Sheborne, později na proslulé *King's College* v Cambridge, kde v dané době působili např. B. Russel, A.N. Whitehead či L. Wittgenstein. Odtud pochází jeho zásadní článek [Tur37]. Léta 1937 a 1938 strávil na *Princeton University* pod vedením A. Churche, kde získal titul Ph.D.

Během druhé světové války se A. Turing velkou měrou podílel na dešifrování tajných německých šifer. Jeho významným přínosem byl zásadní podíl na rozluštění *Enigmy*, jednoho z nejslavnějších šifrovacích strojů.

Po válce působil A. Turing, jako jedna z tehdejších největších autorit rozvíjející se počítačové vědy, v *National Physical Laboratory*, kde pracoval na návrhu prvního elektronického počítacího stroje ACE; ten však nikdy nebyl sestrojen. Roku 1947 přešel na *University of Manchester*, kde pracoval na softwaru pro jeden z prvních opravdových počítačů, *Manchester Mark I.* Na konci života pracoval v matematické biologii, konkrétně v morfogenezi.

V soukromém životě nebyl A. Turing šťastný. V roce 1952 byl nucen přiznat svou homosexualitu, což tehdy nebylo tolerováno, byl obviněn ze sexuálních přestupků a zatčen. Propuštěn byl pod podmínkou hormonální léčby, navíc ztratil zaměstnání. Svůj život ukončil v nedožitých dvaačtyřiceti letech pozřením jablka namočeného v kyanidu.



Obrázek 5.2: Turingův stroj. ŘJ = řídicí jednotka, H = hlava.

doprava neohraničenou, což je pouze formálně zjednodušující předpoklad, který nemá vliv na funkci stroje.[18]

Další částí Turingova stroje je *řídicí jednotka*, jež je opatřena pohyblivou *hlavou*, která se v každém okamžiku nalézá nad jednou buňkou pásky.

Stroj T je určen pomocí těchto údajů:

Na každé buňce je zapsán právě jeden *symbol* z daného konečného počtu symbolů (číslice, pomocné symboly). Je uvažován i prázdný symbol, označme jej $\Box$, k zapisování čísel je výhodné použít jen jeden symbol, který označíme $|$. Číslo m se pak zaznamená $m+1$ symboly $|$ oddělenými od ostatních na každé straně symbolem $\Box$.[19]

Řídicí jednotka se vždy nachází v právě jednom z konečně mnoha daných *stavů*. Schéma Turingova stroje je zobrazeno na obrázku 5.2.

Posloupnost $\alpha = (q_j, k, S_{i_1}, S_{i_2}, \dots)$, jejímiž členy jsou po řadě daný stav, daná poloha hlavy (tj. pořadí buňky, nad níž se hlava nalézá), daný nápis na pásce (tj. S_{i_n} je symbol na n-tém políčku), se nazývá *konfigurace* stroje T[20]. Při spuštění se stroj T nachází v tzv. *počáteční konfiguraci.*

Vlastní práce stroje je složena z kroků, v každém z nich se na základě aktuálního stavu řídicí jednotky a symbolu na aktuální buňce (tj. na té, nad níž se nalézá hlava) provedou následující činnosti:

Řídicí jednotka přejde do nového stavu (ten může být roven i stavu předchozímu), přepíše se symbol na aktuální buňce (nový symbol může být stejný jako předchozí) a hlava se posune o nejvýše jedno políčko doleva či doprava (může tedy zůstat ve stejné poloze). Je-li hlava nad první buňkou pásky a má-li proběhnout posun doleva, dojde k posunutí celé pásky doprava o jedno políčko a na první pozici se vytvoří nová buňka, nad níž se nyní bude nacházet hlava.

Provedením právě popsaného kroku přejde stroj T ze své konfigurace α do následující konfigurace α^*, jež je konfigurací α jednoznačně určena; píšeme $\alpha^* = \Phi_T(\alpha)$ a Φ_T nazýváme *pracovní funkce* stroje T. Při $\Phi_T(\alpha) = \alpha$ dojde k zastavení stroje.

[18] Někdy bývá Turingův stroj přímo takto definován.

[19] Jedná se o kódování v unární soustavě, které je užitečné ke zjednodušení důkazu toho, že nějakou funkci nelze vyčíslit. V případě, kdy danou funkci je možno vyčíslit, je vhodnější používat kódování čísel v binární soustavě.

[20] L.S. Rieger používal termín *celkový stav* stroje.

L.S. Rieger uvádí v první části práce [R19] explicitní definici funkce Φ_T, a to pomocí tzv. instrukcí, jež se souhrnně nazývají *program* daného Turingova stroje. (V tomto smyslu je třeba T pokládat za jednoúčelový stroj, tedy s pevným programem zabudovaným v konstrukci T.) Obecně je přijímána tzv.

Turingova teze:[21] Matematická úloha je algoritmicky řešitelná[22] právě tehdy, když se dá řešit na nějakém Turingově stroji.

Strojově vyčíslitelné funkce

V tomto oddílu uvádíme definici funkce vyčíslitelné na Turingově stroji, kterou uvádí L.S. Rieger. Doplňme nejprve poznámku týkající se značení. Nechť je stroj T spuštěn v konfiguraci α a v okamžiku t [23] dosáhne konfigurace β. Pak píšeme $\beta = \Psi_T(t, \alpha)$.

Definice: Říkáme, že funkce f je *vyčíslitelná* na Turingově stroji T, jestliže platí:

Nechť $\alpha_{x_1,\dots,x_n} = (q_0, 1, \underbrace{|\cdots|}_{x_1+1}\Box\underbrace{|\cdots|}_{x_2+1}\Box\dots\Box\underbrace{|\cdots|}_{x_n+1}\Box\,\Box\dots)$ je počáteční konfigurace stroje T vzájemně jednoznačně odpovídající numericky zadané n-tici čísel $x_1, \dots, x_n$. Pak funkce f je pro argumenty $x_1, \dots, x_n$ definována a nabývá hodnoty $y = f(x_1, \dots, x_n)$, právě když existuje okamžik t práce stroje T takový, že

a) $\Psi_T(t+1, \alpha_{x_1,\dots,x_n}) = \Psi_T(t, \alpha_{x_1,\dots,x_n}) = \beta$, tj. stroj T se zastaví v konfiguraci β, byl-li spuštěn v konfiguraci $\alpha_{x_1,\dots,x_n}$,

b) nápis na pásce v konfiguraci β je zápisem čísla $y = f(x_1, \dots, x_n)$.

Poznámka: Stroj T se tedy nezastaví, je-li spuštěn v konfiguraci $\alpha_{x_1,\dots,x_n}$ takové, že funkce f není pro hodnoty $x_1, \dots, x_n$ definována.

Definice: Funkce se nazývá *strojově vyčíslitelná*[24], jestliže je vyčíslitelná na nějakém Turingově stroji T.[25]

Rekurzivní funkce

Bylo dokázáno, že strojově vyčíslitelnými funkcemi jsou právě tzv. obecně rekurzivní funkce, které nyní budeme definovat. Nejprve však zavedeme tzv. primitivně rekurzivní funkce, jež v otázce vyčíslitelnosti hrají důležitou roli.

Definice: Třída *primitivně rekurzivních funkcí* je nejmenší třída funkcí jedné nebo více proměnných definovaných na $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ nebo $\mathbb{N}_0 \times \cdots \times \mathbb{N}_0$, která obsahuje:

[21] Srovnej s Churchovou tezí, část 5.1.3.
[22] Existuje nějaká efektivní metoda pro zjištění jejích hodnot.
[23] Pro t nezáporné celočíselné. Hodnota $t = 0$ odpovídá okamžiku spuštění stroje.
[24] Angl. *Turing computable.*
[25] L.S. Rieger definici strojově vyčíslitelné funkce v práci neuvádí. Patrně ji považoval za intuitivně jasnou.

1. nulovou funkci $z(x) = 0$,
2. funkci následníka $s(x) = x + 1$,
3. projekci $\pi_k^n(x_1, \ldots, x_n) = x_k$ pro každé n a $k, 1 \leq k \leq n$

a je uzavřená na operace:

1. skládání,
2. tzv. primitivní rekurence, tj. jestliže do této třídy patří $(n+2)$-argumentová funkce h a n-argumentová funkce g, pak do této třídy rovněž patří i $(n+1)$-argumentová funkce f splňující identity

$$f(0, x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n),$$

$$f(1, x_1, \ldots, x_n) = h(0, f(0, x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n),$$

atd., obecně

$$f(x+1, x_1, \ldots, x_n) = h(x, f(x, x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n).$$

Nyní rozšíříme třídu primitivně rekurzivních funkcí zavedením dodatečné operace tzv. *minima.* Říkáme, že nějaká třída funkcí je uzavřená na operaci minima, jestliže platí: patří-li do této třídy $(n+1)$-argumentová funkce G, pak do ní patří i n-argumentová funkce F taková, že $F(x_1, \ldots, x_n) = y$, kde y je nejmenší hodnota, pro niž $G(y, x_1, \ldots, x_n) = 0$, pokud taková hodnota y pro daná $x_1, \ldots, x_n$ existuje; pro jiné n-tice argumentů není F definována.

Definice: Nejmenší třída funkcí, jež obsahuje třídu primitivně rekurzivních funkcí a je uzavřená na operaci minima, se nazývá třída *částečně rekurzivních funkcí.*

Připouštíme-li pouze funkce F vzniklé právě popsanou minimalizací, které jsou navíc definovány pro každou n-tici argumentů, pak se tato třída zužuje na třídu tzv. *obecně rekurzivních funkcí*[26].

Kleeneho μ-rekurzivnost vs. Gödelova-Herbrandova rekurzivnost

Primitivně rekurzivní funkce byly poprvé zavedeny K. Gödelem v práci [Göd31], a to v souvislosti s důkazem první věty o neúplnosti[27]. K. Gödel jejich definici později rozšířil na základě některých výsledků J. Herbranda[28] [Her32] a v [Göd34] představil termín obecně rekurzivní funkce, jehož definice se nazývá Gödelova-Herbrandova.

[26] Zde je třeba upozornit na možnou terminologickou nejednoznačnost. Obecně rekurzivní funkce se dnes převážně nazývají úplně rekurzivní nebo jen rekurzivní. Označením obecně rekurzivní však může být někdy míněno i částečně rekurzivní.

[27] Viz část 4.4.2.

[28] Jacques Herbrand (1908-1931), významný francouzský logik, který tragicky zahynul.

Alternativní verze Gödelovy-Herbrandovy definice podal později S.C. Kleene v pracích [Kle36a], [Kle43] a [Kle52]. Termín rekurzivní[29] tak nahradil termínem *μ-rekurzivní*; tento název odvodil od funkce minima, kterou označil μ.[30] To, že každá Gödelova-Herbrandova obecně rekurzivní funkce je μ-rekurzivní a naopak, dokázal S.C. Kleene právě na základě věty o normální formě:

Kleeneho věta o normální formě: Existuje primitivně rekurzivní predikát $P(z, y, x)$ a primitivně rekurzivní funkce $\Psi(y)$ tak, že pro každou (Gödelovu-Herbrandovu) obecně rekurzivní funkci $f(x)$ existuje index z (odpovídající systému rovnic definujících f) takový, že platí

$$f(x) = \Psi(\mu(y)P(z, y, x)).$$

Právě uvedené znění je z roku 1943, v původní verzi z roku 1936 měla funkce Ψ ještě jeden parametr.

Později začíná S.C. Kleene uvažovat i částečně rekurzivní funkce (tj. ty, které nemusejí být definovány všude, ale jen na nějaké podmnožině množiny $\mathbb{N}_0 \times \cdots \times \mathbb{N}_0$). Ve své vlivné monografii *Introduction to metamathematics* [Kle52] zavádí třídu částečně μ-rekurzivních funkcí, jejíž definice se rozšířila a je v podstatě používána dodnes (předpona μ- je vynechána).

Část 2.: *Normální Kleeneho forma strojově vyčíslitelných funkcí a universální Turingův počítač*

Nyní se vrátíme k Riegrovu článku [R19]. Druhá a zároveň závěrečná část je jádrem celé této práce. Nejprve L.S. Rieger podává definici třídy primitivně rekurzivních funkcí, pojem částečně (ani obecně) rekurzivní funkce však nezmiňuje. Dále již věnuje pozornost odvození tvaru funkce vyčíslitelné na Turingově stroji. Postupně pak dokazuje fundamentální větu o Kleeneho univerzálním normálním (uniformním) vyjádření strojově vyčíslitelných funkcí o daném počtu argumentů:

Věta: Existují primitivně rekurzivní funkce Φ a Ψ, Φ je $(n+2)$-argumentová a Ψ jednoargumentová, které lze explicitně vyjádřit[31] a pro něž platí:

Ke každé n-argumentové strojově vyčíslitelné funkci existuje číslo z takové, že

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \Psi(\min_y(\Phi(z, y, x_1, \ldots, x_n) = 0)).$$

Poznámka: O právě uvedeném závěru lze zhruba říci, že každá strojově vyčíslitelná funkce může být složena ze dvou primitivně rekurzivních funkcí za použití operace minima. Funkce Φ a Ψ jsou dány obecně, tedy nezávisle na konkrétním Turingově stroji T.

[29] Používaný Kleenem pro Gödelovu-Herbrandovu definici.

[30] Např. $\mu(y)(\Phi(y, x) = 0)$ tedy znamená „nejmenší y takové, že $\Phi(y, x) = 0$“ neboli $\min_y(\Phi(y, x) = 0)$.

[31] Pro přesné tvary funkcí odkazujeme čtenáře na [R19], str. 357, 360.

Nyní se stručně zmíníme o Riegrově důkazu. Místo tzv. Gödelových čísel výpočtu (viz např. [Dav58]) užitých v původním odvození použil L.S. Rieger jako hodnoty minimalizovaného parametru tzv. *čísla časového stavu* Turingova stroje. Číslo časového stavu stroje T je číslo $\eta(t, |\alpha|)$ získané očíslováním uspořádaných dvojic, kde t je počet kroků stroje T od nějaké počáteční konfigurace do koncové konfigurace α s Gödelovým číslem $|\alpha|$ [32].

Zdůrazněme, že Riegrův výsledný výraz pro vyčíslitelné funkce je nejen explicitní, ale i poměrně jednoduchý.

V závěru své práce L.S. Rieger v souvislosti s hlavní větou diskutuje problematiku tzv. *univerzálních Turingových strojů*, tj. Turingových strojů, které mohou simulovat libovolný Turingův stroj, pokud jim zadáme příslušný program.[33] Dále provádí poměrně jednoduchý důkaz strojové neřešitelnosti úlohy o zastavení daného Turingova stroje. (Je třeba rozhodnout, zda se daný Turingův stroj zastaví či nezastaví, jestliže byl spuštěn v dané počáteční konfiguraci. Tuto úlohu vyřešil již A. Turing v [Tur37].) V důkazu používá známý *diagonální postup*.

5.1.3 *Ke kritice Churchovy teze o obecně rekursivních funkcích aritmetiky* [R44] (1961)

Obdobné problematice jako v článku [R19] věnoval L.S. Rieger přednášku konanou dne 27. 3. 1961 v *Matematické obci pražské*. Její výtah [R44] byl publikován pod stejným názvem. Ústředním tématem byla tzv. *Churchova teze*, o níž se nyní blíže zmíníme.

Churchova teze a problém rozhodnutí

Nejprve je třeba poznamenat, že slavná Churchova teze je ekvivalentní již zmíněné Turingově tezi (někdy bývá proto nazývána Churchovou-Turingovou tezí). Poprvé byla publikována Alonzem Churchem[34] v práci [Chur36b].

Churchova teze využívá neformální (leč intuitivně jasný) pojem *efektivní* metody či procedury z matematické logiky, kde přívlastek efektivní nemá běžný význam, nýbrž je synonymem slova *mechanický*. Příkladem efektivní metody je např. Eukleidův algoritmus pro nalezení největšího společného dělitele dvou

[32] Pro $\alpha = (q_j, k, S_{i_1}, S_{i_2}, \dots)$ je $|\alpha| = 2^{\mu(j,k-1)} 3^{i_1} 5^{i_2} \dots p_{m_\alpha}^{i_{m_\alpha}}$, kde m_α je jednoznačně určeno konfigurací α. Pro obecnější výklad o Gödelových číslech odkazujeme na [Fuch99].

[33] Univerzální Turingův stroj byl poprvé prezentován již ve zmiňovaném Turingově článku [Tur37].

[34] Alonzo Church (1903–1995) byl americký matematik a logik, který měl značný podíl na základech teoretické počítačové vědy. Studoval na proslulé *Princeton University*, kde získal v roce 1927 titul Ph.D. pod vedením Oswalda Veblena (1880–1960). Po postdoktorandské pozici v Göttingen v letech 1929–1967 vyučoval na princetonské univerzitě. Poté přešel do Los Angeles na *University of California*, kde působil až do roku 1990.

A. Church byl zakládajícím editorem časopisu *Journal of Symbolic Logic*, vedle Churchovy teze je jeho velkým přínosem objev tzv. λ-kalkulu, který později ovlivnil rozvoj programovacích jazyků. Pod Churchovým vedením studovala řada významných matematiků, jmenujme např. A. Turinga, S.C. Kleeneho, J.B. Rossera (1907–1989), L. Henkina či M. Davise (nar. 1928).

přirozených čísel či pravdivostní tabulka pro zjištění, zda formule výrokového počtu je či není tautologií.

A. Church i A. Turing se snažili o nalezení formálního výrazu, kterým by bylo možno neformální vyjádření „lze spočítat efektivní metodou“ nahradit. Přestože jejich závěry mají zcela odlišnou podobu, ukázalo se, že jsou ekvivalentní (tj. zahrnují stejnou množinu matematických funkcí).

V této souvislosti ještě zmíníme problém rozhodnutí (tzv. Entscheidungsproblem) pro predikátový kalkul. Ten definoval A. Church v [Chur36a] tak, že se jedná o úlohu nalézt efektivní metodu, pomocí níž jsme schopni pro (libovolnou) danou formuli tohoto kalkulu rozhodnout, zda je dokazatelná či ne.[35] Problém rozhodnutí se objevil na počátku 20. let v Hilbertových přednáškách, popsán byl v knize [HA28]. D. Hilbert jej charakterizoval jako fundamentální problém matematické logiky.

A. Turing pomocí své teze dokázal v práci [Tur37] neřešitelnost problému rozhodnutí (na základě důkazu jeho strojové neřešitelnosti), a to tak, že dokázal strojovou neřešitelnost úlohy o zastavení Turingova stroje.

A. Church dosáhl v [Chur36a] stejného výsledku nezávisle o několik měsíců dříve. Jeho postup byl založen na pojmu λ-definovatelnosti (místo Turingovy strojové vyčíslitelnosti) zavedeném v práci [Chur32]. V práci [Chur36b] (a též v [Kle36b]) bylo dokázáno, že λ-definovatelné funkce přirozených čísel jsou ekvivalentní obecně rekurzivním funkcím. Na základě tohoto výsledku A. Turing v [Tur37] dokázal, že jeho strojově vyčíslitelné funkce přirozených čísel odpovídají funkcím obecně rekurzivním.

Formulace Churchovy teze

K Churchově tezi existuje několik formulací, patrně nejznámější jsou tyto:

- *Každý efektivní výpočet může být proveden na nějakém Turingově stroji.*
- *Každý reálný výpočet (tj. z reálného života) lze převést na ekvivaletní výpočet na Turingově stroji.*

Neformálně můžeme též Churchovu tezi interpretovat tak, že intuitivní pojem algoritmu (neboli efektivní metody výpočtu) lze precizovat (prostřednictvím strojově vyčíslitelných funkcí) a že počítače mohou (teoreticky) vykonávat všechny algoritmy.

Zdůrazněme, že kvůli vágnosti pojmu *efektivní výpočet* nelze tuto hypotézu formálně matematicky dokázat (proto je nazývána teze). Nelze ji však ani vyvrátit, je proto chápána spíše jako fyzikální zákon.

Přehledný výklad o Churchově tezi, její historii a dalších souvislostech lze nalézt např. na webových stránkách *Stanford Encyclopedia of Philosophy* [Chur].

L.S. Rieger uvažoval následující formulaci Churchovy teze, která je blízká původní formulaci v [Chur36b]:

- *Funkce přirozených čísel je efektivně vyčíslitelná právě tehdy, když je obecně rekurzivní.*

[35] Srovnej též s Riegrovou definicí pro Heytingův výrokový kalkul, oddíl 3.2.2.

Riegrovy výsledky

Ve své přednášce poukázal L.S. Rieger na to, že je třeba Churchovu tezi chápat v jistém podmíněném pojetí. Upozornil, že funkce F (v definici obecně rekurzivní funkce) daná operací minima se považuje za definovanou jen tehdy, když potřebnou podmínku (že ke každé n-tici $x_1, \ldots, x_n$ existuje y, pro něž $G(y, x_1, \ldots, x_n) = 0$) je možno dokázat prostředky pouhé aritmetiky přirozených čísel. Nebyla tedy připuštěna možnost zaručit příslušnou existenci nějakými silnějšími prostředky (např. transfinitní indukcí).

Z právě uvedeného vyplývá následující Riegrův závěr o relativnosti Churchovy teze:

Každá (dostatečně přesně charakterizovaná) matematická teorie, obsahující elementární aritmetiku, má svůj pojem obecně rekursivní funkce. Zásadně se může stát, že masová úloha, jevící se v jedné teorii jako strojově neřešitelná, může se v silnější teorii ukázat jako strojově řešitelná; ... Zda a v jakém smyslu by bylo možno hovořit o absolutně strojově neřešitelných úlohách v rozumném exaktním smyslu, je zatím nejasné. [36]

5.2 Monografie *Algebraické metody matematické logiky*

V tomto oddílu pojednáme o dvou posledních, leč neméně významných Riegrových vědeckých pracích [R21] a [R22]. Tyto publikace tématicky patří na pomezí algebry a logiky a úzce spolu souvisejí. Jejich zařazení na závěr Riegrovy matematické tvorby má dva důvody.

V první řadě sem tato díla spadají časově. Obě pocházejí z Riegrovy pozůstalosti a byla vydána posmrtně. Jedná se tak o dvě jeho nejmladší odborné práce.

Druhým důvodem je jejich zvláštní postavení mezi ostatními pracemi nejen z teorie Booleových algeber a matematické logiky. Monografie [R22] je v podstatě završením Riegrovy celoživotní práce v oblasti algebraizace matematické logiky; sepisoval ji celých 12 let. Některé hlavní myšlenky shrnul v článku [R21], o kterém se zmíníme nejprve.

5.2.1 *Zu den Strukturen der klassischen Prädikatenlogik* [R21] (1964)

Algebraickou teorii klasické predikátové logiky L.S. Rieger studoval od počátku padesátých let, zejména v článcích [R7] a [R8]. Již v té době zamýšlel zpracovat tuto teorii knižně. Jeho práci však na několik let přerušily jiné povinnosti a odborné zájmy, proto se k tomuto tématu vrátil až později. Článek [R21] shrnuje a metodicky doplňuje některé skutečnosti známé na počátku šedesátých let, které souvisejí s danou problematikou.

[36] [R44], str. 481.

Část 1.: *Úvod*

Nejprve připomeňme pojem Tarského-Lindenbaumovy algebry (dále TL-algebra) predikátového kalkulu prvního řádu z části 3.2.4, který bude ústředním pojmem dalšího textu. Jedná se o množinu tříd formulí tohoto kalkulu, kde dvě formule A, B patří do téže třídy právě tehdy, když jsou logicky ekvivalentní, tedy právě když $A \Leftrightarrow B$ je dokazatelná formule.

Je známo, že TL-algebra je Booleovou algebrou, čehož L.S. Rieger využil již v pracích [R7], [R8] a [R10].[37] V TL-algebře se připouštějí i nekonečné booleovské operace, které lze získat dvěma různými způsoby.

Při prvním způsobu se ve třídě formulí $[(\exists x)A]$, popř. $[(\forall x)A]$ kvantifikátory chápou jako výsledek doplňkové unární operace tzv. *vnější*, popř. *vnitřní cylindrifikace* aplikované na prvek $[A]$. K elementární booleovské struktuře tak přibývá ještě jedna neelementární operátorová struktura, z čehož lze dále vyvodit algebraický popis TL-algeber klasické predikátové logiky využitelný k důkazu úplnosti.

Tento způsob využívali např. A. Tarski a F. Thompson [TT52], čímž dospěli v případě predikátové logiky s rovností k tzv. *cylindrickým algebrám.* V obecném případě tento postup prováděl P. Halmos (nar. 1916) [Hal56] a obdržel tak tzv. *polyadické algebry.*

U druhého způsobu se $[(\exists x)A]$, popř. $[(\forall x)A]$ považuje za supremum, příp. infimum množiny všech $[A(x/y)]$, kde $[A(x/y)]$ značí výsledek nahrazení volné proměnné x libovolnou proměnnou y. Tento způsob je starší, byl aplikován L.S. Riegrem v [R7] a [R8] i jinými autory k různým důkazům úplnosti (viz části 3.2.4 a 3.3.1).

Cílem práce [R21] je podat vhodný popis doplňkové neelementární algebraické struktury tvoření suprem a infim, který, jak se L.S. Rieger domníval, nebyl u druhého způsobu všeobecně znám. K tomuto účelu je zaveden pojem tzv. *substitutivně indexované algebry*, jenž umožňuje přesné a relativně jednoduché vymezení TL-algebry. Cylindrické i polyadické algebry spadají v jistém smyslu pod tento pojem. Ten je dále využit k relativně jednoduchému algebraickému důkazu Gödelovy-Mal'cevovy věty o úplnosti.

V závěru první části práce [R21] se L.S. Rieger pozastavuje nad úlohou a významem algebraizace predikátové logiky. V následujícím vybíráme některé jeho myšlenky.

Algebraizace by měla umožnit přirozeným způsobem pojmout (vyložit), resp. dokázat co možná nejvíce základních pojmů a principů predikátové logiky. Její smysl však není v podřizování logiky – a to ani částečném – teorii určitých booleovských struktur.

Všude tam, kde nezáleží na jednotlivých formulích, ale na třídách vzájemně ekvivalentních formulí, však nelze popřít algebraickou strukturu TL-algeber.

[37] Operace spojení, průseku a doplňku jsou definovány takto:

$$[A] \vee [B] := [A \ vel \ B], \ [A] \wedge [B] := [A \ et \ B], \ [A]' := [nonA].$$

Prezentace výsledků je tak prostřednictvím algebraických formulací jasnější a průhlednější.

V každém případě vytváří algebraizace predikátové logiky mnoho souvislostí matematické logiky s jinými oblastmi matematiky, které by jinak stěží vyšly najevo, v čemž by měl být především spatřován její význam.

Část 2.: *Substitutivně indexované Booleovy algebry*

Definice: Nechť B je Booleova algebra a I nekonečná, tzv. *indexová množina.* Nechť $\mathcal{B}_I$ je množina zobrazení, tzv. *indexování*, zobrazujících každý kartézský součin $I \times \cdots \times I = I^{(n)}$ do B. Říkáme, že B je *indexovaná algebra* se systémem $\mathcal{B}_I$ všech indexování, jestliže jsou splněny následující podmínky:

1. Kompoziční pravidla pro indexování:

   Nechť $\Phi, \Psi \in \mathcal{B}_I, \Phi : I^{(n)} \to B, \Psi : I^{(m)} \to B$. Potom do $\mathcal{B}_I$ patří také zobrazení $\Lambda_1 = \Phi(\vee)\Psi$ a $\Lambda_2 = \Phi(\wedge)\Psi$ množiny $I^{(n+m)}$ do B, kde

   $$\Lambda_1(x_1, \ldots, x_{n+m}) = \Phi(x_1, \ldots, x_n) \vee \Psi(x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})$$

   a

   $$\Lambda_2(x_1, \ldots, x_{n+m}) = \Phi(x_1, \ldots, x_n) \wedge \Psi(x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})$$

   pro všechny $(n+m)$-tice $(x_1, \ldots, x_{n+m}) \in I^{(n+m)}$.

   Zároveň do $\mathcal{B}_I$ patří také zobrazení $\Lambda_3 = \Phi^{(')}$ množiny $I^{(n)}$ do B, kde

   $$\Lambda_3(x_1, \ldots, x_n) = (\Phi(x_1, \ldots, x_n))'$$

   pro všechny $(x_1, \ldots, x_n) \in I^{(n)}$.

2. Diagonalizační pravidlo pro rovnost k-tého a l-tého argumentu:

   Nechť $\Phi \in \mathcal{B}_I, \Phi : I^{(n)} \to B, n > 1$. Nechť je zadáno $k, l, 1 \leq k < l \leq n$. Potom do $\mathcal{B}_I$ patří také zobrazení $\Lambda = \Phi^{(k,l)}$ množiny $I^{(n-1)}$ do B, kde

   $$\Lambda(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \Phi(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_{l-1}, x_k, x_l, \ldots, x_{n-1})$$

   pro všechny $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in I^{(n-1)}$.

3. Pravidla nekonečných spojení a průseků přes indexovou množinu:

   Nechť $\Phi \in \mathcal{B}_I, \Phi : I^{(n)} \to B$, a nechť je zadáno $k, 1 \leq k \leq n$.

   a) Potom pro každou volbu hodnot $x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n \in I$ existuje v B

      supremum

      $$\bigvee_{x \in I} \Phi(x_1, \ldots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \ldots, x_n)$$

      a infimum

      $$\bigwedge_{x \in I} \Phi(x_1, \ldots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

b) Nechť navíc $n > 1$. Potom do $\mathcal{B}_I$ patří také zobrazení $\Lambda_1 = \Phi^{(\vee,k)}$ a $\Lambda_2 = \Phi^{(\wedge,k)}$ množiny $I^{(n-1)}$ do B, kde

$$\Lambda_1(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \bigvee_{x \in I} \Phi(x_1, \ldots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \ldots, x_n)$$

a

$$\Lambda_2(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \bigwedge_{x \in I} \Phi(x_1, \ldots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \ldots, x_n)$$

pro všechny $(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n) \in I^{(n-1)}$.

4. Ke každému $b \in B$ existuje $\Phi \in \mathcal{B}_I$ tak, že $b = \Phi(x_1, \ldots, x_n)$ pro vhodnou n-tici $(x_1, \ldots, x_n) \in I^{(n)}$.

Příklady indexovaných algeber:

1. B je libovolná Booleova algebra a I libovolná (nekonečná) množina. $\mathcal{B}_I$ se skládá ze všech takových zobrazení ($I^{(n)}$ do B pro každé n), že každé zobrazení nabývá jen konečného počtu různých hodnot.

2. B je úplná (např. konečná) Booleova algebra, I je libovolná (nekonečná) množina. $\mathcal{B}_I$ se skládá ze všech zobrazení $I^{(n)}$ do B.

3. B je σ-algebra, I je množina přirozených čísel. $\mathcal{B}_I$ se skládá ze všech vícenásobných posloupností prvků algebry B.

4. Nechť A je formule, jejíž všechny různé volné proměnné seřazené podle svého prvního volného výskytu v A tvoří posloupnost $(x_1, \ldots, x_n)$, píšeme $A = A(x_1, \ldots, x_n)$. Nechť $A(x_1, \ldots, x_n/y_1, \ldots, y_n)$ je výsledkem simultánního nahrazení $x_1, \ldots, x_n$ proměnnými $y_1, \ldots, y_n$. TL-algebra B je indexovanou algebrou se systémem indexování $\mathcal{B}_I$, jsou-li splněny následující podmínky:

   a) I je množina proměnných,

   b) $\mathcal{B}_I$ se skládá ze všech zobrazení každé kartézské mocniny $I^{(n)}$ do TL-algebry B definovaných

   $$\Phi_A(y_1, \ldots, y_n) = [A(x_1, \ldots, x_n/y_1, \ldots, y_n)]$$

   pro všechny $(y_1, \ldots, y_n) \in I^{(n)}$.

Jelikož pojem indexované algebry je příliš obecný, jsou zavedeny substitutivně indexované algebry:

Definice: Indexovaná algebra B se systémem indexování $\mathcal{B}_I$ se nazývá *substitutivně indexovaná*, jestliže platí následující:

Nechť $\Phi, \Psi \in \mathcal{B}_I$, $\Phi : I^{(n)} \to B$, $\Psi : I^{(m)} \to B$. Nechť $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) \in I^{(n)}$ a $(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_m) \in I^{(m)}$ jsou dány pevně a tak, že $\Phi(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) = \Psi(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_m)$. Nechť σ je libovolné zobrazení I do I, tzv. *nahrazení indexů*. Potom také

$$\Phi(\sigma(\bar{x}_1), \ldots, \sigma(\bar{x}_n)) = \Psi(\sigma(\bar{y}_1), \ldots, \sigma(\bar{y}_m)).$$

TL-algebra se systémem $\mathcal{B}_I$ uvedeným výše je též substitutivně indexovanou algebrou.

Nyní je ještě třeba zavést modifikace základních algebraických pojmů.

Definice: Nechť B je indexovaná algebra se systémem indexování $\mathcal{B}_I$. Nechť F je (vlastní) filtr[38] algebry B. F se nazývá *indexovaný*, krátce *i-filtr*, pokud splňuje následující podmínku:

Nechť $\Phi(x_1, \ldots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \ldots, x_n) \in F$ pro nějaké pevné indexování $\Phi \in \mathcal{B}_I$, nějakou pevnou $(n-1)$-tici $(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n) \in I^{(n-1)}$ a libovolné $x \in I$. Potom platí

$$\bigwedge_{x \in I} \Phi(x_1, \ldots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \ldots, x_n) \in F.$$

i-filtr P algebry B se nazývá *i-prvofiltr*, jestliže je prvofiltrem této algebry.

V případě substitutivně indexované algebry se definuje tzv. *substitutivní* filtr jako filtr, který je uzavřený na každý tzv. *substitutivní endomorfismus* této algebry. Substitutivní endomorfismus je v práci [R21] zaveden a je dokázána jeho existence.

Část 3.: *Věta o prvofiltrech pro substitutivně indexované algebry a její důsledky*

Věta: Nechť B je substitutivně indexovaná algebra, jež je netriviální (tj. existuje indexování, které není konstantní). Nechť $card(\mathcal{B}_I) \leq card(I)$. Nechť F je substitutivní i-filtr algebry B. Potom existuje i-prvofiltr P této algebry s vlastností $F \subseteq P$.

Z této věty plyne Gödelova věta o úplnosti predikátového kalkulu prvního řádu a její zobecnění od A.I. Mal'ceva v tomto tvaru:

Věta: Každá bezesporná množina M uzavřených formulí predikátového kalkulu má (sémantický) model $\mathcal{M}$ takový, že pro mohutnost m jeho univerza platí $m \geq card(M)$.

L.S. Rieger dodává, že omezení věty o úplnosti na uzavřené formule není zásadní. Aby je mohl vynechat, zobecnil pojem substitutivního i-filtru na tzv. *polosubstitutivní* i-filtr. Věta o prvofiltrech platí i pro polosubstitutivní i-filtry, a tím je získána zobecněná věta o úplnosti bez jakéhokoliv omezení.

Část 4.: *Interpretace jakožto i-homomorfismy*

Charakteristickou vlastností TL-algebry je tzv. volnost:

Definice: Indexovaná algebra B se systémem indexování $\mathcal{B}_I$ se nazývá *volná*, jestliže v ní existuje podmnožina G nazývaná množina *indexovaných volných generátorů*, která má následující vlastnosti:

[38] Zde (a tedy i v práci [R22]) L.S. Rieger uvažuje pouze vlastní filtry, podobně jako v [R10]. Pro zajímavost doplňme, že v monografii [R22] je filtr nazýván *horním* ideálem a ideál je označován jako *dolní* ideál.

1. nejmenší podmnožina algebry B obsahující G, která je uzavřená na (konečné) operace spojení a průseku i na nekonečná spojení a průseky vytvořené pomocí indexování $\Phi \in \mathcal{B}_I$, je sama B (tedy G generuje B),

2. každé zobrazení ρ podmnožiny G do libovolné úplné Booleovy algebry A lze rozšířit na *i-homomorfismus* $\bar{\rho}$ algebry B do algebry A, tj. homomorfismus splňující

$$\bar{\rho}(\bigvee_{x\in I} \Phi(x_1,\ldots,x_{k-1},x,x_{k+1},\ldots,x_n)) =$$

$$= \bigvee_{x\in I} \bar{\rho}(\Phi(x_1,\ldots,x_{k-1},x,x_{k+1},\ldots,x_n))$$

a

$$\bar{\rho}(\bigwedge_{x\in I} \Phi(x_1,\ldots,x_{k-1},x,x_{k+1},\ldots,x_n)) =$$

$$= \bigwedge_{x\in I} \bar{\rho}(\Phi(x_1,\ldots,x_{k-1},x,x_{k+1},\ldots,x_n))$$

pro všechna $\Phi \in \mathcal{B}_I$.

Věta V: Tarského-Lindenbaumova algebra predikátového kalkulu prvního řádu je volnou indexovanou algebrou. Množinou G indexovaných volných generátorů je v tomto případě množina všech tříd $[P(x_1,\ldots,x_n)]$ atomických formulí $P(x_1,\ldots,x_n)$.[39]

Prostřednictvím této věty podal L.S. Rieger algebraicky vyjádřenou nutnou a postačující podmínku pro to, aby teorie měla sémantický model a aby interpretace jazyka byla interpretací teorie.

5.2.2 *Algebraic methods of mathematical logic* [R22] (1967)

S myšlenkou knižně zpracovat algebraickou teorii matematické logiky přišel L.S. Rieger již v roce 1950, kdy se tímto tématem začal hlouběji zabývat. Z té doby pocházejí již zmiňované články [R7] a [R8]. V letech 1951 až 1958 však byl zatížen pedagogickými povinnostmi na ČVUT (kde působil jako vedoucí *ústavu matematiky pro fakultu strojní*), od roku 1954 se začal též věnovat výzkumu v teorii množin. K realizaci své myšlenky se proto dostal až v pozdější době.

Na monografii *Algebraické metody matematické logiky* L.S. Rieger intenzivně pracoval až v posledních letech svého života. Vlastnímu sepsání knihy předcházely dva pomocné učební texty *O algebře nižšího predikátového počtu* ([R32], 1951) a *Matematická logika* ([R45], 1961). Jednalo se o hektografované přednášky určené posluchačům jeho seminářů, které vedl na MFF UK. Ani jednu z těchto prací se bohužel nepodařilo najít.

[39] *Atomické formule* jsou výrazy $p(t_1,\ldots,t_n)$, kde p je n-ární predikátový symbol a $t_1,\ldots,t_n$ jsou termy.

Důležitá část připravované monografie byla založena na pojmu substitutivně indexovaných algeber, jejichž teorie byla shrnuta v již zmíněném rukopisu, který byl po Riegrově smrti vydán jako [R21] (viz část 5.2.1). Kromě toho byla v pozůstalosti nalezena přednáška *Základy matematiky a matematická logika 20. století – stručný náčrt hlavních směrů*, jež měla být později publikována v *Časopise pro pěstování matematiky.*

Knihu se Riegrovi nepodařilo před jeho náhlou a předčasnou smrtí dokončit. V jeho pozůstalosti bylo dochováno sedm úplných kapitol a část kapitoly závěrečné. L.S. Rieger pravděpodobně nepovažoval svůj text za dokončený a měl v úmyslu jeho značnou část zrevidovat, zejména poslední kapitoly. Zásadní změny ani významná doplnění Riegrova neúplného textu však nemohly být po jeho smrti provedeny. Byly opraveny jen některé drobnější chyby a doplněny poznámky editora.

Monografie byla zkompletována za významného přispění Riegrova přítele a kolegy Miroslava Katětova, který byl jejím editorem, a bývalého aspiranta Petra Hájka. Dalšími, díky nimž mohla být kniha později vydána, byli Otomar Hájek a Riegrovi bývalí aspiranti Miloš Matula a Jiří Bečvář, který byl jejím recenzentem. Text byl přeložen do angličtiny Michalem Baschem a čtyři roky po Riegrově smrti publikován jako [R22].

Charakter a struktura knihy

V monografii [R22] jsou shrnuty důležité výsledky z algebraické logiky, které byly v dané době dosaženy. L.S. Rieger zde chápe matematickou logiku jako studium *relace důsledku* mezi matematickými tvrzeními. Nejprve se zabývá základní otázkou matematické řeči a její symbolizace. Podává podrobný rozbor intuitivních pojmů souvisejících s konstrukcí formálního jazyka. Tyto pojmy jsou kriticky analyzovány ve vztahu k jejich možným aplikacím a pak jsou použity k vytvoření matematicko-logického formálního aparátu (v několika obměnách a v různých úrovních obecnosti). Je popsána rekurzivní konstrukce syntaktického vztahu důsledku mezi formulemi (symbolizované) matematické teorie.

Kniha je uzavřena speciálními kapitolami o algebraické teorii predikátové logiky. Prostřednictvím algebraizace L.S. Rieger odchází od čistě matematického hlediska vlastností relace důsledku a převádí jejich studium na jisté vlastnosti Booleových algeber speciálního typu. V knize je rozvinuta a později aplikována teorie indexovaných TL-algeber. Ta umožňuje stručně, leč úplně popsat jak syntaktickou, tak sémantickou podstatu vztahu důsledku, a tedy zákonitosti predikátové logiky prvního řádu. Je podána řada nových důkazů již známých tvrzení, např. Gödelovy-Mal'cevovy věty, i několik dalších nových výsledků.

Podotkněme, že L.S. Rieger měl patrně v plánu sepsat mnohem obsáhlejší práci, což naznačuje značný rozsah prvních kapitol oproti kapitolám závěrečným.

Typickým rysem této monografie je Riegrův postup od konkrétních, intuitivních a speciálních pojmů k pojmům abstraktním, neintuitivním a obecným. Tyto pojmy jsou v řadě případů několikrát definovány a vysvětleny v různých souvislostech a úrovních obecnosti. Výklad je dostatečně podrobný a kniha je tak dostupná i čtenářům, kteří nejsou dobře obeznámeni se speciálními metodami matematické logiky.

Jak již bylo naznačeno, monografie [R22] obsahuje řadu Riegrových vlastních výsledků. V podstatě se jedná o poslední dvě kapitoly, v nichž jsou podrobně diskutovány problémy, které se běžně pro svou obtížnost nezkoumají. Hlavní přednost knihy je spatřována v tom, že L.S. Rieger nestuduje matematickou logiku pouze algebraickými prostředky, ale konfrontuje víc přístupů k dané problematice a objasňuje mnohé vztahy mezi nimi.

Práce [R22] byla ve své době cenným příspěvkem ke studiu základů matematiky. Bohužel v důsledku opožděného vydání ztratila zčásti na hodnotě. Mezitím byla publikována např. monografie H. Rasiowé a R. Sikorského *The mathematics of metamathematics* [RS63], kde autoři detailně studují některé otázky zkoumané dříve L.S. Riegrem.

Obsah knihy

Vzhledem ke značnému rozsahu a obtížnosti problematiky obsažené v knize [R22] se omezíme jen na stručný popis jednotlivých kapitol.

V úvodní kapitole je podána obecná charakterizace matematické logiky a logiky v širším slova smyslu a rozbor některých jejích směrů. Je diskutováno postavení matematické logiky mezi jinými vědními disciplínami (např. její vztah k filozofii), její úloha v matematice a praktické využití. L.S. Rieger zde popisuje základní matematické nástroje logiky, vysvětluje pojmy formalizace a interpretace a dotýká se i problematiky konstruktivismu. Tuto kapitolu doporučuje podrobně pročíst až na konec.

Druhá kapitola nazvaná *Jazyk matematiky a jeho symbolizace* se zabývá analýzou matematických úvah z hlediska matematické logiky. L.S. Rieger zde na příkladech ukazuje způsob, jakým lze symbolizovat matematický jazyk (jako systém znaků). Značnou část kapitoly věnuje podstatě a účelu takové symbolizace.

Třetí kapitola s názvem *Rekurzivní konstrukce relace důsledku* popisuje predikátový počet a jeho syntaktická a sémantická pravidla. Zavádí fundamentální vztah důsledku a relativního důsledku a dokazuje jejich základní vlastnosti. Jeden oddíl je věnován matematické analýze pravdivosti.

Čtvrtá kapitola *Výrazové možnosti podané symbolizace* se věnuje možnostem symbolizace klasické matematiky. Jsou zde zavedeny pojmy operace, funkce a (individuální) konstanta. Dále se zkoumají možnosti eliminace konstant a predikátu rovnosti.

V páté kapitole nazvané *Intuitivní a matematické pojmy idealizované axiomatické matematické teorie* – po úvodním rozboru problematiky z předchozích kapitol – diskutuje L.S. Rieger roli aritmetizace a algebraizace ve vztahu k matematické logice. Dále popisuje matematický jazyk a definuje pojem formalizované matematické teorie. V závěru této kapitoly řeší některé zásadní otázky (jaká je algoritmická podmínka pro to, aby bylo možné rozhodnout, zda daná konečná posloupnost znaků je formulí, otázku jednoznačnosti rozkladu formulí na podformule, možnost nahrazení podformule jinou formulí a otázku syntaktické charakterizace rozsahu kvantifikátoru).

Šestá kapitola *Algebraická teorie elementární predikátové logiky* je věnována Booleovým algebrám. L.S. Rieger zavádí Booleovu algebru oběma možnými způsoby (pomocí uspořádání i pomocí operací spojení a průseku). Dále definuje základní algebraické pojmy teorie Booleových algeber (homomorfismus, ideál atp.) a dokazuje některé jejich vlastnosti včetně množinové reprezentace Booleových algeber. Na základě znalostí z předchozích kapitol dospívá k definici Tarského-Lindenbaumovy algebry.

V první části sedmé kapitoly *Základy algebraické teorie logické syntaxe* je dokázána existence volných Booleových algeber, podána jejich konstrukce a reprezentace (pomocí Cantorova diskontinua) a je zkoumán jejich vztah k TL-algebrám. Dále jsou studovány algebraické vlastnosti TL-algeber a operací spojení a průseku a jejich vztah ke kvantifikátorům. Je zaveden pojem indexované algebry a s ním související pojmy a jsou zkoumány substitutivní i-filtry v souvislosti s formalizovanými teoriemi. V závěru L.S. Rieger přistupuje k abstraktní algebraické charakterizaci TL-algeber.

V osmé kapitole *Algebraické zákony sémantiky predikátové logiky prvního řádu* je definován pojem (sémantického) modelu dané teorie a jsou studovány vlastnosti tohoto modelu a dalších sémantických pojmů z algebraického hlediska. Je zaveden pojem i-prvonadfiltru a na závěr je podána algebraická formulace úplnosti predikátové logiky. Tato kapitola byla dokončena až po Riegrově smrti.

Konkrétní výsledky

V tomto oddílu popíšeme některé významné Riegrovy postupy a závěry z publikace [R22].

Jak již bylo zmíněno, zásadním pojmem v této práci je vztah *logického* (*formálního*) *důsledku* $\rightarrow$ mezi formulemi.[40] V kapitole 3 je podána jeho rekurzivní definice, podobným způsobem jako např. pro množinu M všech formulí.

Základní vztah mezi logickým důsledkem $\rightarrow$ a implikací $\Rightarrow$ je následující:

Věta: Vztah $X \rightarrow Y$ platí právě tehdy, když platí $Z \rightarrow (X \Rightarrow Y)$ pro všechny formule Z.

Neboli formule Y je logickým důsledkem formule X právě tehdy, když implikace $X \Rightarrow Y$ je logickým důsledkem libovolné formule Z. Tato věta je ekvivalentem k Větě o dedukci klasické logiky (v predikátovém kalkulu pro uzavřenou formuli X).

Kromě čistě logických témat diskutuje L.S. Rieger i jejich modifikace získané přidáním množiny axiomů jisté matematické teorie. Takovým příkladem je modifikace logického důsledku $\rightarrow$ na tzv. *relativní důsledek* $\rightarrow_A$, kde A značí danou

[40] Poznamenejme, že v této práci L.S. Rieger používal pro pojem formule termín *větný výraz*, angl. *sentential expression*. Proměnné označoval jako (*individuální*) *neurčité*, angl. *indeterminates*.

množinu axiomů. V souvislosti s tím je třeba uvažovat vedle klasické Tarského-Lindenbaumovy algebry L též algebru L_A, která je určena vztahem relativního důsledku $\rightarrow_A$. Jedná se tedy o TL-algebru teorie dané axiomy z množiny A.

Nyní již obrátíme svou pozornost na výsledky, které byly dokázány využitím algebraických prostředků (kapitoly 7 a 8). Pro potřebné pojmy odkazujeme na část 5.2.1.

Nejprve L.S. Rieger dokázal, že pojem volné Booleovy algebry je postačující k popisu logické syntaxe bez kvantifikátorů. K úplné charakterizaci logické syntaxe s kvantifikátory zavedl (vlastní) pojem substitutivně indexované algebry. Zásadní jsou následující dvě tvrzení:

Věta: Tarského-Lindenbaumova algebra L je i-izomorfní s jistou volnou indexovanou algebrou B.[41]

Věta: Tarského-Lindenbaumova algebra L_A, kde A je bezesporná množina uzavřených axiomů, je i-izomorfní s jistou substitutivně indexovanou algebrou.

V kapitole 8, jež je věnována algebraické charakterizaci logické sémantiky, se L.S. Rieger zaměřuje na problém úplnosti predikátového kalkulu prvního řádu a interpretovatelnosti v souvislosti s konstrukcí modelů. Větu o úplnosti formuluje následujícím způsobem:

Věta: Množinové sjednocení všech i-prvofiltrů Tarského-Lindenbaumovy algebry je jednoprvková množina obsahující pouze jednotku této algebry.

Dále zavádí pojem *i-prvonadfiltru* TL-algebry a dokazuje větu o jeho existenci. Díky tomu lze dokázat, že je možné pracovat s teorií modelů jako s teorií i-homomorfních reprezentací substitutivně indexovaných TL-algeber algebrami nekonečně dimenzionálních cylindrů s konečně dimenzionálními bázemi[42].

V práci [R22] jsou citovány Riegrovy články [R4], [R5], [R6], [R7], [R8], [R9], [R11], [R12], [R13], [R15], [R18], [R20] a [R21].

Pojednání o Riegrově monografii [R22] uzavřeme slovy Petra Hájka:

Je velmi poučné sledovat ... zejména v obsáhlé úvodní kapitole ..., jak si [L.S. Rieger] *znovu a znovu kladl otázku, co je matematická logika, co je jejím nejvlastnějším úkolem a předmětem studia, jaký je její vztah k matematice, obecné logice, filosofii a aplikacím. Na odpovědích, které dává na tyto otázky, je typická nedogmatičnost a veliká šíře zájmu.*[43]

---

[41]Srovnej s Větou V, část 5.2.1. Podotkněme, že v této práci používá L.S. Rieger poněkud odlišnou definici volné indexované algebry než v publikaci [R21]. Zde např. podle definice množiny generátorů G platí $G \subseteq \mathcal{B}_I$.

[42]Nechť $Q \subseteq \mathbb{R}^{(n)}$ je n-ární relace mezi reálnými čísly, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ je množina všech reálných posloupností a $(i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^{(n)}$ libovolná n-členná posloupnost indexů. Pak množina všech posloupností r takových, že $(r_{i_1}, \ldots, r_{i_n}) \in Q$, se nazývá *cylindr* (prostoru $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$) v osách $i_1, \ldots, i_n$ s n-dimenzionální bází Q.

[43][Háj76], str. 417.

5.2.3 Navazující práce a citace v monografiích

Riegrova monografie [R22] je citována v pracích H.P. Alessa [Ale83] a [Ale90]. Dále je zmíněna trojicí českých autorů K. Berkou, V. Čechákem a Z. Zastávkou v přehledovém článku [BČZ85], v monografii J. Peregrina *Logika a logiky* [Per04] a v knize K. Berky *Stručné dějiny logiky* [Ber94], kde o ní autor píše:

> *...patří k velmi významným pracem naší poválečné logické literatury.*[44]

V souvislosti s důkazem Gödelovy věty o úplnosti ji cituje J. Zygmunt v článku [Zyg73] (viz též část 3.4.1). Dále se na její výsledky odkazuje S.W.P. Steen v monografii *Mathematical logic* [Ste72].

5.3 Vznik a vývoj logiky

Logika[45] má své počátky ve třech kulturních regionech – Indii, Číně a Řecku, významnější rozvoj však navázal pouze na její kořeny ve starověkém Řecku. Vývoj této disciplíny lze rozdělit do čtyř etap:

1. antické období (do počátku 6. století),
2. středověké období (6.–15. století),
3. období tradiční logiky (16.–19. století),
4. období moderní logiky (od poloviny 19. století).

V tomto oddílu se zmíníme pouze o nejzásadnějších faktorech a osobnostech, které měly vliv na rozvoj logiky, a podrobněji se zaměříme na situaci na našem území. Následující odstavce vycházejí především z knížky K. Berky *Stručné dějiny logiky* [Ber94], kterou zároveň doporučujeme zájemcům o podrobnější studium této problematiky jako vstupní text.

5.3.1 Logika v Řecku

Lze říci, že základy logiky v antickém Řecku položili v 6. až 5. stol. př. n. l. eleaté (přesněji jejich spor s hérakleitovci o povaze změny). Zenónovy apórie, které odporovaly poznatkům o vztahu skutečnosti a myšlení, vyvolaly potřebu zkoumat otázky vztahů přírody, myšlení a jazyka. Zároveň v této době roste potřeba vzdělávání, zvláště v rétorice a argumentaci. Tyto obory začínají vyučovat sofisté, kteří kladou důraz na důslednost v procesu usuzování a zdůvodněné argumentování.

Teoretické základy logiky jako vědy položil jeden z největších učenců starověku Aristotelés ze Stageiry (384–322 př. n. l.). Ve spisech *Kategorie, O vyjadřování, První* a *Druhé analytiky*, *Topiky* a *O sofistických důkazech*, shrnuté později pod názvem *Organon* (česky nástroj – o správném filozofickém myšlení)

---

[44] [Ber94], str. 116.

[45] Z řeckého logos = řeč, slovo, myšlenka, rozum; věda o správném uvažování či nauka o formách a prostředcích formulování správných úsudků.

podal *první ucelený systém pojmové logiky (ve smyslu tehdejší predikátové logiky), jehož základní složky byly převzaty v celém dalším historickém vývoji.*[46] Ohlásil tak (zejména v *Prvních analytikách*) počátek formální logiky. Aristotelés zformuloval zákon sporu, sylogismu a vyloučení třetího, vytvořil teorii definic a vědeckých důkazů.[47]

5.3.2 Středověká logika

Logika ve středověku bezprostředně navazovala hlavně na dědictví pozdní antiky a Aristotelovo (zejména díky římskému filozofovi A.M.S. Boëthiovi (480–525), který přeložil část Aristotelova díla do latiny a opatřil ji komentáři). V této době byla vědomě koncipována jako formální logika s důrazem na praktické využití. V následujících staletích však slábne její metodologická funkce, naopak výrazný vliv získává křesťanství.

Na konci 12. století vznikají v Evropě první univerzity (Paříž, Bologna, Oxford, Cambridge), 13. století je vrcholným obdobím tehdejší křesťanské filozofie – tzv. scholastiky. Po vzoru pozdní antiky se základem středověkého světského vzdělání stalo tzv. sedm svobodných umění vyučovaných na tzv. artistických fakultách (později filozofických). Sedm svobodných umění sestávalo ze dvou stupňů – tzv. trivia, jež sdružovalo humanitně orientované obory (gramatika, rétorika a dialektika) a tzv. kvadrivia, zaměřeného na matematické disciplíny (aritmetika, geometrie, stronomie a hudba). Logika se ve středověku učila jako součást trivia.

Po filozofické stránce souvisela středověká logika se sporem o univerzálie (obecniny), tedy o charakter obecných pojmů a jejich vztah k věcem. Více o středověku, tehdejším myšlení, vzdělání a zejména o vývoji matematických a přírodních věd nalezne čtenář v knize [Beč01].

Rozvoj středověké logiky probíhal ve třech etapách. První etapa (6.– počátek 12. století) je nazývána stará logika (logica vetus). Tehdejší myslitelé studovali Aristotelovy spisy *Kategorie* a *O vyjadřování* spolu s Boëthiovými díly. Z hlavních osobností této etapy jmenujme Alcuina (kolem 778) a Pierra Abélarda (1079–1142).

Druhá etapa (12.–13. století) je známá jako nová logika (logica nova). V této době se navazuje již na celé *Organon* a utváří se specifické oblasti středověké logiky (např. teorie důsledků, která se stala nejvyspělejší složkou středověké logiky; rozvíjí se nauka o vlastnostech termínů a modální logika[48]). Nejvýznamějšími logiky této doby byli John ze Salisbury (1110–1180), Petr Hispánský (1205–1277) a Jan Duns Scotus (1270–1308). Zvláštní pozici zde má Raymund Lullus (1235–1315) se svým dílem *Ars magna* (*Velké umění*, 1305–1308), v němž zformuloval myšlenku logického kalkulu. R. Lullus svými úvahami ovlivnil řadu předchůdců moderní logiky (viz dále).

---

[46][Ber94], str. 7.

[47]Viz též Berka, K., *Aristoteles*, Orbis, Praha, 1966; Patočka, J., *Aristoteles*, Vyšehrad, Praha, 1994.

[48]V *modální logice* lze uvažovat vedle klasických tvrzení i tzv. *modální tvrzení* typu „je možné, že …“ a „je nutné, aby …“. Její výrokový kalkul tak navíc obsahuje dva modální operátory – *nutný* a *možný*.

Třetí vývojová etapa (14.–15. století) se označuje jako moderní logika (logica modernorum). V tomto období vznikala kompendia středověké logiky. Mezi hlavní autory patří např. William Occam (1290–1349).

Počátky logiky v našich zemích

První zmínky o studiu logiky jako samostatné vědní disciplíny v našich zemích sahají do doby vrcholného středověku (13.–15. stol.). Po založení Karlovy univerzity v roce 1348 byla logika vyučována v prvních třech letech studia na artistické fakultě. V úvodu jejího studia bylo vykládáno jedno ze základních děl scholastiky, traktát Petra Hispánského *Summulae logicales* (1246). Studenti postupně prostudovali celé Aristotelovo dílo *Organon*; v prvním roce spisy *Kategorie* a *O vyjadřování*, ve druhém pak *První* a *Druhé analytiky* spolu se spisy *O sofistických důkazech* a *Topiky*. *Topiky* byly studovány ještě během třetího roku. Vlastními myšlenkami k rozvoji logiky přispěl Stanislav ze Znojma (?–1415). Některé jeho úvahy však byly – jak bylo pro středověkou logiku typické – do jisté míry podřízeny teologii.

5.3.3 Tradiční logika

Období humanismu a renesance (16.–17. stol.) je spojeno s kritikou scholastiky a v souvislosti s tím i aristotelské logiky. Objevují se snahy o nalezení nových logik, jmenujme např. Francise Bacona (1561–1626) a jeho dílo *Novum organum* (1620). V rámci vzniku nových proudů se na naše území dostává tzv. ramistická logika nazvaná podle francouzského myslitele Petra Rama (1515–1572). Stejně jako ostatní pokusy, ani tento směr se však nestal významným přínosem k dalšímu rozvoji logiky. Ta se naopak dostává do stínu psychologie a filozofie. Situace v této době ve svých důsledcích vede k jakési stagnaci ve vývoji logiky; tradiční logika přetrvala až do konce 19. století. V 18. a 19. století je logika vykládána v řadě spisů psaných již v národních jazycích.

Základním díle tradiční logiky je učebnice P. Nicola (1625–1695) a A. Arnaulda (1612–1694) *La logique, ou l' art de penser* (*Logika neboli umění myslet*, 1662). Značně vyšší úrovně však dosáhla kniha *Compendium Logicae Hamburgensis* (1641) od Joachima Jungia (1587–1657), jednoho z největších autorů sedmnáctého století. Ta se však v dalším vývoji logiky příliš neprosadila. Z českých myslitelů připomeňme pražského logika Jana Cramuela z Lobkovic (1606–1682).

5.3.4 Moderní logika

Předchůdci moderní logiky

V 17. stol. vzniká řada myšlenek předcházejících počátky moderní (jinak též symbolické či matematické) logiky. Objevují se úvahy o tzv. *mathesis universalis* – univerzální vědě s jednotnou matematickou metodou, jednotným jazykem a logikou vycházející z myšlenek R. Lulla. Zájem o metodologické otázky roste v návaznosti na rychlý rozvoj matematiky a přírodních věd. Latina v této době ztrácí své výsadní postavení a začínají se projevovat snahy o vytvoření univerzálního jazyka.

Na tato témata se zaměřovali hlavně R. Descartes (1596–1650) ve své práci *Rozprava o metodě* (1637) a B. Pascal (1623–1662) v díle *O geometrickém duchu*. V této souvislosti se logické problematice věnoval i Jan Ámos Komenský (1592–1670) ve spise *Obecné trojumění* (1670).

V následujících odstavcích zmíníme pouze nejvýznamnější myslitele, kteří přispěli k počátkům moderní logiky. Pro širší studium základů moderní logiky doporučujeme knihu I. Grattana-Guinnesse *The search for mathematical roots 1870–1940* [Gra00].

Gotfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) jako první podal koncepci nové logiky, která spočívala ve vytvoření univerzálního znakového systému, logického kalkulu a zavedení rozhodovací procedury (o pravdivosti daného výroku). Svým pojetím kalkulu Leibniz inicializoval logickou syntax a ovlivnil řadu následovníků. Hlavním Leibnizovým přínosem je jeho myšlenka matematizace věd, která se později stala jedním z nejvýznamnějších rysů matematické logiky.

Za průkopníka logické sémantiky a moderních matematických metod lze považovat Bernarda Bolzana, již zmiňovaného v souvislosti s počátky teorie množin, přestože jeho názory neměly na vývoj logiky okamžitý vliv. Své výsledky Bolzano shrnul v čtyřdílné učebnici logiky a metodologie vědy nazvané *Vědosloví* (1837). Poznamenejme, že B. Bolzano jako první zavedl pojem proměnné.

Zakladatelé moderní logiky

V devatenáctém století dochází k poměrně rychlému rozvoji (matematické) logiky, a to v důsledku vznikající potřeby upřesnit pojmy matematické analýzy a později i základy matematiky. Na konci devatenáctého století byly do logiky zavedeny relace a funkce.

George Boole (1815–1864) byl zakladatelem tzv. algebry logiky, která bezprostředně předcházela současné podobě moderní logiky. (Algebra logiky i moderní logika v zásadě sledují obdobný cíl, o čemž svědčí i skutečnost, že významným představitelem obou těchto směrů byl např. A.N. Whitehead (1861–1947).) Období algebry logiky lze vymezit rokem 1847, kdy G. Boole uveřejnil svou práci *The mathematical analysis of logic* a rokem 1903, kdy byl publikován spis *The principles of mathematics* B. Russella.

Těsný vztah logiky a matematiky (algebry) byl uznáván všemi zástupci algebry logiky. G. Boole roku 1851 prohlásil:

Je to prostě fakt, že zákony logiky jsou svou formou a vyjádřením matematické, třebaže nepatří k matematice kvantity.[49]

O tři roky později přišel s novou reformou logiky, kdy uvažoval tři základní

[49] [Ber94], str. 96; též Berka, K., *Algebra logiky*, Filozofické a vývojové problémy matematiky, sborník vybraných přednášek z letních škol Světonázorová výchova v matematice (Folta, J., ed.), JČMF, Praha, pp. 13–40, str. 14.

operace: logické sčítání, násobení a doplněk. Algebraicky má Boolem definovaný kalkul stejnou strukturu jako Booleův svaz (viz část 3.1.1).

Z dalších představitelů algebry logiky jmenujme např. W.S. Jevonse (1835–1882), H. McColla (1837–1909), J. Venna (1834–1923) a L. Carrolla (1832–1898).

Významnou osobností této doby byl též Charles Stephen Peirce, který se všestranně zasloužil o rozvoj logiky. Položil základy moderní sémiotiky a vymezil pojem kvantifikátoru. Jeho největším přínosem je rozpracování relační logiky, v čemž přímo navazoval na Augusta De Morgana (1806–1878). I přes svůj význam však G. Boole ani C. Peirce bezprostředně neovlivnili vývoj logiky 2. poloviny 19. století.

Období algebraické logiky zakončuje Ernst Schröder (1841–1902), který v syntetickém třídílném díle *Vorlesungen über die Algebra der Logik* (*Přednášky o algebře logiky*) publikovaném v období 1890 až 1905 rozšířil a shrnul práci Booleho, De Morgana a Peirceho. Připravil tak cestu matematické logice jako samostatné disciplíně 20. století.

Základy moderní logiky položil Gottlob Frege ve svém spise o predikátové logice *Begriffsschrift* (*Pojmové písmo*) (1879). Frege (na rozdíl od Booleho) navazoval na Leibnizův program reformy logiky, podal první axiomatický systém klasické logiky. Nicméně jeho výsledky se nedočkaly většího ohlasu. Jedním důvodem je značná nepřehlednost zápisu, který Frege používal, a fakt, že většina logiků v té době pracovala v booleovské tradici; dalším důvodem může být to, že patřil mezi zastánce logicismu (viz část 3.2.2, poznámka 16). Na význam Fregeho výsledků upozornil Bertrand Russell, který též zastával stanovisko logicismu.

V souvislosti se vznikem moderní logiky je třeba zmínit Giuseppe Peana, který vytvořil logickou symboliku, jež je až na drobnou změnu používána dodnes. Na základě výsledků R. Dedekinda v práci *Was sind und was sollen die Zahlen?* (1888) podal G. Peano axiomatizaci teorie přirozených čísel (viz část 4.2.6). Tu poprvé publikoval v knize *Aritmetices principia, nova metoda expozita* (1889).[50]

Tuto etapu uzavírá již zmiňovaný B. Russell, který společně s A.N. Whiteheadem shrnul dosavadní vývoj v třísvazkové práci *Principia Mathematica* (1910, 1912, 1913). Tomuto základnímu dílu logicismu bývá někdy připisován obdobný význam, jako má Aristotelovo *Organon.* B. Russella jsme již zmínili v části 4.4.2 v souvislosti s vybudováním teorie typů, jejíž základní myšlenky byly formulovány ve výše uvedené práci *The principles of mathematics.*

Od přelomu devatenáctého a dvacátého století souvisí moderní logika s problematikou základů matematiky a tedy i nově vzniklé teorie množin, jejíž vývoj je popsán v části 4.4. Kromě snad největšího logika dvacátého století Kurta Gödela sem patří další světová jména, o nichž jsme se zmínili již v předchozích částech a kapitolách. Uveďme např. tyto: David Hilbert, L.E.J. Brouwer, Arend Heyting, Alfred Tarski, Leopold Löwenheim, Thoralf Skolem, Alonzo Church,

[50]Více viz Štěpánek, P., *Giuseppe Peano (1858–1932). Logika a teorie dimenze*, PMFA **27** (1982), 301–307.

Alan Turing, Stephen Cole Kleene, Jacques Herbrand a Gerhard Gentzen[51]. Hlubší rozbor matematické logiky dvacátého století již není naším cílem. Vedle již zmiňované monografie [Gra00] dále zájemcům doporučujeme knihu *Logika 20. století: mezi filosofií a matematikou* [Per06] editovanou J. Peregrinem.

Po tomto velmi stručném a zjednodušeném přehledu nejdůležitějších mezníků ve vývoji logiky do počátku dvacátého století se soustředíme na okolnosti a poměry, které panovaly v československé logice v období, kdy tyto otázky začal studovat L.S. Rieger.

5.3.5 Vývoj logiky v Československu v poválečných letech

Nyní se pokusíme čtenáři přiblížit situaci v oblasti výzkumu a studia logiky v poválečném Československu,[52] a nastínit tak podmínky, za nichž L.S. Rieger pracoval v hlavní oblasti svého zájmu, v matematické logice. Text je sepsán zejména na základě článku K. Berky [Ber99].

Je třeba si uvědomit, že s ohledem na celkový politický vývoj v dané době, byla situace před rokem 1948 jiná než v období pozdějším. V letech 1945 až 1948 nejprve dozníval výklad tradiční logiky, o nové pojetí se pokusili Karel Engliš[53] v [Eng47] a Arnošt Kolman[54] v [Kol47] a [Kol48]. Začaly sem též pronikat myšlenky moderní logiky, jíž byly věnovány práce Miroslava Katětova [Kat46] a zejména pak Otakara Zicha[55] [Zich47], který již před válkou spolupracoval s časopisem *Journal of Symbolic Logic*. V oblasti matematické logiky

[51]Gerhard Gentzen (1909–1945), německý matematik a logik. Studoval pod vedením H. Weyla (1885–1955), byl asistentem D. Hilberta. Roku 1936 dokázal bezespornost Peanových axiomů. V roce 1940 se habilitoval, o tři roky později byl jmenován mimořádným profesorem na německé univerzitě v Praze. Žádné styky s československou matematikou však nenavázal. Působil zde do května roku 1945, kdy byl zatčen, uvězněn a tři měsíce poté zemřel.

Viz Vihan, P., *Gerhard Gentzen (1909–1945)*, PMFA **37** (1992), 249–257; Vihan, P., *Zpráva o posledních měsících a dnech Gerharda Gentzena prožitých v Praze*, PMFA **38** (1993), 291–296.

[52]Za první republiky u nás nebylo v logice dosaženo významnějších výsledků, přesto zde zmíníme vysokoškolskou učebnici Josefa Tvrdého (1877–1942) [Tvr37]. Josef Tvrdý byl profesor filozofie a psychologie na Filozofické fakultě MU v Brně a Univerzitě Komenského v Bratislavě. Zemřel v koncentračním táboře v Mauthausenu.

[53]Karel Engliš (1880–1961), významný ekonom a politolog. S Aloisem Rašínem (1867–1923) se velkou měrou podílel na měnové reformě poválečného Československa. Působil jako ministr financí v několika vládách, v letech 1934 až 1938 měl funkci guvernéra *Národní banky československé*. Byl prvním rektorem MU v Brně, v období 1947 až 1948 byl rektorem UK v Praze. Po únoru 1948 se zřekl svých univerzitních funkcí a odešel z veřejného života. V roce 1991 mu byl udělen *Řád T.G. Masaryka III. třídy za vynikající zásluhy o demokracii a lidská práva*, in memoriam.

Viz Vencovský, F., *Karel Engliš*, Nadace Universitas Masarykiana, Brno, 1993.

[54]Arnošt Kolman (1892–1979), filozof, logik, matematik a revolucionář, jedna z nejkontroverznějších českých osobností dvacátého století. Hlavními oblastmi jeho vědeckého zájmu byly dějiny logiky a matematiky, vztah marxistické filozofie k přírodním vědám a etika, věnoval se též popularizaci vědeckého světového názoru. Viz Kolman, A., *Zaslepená generace. Paměti starého bolševika*, Host, Brno, 2005 (z ruštiny přeložil Vladimír Tosek).

[55]Otakar Zich (1908–1984), profesor logiky, studoval též matematiku, filozofii a estetiku. Založil první české samostatné pracoviště logiky (na FF UK) a po dlouhou dobu je vedl. Zasloužil se významnou měrou o systematické studium a výzkum v logice, aplikaci logiky v řadě oborů i o její popularizaci, prosazoval českou logiku v zahraničí. Dále přispěl k rozvoji studia historie a filozofie matematiky a přírodních věd.

působila i Albína Dratvová, která později vedla na PřF a MFF UK semináře z matematické logiky.

Tento pozitivní vývoj byl však v následujícím poúnorovém období na řadu let utlumen. To bylo způsobeno nedůvěrou filozofie v moderní logiku, jež se jevila jako disciplína příliš matematicky orientovaná a další negativní faktor byl politického a ideologického rázu. S nástupem marxistické filozofie začala převažovat snaha logiku „dialektizovat“. Marxističní ideologové byli zásadně proti moderní logice jako *buržoazní pavědě sloužící zájmům světové reakce*.[56]

Nicméně i v SSSR se projevila potřeba alespoň tradičního logického vzdělávání (v roce 1941 byla logika zavedena jako učební předmět na filozofických fakultách). Jako obrana před negativním postojem vůči logice byla matematická logika zařazena mezi matematická odvětví, a tím k ní byl alespoň v omezené míře umožněn přístup i u nás (v důsledku hesla „SSSR náš vzor“).[57] Z této doby pochází populární knížka Karla Hruši (1905–1971)[58] [Hru50].

Na filozofických fakultách i gymnáziích stále převládal výklad tradiční logiky podle sovětských učebnic. V roce 1951 vyšla samostatná učebnice logiky od Milana Machovce[59] [Mach51]. Za udržení a budoucí rozvoj moderní logiky se v této době zasloužil též Robert Konečný[60], pod jehož vedením vznikla nová generace českých logiků: Karel Berka, Karel Čulík, Vladimír Janák (nar. 1927) či Ota Weinberger (nar. 1919). Ze slovenských filozofů zmíníme Igora Hrušovského[61] a jeho studenta Vojtecha Filkorna[62].

Ve snaze našich filozofů ovlivnit další osud logiky byla v lednu 1953 uspořádána dvoudenní celostátní konference o logice. Hlavní referát *O významu logiky* byl přednesen Otakarem Zichem. Jeho cílem bylo reagovat na sovětskou diskusi o logice a dialektice v časopise *Voprosy filosofii*, která byla rozhodující pro vývoj logiky v „lidově demokratických“ státech, a vytyčit program rozvoje logiky

[56][Ber99], str. 501.

[57]Uvědomme si, že první Riegrova práce s logickou tématikou [R5] je právě z těchto let.

[58]Viz Vyšín, J., *Milý příteli Karle Hrušo*, Matematika ve škole **15** (1964/65), 557–559; Kraemer, E., *Šedesát let Doc. Dr. Karla Hruši*, PMFA **11** (1966), 39; Koman, M., *Zemřel Prof. RNDr. Karel Hruša*, ČPM **96** (1971), 340–342; Vyšín, J., *Na rozloučenou s Karlem Hrušou*, PMFA **17** (1972), 1–3.

[59]Milan Machovec (1925–2003), profesor filozofie, vystudoval filozofii a klasickou filologii. Působil na FF UK, odkud byl v roce 1970 z politických důvodů propuštěn, učil zde znovu až od roku 1990. Je autorem více než deseti filozofických knih, některé byly přeloženy až do patnácti jazyků.

[60]Robert Konečný (1906–1981), profesor psychologie, studoval též filozofii, češtinu a němčinu. Působil na Filozofické fakultě MU (vedl zde též katedru psychologie) a v *Psychologickém ústavu* ČSAV v Brně, přispěl k rozvoji české klinické psychologie a psychiatrie a dále psychologie osobnosti.

[61]Igor Hrušovský (1907–1978), profesor filozofie Univerzity Komenského v Bratislavě, akademik *Slovenské akadémie vied* (dále SAV) a ČSAV, nejvýznamnější představitel bratislavské filozofické a metodologické školy a význačná osobnost slovenského kulturního života. Má např. velký podíl na založení *Filozofického ústavu* SAV (1946), jehož ředitelem byl řadu let.

[62]Vojtech Filkorn (nar. 1922), filozof, první profesor logiky na Slovensku. Založil a více než dvacet let vedl katedru logiky na Filozofické fakultě Univerzity Komenského v Bratislavě, řadu let působil na této fakultě jako vedoucí *kabinetu metodologie věd*. V roce 1962 se stal členem korespondentem ČSAV, o rok později členem korespondentem SAV, roku 1968 akademikem SAV a v roce 1977 akademikem ČSAV. V letech 1963 až 1966 byl rektorem Univerzity Komenského. Kromě speciálních logických otázek se věnoval dějinám logiky, metodologii věd a teorii vědy.

u nás. Pro zajímavost doplňme, že na této konferenci vystoupil i Riegrův otec Ladislav Rieger, jehož příspěvek byl v témže roce uveřejněn ve *Filosofickém časopise*.

Tato konference, ač názorově podmíněná tehdejší ideologií, u nás položila základy systematičtějšímu studiu logiky. V roce 1957 byla založena první samostatná katedra logiky na Filozofické fakultě UK pod vedením Otakara Zicha.[63]

Je však třeba zdůraznit, že studium logiky bylo u nás závislé na sovětských autorech a ovlivněno určitými ústupky vládnoucí ideologii. S těmito problémy se na filozofických pracovištích logika potýkala v podstatě až do roku 1989.

Poznámka: Právě přečtené řádky patrně nevyzněly příliš optimisticky. Upozorňujeme však, že jsme zde popisovali zejména období padesátých a počátku šedesátých let, které nebylo pro československou vědu příliš příznivé (viz též následující kapitola). Československá matematická logika se začala úspěšně rozvíjet spíše až ve druhé polovině šedesátých let (Riegrův výzkum zde započatý byl více prosazen až jeho následovníky) a toto období je popsáno v části 4.4.4. Po řadu let již český výzkum v matematické logice (i teorii množin) dosahuje světové úrovně.

5.3.6 Knížka *Moderní logika* [Zich58]

Krátce po vzniku katedry logiky na Filozofické fakultě UK byla publikována knížka *Moderní logika* [Zich58]. Ta je jednou z prvních českých knížek zaměřených výhradně na matematickou logiku (jedinou českou publikací obdobného zaměření, která v té době existovala, byla Zichova práce *Úvod do filosofie matematiky* [Zich47]). Členy katedry logiky a zároveň autory práce [Zich58] byli Karel Berka, Miroslav Jauris (nar. 1928), Pavel Materna (nar. 1930), Miroslav Mleziva,[64] Ota Weinberger a Otakar Zich, který tento autorský kolektiv vedl.[65] Obsah knížky vychází z přednášek, které autoři konali v akademickém roce 1956/57 v kurzech *Lidové university* (organizované *Československou společností pro šíření politických a vědeckých znalostí*)[66].

Z pojetí knihy je zřejmé, že se jedná o práci ryze popularizační a z matematického hlediska poměrně chudou. Přesto může být zajímavé se o ní v těchto historických souvislostech zmínit podrobněji.

[63] Osud této katedry rozhodně nebyl snadný, prošla poměrně složitým vývojem. Např. již po třech letech byla začleněna pod katedru filozofie.

[64] Miroslav Mleziva (1929–1989) působil na katedře logiky FF UK, věnoval se zejména axiomatizaci výrokové logiky, tříhodnotové logice a jiným neklasickým logikám, otázkám logické sémantiky, dále popularizaci logiky a její aplikaci v kybernetice.

[65] V této souvislosti poznamenejme, že mezi přední české logiky patřil též Pavel Tichý (1936–1994). Ten vystudoval matematiku a filozofii, v letech 1961 až 1968 působil na FF UK, roku 1969 se zde stal docentem. O dva roky později odešel do emigrace na Nový Zéland, kde působil v Dunedinu na katedře filozofie na *University of Otago*. V roce 1981 byl jmenován profesorem. Pavel Tichý je naším jediným (filozofickým) logikem, který dosáhl mezinárodního věhlasu (mluví se o něm též jako o jedné z *nejoriginálnějších a nejkontroverznějších osobností moderní filozofické logiky*). Je autorem tzv. transparentní intenzionální logiky.

Viz Peregrin, J. (ed.), *Pavel Tichý: O čem mluvíme? (vybrané stati k logice a sémantice)*, Filosofia, Praha, 1996; Svoboda, V., Cheine, C. a Bjorn, J., *Pavel Tichý's collected papers in logic and philosophy*, Filosofia, Praha, 2005.

[66] Tento kurz měl 6 přednášek v zimním a 12 přednášek v letním semestru.

Nejprve citujeme z [Zich58], jak autoři chápali pojem moderní logiky:

Moderní logika je souhrnný termín pro vědecké odvětví, v němž se zkoumají především ty zákonité formy našeho myšlení, jejichž užívání si vynutila moderní věda. Moderní vědou budeme v této souvislosti rozumět vědy, které se rozvíjejí od renesance až po naši dobu. Moderní logika se tak odlišuje od starší fáze formální logiky, kterou označujeme také slovem klasická nebo tradiční.[67]

Knížka má následující strukturu:

Úvodní kapitola *Základní pojmy teorie vyjádření* se zabývá jazykem v širším slova smyslu, tvořením výrazů a stručně popisuje jazyk logiky. Na řadě příkladů jsou pak objasňovány základní logické pojmy. Tématem druhé kapitoly *Teorie výroků* je výroková logika. Jsou zde zavedeny výrokové formule a je popsána jejich transformace na normální formu. Systém výrokové logiky je vybudován syntakticky (deduktivně, prostřednictvím důkazů) i sémanticky (pomocí tabulek pravdivostních hodnot). V závěru jsou uvedeny jednoduché aplikace (včetně aplikací v technice) a je zmíněn příklad tříhodnotové logiky. Kapitola *Výroková funkce a její kvantifikace* pak zavádí formule predikátové logiky prvního řádu (nazývané *výrokové funkce*). Této logice je věnována šestá kapitola *Logika funkcí*, kde je popsáno sedm základních pravidel pro odvozování logicky platných formulí z tautologií výrokové logiky.[68]

Ve čtvrté kapitole *Teorie tříd* je popsána elementární teorie tříd (zavedením booleovských operací). Jsou zde studovány vztahy a operace mezi třídami a uvedeny některé důležité zákony. Závěrečná část se zabývá (kategorickými) sylogismy.[69] Pátá kapitola *Logika vztahů* studuje relace, jejich typy a vlastnosti (dochází se k pojmu vzájemně jednoznačného zobrazení).

V sedmé kapitole nazvané *Axiomatická metoda* je popsána axiomatická výstavba logiky. Je zde vybudována Hilbertova-Bernaysova soustava axiomů výrokového kalkulu (viz [HA28]), podána axiomatizace elementární teorie tříd a axiomatický výklad predikátové logiky. Dále jsou uvedeny Peanovy axiomy aritmetiky. V závěru je zmíněna nezávislost axiomů výrokového a predikátového kalkulu i teorie tříd a diskutována bezespornost a (syntaktická) úplnost/neúplnost těchto systémů. Závěrečná kapitola *Teorie definice* je věnována problematice správného definování nových pojmů, druhům definic a jejich roli ve vědě i v běžném životě.

Poznamenejme, že přestože je výklad veden velmi intuitivně a názorně a je doplněn množstvím příkladů, dosahuje v jistých pasážích poměrně značné

[67] [Zich58], str. 225.

[68] Tautologie i logicky platné (pravdivé) formule jsou zde nazývány *vždy-pravdivé* formule.

[69] *Sylogismus* je jednoduchý deduktivní úsudek, který se skládá ze tří výroků – dvou premis a závěru. Premisy jsou tvořeny výroky obsahujícími termín, který se nevyskytuje v závěru (tzv. střední termín) a lze z nich závěr vyvodit.

Kategorický sylogismus je charakterizován dvěma premisami (vyšší a nižší) a závěrem, které jsou vyjádřeny jednoduchými, tzv. kategorickými výroky. Platnost závěru se zde opírá o tranzitivnost relace inkluze, o tzv. axiom sylogismu „co platí o rodu, platí i o druhu“. Např. „všichni savci dýchají plícemi; velryby jsou savci; tedy velryby dýchají plícemi“.

abstrakce.[70] Dodejme, že v této době byl u nás dispozici i český překlad [Grz57] Grzegorczykovy knihy *Logika popularna*.

[70]Podrobný kritický rozbor této knihy je podán v recenzi K. Čulíka v ČPM **85** (1960), str. 361–364.

Literatura

[Ale83] Alesso, H.P., *Some algebraic acpects of decomposed non-coherent structure functions*, Reliability Engineering and System Safety **5** (1983), 129–138.

[Ale90] Alesso, H.P., *On expanding Boolean algebra into a new dual-biform logic algebra*, Reliability Engineering and System Safety **28** (1990), 255–263.

[BČZ85] Berka, K., Čechák, V., a Zastávka, Z., *Povaha, úloha a perspektivy vývoje logiky*, Filosofický časopis **33(6)** (1985), 891–908.

[Beč01] Bečvář J. a kol., *Matematika ve středověké evropě*, edice Dějiny matematiky, sv. 19, Prometheus, Praha, 2001.

[Ber94] Berka, K., *Stručné dějiny logiky*, Karolinum, Praha, 1994.

[Ber99] Berka, K., *Vývoj logiky v ČSR v letech 1945–1953*, Sborník z konference Věda v Československu 1945–1953, 1998 (Praha), Karolinum, 1999, pp. 499–505.

[Dav58] Davis, M., *Computability and unsolvability*, McGraw-Hill, New York, 1958, též Dover Publications, New York, 1982.

[Eng47] Engliš, K., *Malá logika*, Melantrich, Praha, 1947.

[Fuch99] Fuchs, E., *Teorie množin pro učitele*, Masarykova univerzita, Brno, 1999.

[Göd31] Gödel, K., *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, I*, Monatsh. Math. Phys. **38** (1931), 173–178.

[Göd34] Gödel, K., *On undecidable propositions of formal mathematical systems*, Poznámky S.C. Kleeneho a J.B. Rossera z přednášek na *Institute for Advanced Study*, Princeton, 1934.

[Gra00] Grattan-Guinness, I., *The search for mathematical roots 1970–1940*, Princeton University Press, Princeton, Oxford, 2000.

[Grz57] Grzegorczyk, A., *Populární logika*, SNPL, Praha, 1957.

[HA28] Hilbert, D. a Ackermann, W., *Grundzüge der theoretischen Logik*, Springer, Berlin, 1928, 2. vyd. Springer, Berlin, 1938; Dover Publications, New York, 1946; 3. vyd. Springer, Berlin, 1949; 4. vyd. Springer, Berlin, 1959; 5. vyd. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1967; 6. vyd. Springer, Berlin, 1972; anglicky *Principles of mathematical logic*, Chelsea Publishing Company, New York, 1950; AMS, Providence, 1999.

[Hal56] Halmos, P., *Algebraic logic, II*, Fund. Math. **43** (1956), 255–325.

[Háj76] Hájek, P., *K nedožitým šedesátinám Ladislava Riegra*, ČPM **101** (1976), 417–418.

[Her32] Herbrand, J., *Sur la non-contradiction de l'arithmetique*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **166** (1932), 1–8.

[Hru50] Hruša, K., *Logický podklad matematických úsudků*, Přírodovědecké vydavatelství, Praha, 1950.

[Chur] `http://plato.stanford.edu/entries/church-turing` (20. 6. 2008).

[Chur32] Church, A., *A set of postulates for the foundation of logic*, Ann. Math. **33** (1932), 346–366.

[Chur36a] Church, A., *A note on the Entscheidungsproblem*, J. Symb. L. **1** (1936), 40–41.

[Chur36b] Church, A., *An unsolvable problem of elementary number theory*, American J. Math. **58** (1936), 345–363.

[Kat46] Katětov, M., *Jaká je logická výstavba matematiky?*, JČMF, Praha, 1946, 2. vyd. Přírodovědecké vydavatelství, Praha, 1950.

[Kle36a] Kleene, S.C., *General recursive functions of natural numbers*, Math. Ann. **112** (1936), 727–742.

[Kle36b] Kleene, S.C., λ-*definability and recursiveness*, Duke Math. J. **2** (1936), 340–353.

[Kle43] Kleene, S.C., *Recursive predicates and quantifiers*, Trans. AMS **53** (1943), 41–73.

[Kle52] Kleene, S.C., *Introduction to metamathematics*, North-Holland Publishing Company, New York, 1952, též Van Nostrand Co., New York, 1952; North--Holland Publishing Company, Amsterdam, 1962, 1967, 1971, 1974, 1980, 1996; rusky *Vvedenie v metamatematiku*, Izd. inostr. lit., Moskva, 1957.

[Kol47] Kolman, A., *Logika*, Svoboda, Praha, 1947.

[Kol48] Kolman, A., *Kritický výklad symbolické metody moderní logiky*, Orbis, Praha, 1948.

[Kop62] Kopřiva, J., *Automaty a mozek*, PMFA **7** (1962), 59–75.

[Mach51] Machovec, M., *Logika*, Státní nakladatelství učebnic, Praha, 1951, též Rovnost, 1952.

[Mle60] Mleziva, M., *K teorii konečných automatů (neuronových sítí)*, PMFA **5** (1960), 643–668.

[Per04] Peregrin, J., *Logika a logiky*, Academia, Praha, 2004.

[Per06] Peregrin, J. (ed.), *Logika 20. století: mezi filosofií a matematikou*, Filosofia, Praha, 2006.

[Roj96] Rojas, R. (ed.), *Neural networks, a systematic introduction*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1996.

[RS63] Rasiowa, H. a Sikorski, R., *The mathematics of metamathematics*, PWN, Warszawa, 1963, 2. vyd. PWN, Warszawa, 1968; 3. vyd. PWN, Warszawa, 1970; rusky *Matematika metamatematiky*, Nauka, Moskva, 1972.

[SM56a] Shannon, C.E. a McCarthy, J. (ed.), *Automata studies*, Princeton University Press, Princeton, 1956, rusky *Avtomaty*, Izd. inostr. lit., Moskva, 1956.

[SM56b] Shannon, C.E. a McCarthy, J. (ed.), *Avtomaty*, Izd. inostr. lit., Moskva, 1956.

[Ste72] Steen, S.W.P., *Mathematical logic*, Cambridge University Press, Cambridge, 1972.

[Svo58] Svoboda, F., *Poznámka k pravděpodobnostní logice John von Neumanna*, Československá fysiologie (1958), č. 4.

[TT52] Tarski, A. a Thompson, F., *Some general properties of cylindric algebras*, Bull. AMS **58** (1952), 65–89.

[Tur37] Turing, A.M., *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*, Proc. London Math. Soc., Series 2 **42** (1936–37), 230–265.

[Tvr37] Tvrdý, J., *Logika*, Melantrich, Praha, 1937.

[Zich47] Zich, O., *Úvod do filosofie matematiky*, JČMF, Praha, 1947.

[Zich58] Zich, O. a kol., *Moderní logika*, Orbis, Praha, 1958.

[Zyg73] Zygmunt, J., *A survey of the methods of proof of the Gödel-Malcev's completeness theorem*, Studies in the history of mathematical logic (Surma, S.J., ed.), Wydawnictwo Polskiej Akademii Nauk, Wroclaw, 1973, pp. 165–238.