Jindřich Bečvář

Hrdinský věk řecké matematiky

In: Jindřich Bečvář (editor); Eduard Fuchs (editor): Historie matematiky. I. Seminář pro vyučující na středních školách, Jevíčko, 19.8.-22.8.1993, Sborník. (Czech). Brno: Jednota českých matematiků a fyziků, 1993. pp. 20–107.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/400590

Pýthagorás a hudba

HRDINSKÝ VĚK ŘECKÉ MATEMATIKY

JINDŘICH BEČVÁŘ

Nepomlouvejme fragmenty: mají strhující kouzlo krásných mramorových soch zmrzačených. Sen století doplnil scházející gesto Venušino i přerušený rytmus básníkovy myšlenky. Tak teče dál tvůrčí proud, který vytryskl z velké řecké duše za oněch dávných dnů: směšujeme s ním tvůrčí proud svůj.

Romain Rolland

1. Historie

Řecké dějiny jsou nám poměrně známé. Spokojíme se tedy jen stručným přehledem významných politických a kulturních událostí. Čtenář bude mít jistě možnost nahlédnout do některé populárně odborné knížky (viz literatura).

3000		nejstarší osídlení Tróje	
2000		příchod indoevropských kmenů	
1700		rozkvět Kréty	
1500–1200		rozkvět Mykén	
1240–1200		egejské stěhování, vpád Dórů do Řecka, řecká výprava proti Tróji	
	?		Homéros (*Ílias, Odysseia*)
	11.– 8. stol.		geometrický styl
8.– 6. stol.		vznik městských států, velká řecká kolonizace	
	776		první Olympijské hry
	asi 700		Hésiodos (*Zrození bohů – Theogoniá, Práce a dny – Erga kai hémerai*)
7.– 6. stol.		raná řecká tyrannis	
	7.– 6. stol.		archaické umění
po 624		zákony Drakontovy	
594/3		Solónovy reformy	
561/60–528/7		Peisistratova tyrannis	
		Peloponnéský spolek	
510		konec tyrannidy v Athénách	
508/7		Kleisthenovy reformy	
500–449		řecko–perské války (490 – Marathón, 480 – Thermopyly, Salamis)	
	525/4–456/5		Aischylos (*Peršané, Oresteia* atd.)
	510?–420?		Feidiás (sochařská výzdoba Parthenónu)
	497/6–406		Sofoklés (*Antigona, Élektra, Oidipús král* atd.)
	480?–406		Eurípidés (*Orestés, Médeia, Ífigénie, Kyklóp* atd.)
	5.– 4. stol.		klasický styl

500?–429	Periklés, rozkvět athénské demokracie
431–404	Peloponnéská válka
445–380?	Aristofanés (*Ptáci, Jezdci, Žáby* atd.)
359–336	vláda Filippa Makedonského
336–323	vláda Alexandra Velikého
4. stol.	Aitólský spolek, později achajský spolek
3.– 1. stol.	helénistické umění
146 př. Kr.	válka mezi achajským spolkem a Římany, vyvrácení Korintu, konec samostatného Řecka

2. Hrdinský věk řecké matematiky

Dějiny řecké (a římské) filozofie zahrnují dobu delší než tisíc let: od 6. stol. př. Kr. až do poloviny 6. stol. n. l.

Nejstarší období, které začíná šestým a končí čtvrtým stoletím před Kristem, je tzv. období předsókratovské filozofie. Je charakterizováno osvobozením od tradičních náboženských představ, úsilím o přírodovědný (byť naivní) výklad světa, hledáním pralátky (*arché*) či základních prvků-živlů (*stoicheion*) apod.; často hovoříme o řecké přírodní nebo řecké kosmologické filozofii.

Druhé období, jehož hlavními představiteli jsou Sókratés, Platón a Aristotelés a které končí Aristotelovou smrtí (322 př. Kr.), je do značné míry charakterizováno obratem k člověku (antropologická filozofie), k jeho postavení ve světě a ve společnosti, zájmem o politické uspořádání obce, o gnoseologické problémy apod. V této době byly vytvořeny velké filozofické systémy hledající odpovědi na všechny typy filozofických otázek, vznikly jednotlivé filozofické disciplíny jako je logika, metafyzika, etika, estetika, pedagogika apod.

Ve třetím, tzv. poaristotelském období, které sahá až k úplnému rozpadu antického světa (r. 529 dal císař Justinián uzavřít Akademii), zcela ustupuje zájem o přírodovědné bádání. Pozornost je věnována zejména etice a hledání smyslu lidské existence. Někdy hovoříme o helénistické filozofii.

Podobným způsobem je členěna i antická věda. V knížce [21] B. Farringtona (1891– ?) jsou dějiny řecké vědy děleny (zhruba ve shodě s obecně uznávanými názory) na tři období. První začíná zrozením řecké filozofie a končí smrtí Aristotela, druhé období je vymezeno založením Alexandrie (332 př. Kr.) a dobytím Východu Římany na začátku křesťanské éry, třetí končí zánikem antického světa.

Za nejdůležitější dobu je považováno 6.– 4. století, kdy se poprvé utvářel vědecký pohled na svět a vznikal jeho přírodovědecký výklad. Toto období nazval W. A. Heidel (1868–1941) ***hrdinským věkem*** (viz [26]).

Druhým nejvýznamnějším obdobím je interval zhruba 320–120 př. Kr., kdy se konstituovaly jednotlivé vědní obory a věda začala být uspořádaným souborem poznatků. Tato doba je charakterizována vznikem rozsáhlých vědeckých spisů; někdy se hovoří o ***věku učebnic***.

Hrdinským věkem řecké matematiky budeme rozumět (podle Heidela) období 6.– 4. stol. př. Kr. Jeho začátek odpovídá vzniku prvních řeckých filozofických škol, které významným způsobem přispěly k rozvoji matematiky, konec je zhruba vymezen vystoupením Platóna, Aristotela a sepsáním Eukleidových *Základů*. V těchto třech stoletích je objevena řada velmi významných matematických poznatků, přístupů a metod; tyto výsledky jsou postupně tříděny, přepracovávány a dotvářeny; v dalším období jsou pak zpracovány do ucelených teorií a sepsány v obsáhlých dílech (práce Eukleida, Archiméda, Apollónia a dalších).

3. Prameny

Ze 6.– 5. stol. př. Kr. nemáme z řecké filozofie a vědy téměř žádné původní prameny. Jedinou výjimkou je lékařství; ze začátku 5. století se dochovala sbírka spisů hippokratovské školy. Z děl filozofů a matematiků té doby máme jen zlomky, které zapsali po kratší či delší době jejich následovníci.

Částečně či úplně se nám zachovaly až spisy Platóna (427–347), Aristotela (384–322), Eukleida (365?–300?) a pozdějších myslitelů.

Řada velmi zajímavých pasáží, které se týkají matematiky, je v Platónových dialozích. Rovněž u Aristotela nacházíme mnoho informací o vývoji řeckého myšlení v předchozích staletích. I tyto odstavce podstatným způsobem přispívají k utváření našeho pohledu na řeckou matematiku 6.– 5. století.

Eukleidovy *Základy* (řecky *Stoicheia*, latinsky *Elementa*), které jsou nejstarším zcela zachovalým dílem řecké matematiky, jsou do značné míry kompilací děl předchozích matematiků. Jsou nejen vynikajícím matematickým dílem, ale i východiskem k úvahám o matematických znalostech, které byly získány v dlouhém období před Eukleidem. V českém překladu Františka Servíta (1848–1923) byly Eukleidovy *Základy* vydány roku 1907.

Ve druhé polovině 4. stol. př. Kr., ještě před Eukleidem, napsal Aristotelův žák Eudémos z Rhodu *Dějiny matematiky*, *Dějiny geometrie* a *Dějiny astronomie*. Tato díla byla bohužel ztracena.

Řadu informací o životě a díle starých řeckých myslitelů podává i slavný římský řečník a státník Marcus Tullius Cicero (106–43) ve svých filozofických spisech, např. v *Tuskulských hovorech* (lat. *Tusculanae disputationes*) z let 45–44 (viz [11]).

Dalším pramenem pro studium řeckého myšlení je spis *O životě, názorech a výrocích mužů, kteří vynikli ve filozofii* [17] , který sepsal Diogenés Laertios (3. stol. n. l.). Diogenés nebyl původním myslitelem. Podařilo se mu však shromáždit určitý objem antického kulturního dědictví a uchovat je dalším generacím. Jeho spis je povrchní a nekritická kompilace, která byla vytvořena na základě řady starších pramenů. Autor je pečlivě cituje - uvádí přes tisíc odkazů na více než 250 autorů; z velké části to však bohužel nejsou primární informace. V předmluvě píše o původu a rozdělení řecké filozofie a sledu filozofických škol, v deseti knihách jsou pak zařazeny vlastní životopisy slavných myslitelů (od Thaléta až po Epikura). Velká pozornost je věnována biografiím, často však nevýznamným podrobnostem.

Diogenés měl snad v úmyslu sepsat jakési dějiny řecké filozofie. Hlubší souvislosti jednotlivých filozofických názorů a proudů však nebyl schopen pochopit a postihnout. Přesto si v pozdějších dobách jeho dílo získalo značnou oblibu. Patrně proto, že populárním a nenáročným způsobem seznamovalo čtenáře s řeckou filozofií a že řadu informací ze života slavných myslitelů podávalo formou epigramů či anekdot. Vzhledem k nedostatku kvalitnějších pramenů je přes všechny nedostatky Diogenův spis cenným pramenem pro studium počátků řeckého filozofického, vědeckého a tedy i matematického myšlení.

Další významnější zdroje jen stručně vyjmenujeme:

Hérón Alexandrijský (1. stol. př. Kr.?) popisuje vývoj některých geometrických pojmů.

Geminos (2. pol. 1. stol. př. Kr.), autor spisu *Šest knih o matematických teoriích*, přináší rovněž nějaké informace o vývoji řecké matematiky.

P. M. Vitruvius (2. pol. 1. stol. př. Kr.), římský stavitel a architekt, uvádí ve svém díle *Deset knih o architektuře* (latinsky *De architectura libri decem*), které máme k dispozici v českém překladu, i určitý soubor teoretických poznatků a mj. i zajímavé informace o antické matematice.

Pappos Alexandrijský (konec 3. stol. n. l.?) zachoval ve svém díle *Mathématikai synagogai* mnoho údajů historického charakteru.

Iamblichos (? –330?) je autorem několika pojednání o pýthagorejcích, některá se však nezachovala. Serénos z Antinoie (4. stol.) sepsal řadu komentářů ke klasikům, podobně Eutokios (kolem r. 500) a Simplikios (6. stol.).

Matematik a filozof Proklos (410–485), reprezentant novoplatónské filozofie, napsal komentáře k Platónovým dialogům a komentáře k první knize Eukleidových *Základů*. Použil řadu zdrojů, zejména Eudémův náčrt vývoje řecké matematiky v nejstarším období a Geminovy práce s historickými údaji a doplnil své komentáře pojednáním o významu díla Eukleidova.

Uvážíme-li, že se nám fragmenty z děl řeckých myslitelů (ale i jejich pozdější spisy) zachovaly jen díky mnohonásobným přepisům, je třeba pečlivě zvažovat míru jejich věrohodnosti. Rukopisy, které máme k dispozici, pocházejí většinou až z prvního tisíciletí našeho letopočtu. Byly však podrobně zkoumány, kriticky hodnoceny a rekonstruovány; díky velikému úsilí celé generace historiků matematiky máme dnes poměrně věrohodné verze dochovaných klasických děl řecké matematiky.

O řeckých filozofech a myslitelích, kteří žili před Sókratem, říká britský badatel R. M. Hare toto:

Zda je nazveme filosofy, či nikoli, není důležité; toto slovo má širší a užší význam. Z jejich prací přetrvává nanejvýše několik zlomků a skoro všechny naše informace o nich pocházejí z mnohem pozdějších pramenů. Tak se předsokratikové, jak jsou tito filosofové souhrnně nazýváni, stali vhodným bojištěm pro badatele. Z těchto sporů ale vzešlo pouze minimálně poznatků, na které se můžeme s důvěrou spolehnout, že jsou pravdivé. ([23], str. 23)

4. Původ řecké matematiky

Je nepochybné, že klasická řecká matematika (a věda vůbec) vyšla z poznatků, které byly získány v předcházejících staletích zejména v Egyptě a Mezopotámii. Názory na to, jaké množství poznatků Řekové převzali a co sami vytvořili, se dosti rozcházejí; oscilují mezi dvěma krajními názory: Řekové vše podstatné sami vytvořili - Řekové vše převzali.

Řecký historik Hérodotos (484?–430?), „otec dějepisu", píše ve svých *Dějinách* o egyptském králi Sesóstrisovi:

Tento král prý rozdělil půdu mezi všechny Egypťany a každému přidělil stejně velký čtverhranný díl; podle toho pak určil daně a nařídil, aby byly odváděny ročně. Jestliže řeka někomu kus pozemku urvala, přišel ke králi a oznámil, co se stalo. Král poslal své lidi, aby věc zhlédli a vyměřili, o kolik se pozemek zmenšil, aby pak jeho majitel platil nařízenou daň úměrně podle zbylé výměry. Myslím, že tak vzniklo zeměměřičství a dostalo se do Řecka.

Nástroj pro určování ročních období, sluneční hodiny a rozdělení dne na dvanáct dílů poznali Řekové od Babylóňanů. ([29], kniha II, odst. 109, str. 134)

I podle Prokla vznikla geometrie v Egyptě z ustavičné potřeby přeměřovat půdu po každoročních záplavách způsobených rozvodněným Nilem. Do Řecka prý přinesl geometrické znalosti Thalés, který jako první pokročil v abstrakci. Rozhodný krok však učinil Pýthagorás, který začal vědu budovat na „základních principech".

Další informace obdobného charakteru nacházíme u Aristotela, Platóna a dalších filozofů.

Často se tvrdí, že egyptská a babylónská matematika měla zcela praktický a konkrétní ráz a že teprve Řekové začali matematická tvrzení dokazovat. Odpůrci tohoto názoru se odvolávají na Démokrita, který se zmiňuje o tom, že egyptští spojovači provazů, tzv. harpedonapté, prováděli důkazy:

Já jsem ze všech svých vrstevníků prošel největší část země, zkoumaje největší věci, spatřil jsem nejvíce podnebí a zemí, slyšel jsem nejvíce moudrých lidí a v skládání čar s důkazem mě ještě nikdo nepředstihl, ani takzvaní egyptští spojovači provazů. A s nimi jsem byl v cizině pět let, navštíviv je po všech ostatních učencích. ([59], str. 74)

Snad má pravdu francouzský filozof a historik vědy Arnold Reymond (1874–1958), když říká:

Ve srovnání s empirickými a zlomkovitými vědomostmi, jež lidé na Východě pracně nasbírali za dlouhá staletí, je řecká věda pravým zázrakem. Zde lidská mysl po prvé pochopila, že lze stanovit omezený počet zásad a vyvodit z nich jistý počet pravd, které jsou jejich nutným následkem. ([21], díl I, str. 21)

Zdá se nepochybné, že v 6.– 4. stol. př. Kr. byly nahromaděné matematické poznatky (empirické i teoretické) zpracovány a přetvořeny v exaktní vědu. Postupně byly vymezovány základní matematické pojmy (bod, přímka, rovina, ..., číslo, poměr atd.); již tato skutečnost svědčí o rozvíjejícím se abstraktním myšlení. Byly zformulovány axiómy, postuláty, logické principy odvozování a začala uvědomělá výstavba matematického světa ze základních prvků podle pravidel daných axiómy a postuláty. Objevila se a byla rozvinuta idea důkazu. Velkou roli zřejmě sehrál jakýsi princip minimalizace výchozích pojmů, předpokladů a postupů, který je v té době vlastní řecké filozofii; ta tehdy zahrnovala veškerou vědu.

V 6.– 4. stol. př. Kr. došlo v Řecku k obrovskému rozmachu matematiky, k výraznému kvalitativnímu skoku. Je možné, že opravdové vzepětí trvalo kratší dobu a že v následujících staletích byly získané výsledky domýšleny, kompletovány, tříděny a zpracovávány do ucelených teorií. Bouřlivý vývoj matematiky byl vnímán jako výrazný úspěch lidského myšlení vůbec. Matematika měla tehdy velikou prestiž. Proto také bylo nad Platónovou Akademií napsáno: *Nevstupuj, kdo neovládáš geometrii!* Geometrie byla chápána jako kultivace myšlení, byla zahrnována do všeobecného rozhledu vzdělaného člověka, geometrické principy byly viděny a nacházeny i ve společnosti a politice.

Pěknou úvahou o počátcích řeckého myšlení je studie [71] známého francouzského hellénisty J–P. Vernanta (nar. 1914); ukazuje úzký vztah zrození řecké filozofie a vzniku klasické řecké *polis* a úzké sepětí politického a geometrického myšlení.

Filosof, jenž nechal napsat na práh Akademie, že nikdo nemá vstupovat, kdo není geometr, dosvědčuje úzké sepětí mezi geometrickým a politickým myšlením Řeků, jejich společný počátek a shodnou orientaci. V dialogu Gorgias Sókratovými ústy pranýřuje Platón Killikta a v jeho osobě všechny, kdo nechtějí studovat geometrii, svazuje úzce znalost isotés, geometrické shodnosti, základu fyzikálního světa, s dikaiosyné a sófrosyné, s politickými ctnostmi, na nichž nový řád obce spočívá: „Říkají moudří mužové, Killikte, že i nebe a země, bozi i lidé mají mezi sebou společenství (koinonia), přátelství (filia), uspořádanost (homoiotés), uměřenost (sófrosyné) a spravedlnost (dikaiotés), a proto nazývají, milý druhu, tento svět kosmem, řádem, a ne neuspořádaností ani nevázaností. Ale ty, jak se mi zdá, přes všechnu svou moudrost si těchto věcí nevšímáš a nepozoruješ, že geometrická rovnost má velký význam i mezi bohy i mezi lidmi, kdežto podle tvého mínění je třeba pěstovat zásadu ‚míti více'; nedbáš totiž geometrie.“ ([71], str. 84–85)

5. První filozofové

Vlastní výklad začneme ve fascinujícím 6. stol. př. Kr., kdy se v tehdejších nejvýznamnějších civilizacích objevili filozofové a myslitelé, kteří svým učením a působením ovlivnili světové dění a myšlení na celá příští staletí a tisíciletí. V Číně to byli Lao c' (609–517) a Konfucius (551–479), v Indii Mahávíra (599–527), zakladatel džinismu, a Buddha (563–483), v židovském světě proroci Jeremiáš (kolem r. 600) a Ezechiel (kolem r. 580), v Persii možná Zarathustra (6. stol. ?), v Řecku první filozofové: Thalés, Anaximandros, Anaximenés, Pýthagorás, Hérakleitos a další.

Nejstarší řecká věda a filozofie se zrodila na pobřeží Malé Asie v Iónii, v tehdejších největších, nejvýznamnějších a nejbohatších obchodních centrech, přístavních městech Milétu a Efesu. Zde se intenzivně střetávala vzdělanost a ještě nepříliš diferencovaná věda a kultura egyptská, babylónská a řecká. První filozofové se vymanili z tradičního náboženství, opustili mytologický výklad vzniku světa a jeho běhu. Pokusili se podat ryze přírodovědecký výklad vesmíru a tak na místo mýtu nastoupila kosmologie. Snažili se vysvětlit mnohotvárnost světa z jediné pralátky, která však nebyla chápána jen jako mrtvá hmota, ale nesla v sobě život i pohyb, a z jediného principu. Snažili se nalézt zákonitosti v chaosu jevů, pociťovali potřebu racionálního zdůvodňování a logického uspořádání myšlenek. V některých směrech je jejich snaha ještě značně naivní, ale sympaticky sebevědomá. Protože je větší část díla těchto filozofů zaměřena na výklad přírodního dění, hovoříme o iónské přírodní filozofii.

Hlavními představiteli Milétské školy byli Thalés (625?–545?), Anaximandros (610?–546) a Anaximenés (585?–528).

Thalés je považován za prvního řeckého filozofa, za jednoho ze sedmi mudrců. Snad byl fénického původu; působil jako obchodník, inženýr, politický činitel, matematik a astronom. Zdá se, že navštívil Babylónii, kde se seznámil s periodicitou slunečních a měsíčních zatmění (tzv. perioda *saros*); úspěšně předpověděl zatmění Slunce roku 585 př. Kr. V Egyptě prý nabyl matematických znalostí; vypočítával výšku pyramid podle délky jejich stínů (patrně užil podobnosti trojúhelníků). Nechybělo mu ani praktické uvažování. Když očekával velkou úrodu oliv, zakoupil všechny lisy v Milétu a zbohatl na jejich pronajímání. Jako politik usiloval o spojení iónských osad na pobřeží Malé Asie.

Thalés prý sepsal dílo nazvané *O přírodě* (řecky *Peri fyseós*). Za základní pralátku, ze které všechno vzniká a do které vše zaniká, považoval vodu. Vždyť voda má skupenství plynné, kapalné i pevné, z vlhka se rodí život, bez vody život zaniká atd. Vše ostatní vzniká z vody zřeďováním a zhušťováním.

V matematice se Thalétovi přisuzují následující výsledky: průměr dělí kruh na dvě poloviny, úhly při základně rovnoramenného trojúhelníka jsou shodné, vrcholové úhly jsou shodné, všechny úhly nad průměrem jsou pravé (tzv. Thalétova věta). Vůbec však nevíme, jaký charakter tyto výsledky měly; nevíme, zda byly jen zformulovány, či dokázány a jak. Zdá se, že Thalés dobře ovládl pojem podobnosti trojúhelníků a využíval ji nejen k měření výšky pyramid, ale i ke zjišťování vzdálenosti lodí na moři (viz [85], str. 32). Užíval prý kružítko a úhloměr.

Pamfila praví, že se Thalés naučil geometrii od Egypťanů a že první vepsal do kruhu pravoúhlý trojúhelník a obětoval vola. Druzí to říkají o Pythagorovi. ([85], str. 32)

Anaximandros, žák Thaléta, byl filozof, astronom, geograf. Za pralátku, původ a princip všeho považoval jakousi neomezenou neurčitou látku - *apeiron*. Z ní jakýmsi procesem vydělování vznikají věci. Bedlivě pozoroval a zkoumal přeměnu, pomíjivost, vznikání a zanikání, vydělování protikladů. Svět je podle něho jediným velikým bojem o bytí.

Anaximandros prohlásil neomezené za počátek a základní prvek jsoucna. ... A z čeho věci vznikají, do toho též zanikají podle nutnosti, neboť si za své bezpráví navzájem platí pokutu a trest podle určení času. ... Nevykládá vznik věcí proměnou živlů, nýbrž tím, že se věčným pohybem vylučují protivy. ([85], str. 33)

Anaximandros nechal postavit ve Spartě *gnómon* (tyč či sloupek postavený kolmo k vodorovné ploše) k měření času a ke stanovení rovnodenností a slunovratů, nakreslil mapu tehdejšího světa, vytvořil model sféry (patrně globus s hvězdnou oblohou), znal pojem ekliptiky - odlišil ji od nebeského rovníku. Vytvořil poměrně složitou teorii vzniku a vývoje světa, zformuloval geocentrický pohled na uspořádání vesmíru (sluneční soustavy). Zemi považoval za válec, který se volně vznáší ve středu vesmíru, kde je stejnými silami ze všech stran držen (předjímání gravitačních sil?). Jeho výška měří třetinu průměru. Anaximandros se snažil určit poměr rozměrů Slunce, Měsíce a Země. Podobně jako Thalés prý sepsal dílo *O přírodě* a snad i dílo o elementární geometrii. Byl to prý Anaximandros, který jako první užil termínu *arché* pro pralátku, počátek, elementární princip. Rozešel se s poetickým stylem předchůdců, autorů theogónií, a začal psát v próze.

Anaximenés, žák Anaximandra, považoval za arché jakýsi neurčitý vzduch - oživující dech. Symbolem života je pro něho dýchání, uvažuje i o dýchání celého světa. Nebeská tělesa jsou plochá a ve vzduchu se vznášejí. Ostatní látky (voda, země atd.) vznikají zhušťováním vzduchu, či jeho zředěním (oheň).

Anaximenés ... prohlásil vzduch za počátek jsoucna, neboť z něho vše vzniká a do něho se zase rozkládá. „Jako naše duše," praví, „jsouc vzduchem nám vládne, tak dech a vzduch objímá celý svět". ([85], str. 36)

Hérakleitos z Efesu (540?–480?) se po nezdaru v politice uchýlil do azylu Artemidina chrámu. Často je nazýván zádumčivým, vzteklým, plačtivým, ale hlavně temným filozofem. I on napsal filozofické dílo *O přírodě*. Podle Hérakleita je svět věčný, ale vše plyne (*panta rhei*) a je pomíjivé, nic netrvá; vše je způsobeno bojem protikladů (suché - vlhké, mužské - ženské atd.), které však nemohou existovat jeden bez druhého a nelze je od sebe odloučit. Zdá se, že to byl Hérakleitos, kdo prvně užil slovo *logos* (slovo, rozum, řád, ...). Podle některých výroků se zdá, že nedůvěřoval příliš smyslům.

... oči a uši jsou špatní svědkové ...

Nelze vstoupit dvakrát do téže řeky ... Do týchž řek vstupujem i nevstupujem, jsme i nejsme.

Oheň je základním prvkem, vše je obměnou ohně a vše se děje zřeďováním a zhušťováním ... Všechno se děje v protivě a vše teče jako řeka, vše je ohraničeno a jeden je svět. Vzniká z ohně a opět je spalován v určitých obdobích střídavě po celý věk; děje se to podle sudby.

Tento svět, týž pro všechny, nestvořil žádný z bohů ani z lidí, ale vždy byl, jest a bude věčně živým ohněm, rozněcujícím se podle míry a hasnoucím podle míry. ([85], str. 63, 57, 55. Viz též [28], str. 46, 72)

Poznamenejme, že podle legendy byl Efesos založen, když se naplnila věštba a při pečení ryby vznikl požár. Slavný Artemidin chrám v Efesu, jeden ze sedmi divů světa, byl roku 356 př. Kr. vypálen Hérostratem, který chtěl tímto činem učinit své jméno nesmrtelným. Město Efesos je tedy s ohněm osudově spjato. O Hérakleitovi a jeho díle viz [28] a [40].

V malém řeckém městě Elea v jižní Itálii (dnes Velia) vznikla další filozofická škola. Jejím zakladatelem byl myslitel a rapsód (tj. básník a pěvec) Xenofanés z Kolofónu (565?–470?); nejdůležitějšími představiteli tzv. eleatů byli Parmenidés (540?–450?) a Zénón (480?–430?).

Parmenidés, autor básně *O přírodě*, navázal na Xenofanovy myšlenky o jediném nehybném a neměnném jsoucnu, souvislé látce, která je všude stejná, nevznikla, ani nezanikne. Toto jsoucno vyplňuje prostor, který je od látky neoddělitelný; proto neexistuje ani prázdno, ani pohyb, ani dění. Do příkrého protikladu staví rozumové a smyslové poznání; smysly nepřinášejí věrohodné poznání, ale jen pravděpodobné, či dokonce jen nejisté zdání (*osleplé oči, zalehlé uši*). K nepochybné pravdě, pravému vědění vede jen myšlení, rozum.

Třeba je říkat a myslit, že jsoucí jest, neboť bytí jest, kdežto nic věru není. To na mysli míti ti káži, od této cesty zkoumání chci tebe odvrátit předem.

Parmenidés ... tvrdě, že vedle jsoucího není nejsoucí ničím, nutně se domnívá, že jsoucí je jedno a že není nic jiného ... Pokud je však nucen řídit se jevy a pokud myslí, že je jedno podle rozumu, ale mnohé podle smyslového vnímání, potud uznává dvě příčiny a dva počátky, teplo a chladno, a zve je ohněm a zemí. Z toho pak řadí teplo k jsoucímu a druhé k nejsoucímu. ([85], str. 67, 71)

Parmenidovy názory hájí proti námitkám, které vyvolaly, jeho žák Zénón. Argumentuje způsobem, který v matematice odpovídá důkazu sporem: přijímá názory Parmenidových odpůrců (prostor může být oddělen od látky, existuje pohyb, ...) a odvozuje z nich absurdní tvrzení. Nejznámější z jeho tzv. *apórií*, slepých uliček rozumu, jsou *Achilles a želva*, *Letící šíp*, *Dichotomie* a *Stadion*. Zénón pozdvihl umění důkazu na takovou úroveň, že se tvrdilo, že *Zénón vynalezl dialektiku.* Uveďme svědectví Simplikia:

Ve svém spise obsahujícím četné důkazy dovozuje po každé, že ten, kdo uznává mnohost, nutně mluví věci sobě odporující. Tak jeden je důkaz, kde dovozuje, že je-li jsoucen mnoho, jsou zároveň i veliká, i malá, tak veliká, že jsou nekonečně veliká, a tak malá, že nemají vůbec žádnou velikost. Při tom pak dokazuje, že nemá-li co ani velikost, ani tloušťku, ani hmotu, nemůže to vůbec být. ([85], str. 73)

Dále uveďme tyto tři zlomky z Aristotela:

Čtyři jsou Zénónovy důkazy o pohybu, které působí obtíže těm, kdo je chtějí vyvracet. První je, že není pohybu, ježto to, co se pohybuje, musí dojít dříve do poloviny cesty, než dojde k cíli ... nelze projít nekonečným počtem míst nebo se dotknout nekonečného počtu míst v konečném čase.

Druhý důkaz je t.zv. Achilleus. Je to ten, že nejpomalejší tvor nemůže být v běhu nikdy dostižen nejrychlejším, neboť pronásledující musí dříve dojít tam, odkud vyběhl prchající, takže pomalejší je nutně vždy o něco napřed.

Třetí důkaz je ..., že pohybující se šíp stojí ... neboť je-li vše vždy v klidu nebo v pohybu, (a nehýbá-li se), cokoli je v stejném prostoru, a je-li konečně to, co se pohybuje, v jednom okamžiku (vždy v stejném prostoru), pak je letící šíp nepohnutý. ([85], str. 75)

Nelze předpokládat, že by Zénón nevěřil v existenci pohybu. Smyslem jeho apórií bylo poukázat na to, že není obtížné nalézt v názorech protivníků rozpory, a zdůraznit, že věci jsou složitější, než se při prvním pohledu jeví.

Zénón tak předložil k úvaze a diskusi problémy, které patří dodnes k vážným otázkám filozofie, matematiky i fyziky. Jde o problémy „zacházení s nekonečnem", které jen stručně nastíníme pomocí protikladů konečné - nekonečné, diskrétní - spojité, nekonečně malé - nekonečně velké apod. Těmito otázkami se však v tomto článku zabývat nebudeme. Chtěli jsme jen poukázat na rozvoj abstraktního myšlení a důkazové techniky.

Empedoklés (490?–430?), odchovanec eleatů, filozof, lékař, básník, věštec, autor básnického díla *O přírodě* působil v Akragantu (dnešní Agrigento na Sicílii). Za základní prvky bere čtyři živly, *kořeny všech věcí*; jsou to země, voda, vzduch a oheň. Tyto čtyři zcela rovnoprávné prvky se věčně spojují a rozdělují. Vznik věcí je podmíněn jejich slučováním, zánik jejich rozlučováním. Dvě hybné síly, které spojování a rozlučování způsobují, jsou láska a svár; těmito silami je svět oživen.

Teorii čtyř živlů převzal Platón; Aristotelés k nim později přidal éter.

Pěkný esej *Empedokles z Akragantu* napsal roku 1918 významný francouzský spisovatel a humanista Romain Rolland (1866–1944).

Nejprve poslyš, které jsou čtyři kořeny všeho: zářivý Zeus [oheň] *a Héra* [vzduch], *jež přináší život, a Hádés* [země], *konečně Nestis* [voda], *lidské jež prameny slzami živí.* ([85], str. 85–86)

Jednou kořeny Láskou se spojují v jednotný útvar, po druhé zase všechno to rozdělí nenávist Sváru ... ([85], str. 89)

Anaxagorás z Klazomen (500?–428), filozof, matematik a přírodovědec, současník a přítel Perikla, působil v Athénách. Byl obviněn z bezbožnosti, souzen a vypovězen z Athén. Svět si představuje zbudovaný z nekonečného množství malých částeček - semen věcí mnoha druhů (*spermata chrématón*, resp. *homoiomereiai*). Původní chaotická směs semen se v uspořádaný svět změnila působením rozumu (*nús*), který je nejjemnější ze všech látek; vzniklým vírem se odloučily vzduch, voda, země i oheň.

Anaxagorás ... říká, že je neomezený počet počátků. Neboť praví, že téměř všechny stejnorodé částky, jako voda nebo oheň, tak vznikají a zanikají jenom slučováním a rozlučováním a že jinak ani nevznikají ani nezanikají, nýbrž věčně trvají. ([85], str. 110)

Anaxagorás ... pokládá za prvky stejnorodé částky, jako např. maso, kost a každou takovou věc. Vzduch a oheň pokládá za směsi všech těchto i všech ostatních semen, neboť jeden i druhý je spojen ze všech neviditelných stejnorodých věcí. Proto z nich také všechno vzniká; oheň a ether nazývá totiž Anaxagorás stejně. ([85], str. 110)

A jakmile počal duch hýbat věcmi, odlučoval se ode všeho, co se hýbalo, a čím duch pohnul, vše to se rozloučilo. Když pak se věci hýbaly a rozlučovaly, působilo otáčení ještě mnohem větší rozlučování. ([85], str. 107)

Řečtí atomisté Leukippos (500?–440?) a Démokritos z Abdér (460?–370) uznali bytí nejsoucna, tj. prázdný prostor, uznali pohyb, změnu, vznik i zánik. Za základní prvky jsoucna pokládali nepatrné, neviditelné a nedělitelné částečky - *atomy*. Atomy jsou různě veliké a různě hmotné, neměnné a nezničitelné, jsou odděleny prázdným prostorem a jsou v neustálém pohybu. Vznik a zánik věcí je spojováním a rozlučováním atomů, vše se děje dle osudu a zákona. Svět vznikl vířivým pohybem atomů, které se postupně spojily ve větší celky, tělesa a světy. O atomistech viz [59].

Říkali totiž, že počátky věcí jsou neomezené co do počtu, a pokládali je za nerozřezatelné, nedělitelné a neporušitelné, ježto jsou tuhé a nemají v sobě prázdno, neboť dělení, jak říkali, se děje tam, kde je v tělesech prázdno. A tyto atomy se pohybují v neomezeném prázdnu, jsouce od sebe odděleny a lišíce se tvary, velikostí, polohou a uspořádáním. Vzájemně se dostihují, srážejí a jedny při setkání odskakují, druhé se navzájem splétají pro souhlas tvarů, velikosti, polohy a uspořádání, u sebe trvají, a tak vznikají složené věci. ([59], str. 54)

Tento odstavec o prvních filozofech starého Řecka zdaleka nepostihuje filozofickou problematiku 6. – 4. století př. Kr., ani nevyčerpává učení a význam těch myslitelů, o kterých jsme se zde zmínili. Snaží se jen *zdůraznit* některé filozofické otázky, které byly v předsókratovské době v Řecku diskutovány. Považujeme totiž za nutné a užitečné upozornit na paralelu filozofického a matematického bádání té doby.

Řecká přírodní filozofie uvažuje o „budování" přírody, světa, kosmu

- z jedné pralátky, příčiny, počátku (*arché*) nebo několika málo prvků, živlů (*stoicheia*) - Thalés: voda, Anaximandros: apeiron, Anaximenés: vzduch - oživující dech, Hérakleitos: oheň, Empedoklés: oheň, voda, země, vzduch, Anaxagorás: semena věcí, Leukippos a Démokritos: atomy, ...
- pomocí jednoho či dvou principů - Thalés, Anaximandros, Anaximenés: zřeďování a zhušťování, vydělování, Hérakleitos: vzplanutí a uhasínání či střetávání protikladů, Empedoklés: láska a svár, Anaxagorás: hybný princip - nús, ...

S jistou mírou nepřesnosti se dá říci, že výsledky tohoto bádání završuje Aristotelés; již před ním však nastává v řecké filozofii tématický obrat působením Sókrata (469–399).

Velmi podobný trend se projevuje v řecké matematice. Nejprve Pýthagorás buduje (aritmetický) svět ze základních prvků - přirozených čísel (násobků čísla 1) pomocí principu poměrů a úměr. Tento pokus ještě není úspěšný - po objevu nesouměřitelnosti úseček je nastoupena jiná cesta.

Řecká geometrie je pak vytvářena

- ze základních prvků - bodů
- pomocí dvou základních principů, na kterých jsou založeny *eukleidovské konstrukce* (neboli *konstrukce pravítkem a kružítkem*) a které jsou popsány v Eukleidových postulátech:
  - je možno sestrojit přímku, jsou-li dány její dva body,
  - je možno sestrojit kružnici, je-li dán její střed a jeden její bod.

V řecké přírodní filozofii i v řecké matematice je cítit jakýsi duch minimalizace, snaha o nalezení pokud možno malého počtu výchozích prvků i principů. V geometrii je tato snaha jasně dokumentovatelná. Výchozí prvky, body, jsou objekty jednoho jediného druhu, výchozí principy jsou dva - sestrojení přímky a kružnice; oba tyto objekty je možno zadat minimálním možným počtem bodů - dvěma.

Dalším velmi významným aspektem budování řeckého geometrického světa je jeho přísná logická výstavba z minimálního objemu výchozích předpokladů. Charakterem celé stavby je to, čemu dnes říkáme axiomatická teorie.

Kolem roku 300 př. Kr. shrnuje Eukleidés výsledky práce svých předchůdců (zejména Hippokrata, Theaitéta, Eudoxa a Archyta, využívá však i Aristotela) ve slavném díle *Základy*. Je náhoda, že řecký název *Stoicheia* je užíván ve filozofii pro základní prvky - živly?

Prvkem (stoicheion) se nazývá to, z čeho se něco skládá jako z první složky a jež se, co se týče druhu, nedá děliti v jiný druh. Tak prvky hlasu jest to, z čeho se hlas skládá a v co se posledně rozkládá, a to tak, že se již nedá rozkládat v jiné druhově různé hlasy. I když je tu další dělení, tedy jsou to části stejného druhu, ... Podobně se mluví také o prvcích geometrických důkazů a vůbec o prvcích důkazů. První důkazy totiž, jež jsou opět obsaženy ve více důkazech, nazývají se prvky důkazů. Takového druhu jsou v sylogismech první soudy, jež se získávají ze tří pojmů s pomocí jednoho středního.

Odtud se označení „prvek" přenáší na to, co jsouc jedno a malé prospívá mnohému. Proto se prvkem nazývá také to, co je malé, jednoduché a nedělitelné. Odtud pochází, že se to, co je v nejvyšší míře obecné, pokládá za prvek, poněvadž každé z nich, jsouc jedno a jednoduché, jest obsaženo v mnoha věcech, buď ve všech nebo ve většině jich. Proto také někteří míní, že jednotka a bod jsou počátky. ... v každém případě prvek znamená něco prvního, co je ve věcech obsaženo. (Aristotelés [1], str. 129–130, 1014 a, b)

Budování geometrického světa v matematice bylo zřejmě úspěšnější než budování veškerého jsoucna v řecké přírodní filozofii. Snad proto se řecká matematika i po Eukleidovi dále úspěšně rozvíjí, zatímco o řecké přírodní filozofii to říci nelze. A snad i proto měla matematika ve 4. stol. př. Kr. takový respekt. Již jsme uvedli, že nad Platónovou Akademií byl prý nápis: *Nevstupuj, kdo neovládáš geometrii!*

6. Pýthagorejci

Řeckou matematiku podstatně ovlivnila škola pýthagorejská. Jejím zakladatelem byl Pýthagorás (570?–500?), politik, filozof, myslitel a matematik. Pocházel z ostrova Samos, který je nedaleko Milétu i Efesu. Později přesídlil do Krotónu v jižní Itálii, kde založil filozofickou školu, která však měla rovněž charakter náboženské školy či sekty a politické strany. Z Krotónu byli pýthagorejci vyhnáni, Pýthagorás snad zemřel v Metapontu. Působení pýthagorejské školy mělo obrovský vliv na další vývoj filozofie a vědy, rozhodnou měrou předznamenalo rozvoj řecké matematiky.

Cicero o Pýthagorovi říká:

Když přišel za vlády Tarquinia Pyšného do Itálie, upoutal Velké Řecko jak svým učením, tak i svou osobností, a ještě řadu století později bylo jméno pýthagorovců tak vážené, že to vypadalo, jako by na světě nebyli žádní jiní mudrci. ([11], str. 46)

Podle Cicerona byl Pýthagorás *vynálezcem slova filosofie*; své názory na filozofování prý vysvětloval takto:

Podle mého názoru je lidský život podoben jedné z těch slavností, které se konají za účasti celého Řecka a jsou spojeny s výpravnými hrami. Tam někteří hledají slávu a čestný věnec v sportovním zápolení, jiné tam přivádí zisk a výdělek při kupování a prodávání, a je také určitá skupina lidí – ta je nejušlechtilejší – , kteří se nesháněji ani po potlesku, ani po výdělku, ale přicházejí tam jako diváci a pozorně si prohlížejí, co a jak se tam děje.

A stejné je to i s lidským životem. I my jsme vyšli do tohoto života z jiného života a z jiné přirozenosti, jako bychom šli z nějakého města někam na hlučný trh, a teď někteří sloužíme slávě, jiní penězům; vzácní jsou takoví, kteří všechno ostatní nepovažují za nic a bedlivě pozorují podstatu světa. Těm říkám milovníci moudrosti, to je totiž význam slova filosofové. A jako na oné slavnosti je pro svobodného člověka nejdůstojnější jen se dívat a nehledat žádný zisk, tak v životě pozorování a poznávání přírody daleko vyniká nad všechny ostatní činnosti. ([11], str. 206–207)

Pýthagorás prohlásil, že základem jsoucna je číslo (*arithmos*). Pochopil nutnost kvantitativního popisování jevů a vztahů, uvědomil si obrovskou roli čísel. Předpokládal harmonickou stavbu světa, která je popsatelná čísly. Jsou mu přisuzovány tyto výroky:

Co je nejmoudřejší? - Číslo a potom ten, kdo dal věcem jména. ... Co je nejkrásnější? - Harmonie. Co je nejmocnější? - Myšlenka. ... číslu se podobá všechno. ([85], str. 40–41)

Aristotelés se o pýthagorejském pojetí jsoucna vyjadřuje takto:

A ježto viděli v číslech stavy a poměry harmonií a ježto se jim zdálo, že se i vše ostatní podobá celou svou přirozeností číslům a že čísla jsou první z celé přírody, usoudili, že prvky čísel jsou též prvky všech věcí a že celý vesmír je harmonií a číslem. ([85], str. 184)

Pýthagorejci prosazovali studium tzv. *kvadrivia*, které sestávalo z geometrie, aritmetiky, astronomie a hudby. Toto pojetí kvadrivia se zachovalo až do přelomu středověku a novověku, kdy bylo studováno na prvních univerzitách (na fakultách *sedmi svobodných umění*) vedle tzv. *trivia* (gramatika, rétorika, dialektika). Podstatnou měrou k tomu přispěl A. M. T. S. Boethius (480?–525), „poslední Říman a první scholastik“, autor slavného díla *Filozofie utěšitelka* (lat. *Consolatio philosophiae*), který studium kvadrivia propagoval. Napsal spisy o čtyřech „matematických“ disciplínách - aritmetice, geometrii, astronomii a hudbě. Jeho latinsky psaný výklad vycházel z děl řeckých klasiků. V 7. století se však ztratilo Boethiovo pojednání o astronomii a z jeho spisu o geometrii zbyly jen zlomky. Přežila jen *Institutio arithmetica* a *Institutio musica*. Později se k těmto dílům přidávaly cizí spisy o geometrii a astronomii, aby bylo kvadrivium zachováno.

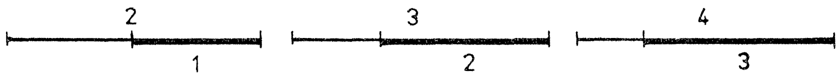
Mezi jednotlivými složkami kvadrivia cítili řečtí myslitelé úzké souvislosti. Uvědomme si nejprve několik bezprostředních vztahů geometrie a aritmetiky (kam tehdy patřily i první poznatky z teorie čísel): Pýthagorova věta na jedné straně a pýthagorejské trojice čísel na straně druhé; pravidelné mnohoúhelníky a mnohostěny a vyplňování roviny a prostoru těmito objekty na jedné straně a figurální čísla a jejich postavení ve světě (přirozených) čísel na straně druhé; v geometrii, stejně jako v aritmetice, hrál velkou roli pojem podobnosti - dnes již chápeme podobnost jen v geometrii.

Popišme krátce původní pýthagorejský pohled na svět čísel a veličin. Číslo 1 nebylo chápáno jako číslo, ale jako stavební kámen aritmetiky (základní jednotka číselného množství), ale i geometrie (bod, základní jednotka obsahu plochy či objemu); přirozená čísla 2, 3, 4, 5, ... byla chápána jako souhrny jednotek. Kladná racionální čísla byla představována pomocí poměrů přirozených čísel; je pravděpodobné, že byla chápána i jako násobky menších jednotek, které vznikly rozdělením původní jednotky na určitý počet stejně velkých částí. Pýthagorejci se zprvu domnívali, že s tímto světem čísel a veličin vystačí; teprve později - po objevu nesouměřitelnosti úseček - se přesvědčili o opaku. Původní pýthagorejský pohled na čísla odpovídá pohledu dítěte. Dítě samo vlastním uvažováním k iracionálním číslům nedojde a ani dojít nemůže; jejich existence je mu ve škole poměrně brzy dána na vědomí - většinou na jednom jediném příkladu (iracionalita $\sqrt{2}$).

Pythagorás změnil geometrickou vědu v podobu svobodné nauky tím, že obecně zkoumal její základy a že probíral její poučky nehmotně a pomyslně; nalezl také nauku o iracionálních číslech a složení světových tvarů. [těmito tvary jsou snad míněna tzv. platonská tělesa, tj. pravidelné mnohostěny] ... *Zdá se, že si Pythagorás nade všechno vážil nauky o číslech ..., připodobňoval věci k číslům.* ([85], str. 41–42)

Hudbu chápali pýthagorejci v úzkém vztahu k matematice. Vyslovili zákon o úměrnosti výšky tónu délce struny nebo výšce vzduchového sloupce. Tento zákon jistě intuitivně znali a využívali již dlouhá staletí výrobci hudebních nástrojů. Zdá se však, že teprve pýthagorejci tento zákon exaktně zformulovali.

(O několik století později vyslovil Archimédés ze Syrakús (287?–212) některé jednoduché zákony mechaniky, např. zákony o rovnováze. Také tyto zákony musely být intuitivně známé a využívané při praktické činnosti již dlouhá staletí. Uvědomme si, že i pro studenty matematiky na vysoké škole není jednoduché přesně formulovat definici pojmu či vyslovit matematické tvrzení, i když třeba pojem dobře znají a tvrzení v praxi úspěšně využívají.)



obr. 1

Pýthagorejci vyslovili i tzv. zákon harmonie. K danému tónu, který je vytvořen např. chvějící se strunou, získáme tón, který s ním ladí, když strunu seškrtíme tak, aby poměr délek vzniklého úseku a celé struny byl vyjádřen pomocí malých přirozených čísel. Oktávě odpovídá poměr $1 : 2$, tj. strunu seškrtíme přesně v polovině, kvintě odpovídá poměr $2 : 3$, tj. strunu seškrtíme ve dvou třetinách, kvartě odpovídá poměr $3 : 4$, tj. strunu seškrtíme ve třech čtvrtinách (viz obr. 1). Uvědomme si ještě, že platí rovnost

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3},$$

kterou můžeme chápat jako vztah mezi oktávou, kvartou a kvintou.

Hudební úměrou byla ve starém Řecku nazývána čtveřice $(12, 9, 8, 6)$. Poměry $6 : 12$, $8 : 12$ a $9 : 12$ totiž dávají po řadě oktávu, kvintu a kvartu. Číslo 9 je navíc aritmetickým průměrem čísel 6, 12 a číslo 8 je harmonickým průměrem čísel 6 a 12 (harmonický průměr čísel a, b je dán zlomkem $\frac{2ab}{a+b}$). Toto aritmetické pojetí hudby bylo doplněno i o geometrické aspekty. Čtveřice $(12, 9, 8, 6)$ má totiž úzký vztah ke krychli, neboť ta má 6 stěn, 8 vrcholů, 12 hran a 9 rovin souměrnosti. Historku o tom, jak pýthagorejci objevili matematické zákonitosti hudebních intervalů vypráví Boethius (viz [21], díl I, str. 52–53).

Upozorňujeme čtenáře na pěkný článek B. Riečana [58] o matematickém popisu tónů.

V kosmologii opustili pýthagorejci geocentrismus. Do středu vesmíru umístili centrální oheň; kolem něho se rovnoměrným pohybem na deseti sférách pohybují hvězdy, pět planet, Slunce, Měsíc, Země a Protizemě. Dokonalost vesmíru se projevuje jednak v jeho tvaru (je to koule), v rovnoměrnosti pohybů, v počtu sfér (desítka je symbolem dokonalosti - proto byla patrně vymyšlena Protizemě) a i v tom, že poloměry sfér (a rovněž rychlosti pohybů) jsou v poměru malých přirozených čísel, které odpovídají hudebním poměrům. Pohyb sfér způsobuje dokonale krásnou hudbu, vnímanou snad jen rozumem. K těmto představám pýthagorejců se tedy vztahují známá slovní spojení *harmonie kosmu* a *hudba sfér.*

Ocitujme zprávu o učení pýthagorejce Filoláa (5. stol. př. Kr.):

Filolaos učí, že je uprostřed kolem středu oheň a nazývá jej krbem vesmíru, Diovým příbytkem, matkou bohů, oltářem a svazkem i měrou přírody. A opět jiný oheň je nahoře, vše obklopující. Ale první od přírody je střed; kolem něho krouží deset božských těl: obloha, pět oběžnic, za nimi slunce, pod ním měsíc, pod ním země, pod ní protizemě a za nimi za všemi oheň, mající v středu úlohu krbu. ([85], str. 192)

Aristotelés o pýthagorejcích říká:

... poněvadž se zdá, že desítka jest číslo dokonalé, zahrnujíc všechna čísla základní, jest prý podle nich také deset obíhajících těles na nebi; ale poněvadž je jich vidět pouze devět, vyplňují počet protizemí jako tělesem desátým. ([1], str. 46)

... domnívají se též, že jsou rychlosti nebeských těles v souzvučném poměru podle svých vzdáleností. Proto říkají, že vzniká harmonický zvuk nebeských těles pohybujících se v kruhu. ([85], str. 187)

Fascinováni světem čísel, která hrají tak důležitou úlohu ve světě, dospěli pýthagorejci až k číselnému mysticismu. Jednotlivá čísla měla podle pýthagorejců zvláštní význam a moc. Sudá čísla byla ženská, lichá mužská, číslo 4 představovalo spravedlnost, číslo 5 manželství apod. Číslo 10 představovalo dokonalost a veškeré jsoucno. Je totiž $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, přitom číslo 1 představuje základní jednotku, ale i bod, číslo 2 představuje základní jednotku sudých čísel, ale i to, že dva různé body určují přímku, číslo 3 představuje trojúhelník, ale i to, že tři body neležící v přímce určují rovinu, číslo 4 představuje čtyřstěn, ale i to, že čtyři body neležící v rovině reprezentují prostor. Pýthagorejci vyznávali deset základních protikladů (omezené - neomezené, sudé - liché, jedno - mnohé, pravé - levé, mužské - ženské, klid - pohyb, rovné - křivé, světlo - tma, dobré - zlé, čtverec - obdélník (viz [85], str. 185, viz též [1], str. 46–47)). Protiklady však zároveň vytvářely harmonii, soulad.

Nechme ještě jednou promluvit pýthagorejce Filoláa:

Činy a podstatu čísla je třeba pozorovat podle síly, která je v desítce, neboť síla čísla a zvláště desítky je veliká, vše plnící, vše působící a je počátkem i vůdkyní božského, nebeského i lidského života a se vším se stýká. ... Bez ní je vše neomezené, nejisté a nejasné. Neboť povaha čísla dává poznání a každého vede i poučuje o každé nejasné a neznámé věci. Neboť nikomu by nebyla žádná z věcí jasná, ani sama o sobě, ani ve vztahu k jiné, kdyby nebylo čísla a jeho podstaty. Avšak číslo, uváděje v duši všechny věci v soulad s vjemem, činí je poznatelnými a navzájem souhlasnými po způsobu gnómonu, tím že ztělesňuje a rozlučuje poměry věcí - každý zvlášť - neomezených i omezujících.

Povahu čísla a jeho mocnou sílu bys mohl vidět nejen v démonských a božských věcech, nýbrž též ve všech lidských činech a slovech i ve všech řemeslných dílech i v hudbě. Povaha čísla a harmonie nepřipouštějí nikterak klam, neboť jim není vlastní; klam a závist náleží k povaze neomezeného, nesmyslného a nerozumného. Klam nikterak nevane do čísla, neboť klam je nepřátelský a protivný jeho povaze, zato pravda je vlastní rodu čísla a s ním srostlá. ([85], str. 191)

Zájem o číselný mysticismus a podobné otázky stále trvá. *Nová Akropolis, filosofická škola na klasický způsob*, pořádala dne 25. 4. 1994 v Praze přednášku „Symbolismus čísel. Numerologie. (Geneze čísel a forem. Číslo - základ Univerza. Zlaté číslo v mikrokosmu a makrokosmu.)“.

Magickým obrazcem byl pro pýthagorejce pravidelný pětiúhelník. Snad proto, že jeho úhlopříčky jsou děleny svými průsečíky v poměru zlatého řezu, nebo proto, že konstrukce pravidelného pětiúhelníka pravítkem a kružítkem byla obrovským úspěchem tehdejší geometrie; možná však, že ze zcela jiného důvodu (obrazce pětiúhelníka se objevovaly na řeckých vázách již v 7. stol. př. Kr.).

Na závěr tohoto odstavce o pýthagorejcích ocitujme Z. Kratochvíla:

Náhled i výklady náhledem umožněné, to vše se stává součástí „nauky“, MATHÉMA. Běžná řečtina pak zná slovo MATHÉSIS, „poučení, naučení“. MATHÉMA je pak to, „co je k naučení“ čili „nauka“. MATHÉMATIKOS znamená původně „náležející k poučení (nauce)“, ať už se jedná o učedníka nebo o pojednání, např. „naučná řeč“, MATHÉMATIKOS LOGOS (v tomto významu ještě u Aristotela). MATHÉMATIKA, což je plurál středního rodu, pak znamená všechny ty věci, které jsou této naučné povahy. Význam pýthagorejských „učedníků“ čili matematiků spolu s jejich orientací zájmu způsobil, že slovo „matematika“ od té doby znamená především zabývání se čísly a geometrickými objekty. Právě tohle je v pýthagorejském pojetí to nejlepší učení a cesta k moudrosti, neboť část toho, co zkoumáme, totiž čísla, pak můžeme využít k výkladu řady jiných témat zkoumání. ([46], str.30)

Připomeňme ještě, že existuje knížka s provokujícím názvem *Was Pythagoras Chinese?* (viz [67]).

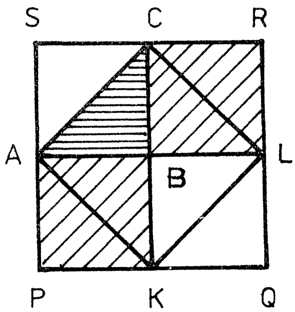
7. Pýthagorova věta

Je možné, že Pýthagorova věta byla známa již ve starém Egyptě; egyptští spojovači provazů snad vytyčovali pravý úhel pomocí smyčky provazu, na které bylo 12 uzlů ve stejných vzdálenostech od sebe. Pokud tomu tak bylo, pak používali k vytýčení pravého úhlu pýthagorejský trojúhelník se stranami $3, 4, 5$.

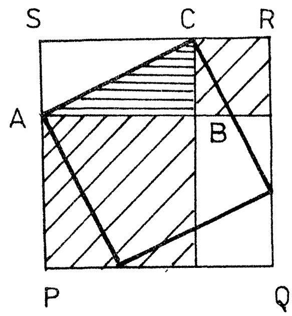
V Mezopotámii byla Pýthagorova věta známa asi tisíc let před Pýthagorem. Byla chápána jako vztah mezi délkami stran pravoúhlého trojúhelníka; svědčí o tom úlohy, které z té doby pocházejí. Nevíme, zda byl v Mezopotámii objeven její důkaz. Byly však nalezeny některé pýthagorejské trojice čísel; patrně byly vyčteny z tabulek druhých mocnin, které byly v Mezopotámii hojně užívané.

V Řecku prý Pýthagorovu větu i její důkaz objevil sám Pýthagorás a jako výraz vděčnosti za tento objev obětoval bohům hekatombu, tj. 100 volů. (Tento příklad vyzývá k následování; nejsou však již bohužel bohové, kteří by takovéto oběti přijímali.) Můžeme se jen domýšlet, jak asi vypadaly původní důkazy Pýthagorovy věty. Není vyloučeno, že byla tato proslulá poučka ve speciálním případě (pro pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník) vyčtena z kachlíkování či dláždění (viz dále obr. 2). Je možné, že právě tento pohled přispěl k tomu, že byla Pýthagorova věta chápána jako vztah mezi obsahy tří čtverců. Je však rovněž možné, že k tomu došlo až při rozvoji řecké geometrické algebry.

Obr. 2 může znázorňovat část dláždění, které je sestavené ze stejně velkých rovnoramenných pravoúhlých trojúhelníků. Je ihned vidět, že dva malé čtverce nad odvěsnami AB a BC trojúhelníka ABC sestávají dohromady ze čtyř trojúhelníků a že čtverec $AKLC$ nad přeponou AC je rovněž sestaven ze čtyř trojúhelníků. (Čtverec nad přeponou AC má tedy dvakrát větší obsah než čtverec nad odvěsnou AB.) Na obr. 2 je tedy řešen problém „zdvojení“ čtverce, který je diskutován v Platónově dialogu *Menón*. (viz [56], str. 88–94 a 122–123, resp. [57]).



obr. 2



obr. 3

Poznamenejme ještě, že každé dítě se setká s obr. 2 a tedy se speciálním případem Pýthagorovy věty, když skládá ze čtvercového listu papíru tzv. parníček (vhodná možnost pro zpestření výuky!).

Na obr. 2 se však můžeme podívat i jinak. Ke dvěma čtvercům nad odvěsnami AB a BC trojúhelníka ABC je třeba přidat další čtyři trojúhelníky, abychom dostali velký čtverec $PQRS$. Rovněž ke čtverci nad přeponou AC je třeba přidat čtyři stejně velké trojúhelníky, abychom dostali čtverec $PQRS$.

Podíváme-li se na obr. 3, můžeme předchozí myšlenku použít pro důkaz Pýthagorovy věty v obecném případě. Ke dvěma čtvercům nad odvěsnami AB a BC je třeba přidat čtyři trojúhelníky shodné s trojúhelníkem ABC, abychom dostali celý čtverec $PQRS$. Rovněž ke čtverci nad přeponou AC je třeba přidat čtyři takovéto trojúhelníky, abychom dostali celý čtverec $PQRS$.

V Eukleidových *Základech* je však jiný důkaz Pýthagorovy věty; i ten je však založen na porovnávání obsahů geometrických objektů (viz [20], kniha I, věty 47, 48). Uvažujme pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C a čtverce nad jeho stranami. Vše je znázorněno na obr. 4.

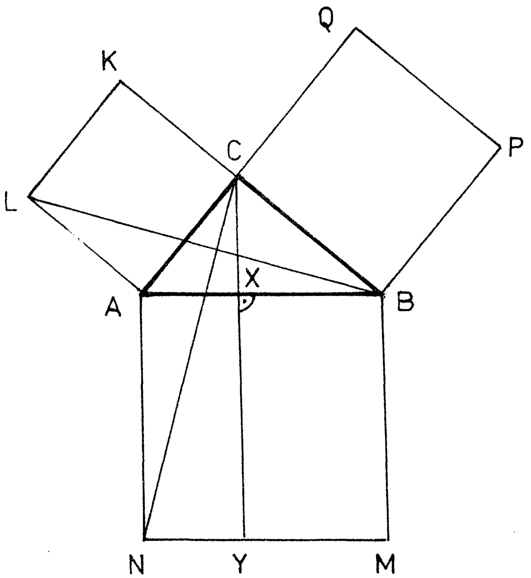
Naše úvahy budou postupovat v následujících krocích:

a) Trojúhelníky LAB a CAN jsou shodné (věta sus).

b) Obsah trojúhelníka LAB je roven polovině obsahu čtverce $LACK$ (LA je základna a CA příslušná výška trojúhelníka LAB).

c) Obsah trojúhelníka CAN je roven polovině obsahu obdélníka $ANYX$ (AN je strana a XA příslušná výška trojúhelníka CAN).

d) Obsah čtverce $LACK$ je tedy roven obsahu obdélníka $ANYX$. (Dokázali jsme vlastně Eukleidovu větu o odvěsně.)
e) Úplně stejně dokážeme (pomocí trojúhelníků PBA a CBM), že obsah čtverce $PBCQ$ je roven obsahu obdélníka $MBXY$.
f) Součet obsahů čtverců nad odvěsnami trojúhelníka ABC je tedy roven obsahu čtverce nad přeponou.



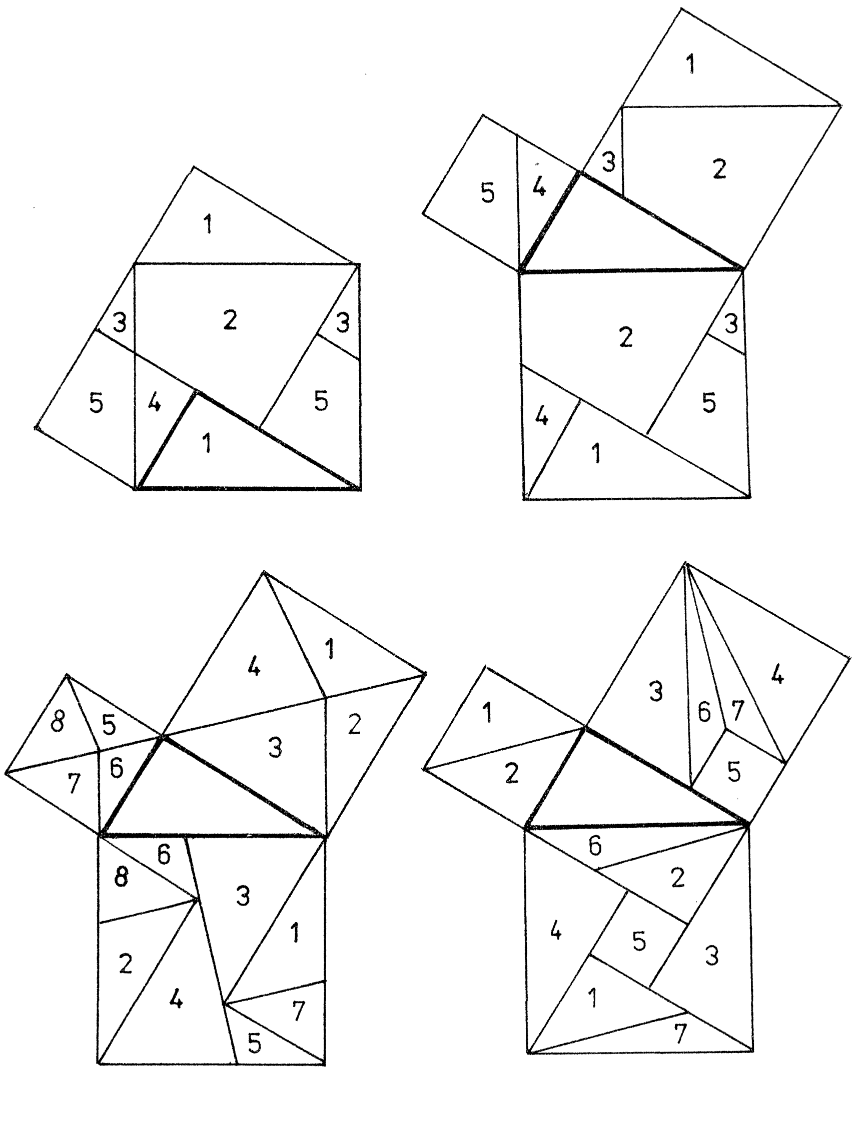
obr. 4

Z výše uvedeného důkazu je snadno vidět, že kdyby byl úhel při vrcholu C ostrý (tupý), pak by součet obsahů čtverců nad stranami AC a BC byl větší (menší) než obsah čtverce nad stranou AB.

Na závěr tohoto odstavce poznamenejme, že problematika nejstarších matematických znalostí lidstva (např. právě Pýthagorovy věty) je stále aktuální pro historiky matematiky a nejen pro ně. Odkazujeme čtenáře na literaturu; se zajímavou a provokativní teorií přišel např. Waerden (nar. 1903) v knize [75]. Jeho teorie však vyvolala vážné námitky.

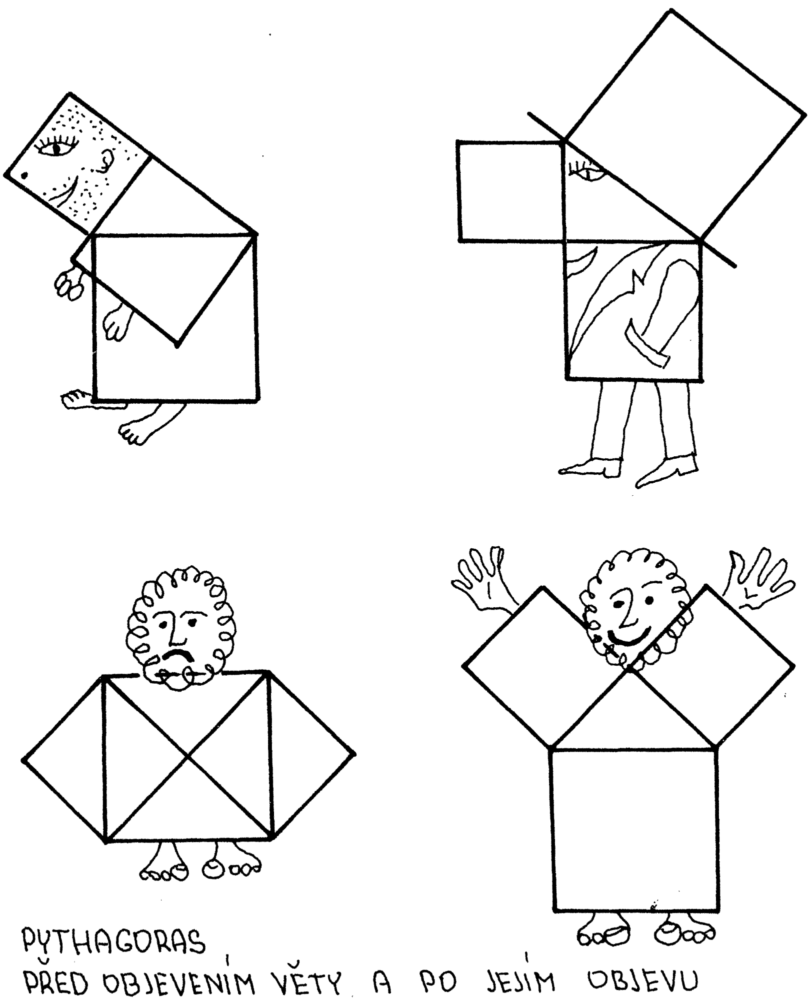
... B. L. van der Waerden vyslovuje tuto hypotézu: Ve střední Evropě existovala v neolitu v období mezi r. 3000 až 2000 ante „matematická věda“; odtud se rozšířila do Velké Británie, na Blízký Východ, do Indie a Číny. Snad není ani nutné dodat, že většina specialistů přijala tuto konstrukci - která snad v očích svého autora má dvojí výhodu, totiž připisuje vynález matematiky našim evropským předkům a zároveň tento vynález spojuje s rituálními cíli - s hlubokou skepsí a s nedůvěrou k jejím křehkým základům. ([71], str. 14)

Během staletí bylo vymyšleno mnoho různých důkazů Pýthagorovy věty. Uveďme pro zajímavost některé obrázky, které tyto důkazy znázorňují (viz obr. 5). Mají charakter vystřihovánek a skládanek – je možno je využít pro zvýšení atraktivity vyučování a vylepšiti tak image učitele (učitelky).



obr. 5

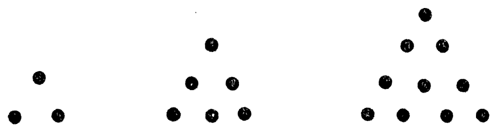
Pro oživení textu uveďme i čtyři studentské kresby z 19. století, které se Pýthagorovy věty týkají (viz obr. 6). Třetí a čtvrtý obrázek ukazuje samotného Pýthagora před objevem své slavné věty a po jejím objevu.



obr. 6

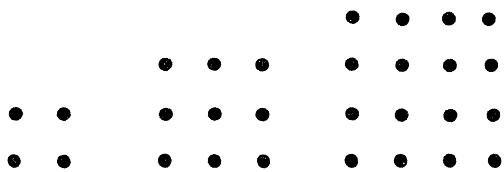
8. Figurální čísla

Pýthagorejci byli fascinováni světem přirozených čísel. Snažili se v něm hledat řád, zákonitosti a harmonii, snažili se přirozená čísla klasifikovat. K tomuto cíli využívali svoji geometrickou interpretaci čísel; přirozená čísla, která byla často reprezentována hromádkou kaménků, začali třídit podle tvarů, do kterých bylo možno kaménky srovnat. Tak dospěli k číslům *trojúhelníkovým* (obr. 7),



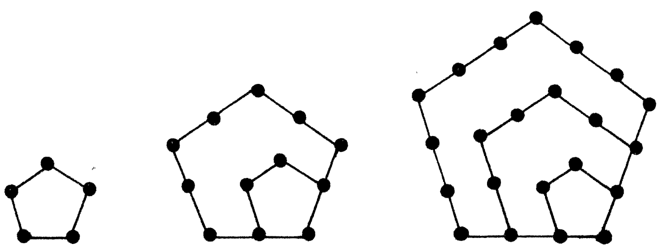
obr. 7

tj. k číslům $3, 6, 10, \cdots$, obecně (po doplnění $a_1 = 1$) $a_n = \frac{1}{2} \cdot n(n+1)$,
k číslům *čtvercovým* (obr. 8),



obr. 8

tj. k číslům $4, 9, 16, \cdots$, obecně (po doplnění $a_1 = 1$) $a_n = n^2$,
k číslům *pětiúhelníkovým* (viz obr. 9, kde jsou pro větší názornost naznačeny pětiúhelníky),

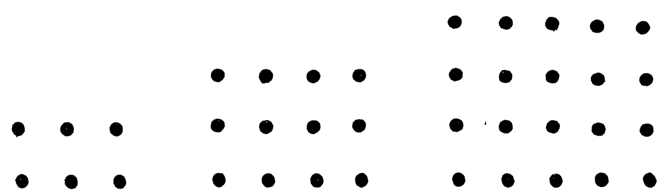


obr. 9

tj. k číslům $5, 12, 22, \cdots$, obecně $a_n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (3n-1)$, k číslům *šestiúhelníkovým* ($a_n = n \cdot (2n - 1)$) atd. Alexandrijský matematik a astronom Hypsikles (2. stol. př. Kr.), který o figurálních číslech sepsal práci (nezachovala se), podal obecný předpis pro utvoření n-tého m-úhelníkového čísla; dnes ho vyjádříme vzorcem

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot [2 + (n-1)(m-2)] \,.$$

Kromě m-úhelníkových čísel vyšetřovali pýthagorejci čísla *obdélníková*, tj. čísla, která je možno vyjádřit součinem dvou čísel větších než 1 a která odpovídala uspořádání kaménků do obdélníku. Největší význam přikládali oddélníkovým číslům z obr. 10,



obr. 10

tj. číslům $6, 12, \cdots$, obecně $a_n = n(n+1)$, která se „tvarově" nejvíce blíží číslům čtvercovým.

Dalším typem byla čísla *přímková* (obr. 11).

obr. 11

Znovu připomeňme, že jednička nebyla považována za číslo, ale za základní stavební kámen. Nebyla chápána jako číslo trojúhelníkové, čtvercové atd.; takovéto doplnění provádíme dnes my, kteří jsme běžně zvyklí uvažovat nejrůznější mezní případy (často velmi bizarní). Dítě však dá za pravdu pýthagorejcům a jedničku k trojúhelníkovým či čtvercovým číslům počítat nebude.

Vykročením do prostoru byla čísla *kubická* ($a_n = n^3$), čísla *jehlanová* - částečné součty posloupnosti m-úhelníkových čísel. Např. čísla *čtyřstěnová* jsou $1+3 = 4$, $1+3+6 = 10$, $1+3+6+10 = 20$, $\cdots$ (obecně $a_n = \frac{1}{6} \cdot n(n+1)(n+2)$). Vzpomeňme na návštěvu starého hradu, kde do „jehlanových čísel" byly narovnány dělové koule.

Význam figurálních čísel zdaleka nebyl jen v hezké geometrické interpretaci. Pomocí takovýchto znázornění byly objevovány principy, podle kterých čísla „vznikají“. Např. trojúhelníková čísla (a podobně jehlanová čísla) vznikají aditivním způsobem: $1+2=3$, $1+2+3=6$, $1+2+3+4=10$ atd. Čtvercová, obdélníková a kubická čísla vznikají multiplikativním způsobem ($2\cdot 2=4$, $3\cdot 3=9$ atd.).

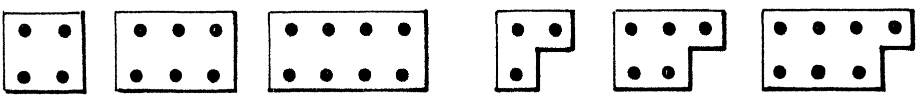
Geometrickým znázorněním čísel je možno objevovat a „zviditelňovat“ (čtenář snad autorovi odpustí tento slovenský termín) matematické poznatky a jejich důkazy. Domníváme se, že figurální čísla a jejich kladení před oči sehrálo důležitou roli při vnímání a pochopení podstaty matematického důkazu. Anglický filozof Thomas Hobbes (1588–1679) ve svém spise *O tělese* (1655) napsal:

Dokazování je sylogismus nebo řetěz sylogismů odvozený z definic jmen až k poslednímu závěru. Z toho je zřejmé, že veškeré řádné rozumové uvažování, které vychází z pravdivých principů, je vědecké, a je to pravdivé dokazování. Neboť pokud jde o původ samotného slova „dokazování“, Řekové ho nazvali APODEIXIS a Římané doslovným překladem „demonstratio“; a to pouze ten druh rozumového postupu, kdy dokazovanou věc jakoby kladli před oči pomocí určitých čar a obrazců, což je vlastně APODEIKNYEIN čili „ukazovat“. Patrně to tak nazvali proto, že jinde než v geometrii (kde snad jedině jsou takové obrazce na místě) nepozorovali žádnou určitou a vědeckou rozumovou úvahu, nýbrž všude jen spory a křik ... ([32], str. 60–61)

Vzhledem k tomu, že důkazové metody opírající se o figurální čísla („kladení před oči“) můžeme s úspěchem využít i při vyučování matematice, budeme se této problematice věnovat podrobněji. Na příslušných obrázcích přidáme k figurálním číslům „obrysy“.

a) Sudá a lichá čísla

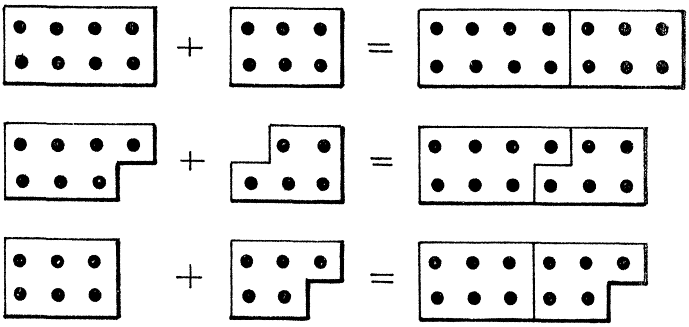
Sudé číslo je možno srovnat do obdélníku s jednou stranou 2, u lichého čísla to není možné (obr. 12).



obr. 12

Číslo 2 bylo chápáno jako stavební kámen sudých čísel; jako takové mezi vlastní sudá čísla často nebylo počítáno.

Součet dvou sudých (lichých) čísel je číslo sudé, součet sudého a lichého je číslo liché (viz obr. 13).



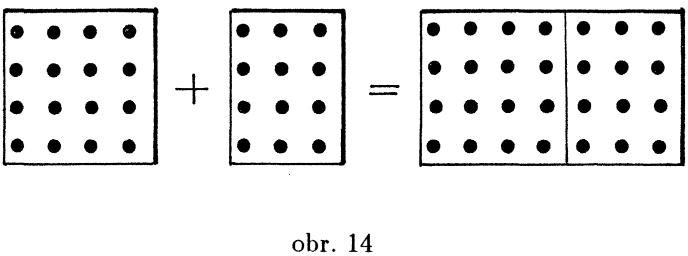
obr. 13

Připomeňme, že protiklad sudé - liché byl jedním z deseti pýthagorejských protikladů.

b) Dělitelnost

Čísla reprezentovaná hromádkami kaménků, se můžeme snažit „srovnávat" do různých obdélníčků (příp. čtverců) a zjišťovat, kdy to jde a kdy ne, kolik kaménků zbývá (tj. nalézat zbytky při dělení) apod. Rozlišíme tak čísla složená, která je možno reprezentovat nějakým oddélníkovým či čtvercovým číslem, a prvočísla, pro která to možné není (ta reprezentujeme čísly přímkovými). Pýthagorejci rozlišovali i čísla sudo-sudá, sudo-lichá a licho-lichá.

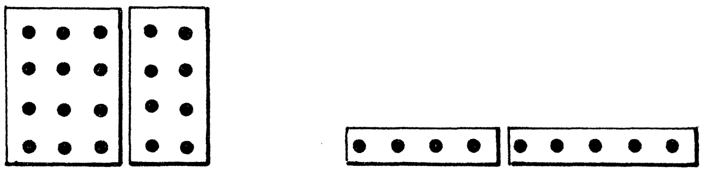
Snadno ukážeme, že součet dvou čísel, která jsou dělitelná nějakým číslem, je rovněž tímto číslem dělitelný; např. $16 + 12 = 4 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 4 \cdot (4 + 3)$ - viz obr. 14.



obr. 14

Můžeme uvažovat i o soudělnosti a nesoudělnosti čísel, snadno znázorníme i největší společný dělitel. Daná čísla je třeba „srovnat" do obdélníků se „společnou" stranou a to tak, aby tato společná strana byla co největší.

Na obr. 15 je ukázáno, že číslo 4 je největším společným dělitelem čísel 12 a 8 a že čísla 4 a 5 jsou nesoudělná.



obr. 15

Poměrně snadno můžeme znázornit i některé vlastnosti aritmetických operací (komutativitu a asociativitu násobení a distributivní zákon – viz obr. 14).

c) Podobnost

Podobnost je dnes pro nás ryze geometrickým pojmem. Pýthagorejci však chápali podobnost i v aritmetice (dnes bychom řekli spíše v teorii čísel). Všechna trojúhelníková čísla můžeme považovat za podobná, rovněž všechna čtvercová čísla atd. Podobná jsou i obdélníková čísla tvaru $a \cdot b$ a $ka \cdot kb$, tj. obdélníky s „úměrnými" stranami. Snadno zjistíme, že součin dvou podobných oddélníkových čísel je číslo čtvercové.

d) Vznik trojúhelníkového čísla

Již víme, že trojúhelníková čísla vznikají aditivním způsobem:

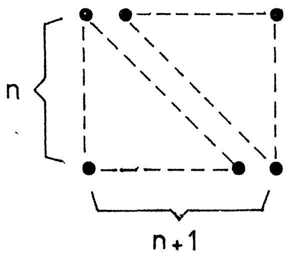
$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2} \cdot n(n+1)$$

Jde o známý vzorec pro součet speciální aritmetické posloupnosti. Je s ním spjata historka o slavném německém matematikovi K. F. Gaussovi (1777–1855). Když mu bylo devět let, upozornil poprvé na svůj matematický talent. Učitel dal dětem ve třídě sečíst přirozená čísla od 1 do 60 (někteří autoři uvádějí, že od 1 do 100). Malý Gauss hned hlásil výsledek; s jistou mírou nadsázky se dá říci, že objevil vzorec pro součet aritmetické posloupnosti. Zadaný příklad totiž vypočetl takto:

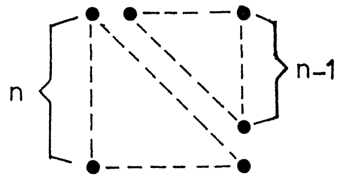
$$(1 + 60) + (2 + 59) + \cdots + (30 + 31) = 30 \cdot 61 = 1\ 830$$

Podobnou myšlenku je možno „zviditelnit" (viz obr. 16). Součet dvou n-tých trojúhelníkových čísel je obdélníkové číslo $n(n+1)$, tj. n-té trojúhelníkové číslo je $\frac{1}{2} \cdot n(n+1)$.

Stejným způsobem zjistíme, že součet dvou sousedních trojúhelníkových čísel je číslo čtvercové (viz obr. 17).



obr. 16



obr. 17

Tyto skutečnosti jsme dnes zvyklí dokazovat algebraicky:

$$\frac{1}{2}\cdot n(n+1)+\frac{1}{2}\cdot(n-1)n=n^2$$

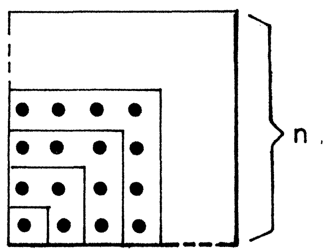
Představme si, že „slepíme“ dvě stejná trojúhelníková čísla („překrytím“ - jednou stranou přes sebe); můžeme říci, že „slepením“ dvou stejných trojúhelníkových čísel dostaneme číslo čtvercové. Podobným „slepením“ tří stejných trojúhelníkových čísel dostaneme číslo pětiúhelníkové atd. Zkuste si namalovat obrázky!

e) Vznik čtvercového čísla

Říkali jsme si, že čtvercová čísla jsou vytvořena multiplikativním způsobem. Vznik čtvercového čísla však můžeme popsat i aditivně:

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$$

Tato rovnost se ve škole dokazuje indukcí. Důkaz je však možno zviditelnit (viz obr. 18).

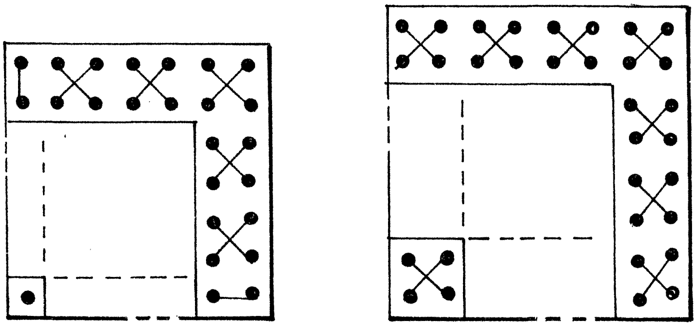


obr. 18

Současně je z obr. 18 vidět, že každé liché číslo větší než 1 je možno vyjádřit jako rozdíl dvou sousedních čísel čtvercových. Algebraicky:

$$2n-1=n^2-(n-1)^2$$

Součet dvou po sobě jdoucích lichých čísel je dělitelný čtyřmi (viz obr. 19).



obr. 19

Zároveň je z obr. 19 vidět, že čtvercové číslo je buď tvaru $4k + 1$ nebo $4k$ a že tyto dva typy čtvercových čísel se pravidelně střídají. Rovněž tato fakta se algebraicky snadno prověří:

$$(2n - 1) + (2n + 1) = 4n \ ,$$

$$(2n)^2 = 4n^2, \qquad (2n + 1)^2 = 4 \cdot (n^2 + n) + 1 \ .$$

Útvar, který se na předchozích obrázcích vždy připojil ke čtverci, aby opět vznikl čtverec, byl nazýván *gnómon.* S jedním významem tohoto slova jsme se už setkali (v 5. odstavci - u Anaximandra); podle Heróna z Alexandrie je gnómon číslo (nebo plošný obrazec), po jehož přidání k jinému číslu (nebo obrazci) vznikne číslo podobné (nebo obrazec podobný). Opět tu tedy hraje významnou roli pojem podobnosti.

f) Další zajímavosti

Můžeme zkoumat i vznik kubického čísla:

$$1 + 7 + 19 + 37 + \cdots + (3n^2 - 3n + 1) = n^3$$

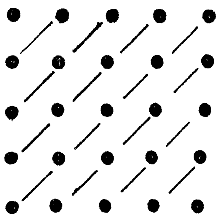
Důkaz této rovnosti lze provést indukcí. Můžeme však postupovat i geometricky a uvědomit si, že $3n^2 - 3n + 1$ je doplněk krychle $(n - 1)^3$ v krychli n^3.

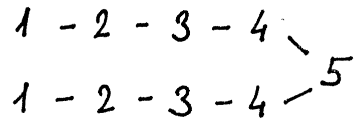
Pro každé přirozené číslo n platí rovnost

$$n^2 = n + 2 \cdot [1 + 2 + \cdots + (n - 1)] \ ,$$

kterou snadno dokážeme úpravou. Tuto rovnost však můžeme ihned „vidět“

ze znázornění čtvercového čísla (viz obr. 20 a).

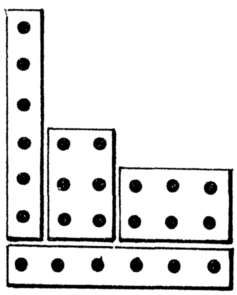




obr. 20 a, b

V souvislosti s předchozí rovností hovořili řečtí matematici o tzv. *stadionu*; rovnost $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 25$ znázorňovali symbolicky schématem, které je na obr. 20 b.

Řekové znali i tzv. *dokonalá čísla* 6, 28, 496 (a snad i 8 128). Připomeňme, že číslo se nazývá dokonalé, je-li součtem všech svých dělitelů, které jsou menší než ono samo (např. $6 = 1 + 2 + 3$, $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$). I dokonalost čísla je možno znázornit pomocí figurálních čísel (viz obr. 21).



obr. 21

Další dokonalé číslo 33 550 336 nalezl až J. Müller - Regiomontanus (1436–1476). V Eukleidových *Základech* je dokázáno ([20], kniha IX, věta 36), že když je $2^k - 1$ prvočíslo (tzv. Mersennovo prvočíslo – podle francouzského matematika M. Mersenna, který žil v letech 1588–1648), potom je číslo $2^{k-1} \cdot (2^k - 1)$ dokonalé. Důkaz tvrzení je snadný; stačí si uvědomit, jak vypadají dělitelé tohoto čísla a sečíst je. Uveďme pro zajímavost Servítův překlad zmíněné Eukleidovy věty; uvidíme, že není jednoduché těmto formulacím rozumět.

Když jest dáno po řadě od jednotky několik čísel v poměru jedné ke dvěma, až součet všech stane se číslem kmeným, [tj. prvočíslem] *a když se ten součet znásobí číslem posledním a vznikne jiné, vzniklé bude číslo dokonalé.* ([20], str. 154)

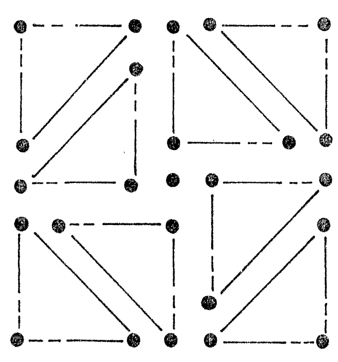
Poznamenejme, že uvedených pět dokonalých čísel odpovídá volbě $k = 2, 3, 5, 7, 13$. Další tři dokonalá čísla nalezl L. Euler (1707–1783); navíc roku 1747 dokázal, že každé sudé dokonalé číslo má tvar uvedený ve zmíněné Eukleidově větě. Dodnes nevíme, zda je dokonalých čísel konečně nebo nekonečně mnoho. Dnes jich známe 32 (pro k = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607, 1 279, 2 203, 2 281, 3 217, 4 253, 4 423, 9 689, 9 941, 11 213, 19 937, 21 701, 23 209, 44 497, 86 243, 132 049, 216 091, 756 839, 859 433; není vyloučeno, že jsou již známa další). Rovněž nevíme, zda vůbec existují lichá dokonalá čísla.

Pýthagorejci prý znali i tzv. *spřátelená čísla* 220 a 284. Číslo 220 je součtem všech dělitelů čísla 284 a číslo 284 je součtem všech dělitelů čísla 220 (mezi dělitele samozřejmě nepočítáme čísla 220 a 284).

Problematikou figurálních čísel se zabývali např. Nikomachos (kolem r. 100), který napsal pojednání o pýthagorejském učení o číslech, a Iamblichos, rovněž autor několika pojednání o pýthagorejcích. Mnohoúhelníková čísla studoval i Diofantos (3. stol.), jeden z posledních významných matematiků antiky (viz [16]). V jeho knize *O mnohoúhelníkových číslech* najdeme následující tvrzení. Zvětšíme-li osminásobek trojúhelníkového čísla o jedničku, dostaneme číslo čtvercové. Algebraické vyjádření tohoto faktu je snadné:

$$8 \cdot \frac{1}{2} \cdot n(n+1) + 1 = (2n+1)^2$$

Platnost tvrzení je však ihned patrná z obr. 22.

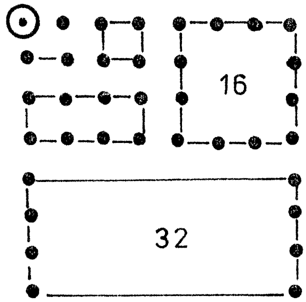


obr. 22

V Eukleidových *Základech* ([20], kniha IX, věta 35) je tvrzení, které můžeme algebraicky zapsat rovností

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1 \ .$$

Není vyloučeno, že jde o výsledek pýthagorejců získaný při práci s figurálními čísly. Geometricky je totiž možno tuto rovnost znázornit postupným zdvojnásobováním čtverce či dvou čtverců (pro $n = 6$ viz obr. 23).



obr. 23

Pěkná partie o figurálních číslech je v knihách [27], str. 295–299, a [84], str. 35–41.

9. Pýthagorejské trojice čísel

Pýthagorejskou trojicí rozumíme trojici (x, y, z) přirozených čísel x, y, z, pro která platí

$$x^2 + y^2 = z^2 \ ;$$

tato čísla jsou tedy délkami stran nějakého pravoúhlého trojúhelníka.

Nejznámější takovou trojicí je trojice $(3, 4, 5)$, kterou snad využívali staří Egypťané ke konstrukci pravého úhlu. V Mezopotámii znali některé pýthagorejské trojice již tisíc let před Pýthagorem. Jestliže je trojice (x, y, z) pýthagorejská, je zřejmě i trojice (kx, ky, kz) pýthagorejská. Při hledání všech pýthagorejských trojic se tedy můžeme omezit jen na tzv. základní trojice, které sestávají z čísel nesoudělných.

Uvádí se, že Pýthagorás a později Platón objevili obecná pravidla pro nalezení některých pýthagorejských trojic.

Pýthagorás:

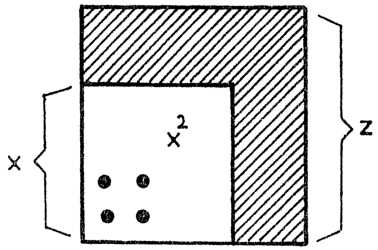
$$2p^2 + 2p, \quad 2p + 1, \quad 2p^2 + 2p + 1$$

Platón:

$$p^2 - 1, \quad 2p, \quad p^2 + 1$$

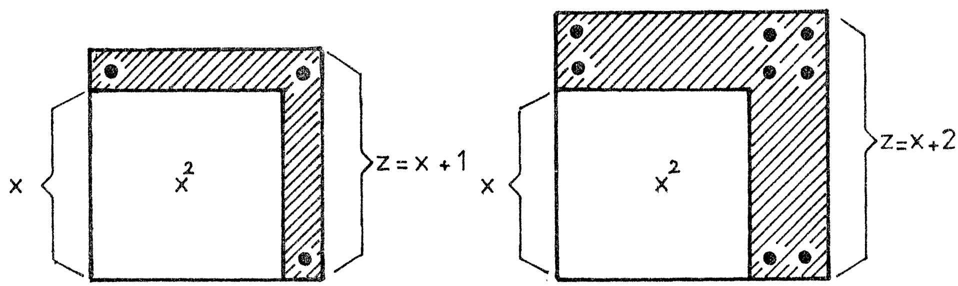
Přirozené číslo p v těchto výrazech můžeme libovolně volit.

Tato pravidla můžeme snadno odvodit pomocí čtvercových figurálních čísel. Uvědomme si, že problém nalezení všech pýthagorejských trojic můžeme přeformulovat takto (viz obr. 24): kdy je možno přetvořit vyšrafovaný gnómon na čtverec y^2 ?



obr. 24

Uvažujme nejprve gnómon „šířky" 1 (viz obr. 25 a), tj. předpokládejme, že $z = x + 1$. Potom je gnómon y^2 číslo liché a tedy i číslo y je liché. Pišme $y = 2p + 1$, odtud $y^2 = 4p^2 + 4p + 1$. Abychom získali číslo x, musíme od gnómonu y^2 odečíst 1 (pravý horní „roh" čtverce) a výsledek dělit dvěma. Tedy $x = 2p^2 + 2p$ a konečně $z = 2p^2 + 2p + 1$.



obr. 25 a, b

Uvažujme dále gnómon „šířky" 2 (viz obr. 25 b), tj. předpokládejme, že $z = x+2$. Potom je gnómon y^2 číslo sudé (součet dvou po sobě jdoucích lichých čísel), tj. číslo y je sudé, $y = 2p$ a $y^2 = 4p^2$. Abychom získali číslo x, musíme od gnómonu odečíst 4 (pravý horní „roh") a dělit čtyřmi. Tedy $x = p^2 - 1$ a $z = p^2 + 1$.

Ukázali jsme tedy, jakým způsobem bylo možno dospět pomocí čtvercových čísel k výše uvedeným popisům pýthagorejských trojic.

10. Poměry, úměry, zlatý řez

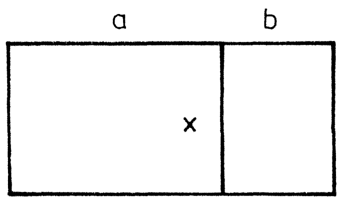
Velkou pozornost věnovali Řekové poměrům a úměrám. Je možno se oprávněně domnívat, že i zde hrála velkou roli podobnost geometrických útvarů. Jsou-li např. dva obdélníky o stranách a, b, resp. p, q podobné (pořadí stran je uvedeno s ohledem na podobnost), je

$$a : b = p : q \ , \quad \text{resp.} \quad a : p = b : q \ .$$

Poměry dnes většinou zapisujeme pomocí zlomků; úměra, tj. rovnost dvou poměrů (zlomků), znamená, že z jednoho zlomku dostaneme druhý pomocí krácení, rozšiřování, nebo oběma těmito operacemi. Rovnost dvou poměrů však můžeme chápat i geometricky, např. pomocí podobnosti obdélníků: jeden obdélník dostaneme z druhého zmenšením, zvětšením nebo oběma těmito operacemi. Uvažujme např. úměru $16 : 4 = 20 : 5$. Od poměru $16 : 4$ přejdeme k poměru $4 : 1$ zkrácením číslem 4 a od poměru $4 : 1$ k poměru $20 : 5$ rozšířením číslem 5. Při geometrickém chápání pak můžeme hovořit o zmenšení obdélníku čtyřikrát a následném zvětšení pětkrát. Zmenšení i zvětšení uvažujeme jen „celočíselná".

Takovýmto způsobem patrně staří Řekové s poměry a úměrami pracovali. V souhlasu s původním pýthagorejským pohledem na čísla a veličiny byly zprvu uvažovány jen poměry přirozených čísel.

Zjevně nebylo problémem zjistit, zda dva dané poměry jsou si rovny; rovněž bylo snadné převést poměr $a : b$ na poměr $x : c$, resp. $c : x$, kde číslo c bylo dáno, a zjistit, pro jaké číslo c to vůbec jde. Užijeme-li dnešní terminologii, řekneme, že tyto úlohy bylo možno zvládnout pomocí rozšiřování a krácení zlomků.



obr. 26

Závažnější otázkou však bylo nalézt k daným číslům a, b takové číslo x, aby bylo $a : x = x : b$. Tuto úlohu můžeme geometricky interpretovat několika způsoby. Jako problém o podobných obdélnících se společnou stranou (viz obr. 26), nebo jako problém o převedení obdélníka o stranách a, b na „rovnoplochý" čtverec o straně x ; z výše uvedené úměry totiž vyplývá rovnost $ab = x^2$. Geometricky zvládnout takovouto úlohu není obtížné; v oboru přirozených čísel to však vždy možné není.

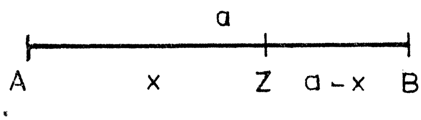
Poznamenejme ještě, že se hledaná veličina x nazývá *geometrický průměr* veličin a, b, někdy též *střední geometrická úměrná*; často se hovořilo o „vložení“ veličiny x mezi dvě dané veličiny a, b .

Úměry tohoto typu úzce souvisejí s Eukleidovými větami; u pravoúhlého trojúhelníka ABC s přeponou AB dojdeme k obdobným vztahům. Výška spuštěná z vrcholu C na stranu AB rozdělí tento trojúhelník na dva menší, které jsou oba podobné původnímu trojúhelníku ABC. Užijeme-li obvyklé označení, je

$$c : a = a : c_a \,, \quad c : b = b : c_b \,, \quad c_b : v = v : c_a \,.$$

Takto se ve škole obvykle Eukleidovy věty dokazují.

Speciálním případem úměry $a : b = p : q$ je tzv. *zlatý řez*. Nechť je dána úsečka AB a na ní bod Z. Řekneme, že bod Z dělí úsečku v poměru zlatého řezu, jestliže pro délky uvažovaných úseček platí vztah $AB : AZ = AZ : ZB$. Poměr délek celé úsečky a její větší části je tedy roven poměru délek její větší a menší části (viz obr. 27).



obr. 27

Označíme-li délku úsečky AB písmenem a, délku jejího většího úseku písmenem x, jde o úměru

$$a : x = x : (a - x) \,.$$

Uveďme nyní některé aspekty pojmu zlatý řez.

Od úměry $a : x = x : (a - x)$ dojdeme snadno ke kvadratické rovnici

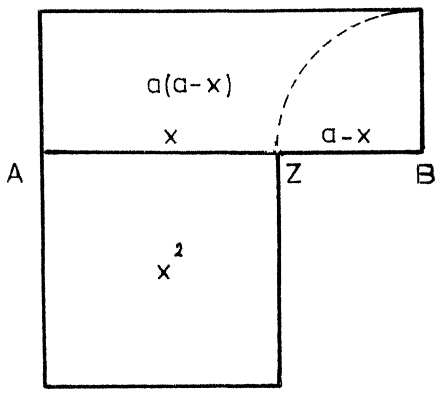
$$ax + x^2 = a^2,$$

která má jediný kladný kořen:

$$x = a \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0,618 \cdot a$$

Zlatý řez tedy můžeme chápat i jako poměr $0,618 : 1$. Dá se přibližně vyjádřit (dle požadavku na přesnost) některým z následujících zlomků: $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{8}{13}$, $\frac{13}{21}$, $\frac{21}{34}$, $\frac{34}{55}$ atd.

Délka úsečky AZ (viz obr. 27) je geometrickým průměrem délek úseček AB a ZB. Obsah čtverce nad větší částí AZ úsečky AB je roven obsahu obdélníka určeného celou úsečkou AB a její menší částí ZB (viz obr. 28).



obr. 28

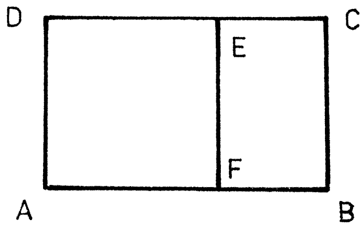
V tomto smyslu je zlatý řez prezentován v Eukleidových *Základech* ([20], kniha II, věta 11):

Rozděl danou přímku [úsečku] *tak, aby pravoúhelník z celé a z jedné úsečky rovnal se čtverci úsečky zbývající.*

Se zlatým řezem se u Eukleida setkáváme i později (kniha VI, definice 3); zlatý řez je tam již zaveden pomocí poměrů:

Pravíme, že přímka jest rozdělena poměrem krajním a středním, když větší úsečka má se k menší jako celá k větší.

Eukleides používá zlatý řez ke konstrukci pravidelného pětiúhelníka ve čtvrté knize *Základů*; ve třinácté knize pak v souvislosti s pravidelnými mnohostěny.

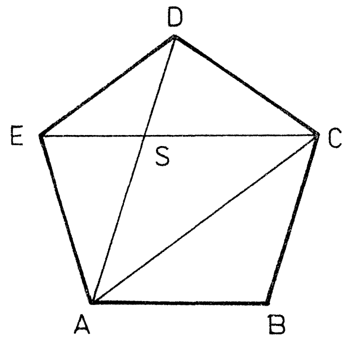


obr. 29

Hledáme-li zlatý řez, hledáme vlastně obdélník se zajímavou vlastností: sestrojíme-li nad jeho větší stranou čtverec, získáme obdélník podobný (na obr. 29 jsou obdélníky $ABCD$ a $BCEF$ podobné). Přidaný čtverec zde „hraje roli gnómonu“. Není obtížné si uvědomit, že všechny obdélníky s touto vlastností jsou podobné; říká se, že délky jejich stran jsou v poměru zlatého řezu.

Průsečík úhlopříček pravidelného pětiúhelníka dělí tyto úhlopříčky právě v poměru zlatého řezu (viz [20], kniha XIII, věta 9). Důkaz tohoto faktu snadno provedeme pomocí podobnosti trojúhelníků.

Na obr. 30 je znázorněn pravidelný pětiúhelník $ABCDE$. Úhlopříčky AD a CE se protínají v bodě S. Zřejmě je $ABCS$ kosočtverec. Trojúhelníky ABC a ESD jsou podobné, proto je $AC : AB = ED : ES$. Protože je $AC = EC$, $AB = CS = ED$, je $EC : CS = CS : ES$. Bod S tedy dělí úhlopříčku CE v poměru zlatého řezu.



obr. 30

Je pravděpodobné, že zájem o zlatý řez velmi úzce souvisel s tím, že pravidelný pětiúhelník byl pro pýthagorejce posvátným symbolem. Velikým objevem byla zřejmě konstrukce tohoto geometrického objektu, která se o zlatý řez opírá. Povšimněme si, že pro $n = 3$, $n = 4$, $n = 6$ je sestrojení pravidelného n-úhelníka banální záležitostí; nalezení konstrukce pro $n = 5$ bylo jistě pociťováno jako veliký úspěch geometrie a myšlení vůbec. Konstrukci zlatého řezu provedeme v odstavci o geometrické algebře.

Zlatým řezem se zabývalo mnoho matematiků. Ve starověku to byli v době po Eukleidovi hlavně Hypsikles a Pappos, o kterých jsme se v tomto článku již zmínili; velký zájem o zlatý řez pak projevovali hlavně architekti v době renesance. Často se uvádí, že zlatý řez „lahodí oku", že vyhovuje estetickým požadavkům a proto se ho užívá při stanovení rozměrů stavebních prvků, rámů, desek apod.

Poznamenejme ještě, že samotný termín zlatý řez snad pochází od Leonarda da Vinci (1452–1519). F. Servít použil v překladu Eukleidových *Základů* termín „poměr krajní a střední", J. Úlehla (1852–1933) ve svých *Dějinách matematiky* z roku 1901 hovoří o „rozdělení úsečky v poměru vnějším a vnitřním".

V listopadu 1992 začal vycházet časopis netradičního formátu (obdélník o stranách 42 cm a 26 $cm \approx 0,618 \cdot 42\ cm$) nazvaný *Zlatý řez*. Časopis je zaměřen hlavně k architektuře a umění. V nultém čísle z května 1992 se praví:

Zlatý řez je název pro určitý estetický kánon, poprvé stanovený ve starověku. Je to otevřený nekonečný vztah, ideální poměr dvou velikostí, jehož přesnost vzrůstá tím více, čím více se k neexistujícímu konci přibližuje. Je v něm vyslovena touha po dokonalé harmonii celku.

Název byl zvolen i proto,

že nás oslovuje univerzalita, klid, jas a obdivuhodná jednoduchost, které v sobě zlatý řez obsahuje.

Na obálce časopisu je naznačena konstrukce vedoucí k rozdělení jednoho z rozměrů časopisu - úsečky délky 26 cm - v poměru zlatého řezu.

Na závěr tohoto odstavce se vraťme opět k poměrům a úměrám. Vedle *geometrických úměr* $a : b = p : q$ vyšetřovali Řekové i *aritmetické úměry* $a - b = p - q$. Jednoduchou úlohou bylo nalézt k daným veličinám a, b veličinu x, pro kterou je

$$a - x = x - b\ ;$$

snadno zjistíme, že jde o *aritmetický průměr* veličin a, b, tj.

$$x = \frac{a+b}{2}\ .$$

Můžeme však hledat i veličinu x, pro kterou je

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{b}\ ;$$

bez problémů prověříme, že hledanou veličinou je *harmonický průměr* veličin a, b, tj.

$$x = \frac{2ab}{a+b}\ .$$

Povšimněme si, že je-li x po řadě aritmetický, geometrický a harmonický průměr veličin $a < b$, je poměr $(a - x) : (x - b)$ roven po řadě poměru $a : a$, $a : x$, $a : b$.

O souvislostech aritmetického a harmonického průměru s hudbou jsme se již zmiňovali v odstavci o pýthagorejcích.

Závažným a obtížným problémem bylo tzv. vložení *dvou* veličin x, y mezi dvě dané veličiny $a < b$, tj. nalezení veličin x, y, pro které platí rovnost

$$a : x = x : y = y : b\ .$$

Jakým způsobem se s tímto problémem vyrovnal Archytás z Tarentu a další řečtí matematici, uvidíme později.

11. Objev nesouměřitelnosti

Původní pýthagorejský pohled na čísla a veličiny („vše" jsou přirozená čísla a jejich poměry) je velice blízký pohledu nadaného dítěte, které pochopí, že (přirozená) „čísla začínají, ale nekončí" a díky řadě reálných situací získá poměrně přesný pohled na kladná racionální čísla. K iracionálním číslům však dítě samo nedojde; jejich existence je mu nastíněna ve škole. Patrně vždy je předveden známý důkaz, že $\sqrt{2}$ není racionální číslo; přesněji by mělo být vysvětleno, že v oboru racionálních čísel nelze číslo 2 odmocnit.

Připomeňme úvahu, která se ve škole provádí. Předpokládáme, že $\sqrt{2}$ je racionální číslo vyjádřené zlomkem ve zkráceném tvaru, tj. podílem dvou nesoudělných čísel p a q:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

Jednoduchou úpravou dojdeme k rovnosti $2q^2 = p^2$. Číslo p tedy musí být sudé, tj. $p = 2r$. Po dosazení a zkrácení získáme rovnost $q^2 = 2r^2$, ze které vyplývá, že i q je sudé. Došli jsme ke sporu s předpokladem nesoudělnosti čísel p a q.

Z tohoto důkazu se však vytratila původní geometrická myšlenka. Pokusme se navrátit k původnímu pýthagorejskému pohledu na tento problém a vyložit význam pojmu *nesouměřitelnost.*

Nechť a, b jsou dvě úsečky. *Společnou mírou* těchto dvou úseček nazveme takovou úsečku m, jejímiž násobky jsou obě úsečky, tj. $a = p \cdot m$ a $b = q \cdot m$. Pýthagorejci se původně domnívali, že každé dvě úsečky mají společnou míru, že jsou tedy *souměřitelné.* Odtud by vyplývalo, že jsou souměřitelné i každé tři úsečky a obecně každý konečný počet úseček.

Původní idea o souměřitelnosti úseček je snad obdobou „souměřitelnosti" libovolných dvou přirozených čísel. Každá dvě přirozená čísla jsou totiž nějakými násobky jednotky. Navíc, jejich největší společný dělitel je jejich největší možnou „mírou": obě čísla jsou násobky svého největšího společného dělitele a žádného většího čísla. Proto snad byla zcela přirozenou představa, že ke každým dvěma úsečkám a, b existuje „měrná" úsečka m, jejímiž celočíselnými násobky jsou úsečky a, b a žádná větší „měrná" úsečka těchto úseček a, b už neexistuje.

Ukažme nyní, že strana a úhlopříčka čtverce souměřitelné nejsou. Budeme do jisté míry modifikovat předchozí důkaz faktu, že $\sqrt{2}$ není číslo racionální.

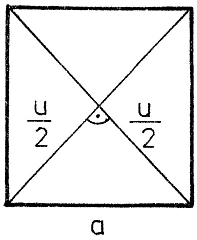
Předpokládejme, že úsečka m je společnou mírou strany i úhlopříčky čtverce a že tato úsečka m je zvolena co největší. Strana čtverce má tedy velikost a jednotek a úhlopříčka čtverce u jednotek určených úsečkou m. Čísla a a u jsou nesoudělná. Pokud by bylo $a = k \cdot a'$ a $u = k \cdot u'$, kde $k > 1$, byla by i úsečka $k \cdot m$ společnou mírou strany a úhlopříčky čtverce a to je ve sporu s volbou úsečky m.

Podle Pýthagorovy věty je $u^2 = 2a^2$ – a dál běží důkaz stejně jako dříve. Ze sporu vyplývá, že neexistuje úsečka m, jejímiž celými násobky by byly strana i úhlopříčka čtverce.

Pokusme se však ještě o jednu modifikaci, která snad bude znamenat další přiblížení k úvahám starých Řeků. Předpokládejme, že strana, resp. úhlopříčka čtverce měří a, resp. u jednotek a že tato čísla nejsou obě sudá (jinak bychom mohli volit dvojnásobnou jednotku). Podle Pýthagorovy věty je

$$u^2 = a^2 + a^2 \; .$$

Číslo u^2 je (jako součet dvou stejných čísel) sudé, proto je sudé i číslo u . Celým počtem jednotkových úseček je tedy možno „změřit" i polovinu úhlopříčky (viz obr. 31).



obr. 31

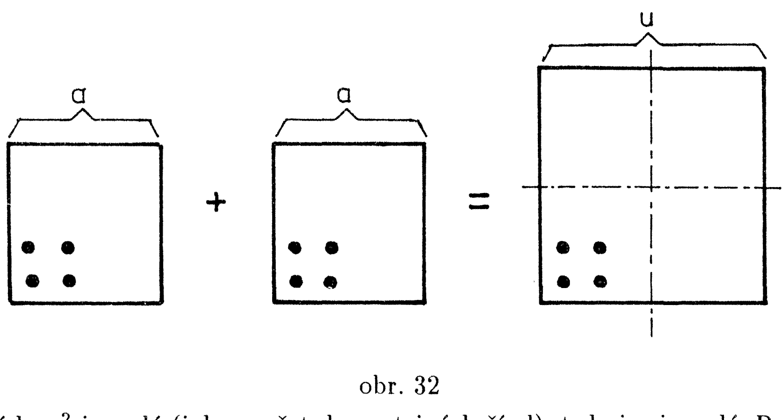
Podle Pýthagorovy věty je

$$a^2 = \left(\frac{u}{2}\right)^2 + \left(\frac{u}{2}\right)^2$$

tj. i a^2 a tedy i a je sudé číslo, což je ve sporu s předpokladem.

Užijme k důkazu nesouměřitelnosti strany a úhlopříčky čtverce ještě čtvercová figurální čísla a ukažme souvislost s pýthagorejskými trojicemi čísel.

Předpokládejme, že strana čtverce „měří" a jednotek a úhlopříčka u jednotek a že tato jednotka je zvolena co největší. Proto nemohou být čísla a, u současně sudá. Protože je $a^2 + a^2 = u^2$, je (a, a, u) pýthagorejská trojice čísel. Znázorněme předchozí rovnost symbolicky pomocí čtvercových čísel (viz obr. 32).



obr. 32

Číslo u^2 je sudé (jako součet dvou stejných čísel), tedy i u je sudé. Proto je možno čtvercové číslo u^2 „rozříznout svislým řezem" na dvě stejná obdélníková čísla, která obě „reprezentují" číslo a^2 (viz obr. 32). Oba tyto obdélníky však mají „svislou" stranu délky u, číslo u je sudé, takže každé z těchto oddélníkových čísel je možno „rozříznout vodorovným řezem" na dvě stejná čísla. Proto je číslo a^2 sudé, tedy i číslo a je sudé a to je ve sporu s předpokladem.

Uveďme ještě jeden argument, který posiluje přesvědčení, že se pýthagorejci museli otázkou souměřitelnosti strany a úhlopříčky čtverce zabývat.

Víme, že hledali tzv. pýthagorejské trojice čísel a dobře znali jejich souvislost s Pýthagorovou větou. Podle původního pýthagorejského pohledu na čísla a veličiny by měl mít každý trojúhelník souměřitelné všechny tři strany a tedy každý pravoúhlý trojúhelník by měl odpovídat nějaké pýthagorejské trojici čísel. Přirozenou otázkou tedy muselo být hledání té pýthagorejské trojice, která odpovídá rovnoramenným pravoúhlým trojúhelníkům (všechny jsou podobné).

V předchozích důkazech nesouměřitelnosti strany a úhlopříčky čtverce jsme vždy užili Pýthagorovu větu. Někteří badatelé se domnívají, že k objevu nesouměřitelnosti úseček dospěli řečtí matematici užitím podobnosti geometrických útvarů. Uvádějí, že byla nejprve objevena nesouměřitelnost strany a úhlopříčky pravidelného pětiúhelníka.

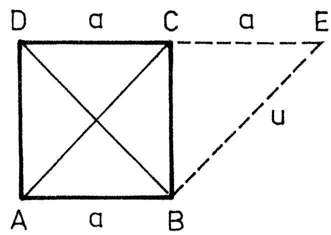
Uvažujme pravidelný pětiúhelník $ABCDE$ (viz obr. 30). Předpokládejme, že strana a úhlopříčka tohoto pětiúhelníka jsou souměřitelné, tj. úsečka AB je a-násobkem a úsečka CE je u-násobkem vhodně zvolené úsečky m. Nechť je tato úsečka m zvolena co největší; přirozená čísla a a u tedy nejsou obě sudá. Víme již, že platí rovnost

$$u : a = a : (u - a) \ .$$

Nyní mohou nastat tři případy:
a) čísla a, u jsou obě lichá a tedy číslo $u - a$ je sudé,
b) číslo a je sudé a číslo u je liché, tedy číslo $u - a$ je liché,
c) číslo a je liché a číslo u je sudé, tedy číslo $u - a$ je liché.

V žádném z těchto případů však nemůže výše uvedená rovnost platit. Strana a úhlopříčka pravidelného pětiúhelníka jsou tedy nesouměřitelné.

Obdobnou úvahu, dokonce o něco jednodušší, můžeme provést i pro čtverec.



obr. 33

Uvažujme čtverec $ABCD$; na přímce DC nechť je dán bod E takový, že $CD = CE$ (viz obr. 33). Předpokládejme, že strana a úhlopříčka čtverce jsou souměřitelné, tj. existuje úsečka m taková, že strana AB je a-násobkem a úhlopříčka AC u-násobkem úsečky m. Předpokládejme dále, že je úsečka m zvolena co největší, tj. čísla a a u nejsou obě sudá.

Z podobnosti trojúhelníků ABC a DBE vyplývá následující rovnost:

$$a : u = u : 2a .$$

Nyní mohou nastat tři případy:

a) čísla a a u jsou lichá,
b) číslo a je sudé a číslo u je liché,
c) číslo a je liché a číslo u je sudé.

V žádném případě však uvedená rovnost platit nemůže. A to je spor, který jsme potřebovali.

K objevu nesouměřitelnosti úseček tedy vedla buď Pýthagorova věta nebo podobnost. Oba tyto poznatky jsou v 6. stol. př. Kr. v Řecku prokazatelně dobře známé a užívané. Rovněž problematika čtvercových čísel, pýthagorejských trojic, či poměrů a úměr, sudých a lichých čísel byla v centru pozornosti tehdejších matematiků a je pravděpodobné, že byla při objevu nesouměřitelnosti a při jejím hlubším pochopení užita.

Není podstatné, zda byla dříve objevena nesouměřitelnost strany a úhlopříčky čtverce či pětiúhelníka. Je možno se oprávněně domnívat, že mezi těmito dvěma objevy nebyl prakticky žádný časový rozdíl. Byla-li nesouměřitelnost úseček objevena u některého geometrického objektu, jistě bylo přirozenou otázkou zjistit, u jakých dalších objektů tento jev nastává.

Je pravděpodobné, že při úvahách o nesouměřitelnosti hrály určitou roli i úměry a matematický popis tónů.

Zcela přirozeným problémem je totiž hledání střední geometrické úměrné čísel 1 a 2 - základních kamenů všech (přirozených) čísel a všech sudých čísel, tj. hledání veličiny x, pro kterou je $1 : x = x : 2$. Víme, že řešením je $x = \sqrt{2}$.

Viděli jsme, že k danému tónu získáme oktávu tak, že „vezmeme kvartu z kvinty“ nebo „kvintu z kvarty“; platí totiž rovnost $\frac{1}{2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}$. Marně však hledáme tón, který by s daným tónem ladil a který by byl určen poměrem $p : q$, jehož „dvojím aplikováním“ bychom získali oktávu; rovnost $\frac{1}{2} = \frac{p}{q} \cdot \frac{p}{q}$ je totiž ekvivalentní se vztahem $q^2 = 2p^2$.

Odkazujeme čtenáře na zajímavé partie v knížkách [72], str. 85–89, a [84], str. 41–44.

12. První krize matematiky

Objev nesouměřitelnosti úseček byl pro pýthagorejce patrně velkým překvapením. Ukázalo se, že svět geometrických veličin (reprezentovaných délkami úseček) je bohatší než svět čísel (přirozených a kladných racionálních). Je možné, že tento objev nejprve tajili. Legendy o smrti Hippase z Metapontu (5. stol. př. Kr.), který byl za prozrazení objevu nesouměřitelnosti bohy potrestán, by tomu nasvědčovaly. Pravděpodobnější je, že tajili i jiné své výsledky, jak se také často uvádělo. Údiv byl však možná provázen určitým zděšením.

Uveďme na tomto místě jeden citát z Aristotela:

Všichni totiž, jak jsme řekli, začínají tím, že se diví, jestliže se věc skutečně má tak a tak ... ať se to týká obratů slunce anebo nezměřitelnosti úhlopříčky; neboť každému se zdá podivné, že by se něco nedalo měřit měrnou jednotkou. Ale nakonec se podle přísloví všechno obrátí v opak a k lepšímu; a tak je tomu i tu, když se správně poučil. Vždyť znalec geometrie ničemu by se tak nepodivil, než kdyby se úhlopříčka čtverce dala změřit stranami. ([1], str. 39, 983a)

Zjištění, že některé úsečky nemají společnou míru, způsobilo zhroucení původní pýthagorejské představy o vzájemném vztahu čísel a geometrických veličin. Často se uvádí, že došlo k tzv. první krizi matematiky (francouzský matematik a historik matematiky P. Tannery, který žil v letech 1843–1904). Byly totiž postiženy *základy* prakticky celé tehdejší matematiky.

(Druhou krizi matematiky způsobilo příliš benevolentní zacházení s nekonečně malými veličinami a s nekonečnem vůbec; tato krize byla překonána v 19. století postupným zpřesňováním základů matematické analýzy (tzv. aritmetizace analýzy). Třetí krize matematiky byla způsobena objevem antinomií teorie množin na přelomu 19. a 20. století; částečně byla překonána přísnějšími požadavky na budování axiomatických teorií, do jisté míry však trvá dodnes.)

Pro nesouměřitelnost měla řečtina tři výrazy: *asymetron* (neexistuje společná míra), *areton* (nelze vyjádřit v celých číslech), *alogon* (nedá se vyjádřit logem, tj. poměrem; slovo logos však mělo řadu dalších významů). Latinsky je poměr *ratio*, odtud iracionalita, iracionální číslo.

Objev nesouměřitelnosti úseček byl pro matematiku obrovskou inspirací. Začaly být studovány tzv. *iracionality*, tj. veličiny, které nebyly souměřitelné s danou základní veličinou, jednotkovou úsečkou. Již v 5. stol. př. Kr. ukázal Theodóros z Kyrény, snad žák Pýthagora, že odmocniny z čísel $3, 5, \cdots, 17$, která nejsou čtvercová, nejsou racionální. S podobným výsledkem přišel Archytás (428?–365); tvrdil, že druhá odmocnina z obdélníkových čísel tvaru $n(n+1)$ není racionální. Theaitétos (414?–369), žák Theodóra, se iracionalitami zabýval podrobněji. Provedl jejich klasifikaci, tj. vymezil některé jejich typy. Jeho výsledky se později objevily v desáté knize Eukleidových *Základů*.

Jiným směrem se vydal Eudoxos (408?–355?), žák Archyta, matematik a astronom, autor tzv. *exhaustivní metody* (viz XII. kniha Eukleidových *Základů*) a snad první matematické teorie pohybu planet. Vypracoval nápaditou *teorii proporcí*, která jakýmsi způsobem „suplovala" teorii reálných čísel; Eudoxovy pozoruhodné myšlenky předjímaly teorii řezů německého matematika R. Dedekinda (1831–1916). Teprve po rozpracování Eudoxovy teorie proporcí bylo možno rozumně pracovat se „spojitými" veličinami, vyšetřovat v plné obecnosti podobnost geometrických útvarů atd.

Eudoxova teorie proporcí je zpracována v páté knize Eukleidových *Základů*, její aplikace jsou v knize šesté.

Iracionalitami ani teorií proporcí se v tomto článku podrobně zabývat nebudeme. Větší pozornost budeme věnovat rozvoji *řecké geometrické algebry*, která (spolu s teorií proporcí) znamenala východisko z krize způsobené objevem nesouměřitelnosti úseček.

13. Řecká geometrická algebra

Hlavním východiskem z krize se stala tzv. řecká geometrická algebra. Znamenala přechod od aritmetického chápání veličin ke geometrickému. Veličiny přestaly být vnímány jako přirozená či racionální čísla (poměry přirozených čísel). Začaly být chápány jako délky, obsahy a objemy. Za svět veličin byl přijat svět veličin geometrických. Přitom některé tyto veličiny nebylo možno vyjádřit čísly (přirozenými a kladnými racionálními, tj. poměry čísel přirozených); záviselo samozřejmě na volbě délky jednotkové úsečky. Je-li zvolena, je možno pomocí přirozených a racionálních čísel „změřit" jen některé úsečky.

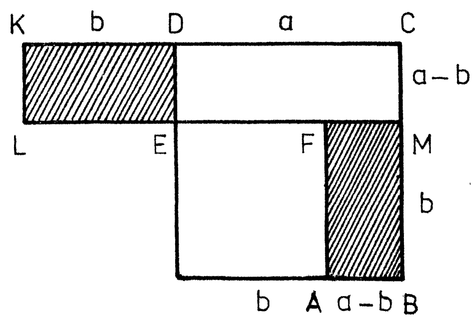
Součástí tohoto přístupu byl i tzv. *zákon homogenity*: sčítat (a odčítat) bylo možno jen veličiny stejného „rozměru" - délky s délkami, obsahy s obsahy, objemy s objemy; součinem délky s délkou byl obsah, součinem obsahu s délkou byl objem apod.

Pomocí geometrické algebry je možno vyjádřit řadu matematických vztahů, na které dnes nahlížíme ryze algebraicky. V souvislosti s Pýthagorovou větou jsme již viděli geometrické vyjádření vzorce

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \ .$$

Podobným způsobem je možno vyjádřit i vzorec

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \ .$$



obr. 34

Jednoduše můžeme „zviditelnit" i rovnost

$$a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b) \ ;$$

na obr. 34 je třeba přetvořit gnómon $ABCDEF$ o obsahu $a^2 - b^2$ v obdélník $KLMC$ o obsahu $(a+b)(a-b)$: přeneseme jen obdélník $ABMF$ na místo $KLED$.

Geometricky můžeme znázornit např. i vzorce

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \qquad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Pro jejich ztvárnění existují pomůcky - stavebnicové modely.

Poznamenejme, že v Eukleidových *Základech* je řada vět (např. začátek druhé knihy), které reprezentují charakter řecké geometrické algebry; přeložíme-li je do algebraické řeči, dostaneme jednoduché identity či jiné matematické výsledky, které dobře známe, ale jejich možný geometrický význam si většinou vůbec neuvědomujeme.

Nyní si ukažme, jak je možno pomocí řecké geometrické algebry řešit úlohy, které dnes zapisujeme a řešíme algebraicky. Uvažujme následující typy algebraických rovnic:

a) $ax = b^2$,

b) $x^2 = ab$,

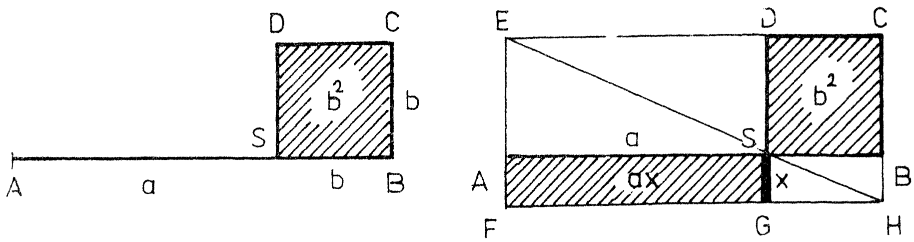
c) $ax - x^2 = b^2$,

d) $ax + x^2 = b^2$,

e) $x^2 - ax = b^2$.

Nejprve si uvědomme, že ve všech rovnicích je zachován zákon homogenity. Povšimněme si i toho, že uvedenými typy kvadratických rovnic jsou z tehdejšího pohledu reprezentovány všechny kvadratické rovnice. Řekové totiž neznali záporná čísla; veličiny a, b a x zde představují kladné veličiny - délky úseček.

a) Lineární rovnice $ax = b^2$ představuje tuto geometrickou úlohu: hledáme obdélník s jednou stranou a, jehož obsah je roven obsahu daného čtverce o straně b. Popíšeme geometrické „řešení“ (viz obr. 35). K úsečce $AS = a$ „přiložíme“ čtverec $SBCD$ o straně b a vzniklý obrázek doplníme zřejmým způsobem na obdélník $CEFH$:



obr. 35

Úhlopříčka EH půlí obdélník $CEFH$, ale i obdélníky $ASDE$ a $GHBS$. Proto je obsah obdélníka $FGSA$ roven obsahu čtverce $SBCD$ a tedy $SG = x$. Hledanou úsečku x jsme tedy sestrojili. Poznamenejme, že úplně stejně by se „řešila“ rovnice $ax = bc$.

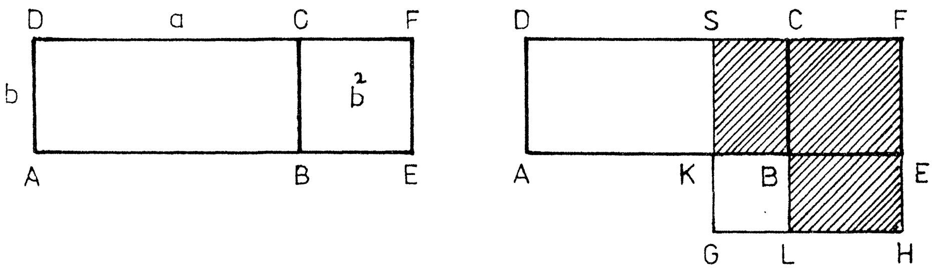
Dnes bychom tuto úlohu geometricky řešili nejspíše použitím Eukleidovy věty o odvěsně.

Ve 43. ročníku Matematické olympiády (školní rok 1993/1994) byl zadán příklad, který je možno řešit obdobným způsobem - mírnou modifikací obr. 35 (příklad Z 8, 9–I–2; podobné příklady Z 7–I–2 a Z 6–I–3).

Představ si, že na papíře je narýsován trojúhelník a úsečka. Napiš postup, jak se z tohoto trojúhelníka dá narýsovat rovnoramenný trojúhelník se stejným obsahem a s jednou stranou shodnou s danou úsečkou. Postup se musí hodit na každý trojúhelník a na každou úsečku.

Rozmyslete si, jak tuto úlohu řešit s využitím idejí řecké geometrické algebry.

b) Rovnice $x^2 = ab$ reprezentuje tuto geometrickou úlohu: najděte čtverec, který má stejný obsah jako daný obdélník. Hledaná úsečka x se sestrojí jako odvěsna pravoúhlého trojúhelníka s přeponou $\frac{a+b}{2}$ a druhou odvěsnou $\frac{a-b}{2}$. Jak na to přijdeme? Uvažujme obdélník $ABCD$ se stranami a, b a čtverec $BEFC$ o straně b (viz obr. 36).



obr. 36

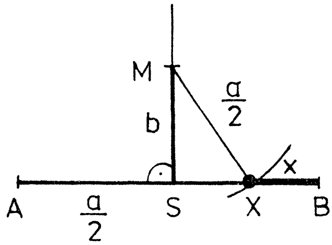
Nechť S je střed úsečky DF a $GHFS$ čtverec o straně $\frac{a+b}{2}$. Obdélníky $AKSD$ a $HFCL$ jsou shodné, jejich strany jsou $\frac{a+b}{2}$ a b . Přeneseme-li obdélník $AKSD$ na místo $HFCL$, zjistíme, že obsah vyšrafovaného gnómonu je roven obsahu obdélníku $ABCD$, tj. ab. Čtverec $GHFS$ o obsahu $(\frac{a+b}{2})^2$ je tedy rozdělen na čtverec $GLBK$ o obsahu $(\frac{a-b}{2})^2$ a gnómon o obsahu $x^2 = ab$; proto platí

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + x^2 .$$

Pomocí Pýthagorovy věty tedy můžeme sestrojit úsečku x a vyřešit tak úlohu o převedení obdélníka na čtverec.

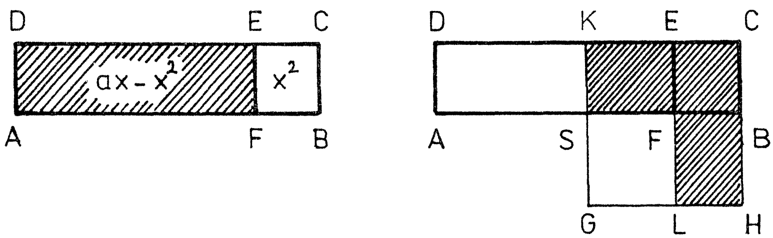
Pokud bychom dnes měli úlohu řešit geometricky, užili bychom patrně některou z Eukleidových vět.

c) Kvadratickou rovnici $ax - x^2 = b^2$, kde $b \leq \frac{a}{2}$, geometricky „řešíme" takto (viz obr. 37):



obr. 37

Narýsujeme úsečku $AB = a$, rozpůlíme ji, v půlícím bodě S sestrojíme kolmici a naneseme na ni úsečku $SM = b$. Sestrojíme kružnici se středem v bodě M o poloměru $\frac{a}{2}$. Jeden její průsečík s úsečkou AB označíme X . Úsečka BX je „kořenem" dané rovnice. Poznamenejme, že podmínka $b \leq \frac{a}{2}$ zaručuje existenci bodu X; uvědomme si, že jde o nezápornost diskriminantu uvažované rovnice. Postup, který jsme právě popsali, je odvozen z následující úvahy (viz obr. 38):



obr. 38

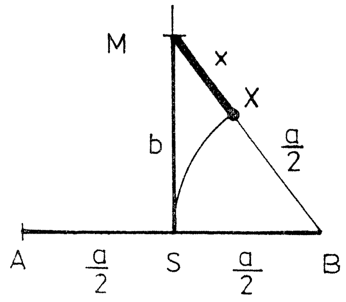
Výraz $ax - x^2$ znázorníme jako rozdíl obdélníka se stranami $AB = a$, $BC = x$ a čtverce $BCEF$ o straně x . Uvažujme čtverec $CKGH$, kde K je střed úsečky DC. Obdélníky $ASKD$ a $HCEL$ jsou shodné. Obsah vyšrafovaného gnómonu je proto roven obsahu obdélníka $AFED$, tj. $ax - x^2$. Čtverec $GHCK$ o obsahu $(\frac{a}{2})^2$ je rozdělen na čtverec $GLFS$ o obsahu $(\frac{a}{2} - x)^2$ a gnómon o obsahu $ax - x^2 = b^2$, tedy

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 + b^2 .$$

Touto rovností a Pýthagorovou větou se zdůvodňuje výše uvedená konstrukce. Poznamenejme, že druhým „kořenem" rovnice $ax - x^2 = b^2$ je úsečka AX (viz obr. 37).

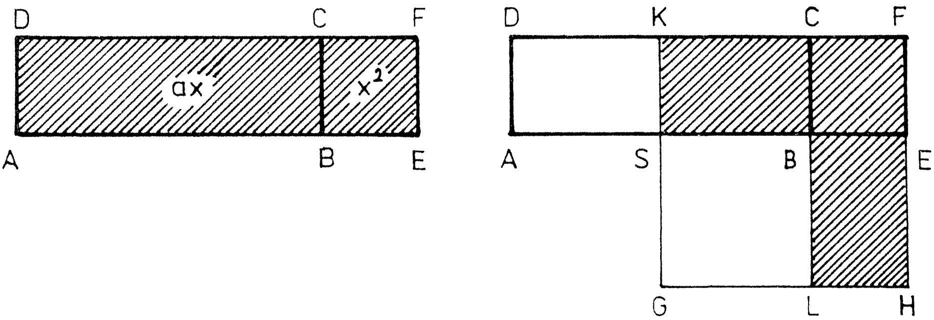
Úlohu bychom dnes geometricky řešili užitím Eukleidovy věty o výšce; stačí rovnici přepsat do tvaru $(a - x) \cdot x = b^2$.

d) Kvadratickou rovnici $ax + x^2 = b^2$ geometricky „řešíme“ takto (viz obr. 39).



obr. 39

Narýsujeme úsečku $AB = a$, rozpůlíme ji, v půlícím bodě S vztyčíme kolmici a naneseme na ni úsečku $SM = b$. Sestrojíme kružnici o středu B, která prochází bodem S; její průsečík s úsečkou MB označíme X. Úsečka MX je „kořenem“ uvažované rovnice. (Druhý „kořen“ je záporný, jeho absolutní hodnota je vyjádřena délkou $AB + MX$.) Popsaný postup je odvozen z následující úvahy (viz obr. 40).



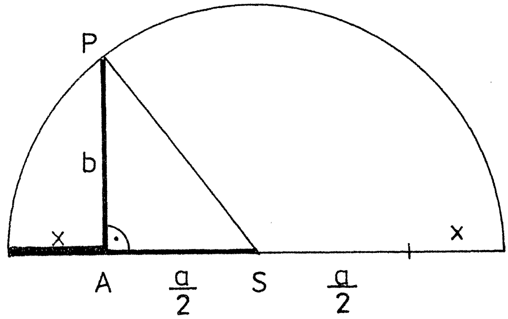
obr. 40

Výraz $ax + x^2$ je znázorněn jako součet obdélníka se stranami $AB = a$ a $BC = x$ a čtverce $BEFC$ o straně x . Uvažujme čtverec $GHFK$, kde K je střed úsečky CD. Obdélníky $ASKD$ a $HEBL$ jsou shodné. Obsah vyšrafovaného gnómonu je proto roven obsahu obdélníku $AEFD$, tedy $ax + x^2$. Čtverec $GHFK$ o obsahu $(\frac{a}{2} + x)^2$ je rozdělen na čtverec $GLBS$ o obsahu $(\frac{a}{2})^2$ a gnómon o obsahu $ax + x^2 = b^2$, tedy

$$\left(\frac{a}{2} + x\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2.$$

Touto rovností a Pýthagorovou větou se odůvodňuje výše uvedená konstrukce.

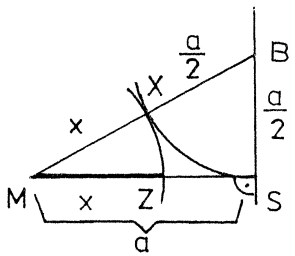
Úlohu bychom dnes geometricky řešili užitím Eukleidovy věty o výšce, stačí rovnici přepsat do tvaru $(a + x) \cdot x = b^2$ a trochu zapřemýšlet (viz obr. 41).



obr. 41

Geometrickým úvahám, kterými jsme v předchozích třech případech zdůvodňovali konstrukce, se říká *přikládání ploch*. V případě c) jde o tzv. eliptické, v případě d) o tzv. hyperbolické přikládání ploch. Slovo *elleipsis*, resp. *hyperbolé* znamenalo nedostatek, resp. přebytek. Obsah b^2 má totiž vůči obsahu ax v případě c) nedostatek x^2 a v případě d) přebytek x^2. V případě a), kdy je $ax = b^2$, nedochází ani k nedostatku ani k přebytku; hovoříme o parabolickém přikládání ploch - slovo *parabolé* znamenalo „přiložení“. Povšimněme si, že nahradíme-li v rovnicích c), d), a) písmeno b písmenem y, dostaneme rovnice elipsy, hyperboly a paraboly. První úvahy, které úzce s kuželosečkami souvisejí, prováděl Menaechmos (4. stol. př. Kr.); bude o tom řeč v dalším textu.

Výše uvedené úvahy jsou založeny jen na Pýthagorově větě, ačkoliv by jednodušeji vedla k cíli některá z vět Eukleidových. Je z toho možno usuzovat, že tyto úvahy byly prováděny ještě před objevem Eukleidových vět?

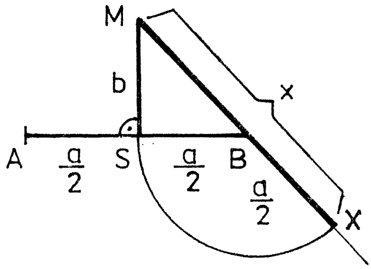


obr. 42

Jako příklad uvedeme konstrukci zlatého řezu. Jde o geometrické „řešení“ rovnice $ax + x^2 = a^2$, tj. rovnice typu d). Mějme tedy úsečku $MS = a$. Na kolmici vztyčenou v krajním bodě S úsečky MS (viz obr. 42) naneseme polovinu úsečky MS a získáme tak bod B. Sestrojíme kružnici o středu B, která prochází bodem S; její průsečík s úsečkou BM označíme X. Dále sestrojíme kružnici o středu M, která prochází bodem X; její průsečík s úsečkou MS označíme Z. Ten dělí úsečku MS v poměru zlatého řezu. Srovnejte obr. 39 a 42!

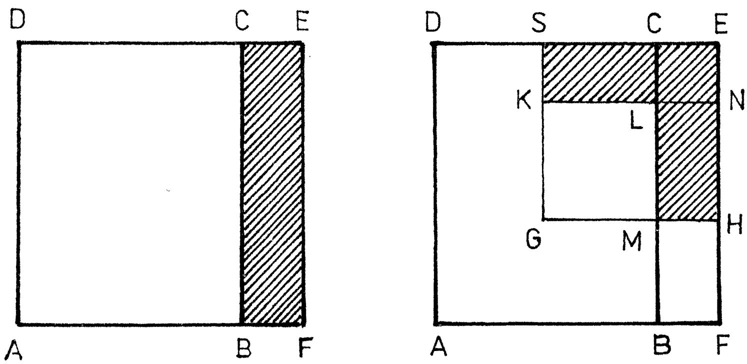
Umíme-li rozdělit úsečku v poměru zlatého řezu, umíme sestrojit pravidelný pětiúhelník. Podívejme se na obr. 30. Má-li být daná úsečka EC úhlopříčkou pravidelného pětiúhelníka, rozdělíme ji v poměru zlatého řezu, získáme bod S a délku strany pětiúhelníka. Nyní už snadno sestrojíme body A, B, D.

e) Podívejme se ještě na rovnici $x^2 - ax = b^2$ (viz obr. 43).



obr. 43

Narýsujme úsečku $AB = a$. V jejím středu S vztyčíme kolmici SM, kde $SM = b$. Sestrojíme kružnici o středu B, která prochází bodem S; její průsečík s opačnou polopřímkou k polopřímce BM označíme X. Úsečka MX je hledaným „kořenem" uvažované rovnice. Popsaný postup je odvozen z následující úvahy (viz obr. 44):



obr. 44

Výraz $x^2 - ax$ je znázorněn jako rozdíl čtverce $AFED$ o straně x a obdélníka $ABCD$ o stranách a a x. Uvažujme čtverec $ESGH$, kde S je střed úsečky DC; doplňme ještě úsečku KN rovnoběžnou s úsečkou SE tak, aby $FN = a$. Obdélníky $BFHM$ a $LCSK$ jsou shodné. Obsah vyšrafovaného gnómonu je proto roven obsahu obdélníka $BFEC$, tj. $x^2 - ax$. Čtverec $ESGH$ o obsahu $(x - \frac{a}{2})^2$ je rozdělen na čtverec $GMLK$ o obsahu $(\frac{a}{2})^2$ a gnómon o obsahu $x^2 - ax = b^2$, tedy

$$(x - \frac{a}{2})^2 = (\frac{a}{2})^2 + b^2.$$

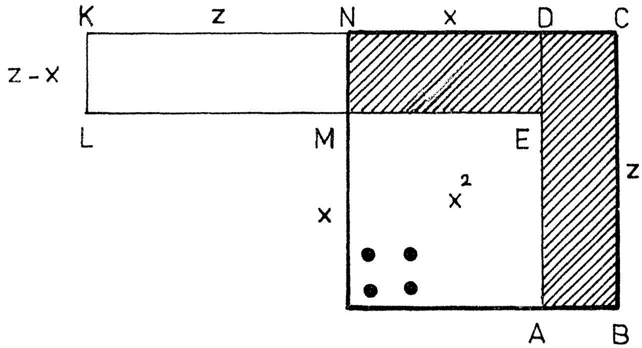
Tím je zdůvodněna výše uvedená konstrukce.

14. Popis všech pýthagorejských trojic

Vraťme se však ještě jednou k problematice pýthagorejských trojic. Využijme k jejich nalezení ideje geometrické algebry. Hledejme tedy nesoudělná přirozená čísla x, y, z, pro která je

$$x^2 + y^2 = z^2 \, .$$

Představme si opět x^2 jako čtvercové číslo, které je „částí“ čtvercového čísla z^2, a číslo y^2 jako gnómon, který čtvercové číslo x^2 doplňuje na čtvercové číslo z^2 (viz obr. 45).



obr. 45

Přenesme obdélník $ABCD$ na místo $KLMN$. Gnómon se „přetvořil“ v obdélník $KLED$ o stranách $z+x$ a $z-x$. Toto obdélníkové číslo je možno „přerovnat“ do čtvercového čísla právě tehdy, když čísla $z+x$ a $z-x$ mají tvar

$$z + x = s \cdot a^2, \qquad z - x = s \cdot b^2.$$

Odtud

$$z = s \cdot \frac{a^2 + b^2}{2}\,, \qquad x = s \cdot \frac{a^2 - b^2}{2}\,, \qquad y = s \cdot ab \, .$$

Je třeba pamatovat na to, že pracujeme s přirozenými čísly a že hledáme základní pýthagorejské trojice. Předpokládejme tedy, že jsou čísla a, b nesoudělná. Je-li jedno z nich sudé a druhé liché, volíme $s = 2$. Jsou-li obě lichá, volíme $s = 1$. Tím je popis všech pýthagorejských trojic dokončen.

Jiný způsob nalezení popisu všech pýthagorejských trojic najdeme v knize [84], str. 38–39.

15. Proslulé matematické problémy starověku

Třemi proslulými matematickými problémy starověku jsou míněny tyto úlohy:

a) kvadratura kruhu (lat. *quadratura circuli*),
b) zdvojení krychle (lat. *duplicatio cubi*),
c) trisekce úhlu (lat. *trisectio anguli*).

Kvadraturou kruhu rozumíme nalezení čtverce (přesněji strany tohoto čtverce), který má stejný obsah jako daný kruh. Obecněji můžeme hovořit o kvadratuře kruhové výseče nebo úseče, o kvadratuře elipsy či jakéhokoli plošného útvaru ohraničeného i křivými čarami.

Zdvojením krychle rozumíme nalezení krychle (přesněji hrany této krychle), jejíž objem je roven dvojnásobku objemu dané krychle. Někdy se hovoří o duplikaci nebo též o reduplikaci krychle.

Trisekcí úhlu rozumíme rozdělení daného úhlu na tři stejné části, tj. nalezení úhlu, jehož trojnásobkem je daný úhel.

Výraz „kvadratura kruhu" se stal okřídleným rčením, symbolem neřešitelné či obtížně řešitelné úlohy a je v tomto smyslu velmi často užíván i v denním tisku (MFD 8. 11. 1993: *Kvadratura kruhu polské privatizace*, MFD 19. 1. 1994: *Kryčerova kvadratura kruhu* apod.). Kdyby se okřídleným výrazem stala trisekce, mohli bychom se třeba dočíst, že dělení majetku ČSFR mezi Českou a Slovenskou republiku v poměru 2 : 1 je trisekcí úhlu. S trisekcí je prostě problém; existují monokiny, bikiny, ale neexistují trikiny, ač by vlastně měly být.

S úlohou o zdvojení krychle je spjata legenda, jejíž jednu verzi zde uvedeme.

Na ostrově Délos vypukla epidemie moru, obyvatelé umírali. Vypravili proto poselstvo do delfské věštírny s důležitým posláním: zjistit, jakým způsobem si naklonit bohy, aby mor pominul. Pýthie odpověděla, že je třeba zdvojit oltář boha Apollóna, který měl tvar krychle a byl ze zlata. Byla tedy odlita druhá zlatá krychle, stejně velká, a postavena na krychli první. Mor však trval. Poselstvo se opět vydalo do delfské věštírny. Dozvěděli se, že je třeba navíc zachovat tvar oltáře. Tuto úlohu však na ostrově Délos řešit neuměli. Obrátili se s prosbou o pomoc na Platóna. Ten jim však pravil: „Bohové se na vás hněvají, neboť se málo věnujete geometrii."

V duchu této legendy se o zdvojení krychle hovoří jako o *délském problému* či *délské úloze*. Jednu z verzí legendy podává Eutokios formou dopisu Eratosthena Ptolemaiovi v komentáři k Archimédovu pojednání *O kouli a válci*. Informuje i o řešeních, které podali Archimédes, Menaechmos a Eratosthenés.

Často jsou jako proslulé úlohy starověké matematiky uváděny ještě tyto dva problémy:

d) rektifikace kružnice,
e) konstrukce pravidelných n-úhelníků.

Rektifikací kružnice rozumíme nalezení úsečky, jejíž délka je rovna obvodu dané kružnice. Obecněji můžeme hovořit o rektifikaci kruhového oblouku či jakékoli křivé čáry.

Konstrukcí pravidelných n-úhelníků rozumíme nalezení postupů, které v konečně mnoha krocích vedou k sestrojení pravidelných n-úhelníků pro $n = 3, 4, 5, 6, 7, \cdots$.

Všechny tyto úlohy bylo třeba řešit *geometrickou konstrukcí* spočívající v sestrojení *konečného počtu přímek a kružnic*. Často se stručně a poměrně výstižně hovoří o *konstrukcích pravítkem a kružítkem* či o *eukleidovských konstrukcích*. Právě tímto způsobem je totiž budována geometrie v Eukleidových *Základech*.

Problematika související s proslulými matematickými úlohami starověku byla velice podnětná pro rozvoj matematického myšlení. Téměř dva a půl tisíce let tyto úlohy inspirovaly matematiky k nejrůznějším úvahám, teoriím a konstrukcím. Praktický význam však proslulé úlohy (spolu s požadovanou metodou řešení) neměly žádný. Pro praxi bohatě postačovalo vhodné přibližné řešení, které bylo dostatečně přesné.
Teprve v 19. století bylo dokázáno, že první čtyři úlohy jsou požadovanou metodou, tj. pravítkem a kružítkem, neřešitelné. Byla rovněž nalezena ekvivalentní podmínka pro existenci eukleidovských konstrukcí pravidelných n-úhelníků.

Poznamenejme, že na současných českých mincích máme sedmiúhelník na dvacetihaléři, jedenáctiúhelník na dvoukoruně a třináctiúhelník na dvacetikoruně. Autor těchto řádků je pevně přesvědčen o tom, že tyto mnohoúhelníky nebyly konstruovány pravítkem a kružítkem.

V následujícím textu se pokusíme objasnit, proč matematici ve starém Řecku došli právě k těmto úlohám a jakým způsobem dospěli k požadované metodě řešení, tj. ke konstrukcím pravítkem a kružítkem.

16. Operování s geometrickými veličinami

V původním pýthagorejském světě aritmetických veličin, tj. ve světě přirozených a kladných racionálních čísel, bylo možno bez problémů sčítat, odčítat (menší číslo od většího), násobit i dělit. Po pádu tohoto pojetí, který byl způsoben objevem nesouměřitelnosti úseček (první krize matematiky), přešli řečtí matematici ke geometrickému chápání veličin.

Veličinami se staly délky, obsahy a objemy a na scénu vstoupil zákon homogenity. Jedním z prvních úkolů řeckých matematiků bylo naučit se s geometrickými veličinami operovat. Délky, obsahy a objemy je přirozené reprezentovat úsečkami, čtverci a krychlemi. Úsečky, čtverce i krychle jsou totiž určeny jen *jedinou* délkovou veličinou (princip minimalizace!); čtverec, resp. krychle je „součinem“ dvou, resp. tří exemplářů téže úsečky; strany čtverce, resp. hrany krychle jsou navzájem kolmé. Všechny úsečky, čtverce i krychle jsou navzájem podobné. Rovinu je možno pokrýt čtverci, prostor vyplnit krychlemi; právě díky tomuto pohledu vnímáme přirozeným způsobem vzorce pro výpočet obsahů a objemů rovinných i prostorových objektů. Tento pohled byl jistě dán i tradicí egyptské a babylónské matematiky, kde byly obsahy a objemy jednoduchých geometrických objektů právě takto chápány a kde byly počítány podle algoritmů, které našim vzorcům odpovídají.

a) Délky

Bez jakýchkoli problémů sestrojíme součet a rozdíl dvou úseček a n-násobek dané úsečky. Rovněž snadno rozdělíme danou úsečku na n stejných částí (tuto konstrukci známe ze základní školy). Abychom mohli podobným způsobem operovat s křivými čarami, musíme je umět nahradit stejně dlouhými úsečkami. A v tomto okamžiku se na prvním místě objevuje problém rektifikace kružnice - nejjednodušší a nejznámější křivé čáry.

b) Obsahy

Již víme, že není problém sečíst dva stejné čtverce, tj. sestrojit čtverec, který má ve srovnání s daným čtvercem dvojnásobný obsah (viz Platónův dialog *Menón*). Pomocí Pýthagorovy věty umíme sestrojit i součet či rozdíl dvou nestejných čtverců. V odstavci o geometrické algebře jsme viděli, že je možno přetvořit libovolný obdélník na čtverec stejného obsahu. To znamená, že umíme sestrojit i čtverec, jehož obsah je roven n-násobku obsahu daného čtverce, a rovněž umíme sestrojit čtverec, jehož obsah je roven jedné n-tině obsahu daného čtverce.

Dále je možno elementárním způsobem převést trojúhelník na obdélník a tedy i na čtverec stejného obsahu. Každý mnohoúhelník tedy umíme převést na čtverec se stejným obsahem. (Poznamenejme, že libovolný n-úhelník můžeme přetvořit na $(n-1)$-úhelník stejného obsahu tak, že jeden jeho vrchol vhodně posuneme po rovnoběžce s úhlopříčkou spojující sousední vrcholy. Nakreslete si obrázek!)

Rovinné útvary ohraničené úsečkami tedy umíme nahradit čtverci a operovat s nimi. Abychom mohli podobným způsobem operovat i s rovinnými útvary ohraničenými křivými čarami, musíme je umět nahradit čtverci. V tomto okamžiku se na prvním místě objevuje problém kvadratury kruhu - nejjednoduššího a nejznámějšího křivočarého rovinného objektu.

c) Objemy

Při operování s objemy se objevuje nesnáz již při hledání součtu dvou stejných krychlí; jde o problém zdvojení krychle.

Kromě délek, obsahů a objemů je přirozené uvažovat i o velikostech úhlů.

d) Úhly

Bez problémů sestrojíme součet a rozdíl dvou úhlů a n-násobek daného úhlu. Rovněž umíme rozdělit úhel na dvě stejné části - tato konstrukce odpovídá sestrojení osy úsečky. Jak se však provede rozdělení úhlu na n stejných částí pro $n > 2$? Pro nejmenší n, tj. pro $n = 3$, jde o problém trisekce úhlu. Uvažujeme-li rozdělení plného úhlu na n stejných částí, docházíme k problému konstrukce pravidelných n-úhelníků.

Poznamenejme, že operování s úhly by bylo možno zahrnout do problematiky operování s délkami, neboť úhly je možno přirozeným způsobem měřit délkami oblouků, které vytínají na kružnici nějakého pevně zvoleného poloměru.

Viděli jsme tedy, že pokud chtěli řečtí matematici operovat s geometrickými veličinami - délkami, obsahy a objemy reprezentovanými úsečkami, čtverci a krychlemi - museli dojít k problematice pěti proslulých úloh.

17. Souvislosti

Uveďme nyní několik poznámek o souvislosti rektifikace, kvadratury a konstrukce pravidelných n-úhelníků.

Nejstarším „kružítkem“ byl patrně provaz a dva kolíky. Změření „délky“ kružnice je možno prakticky provést tak, že do „rýhy“ kružnice položíme provaz, pak ho natáhneme a změříme. Pro „zpevnění“ provazu položeného do rýhy kružnice je možno podél obvodu kružnice zatlouci větší množství kolíků; napnutím provazu pak „vznikne“ n-úhelník.

K měření obvodu kružnice je možno použít i měřící tyč jednotkové délky, kterou „klademe podél obvodu kružnice“. Opět se zde přirozeným způsobem objevuje myšlenka n-úhelníka kružnici vepsaného (či opsaného).

Takovéto praktické postupy zřejmě inspirovaly řecké myslitele i k teoretickému zjišťování obvodu kružnice a obsahu kruhu počítáním obvodu a obsahu vepsaných a opsaných n-úhelníků. Do přirozené souvislosti je tak dána kvadratura, rektifikace a konstrukce pravidelných n-úhelníků a dělení plného úhlu na n stejných částí.

Uveďme ještě souvislost problematiky proslulých úloh s pýthagorejskými úměrami.

Nalezení střední geometrické úměrné veličin a, b znamená nalezení veličiny x, pro kterou

$$a : x = x : b\ , \quad \text{tj.} \quad x^2 = ab\ .$$

To není nic jiného, než převedení obdélníku se stranami a, b na čtverec stejného obsahu o straně x. S touto úlohou jsme se již setkali v odstavci o geometrické algebře. Položíme-li $b = 2a$, dojdeme ke vztahu

$$a : x = x : 2a\ , \quad \text{tj.} \quad x^2 = 2a^2\ ,$$

který odpovídá úloze o zdvojení čtverce.

Uveďme nyní pro zajímavost krátký citát z Aristotelovy *Metafysiky*, který se tohoto tématu týká:

A tak i v ostatních oborech míníme, že o každé věci, i když pro ni máme důkazy, máme vědění, víme-li, co jest, na příklad, co jest proměna obdélníku v čtverec; že je to totiž nalezení střední geometricky úměrné. ([1], str. 76)

Uvažujme nyní o vložení *dvou* veličin x, y mezi dvě dané veličiny a, b, tj. o vztahu $a : x = x : y = y : b$. Snadno zjistíme, že

$$x^2 = ay\ , \qquad y^2 = xb\ .$$

odkud

$$x^4 = a^2y^2 = a^2xb\ , \qquad y^4 = x^2b^2 = ayb^2\ ,$$

tj.

$$x = \sqrt[3]{a^2b}\ , \qquad y = \sqrt[3]{ab^2}\ .$$

Položíme-li $b = 2a$, dojdeme ke vztahu $x^3 = 2a^3$, který odpovídá úloze o zdvojení krychle.

18. Konstrukce pravítkem a kružítkem

Popišme nyní podrobněji a přesněji, co rozumíme slovním spojením *konstrukce pravítkem a kružítkem.* V Eukleidových *Základech* je to formulováno v tzv. *postulátech.* Uvedeme je v překladu Františka Servíta (viz [20], str. 2).

Úkoly prvotné.

1. Budiž úkolem od kteréhokoli bodu ke kterémukoli bodu vésti přímku.

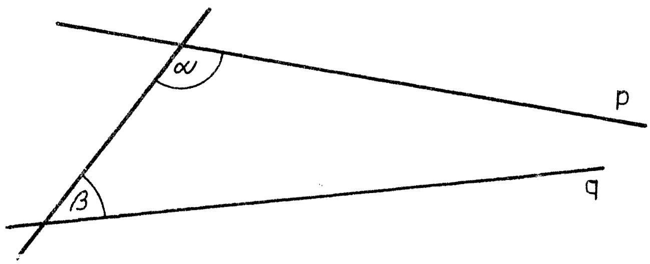
2. A přímku omezenou nepřetržitě rovně prodloužiti.

3. A z jakéhokoli středu a jakýmkoli poloměrem narýsovati kruh.

4. A že všecky pravé úhly sobě rovny jsou.

5. A když přímka protínajíc dvě přímky tvoří na téže straně vnitřní (přilehlé) úhly menší dvou pravých, ty dvě přímky prodlouženy jsouce do nekonečna že se sbíhají na té straně, kde jsou úhly menší dvou pravých.

První a druhý postulát popisuje „užití pravítka". Poznamenejme, že *přímkou* rozuměli Řekové jen „část" přímky, spíše úsečku; proto se ve druhém postulátu hovoří o „prodlužování" přímky. Třetí postulát popisuje „užití kružítka".



obr. 46

Pátý postulát se týká situace znázorněné na obr. 46. Tvrdí, že jestliže je součet úhlů α a β *menší dvou pravých*, pak se přímky p, q protínají v té polorovině, která je těmito dvěma úhly „určena". Nedejme se zmýlit výrazy *prodlouženy jsouce do nekonečna* a *sbíhají se.* O „prodlužování" se mluví v duchu druhého postulátu; „sbíháním" není míněno nějaké asymptotické přibližování, ale to, že se přímky protnou.

Čtvrtý postulát o pravých úhlech byl pravděpodobně přidán dodatečně; patrně proto, že se v pátém postulátu o pravých úhlech hovoří.

Eukleidovy postuláty byly později chápány jako axiómy, tj. jako jednoduchá výchozí tvrzení, ze kterých se deduktivním způsobem odvozují další geometrické poznatky, věty, celá tzv. eukleidovská geometrie. Eukleidovy *Základy* se staly vzorem budování *axiomatické teorie.*

Poznamenejme, že během více než dvou tisíciletí se matematici pokoušeli dokázat pátý postulát z postulátů ostatních. Tyto snahy byly v 19. století ukončeny objevem neeukleidovské geometrie. To je však už jiná historie.

Eukleidovy postuláty přitahovaly pozornost nejen matematiků, ale i filozofů. Např. Thomas Hobbes ve svém díle *O tělese* z roku 1655 píše:

... to co se nazývá postuláty a požadavky, jsou sice skutečné principy, ale ne principy důkazu, nýbrž sestrojování, to jest ne vědy, nýbrž dovednosti: čili nejsou to principy teoretických tvrzení, což jsou výsledky spekulací, nýbrž otázek vztahujících se k praxi a uskutečnění nějakého díla. ([32], str. 57)

Budování geometrického světa „pravítkem a kružítkem" koresponduje do značné míry s principy, které se objevily v řecké filozofii v 6. stol. př. Kr. *Základními prvky* jsou body – nic menšího a fundamentálnějšího než bod být nemůže. *Základními principy*, podle kterých je geometrický svět ze základních prvků – bodů vytvářen, jsou konstrukce pravítkem a kružítkem. I zde je cítit jakousi *snahu po minimalizaci*; uvažují se jen objekty (přímky a kružnice) „určené" dvěma body.

Z jednoho bodu nelze nic vytvořit, jeden bod je málo.

Ze dvou bodů je už možno vytvořit úsečku či přímku; jak už jsme si řekli, v řecké matematice neodpovídá pojem přímky naší dnešní představě – hovoří se o přímce, kterou je možno neomezeně prodlužovat. Ze dvou bodů je však možno vytvořit i kružnici; stačí jeden z nich prohlásit za střed a druhý za bod „na obvodu". Přitom přímku i kružnici je možno sestrojit „jediným úkonem". Žádný další geometrický objekt určený dvěma body není asi rozumné považovat za základní.

Tři body určují rovinu, v které se toto všechno děje; tři body jako východisko pro vytvoření nového objektu „jsou mnoho".

V moderním pojetí můžeme geometrické konstrukce pravítkem a kružítkem charakterizovat takto (*syntetická formulace*):

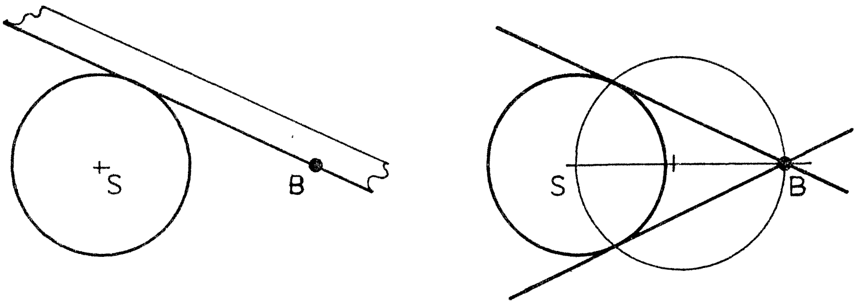
Jsou dány body $C_1, \cdots, C_m$. Další bod můžeme získat (sestrojit) jako průsečík

- dvou přímek, které jsou určeny danými body (např. průsečík přímek C_1C_2 a C_3C_4) ;
- dvou kružnic, které jsou určeny danými body (např. průsečík kružnice se středem v bodě C_1 a poloměrem C_1C_2 a kružnice se středem C_3 a poloměrem C_3C_4) ;
- přímky a kružnice, které jsou určeny danými body (např. průsečík přímky C_1C_2 a kružnice se středem C_3 a poloměrem C_3C_4).

Těchto kroků můžeme udělat jen *konečně mnoho*. Při každém kroku můžeme použít kterýkoli z bodů, které jsme sestrojili v předchozích krocích.

Máme-li bodem B, který leží vně kružnice k se středem S, vést ke kružnici k tečnu, nelze to provést jen „přiložením" pravítka, neboť neznáme bod dotyku (viz obr. 47 a). Je třeba sestrojit střed úsečky SB a Thalétovu kružnici s průměrem SB; průsečíky obou kružnic jsou hledané body dotyku (viz obr. 47 b). Ty už je možno spojit s bodem B. (Hledané tečny je možno eukleidovsky sestrojit i jiným způsobem, např. užitím osové souměrnosti.)

Laskavý čtenář si může rozmyslet, jak se např. k dané přímce pravítkem a kružítkem sestrojí rovnoběžka procházející daným bodem.



obr. 47 a, b

Poznamenejme, že se v geometrii (ve škole i v praxi) velmi často používají postupy, které eukleidovské nejsou; často si to ani neuvědomujeme. Např. sestrojení kolmice k dané přímce pomocí rysky na trojúhelníku, sestrojení rovnoběžky posunutím jednoho trojúhelníku podél druhého apod. Tyto dva postupy však „suplují“ eukleidovskou konstrukci pravítkem a kružítkem. Studenty je dobré na to upozornit; i když tyto metody běžně užívají, měli by znát i odpovídající klasické eukleidovské konstrukce.

Požadavky, které jsou obsaženy ve výrazu *eukleidovské konstrukce* resp. *konstrukce pravítkem a kružítkem*, nemají pro praxi žádný význam. Z praktického hlediska vyhovuje dostatečně přesné přibližné řešení; navíc je lhostejné, jakým způsobem bylo výsledku dosaženo, zda pomocí konstrukce pravítkem a kružítkem nebo jinak. Narýsujeme-li pozorně tečnu ke kružnici tak, jak je naznačeno na obr. 47 a, můžeme být s výsledkem naprosto spokojeni; v řadě případů takto získáme dokonce přesnější výsledek než eukleidovskou konstrukcí.

Pravítkem a kružítkem jsou myšleny *ideální nástroje*. Pravítko je absolutně rovné, není na něm žádné měřítko, tj. nelze podle něj měřit, nanášet stejně dlouhé úsečky apod., a má jen jednu „použitelnou“ hranu, tj. nelze podle něj „dělat“ rovnoběžky. Také kružítko je absolutně přesné, má neomezené rozevření, tj. je možno jím sestrojovat jakkoli velké kružnice.

To, co v geometrii provádíme pravítkem a kružítkem na papíře a na tabuli, je jen jakýmsi modelem ideálního světa absolutně přesných geometrických objektů. Veškeré konstrukce se v tomto světě provádějí jen v myšlenkách. Geometrické znázornění na papíře a na tabuli však velmi dobře napomáhá našim představám a našemu geometrickému bádání.

Na myšlence konstrukcí pravítkem a kružítkem jsou založeny celé Eukleidovy *Základy*; toto dílo výrazně ovlivnilo geometrii více než dvou tisíciletí. To, co známe ze školské geometrie, je jen jejich malá část. Nebudeme zde vypočítávat, co všechno *Základy* obsahují. Poznamenejme jen pro zajímavost, že vrcholí studiem pravidelných mnohostěnů, metodami jejich konstrukcí a důkazem, že pravidelných těles nemůže být více než pět.

19. Neklasická řešení klasických úloh

Řečtí matematici považovali problematiku proslulých úloh za velmi závažnou. Můžeme to dokumentovat zájmem, který tyto úlohy poutaly.

První dochované zmínky se týkají kvadratury kruhu. Vztahují se k 5. století př. Kr.

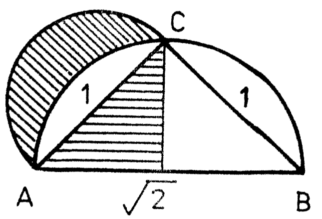
Filozof Anaxagorás z Klazomen, o kterém jsme se již zmiňovali, si prý úvahami o kvadratuře kruhu krátil dlouhou chvíli ve vězení (viz [85], str. 111), kam se dostal proto, že rouhavými řečmi kazil mládež. (Tento článek je určen i těm, kdo v budoucnu hodlají kazit mládež rouhavými řečmi; dostanou-li se do vězení, měli by vědět, že problém kvadratury kruhu je pravítkem a kružítkem neřešitelný, a trávit čas vhodnějším způsobem.)

Antifón z Athén prý počítal obsah kruhu pomocí vepsaných pravidelných n-úhelníků (bral $n = 4, 8, 16$).

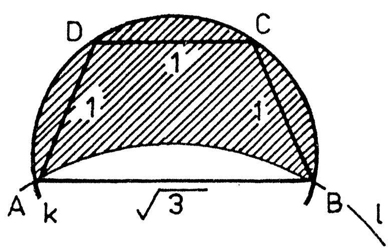
Eukleidovské konstrukce vedoucí k řešení proslulých úloh se nedařilo nalézt. Byly proto hledány i jiné postupy; někdy hovoříme o *neklasických řešeních*, i když to není plně vystihující termín.

a) Hippokratés

Hippokratés z Chiu (2. pol. 5. stol. př. Kr.) byl jónský filozof a matematik, který učil v Athénách. Sepsal matematické pojednání *Stoicheia*, které se prý stalo vzorem (co do obsahu i metody výkladu) prvních čtyř knih Eukleidova stejně nazvaného spisu. Z Hippokratova díla se zachoval jen fragment, který pojednává o tzv. měsíčkách (*Hippokratovy měsíčky* nebo *menisky*). Jsou to útvary vytvořené dvěma kruhovými oblouky. (Nezaměňujme matematika a filozofa Hippokrata z Chiu se slavným lékařem stejného jména, který žil zhruba ve stejné době, asi v létech 460–400.)



obr. 48



obr. 49

Hippokratés tvrdil, že

α) poměr obsahů dvou kruhů je roven poměru obsahů čtverců sestrojených nad jejich průměry;

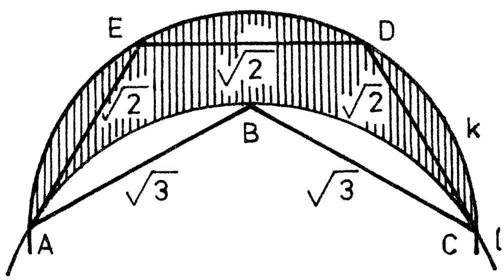
β) poměr obsahů dvou *podobných* kruhových úsečí je roven poměru obsahů čtverců sestrojených nad tětivami, kterými jsou tyto úseče určeny.

Na základě těchto zjištění Hippokratés dokázal následující věty:

(i) Obsah měsíčku vytvořeného kružnicí opsanou rovnoramennému pravoúhlému trojúhelníku ABC (např. se stranami, jejichž délky jsou 1, 1, $\sqrt{2}$) a kružnicí, jejímž průměrem je odvěsna AC, je roven polovině obsahu uvažovaného trojúhelníka ABC (viz obr. 48).

(ii) Obsah měsíčku vytvořeného kružnicí k, která je opsána rovnoramennému lichoběžníku $ABCD$, jehož strany mají délky 1, 1, 1, $\sqrt{3}$, a kružnicí l, ze které strana AB vytíná úseč *podobnou* třem úsečím kružnice k s tětivami AD, DC, CB, je roven obsahu uvažovaného lichoběžníka $ABCD$ (viz obr. 49).

(iii) Obsah měsíčku vytvořeného kružnicí k, která je „opsána" nekonvexnímu osově souměrnému pětiúhelníku $ABCDE$, jehož strany mají délky $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$, a kružnicí l, na které strany AB a BC vytínají úseče *podobné* třem úsečím kružnice k s tětivami AE, ED a DC, je roven obsahu uvažovaného pětiúhelníka $ABCDE$ (viz obr. 50).



obr. 50

Důkazy těchto tří tvrzení jsou jednoduché; spočívají na výše uvedených Hippokratových zjištěních α), β).

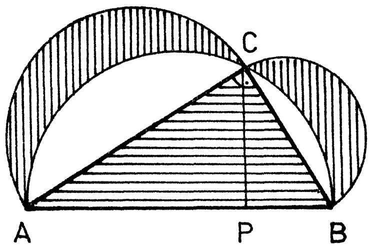
(i) Obsah velkého půlkruhu (nad průměrem AB) je roven dvojnásobku obsahu malého půlkruhu (nad průměrem AC), neboť délky odpovídajících průměrů jsou v poměru $\sqrt{2} : 1$. Obsah velkého čtvrtkruhu je tedy roven obsahu malého půlkruhu. Odebereme-li od obou těchto útvarů jejich společnou část - úseč nad úsečkou AC, dostaneme rovnost obsahů z tvrzení (i) – viz obr. 48.

(ii) Obsah velké úseče (nad stranou délky $\sqrt{3}$) je roven trojnásobku obsahu malé úseče (nad stranou délky 1). Uvažovaný měsíček vznikne, když k lichoběžníku $ABCD$ přidáme tři malé úseče a odebereme jednu úseč velkou. Obsah lichoběžníka je tedy roven obsahu vzniklého měsíčku (obr. 49).

(iii) Obsah dvou větších úsečí (nad stranami AB a BC, jejichž délka je $\sqrt{3}$) je roven obsahu tří menších úsečí (nad stranami AE, ED, DC, jejichž délka je $\sqrt{2}$). Uvažovaný měsíček vznikne, když k pětiúhelníku $ABCDE$ přidáme tři menší úseče a odebereme dvě větší (obr. 50).

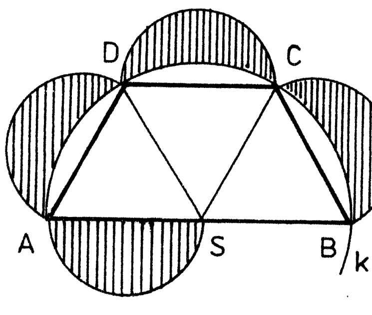
Geometrická konstrukce měsíčků v prvních dvou případech, tj. na obrázcích 48 a 49, je snadná. Ve třetím případě (obr. 50) už konstrukce tak jednoduchá není.

Poznamenejme, že použijeme-li tzv. zobecněnou Pýthagorovu větu (pro polokruhy nad stranami pravoúhlého trojúhelníka), pak stejným způsobem dokážeme jinou verzi tvrzení (i): pro nerovnoramenný pravoúhlý trojúhelník ABC je součet obsahů obou měsíčků roven obsahu trojúhelníka ABC (viz obr. 51). Obsahy jednotlivých měsíčků však nejsou rovny obsahům trojúhelníků APC a BPC.



obr. 51

Finský matematik M. J. Vallenius (1731–1773) nalezl roku 1766 další dva příklady měsíčků (průměry kružnic jsou v poměru 5 : 1 a 5 : 3). Později bylo dokázáno, že kvadratura měsíčku je možná jen v těchto pěti případech.



obr. 52

Uvažujme rovnoramenný lichoběžník, jehož strany mají délky 1, 1, 1, 2 („polovina" pravidelného šestiúhelníka). Snadno se ukáže, že součet obsahu polokruhu o průměru AS a obsahů tří měsíčků vytvořených polokružnicemi nad stranami AD, DC, CB a kružnicí k, která je lichoběžníku opsána, je roven obsahu lichoběžníka $ABCD$ (viz obr. 52). I toto tvrzení dokázal Hippokratés.

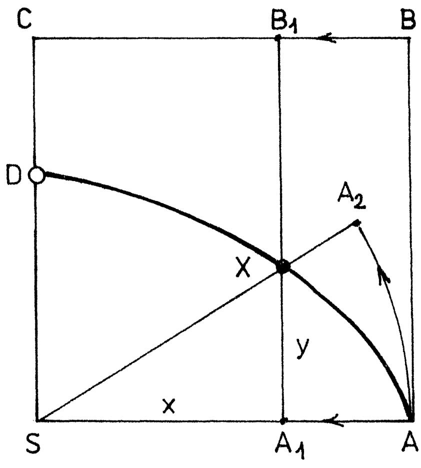
Někdy se uvádí, že úspěšně provedená kvadratura Hippokratových měsíčků vyvolala mezi řeckými matematiky jakýsi optimismus; zdání, že problém kvadratury kruhu se přece jen nějak podaří zvládnout. (O problematice měsíčků napsal před mnoha léty zajímavou práci [48] německý matematik E. G. H. Landau (1877–1938).)

Hippokratés se prý pokoušel i o řešení problému zdvojení krychle. Přeformuloval tuto úlohu do řeči poměrů a úměr; podstatu této myšlenky jsme si ukázali v 17. odstavci. Později uvidíme, jak tuto ideu využil Archytás z Tarentu a další řečtí matematici.

b) Hippiás

Hippiás z Élidy (5. stol. př. Kr.) byl sofista, všestranně vzdělaný člověk, matematik a astronom. Byl však i znalcem literatury, hudby a historie, ovládal i některá řemesla. Kritizoval současnou společnost; mj. prohlašoval, že zákon je tyranem lidí, že se dopouští mnoha násilností proti přírodě, že uzavírá lidi do místních společenství, ač jsou od přírody příbuzní atd. Připisuje se mu objev křivky, pomocí které bylo možno provádět trisekce úhlů.

Hippiás si uvědomil, jakým způsobem je možno převést problém dělení úhlu na problém dělení úsečky. Uvažujme čtverec $SABC$ (viz obr. 53).

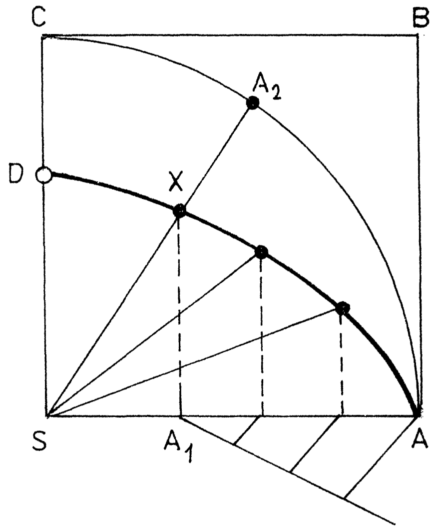


obr. 53

Úsečka AB nechť se rovnoměrně posouvá z polohy AB do polohy SC a současně nechť se úsečka SA rovnoměrně otáčí kolem bodu S z polohy SA do polohy SC. Oba pohyby současně začnou a současně skončí. Průsečík pohybujících se úseček vytváří jistou křivku, která „jde“ z bodu A do bodu D; na obrázku je zakreslen průsečík X úsečky A_1B_1 s odpovídající úsečkou SA_2. Bod D je jakýmsi „limitním bodem“, neboť v krajní poloze obě úsečky splynou.

Pomocí této křivky je možno rozdělit daný úhel na požadovaný počet stejných částí. Je-li dán úhel $\angle ASA_2$ (viz obr. 54), je určen i příslušný bod X na Hippiově křivce a tím i odpovídající bod A_1. Nyní rozdělíme úsečku AA_1 známým způsobem, např. na tři stejné části, dělící body vyneseme na Hippiovu křivku a spojíme je s bodem S; úhel ASA_2 je rozdělen na tři stejné části.

Z definice Hippiovy křivky ihned vyplývá, že bod A_2 na obr. 54 dělí oblouk $\overline{CA}$ ve stejném poměru jako bod A_1 úsečku SA.



obr. 54

Uvědomme si ještě, že pravítkem a kružítkem můžeme sestrojit *jen některé body* Hippiovy křivky (pomocí půlení úhlů a úseček). Těmito body pak proložíme křivku pomocí vhodného ***křivítka***. Nejde tedy o eukleidovskou konstrukci pravítkem a kružítkem.

Hippiovu křivku můžeme snadno vyjádřit analyticky (viz obr. 53); uvažujme v rovině souřadný systém se středem v bodě S a osami SA a SC. Položme $SA = 1$; označme $\alpha = \angle ASX$ a x, y souřadnice bodu X. Z definice Hippiovy křivky vyplývá, že

$$\alpha : \tfrac{\pi}{2} = (1-x) : 1 , \qquad \text{tj.} \qquad \alpha = \tfrac{\pi}{2} \cdot (1-x) .$$

Nyní je

$$y = x \cdot \tan\alpha = x \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2}\right) = x \cdot \cot\frac{\pi x}{2} .$$

Jde tedy o transcendentní křivku, která má nekonečně mnoho větví. Dnes umíme vypočítat, že

$$SD = \lim_{x\to 0} x \cdot \cot\frac{\pi x}{2} = \frac{2}{\pi} .$$

K tomuto výsledku dospěl elementárním způsobem Dinóstratos – viz dále. Hippiovu křivku je tedy možno použít i k řešení problému kvadratury či rektifikace. Snad proto ji německý matematik a filozof G. W. Leibniz (1646–1716) nazval *kvadratrix.*

c) Archytás

Archytás z Tarentu (428?–365) byl pýthagorejský filozof a matematik, státník a vojevůdce. Byl přítelem Platóna, učitelem Eudoxa. Připisují se mu výsledky týkající se poměrů a úměr, formulování zákonů harmonie, vynález kladky a šroubu. Někdy se uvažuje, že je autorem osmé knihy Eukleidových *Základů.*

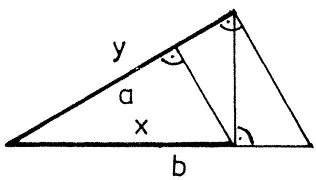
Zabýval se teorií poměrů a úměr, studoval aritmetický, geometrický i harmonický průměr; dokázal, že „neexistuje" geometrický průměr přirozených čísel n a $n+1$ (v dnešní terminologii: $\sqrt{n(n+1)}$ není číslo racionální).

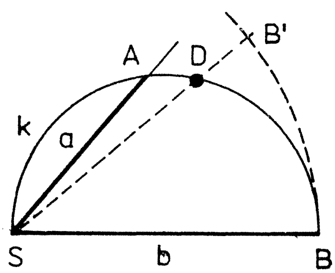
Archytás se snažil najít metodu, jak „vložit" dvě veličiny x, y mezi dvě dané veličiny a, b tak, aby platila rovnost

$$a : x = x : y = y : b \ .$$

Uvědomil si, že nalezení takových veličin x, y je ekvivalentní s nalezením vhodného pravoúhlého trojúhelníka s přeponou b (viz obr. 55 a – požadovaná rovnost vyplývá z podobnosti trojúhelníků).

Nechť jsou dány veličiny a, b, kde $a < b$. Mějme kružnici k s průměrem $SB = b$ a tětivu $SA = a$ (viz obr. 55 b).





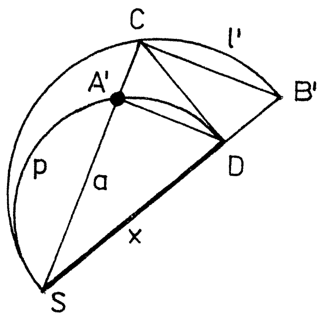
obr. 55 a, b

Nyní uvažujme tři rotační plochy:

(i) válcovou plochu kolmou k nákresně, která je určena kružnicí k;
(ii) kuželovou plochu, která vznikne rotací úhlu $\angle ASB$ kolem osy SB;
(iii) axoid, který vznikne rotací kružnice l s průměrem SB, která leží v rovině *kolmé* k nákresně, kolem osy, která je *kolmá* k nákresně a která prochází bodem S.

Vše budeme uvažovat jenom v jednom poloprostoru. Axoid protíná válcovou plochu v křivce „jdoucí" z bodu B do bodu S. Tuto křivku protne kuželová plocha v bodě C. Nechť D je pata kolmice spuštěné z bodu C na nákresnu. Kolmý řez k nákresně, který je určen body S, C a D, je znázorněn na obr. 56.

Kružnice l' je pootočenou kružnicí l vytvářející axoid. Bod A' leží na kuželové ploše - je to otočený bod A; bod A' zřejmě leží na kulové ploše s průměrem SB.

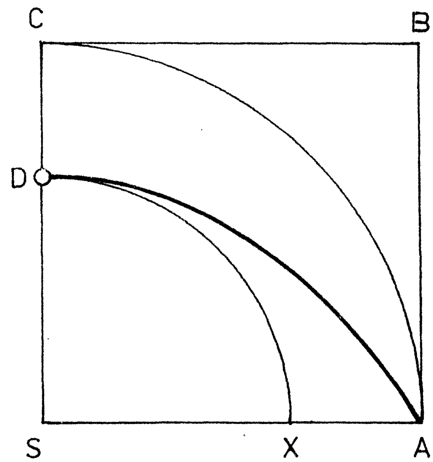


obr. 56

Kružnice p je průnikem uvažovaného řezu s touto kulovou plochou. Z Thalétovy věty vyplývá, že je nalezen pravoúhlý trojúhelník s přeponou b a dva podobné trojúhelníky a že tedy pro $x = SD$, $y = SC$ platí

$$a : x = x : y = y : b \ .$$

Pro $b = 2a$ tedy dostáváme řešení délského problému zdvojení krychle. Opět však nejde o řešení pomocí pravítka a kružítka, tj. o eukleidovskou konstrukci.



obr. 57

d) Dinóstratos

Matematik Dinóstratos (4. stol. př. Kr.) byl žákem Platóna a Eudoxa. Objevil zajímavou vlastnost křivky kvadratrix a ukázal tak překvapivou souvislost mezi problémem trisekce úhlu a rektifikací kružnice. Dokázal totiž, že pro délky úseček SD, SC a délku čtvrtkružnice $\overline{CA}$ (viz obr. 57) platí vztah

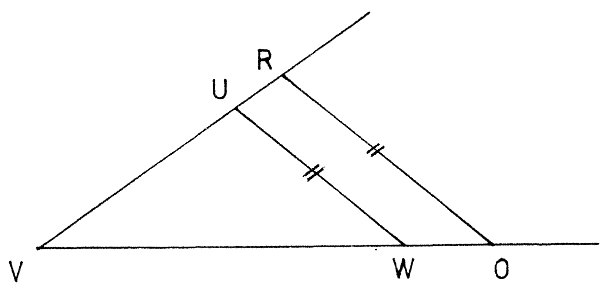
$$SD : SC = SC : \overline{CA} \ ,$$

tj. poloměr SC je střední geometrickou úměrnou délek úsečky SD a čtvrtkružnice $\overline{CA}$. Vzhledem k podobnosti kružnic je zřejmě

$$SD : SC = \overline{DX} : \overline{CA} \ ,$$

takže porovnáním obou rovností zjistíme, že $\overline{DX} = SC$, tj. délka úsečky SC je rovna délce čtvrtkružnice o poloměru SD.

Znalost poměru $SD : SC$ dává možnost provést rektifikaci libovolné kružnice. Máme-li zkonstruovanou křivku kvadratrix (např. na obr. 57), zvolíme v rovině nějaký úhel a naneseme na jeho ramena délky SD a SC. Na obr. 58 nechť je $VU = SD$, $VW = SC$.



obr. 58

Jestliže bodem R na rameni VU vedeme rovnoběžku s přímkou UW a průsečík s ramenem VW označíme O, pak délka úsečky VO je čtvrtinou obvodu kružnice o poloměru VR.

Dinóstratos dokázal výše uvedený vztah sporem. Popišme jeho myšlenkový postup. Zvolme na úsečce SC bod E tak, aby platil vztah

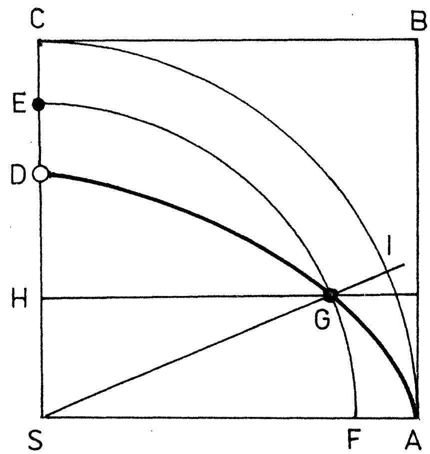
$$SE : SC = SC : \overline{CA} \ .$$

Předpokládejme, že bod E leží mezi body D a C (viz obr. 59).

Čtvrtkružnice $\overline{EF}$ se středem S a poloměrem SE protne křivku kvadratrix v bodě G, rovnoběžka s přímkou SA vedená bodem G má s úsečkou SC společný bod H. Přímka SG protne čtvrtkružnici $\overline{CA}$ v bodě I. Z podobnosti kružnic vyplývá, že

$$SE : SC = \overline{EF} : \overline{CA} \ .$$

Porovnáme-li tuto rovnost s rovností předchozí, okamžitě vidíme, že je $\overline{EF} = SC\ (= SA)$.



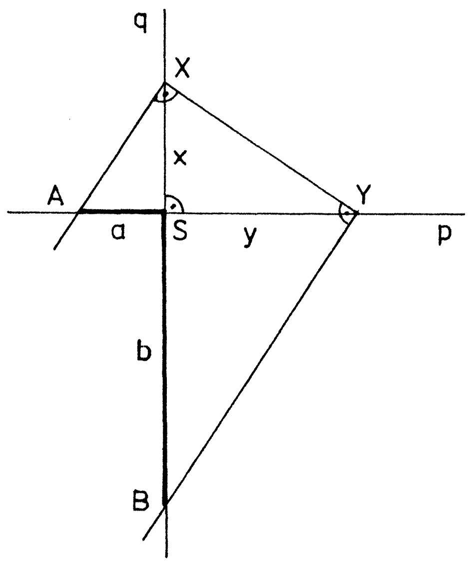
obr. 59

Podle definice křivky kvadratrix, podobnosti kružnic a předchozího vztahu je

$$SA : HG = \overline{CA} : \overline{CI} = \overline{EF} : \overline{EG} = SA : \overline{EG}\ .$$

Odtud $HG = \overline{EG}$; to však nemůže být pravda (viz obr. 59), neboť oblouk $\overline{EG}$ je jistě delší než úsečka HG .

Podobným způsobem se přivede ke sporu případ, kdy bod E leží mezi body S a D. Musí tedy být $E = D$, což jsme chtěli dokázat.



obr. 60

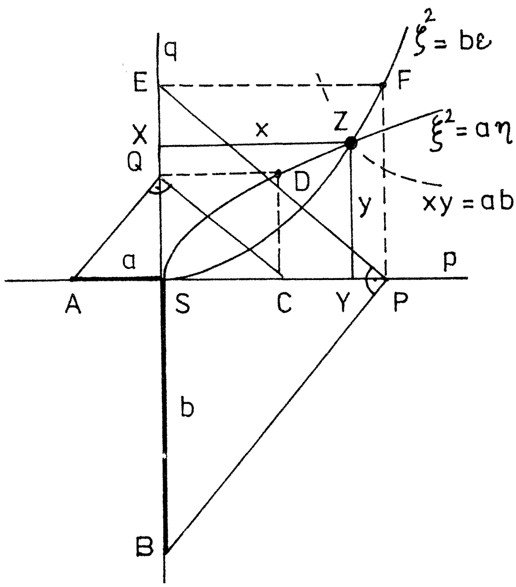
e) Menaechmos

Zkoumejme nejprve takovouto situaci. Nechť jsou dány úsečky a, b, kde $a < b$. Uvažujme v rovině dvě kolmé přímky p, q s průsečíkem S; veličiny a, b reprezentujme úsečkami SA, SB, kde $A \in p$ a $B \in q$ (viz obr. 60). Předpokládejme, že se nám podařilo najít body $X \in q$, $Y \in p$ tak, že úhly $\angle AXY$ a $\angle BYX$ jsou pravé; délky úseček SX, SY označme x, y. Z podobnosti trojúhelníků ASX, XSY a YSB vyplývají rovnosti

$$a : x = x : y = y : b\ .$$

Jde tedy o to, najít body X, Y.

Výše uvedenou úvahu dobře promyslel Menaechmos (4. stol. př. Kr.), bratr Dinóstrata; rovněž studoval u Platóna a Eudoxa. Menaechmovu myšlenku popíšeme podrobně.



obr. 61

Mějme dány veličiny a, b, které opět reprezentujme kolmými úsečkami SA, SB na přímkách p, q (viz obr. 61). Předpokládejme nyní, že se po přímce q pohybuje bod Q a to od bodu S po polopřímce opačné k polopřímce SB. K tomuto bodu Q existuje právě jediný bod $C \in p$, pro který je úhel $\angle AQC$ pravý, a jediný bod D, pro který je $SCDQ$ obdélník. Pohybuje-li se bod Q po zmíněné polopřímce, pohybuje se bod D po jakési křivce. Označíme-li $\xi = SQ$ a $\eta = SC$, pak z podobnosti trojúhelníků ASQ a QSC dostáváme rovnost $a : \xi = \xi : \eta$, neboli $\xi^2 = a\eta$. Bod D se tedy pohybuje po parabole.

Proveďme stejnou úvahu ještě jednou. Předpokládejme, že se po přímce p pohybuje bod P a to od bodu S po opačné polopřímce k polopřímce SA. K tomuto bodu P existuje právě jediný bod $E \in q$, pro který je úhel $\angle BPE$ pravý, a jediný bod F, pro který je $SPFE$ obdélník. Pohybuje-li se bod P po zmíněné polopřímce, pohybuje se bod F po parabole: označíme-li $\zeta = SP$, $\varepsilon = SE$, je $b : \zeta = \zeta : \varepsilon$, tj. $\zeta^2 = b\varepsilon$.

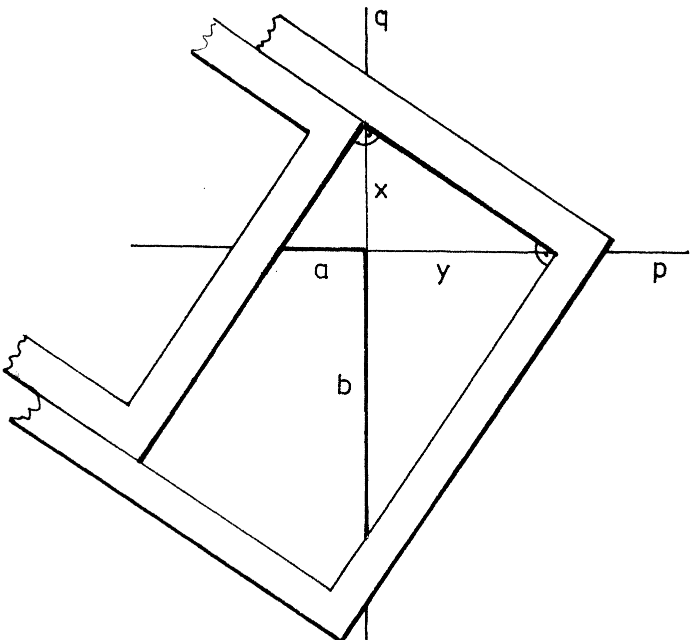
Označíme-li Z průsečík obou parabol a spustíme-li z něj kolmice na přímky q, p, získáme hledané body X, Y; pro délky $x = SX$ a $y = SY$ tedy bude $a : x = x : y = y : b$.

(Poznamenejme, že bod Z leží ještě na hyperbole $xy = ab$.)

Menaechmova metoda nalezení neznámých veličin x, y představuje mimo jiné první výskyt kuželoseček v matematice vůbec.

f) Platón

Na základě výchozí myšlenky Menaechmových úvah, která je zachycena na obr. 60, vymyslel prý Platón mechanický nástroj pro nalezení neznámých veličin x, y. Šlo o speciální příložníky (tesařské úhelníky) zasunovatelné do sebe. Bylo s nimi třeba pohybovat tak dlouho, až v rovině vymezily hledaný útvar $AXYBS$ (viz obr. 60 a 62).



obr. 62

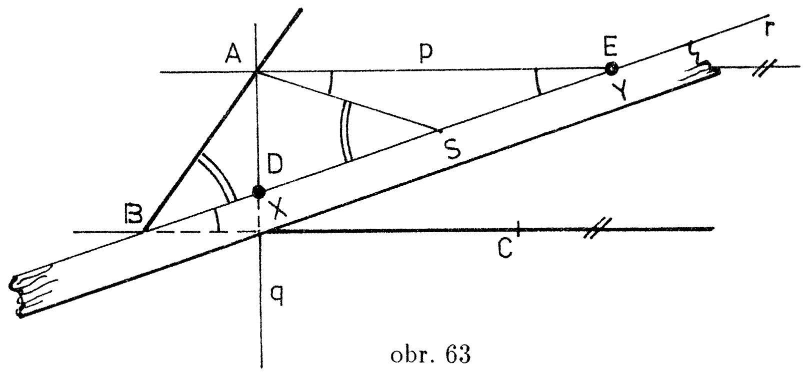
Podle některých autorů prý chtěl Platón svými příložníky ironizovat obdobná mechanická řešení jiných autorů.

Znovu připomeňme, že v tomto článku není diskutován Platónův vliv na matematiku, její chápání i rozvoj. Zájemce o tuto problematiku odkazujeme na knihu P. Vopěnky [72]. Rovněž vřele doporučujeme četbu Platóna (viz např. [56–57]), dále dílo F. Novotného [51], práce J. Patočky [54–55] a další.

g) Metoda vkládání

Někdy v 5. či 4. stol. př. Kr. byl v Řecku nalezen následující postup k provedení trisekce úhlu pomocí pravítka se dvěma vyznačenými body X, Y a kružítka.

Nechť je dán úhel $\angle ABC$, kde bod A je volen tak, aby $2 \cdot AB = XY$. Bodem A veďme rovnoběžku p s přímkou BC a kolmici q na přímku BC (viz obr. 63).



obr. 63

Nyní přiložme pravítko tak, abychom podle něho mohli vést přímku r, která prochází bodem B a protíná přímky p, q v bodech E, D, jejichž vzdálenost je právě rovna délce úsečky XY (viz obr. 63). Sestrojme střed S úsečky DE. Protože je $SE = SA = BA$, jsou trojúhelníky AES a BSA rovnoramenné; proto je

$$\angle AES = \angle EAS \quad \text{a} \quad \angle ABS = \angle ASB.$$

Protože je $\angle BSA$ vnějším úhlem trojúhelníka AES, je $\angle BSA = 2 \cdot \angle SEA$; dále si uvědomme, že úhly $\angle AES$ a $\angle SBC$ jsou střídavé. Je tedy $2 \cdot \angle SBC = \angle SBA$, tj. $\angle SBC$ je třetinou úhlu $\angle ABC$.

Proslulými úlohami se i v dalším období zabývala řada řeckých matematiků. Následující stručný výčet jistě není úplný.

Archimédés ze Syrakus (287?–212) prováděl trisekci úhlu pomocí kružítka a pravítka se dvěma vyznačenými body. Jeho metoda však byla odlišná od výše uvedené.

Eratosthenés z Kyrény (280?–194?) vymyslel pro hledání dvou středních geometrických úměrných a pro řešení problému zdvojení krychle důmyslný přístroj zvaný *mezolábium*.

Diokles (kolem r. 200 př. Kr.) studoval problém konstrukce dvou geometrických úměrných a nalezl křivku *kisoidu*.

Nikomédes (2. stol. př. Kr.) pro řešení problémů trisekce úhlu a zdvojení krychle užíval křivku *konchoidu*.

Meneláos Alexandrijský (konec 1. stol. n. l.) se zabýval zdvojením krychle.

Pappos (2.– 3. stol.) studoval kvadraturu kruhu, trisekci úhlu, metodu vkládání a Hippiovu křivku kvadratrix.

20. Neřešitelnost proslulých úloh

Tento odstavec podstatným způsobem vybočuje z našeho tématu, kterým je stará řecká matematika. Považujeme však za užitečné alespoň v hrubých rysech nastínit, jak je možno problematiku eukleidovských konstrukcí pravítkem a kružítkem vyjádřit v řeči analytické geometrie a v řeči obecné algebry, jaké pojmy je třeba zavést a jak s nimi pracovat, aby bylo možno dospět k zásadnímu výsledku, k důkazu neřešitelnosti prvních čtyř proslulých úloh.

Připomeňme, že základní myšlenky analytické geometrie nastínili René Descartes (1596–1650) a Pierre de Fermat (1601–1665) v 17. století; hlavní ideje obecné algebry se rodily v pracích řady matematiků 18. a 19. století.

V 18. odstavci jsme vyjádřili pojem „konstrukce pravítkem a kružítkem", resp. „eukleidovská konstrukce", *v řeči syntetické geometrie.* Převeďme nyní tuto formulaci *do řeči geometrie analytické.*

Předpokládejme, že je rovina opatřena kartézskou souřadnou soustavou. Jsou-li dány body $C_1, \cdots, C_m$, jsou tím dány i jejich souřadnice; pro každé $i = 1, \cdots, m$ nechť jsou (a_i, b_i) souřadnice bodu C_i.

Poznamenejme, že uvažovanou kartézskou souřadnou soustavu (dvě kolmé osy a „měřítka" na nich) umíme pravítkem a kružítkem sestrojit. Budou-li v rovině zadány body $C_1, \cdots, C_m$, je rozumné volit střed kartézské soustavy např. v bodě C_1, osu x procházející bodem C_2 a jednotku délky rovnou délce úsečky C_1C_2.

(Ze syntetické geometrie dobře víme, že pro speciální volbu bodů $C_1, \cdots, C_m$ může řešení problému existovat, pro jejich obecnou polohu nikoliv. Přitom obecná volba bodů $C_1, \cdots, C_m$ odpovídá obecné volbě jejich souřadnic.)

Přímka určená body C_i, C_j má rovnici

$$y - b_i = \frac{b_j - b_i}{a_j - a_i} \cdot (x - a_i)$$

a kružnice se středem C_i, na které leží bod C_j, má rovnici

$$(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 = (a_j - a_i)^2 + (b_j - b_i)^2.$$

Souřadnice průsečíku dvou přímek tedy získáme řešením soustavy dvou lineárních rovnic, souřadnice průsečíku přímky a kružnice získáme řešením soustavy jedné lineární a jedné kvadratické rovnice, souřadnice průsečíku dvou kružnic získáme řešením soustavy dvou kvadratických rovnic.

Při geometrických konstrukcích však využíváme i bodů, které jsme sestrojili v předchozích krocích. V analytickém pojetí problému tedy užíváme při sestavování rovnic jednotlivých přímek a kružnic i souřadnice bodů, které jsme vypočetli při řešení předchozích soustav.

Z provedených úvah vyplývá následující zjištění.

Bod X o souřadnicích (x,y), který je zadán nějakými vlastnostmi vážícími se k bodům $C_1, \cdots, C_m$, je možno sestrojit pravítkem a kružítkem právě tehdy, je-li možno čísla x, y získat postupným řešením soustav dvou rovnic výše uvedených typů (dvou lineárních, dvou kvadratických, nebo jedné lineární a jedné kvadratické), v nichž kromě neznámých figurují čísla $a_1, b_1, \cdots, a_m, b_m$ a výsledky vypočtené ze soustav předchozích.

Uvážíme-li, jakým způsobem se řeší výše zmíněné soustavy dvou rovnic, zjišťujeme, že nutnou a postačující podmínku pro existenci konstrukce bodu X ze zadaných bodů $C_1, \cdots, C_m$ pravítkem a kružítkem je možno vyslovit takto.

Bod X o souřadnicích (x,y) se dá pravítkem a kružítkem sestrojit právě tehdy, když je možno čísla x, y získat z čísel $a_1, b_1, \cdots, a_m, b_m$ pomocí sčítání, odčítání, násobení, dělení a užitím druhých odmocnin, přičemž všech těchto operací je provedeno jen konečně mnoho.

Od analytického vyjádření problému nyní přejdeme k jeho vyjádření *v řeči obecné algebry*. Připomeneme však nejprve jeden ze základních pojmů algebry, pojem tělesa.

Těleso je množina opatřená dvěma operacemi, sčítáním a násobením, které jsou svázány distributivním zákonem. Obě tyto operace jsou asociativní a komutativní, vzhledem ke sčítání existuje nulový prvek, vzhledem k násobení existuje jednotkový prvek. Ke každému prvku existuje prvek opačný a ke každému nenulovému prvku existuje prvek inverzní; znamená to, že v tělese je možno odčítat a dělit nenulovým prvkem. Aby se vyloučil triviální případ, předpokládá se, že těleso má alespoň dva prvky.

Dobře známe těleso $\mathbf{Q}$ racionálních čísel, těleso $\mathbf{R}$ reálných čísel a těleso $\mathbf{C}$ komplexních čísel; existují však i konečná tělesa, např. množiny $\mathbf{Z}_p = \{0, 1, 2, \cdots, p-1\}$, kde p je prvočíslo, opatřené tzv. sčítáním a násobením „modulo p“.

Mějme nyní v rovině dány body $C_1, \cdots, C_m$; pro každé $i = 1, \cdots, m$ nechť jsou (a_i, b_i) kartézské souřadnice bodu C_i. Uvažujme nejmenší těleso T, které obsahuje všechna racionální čísla a všechna čísla $a_1, b_1, \cdots, a_m, b_m$. Tvoříme-li z čísel a_i, b_i další čísla pomocí sčítání, odčítání, násobení a dělení, nevystoupíme z tohoto tělesa T; takovéto „počítání“ odpovídá konstrukcím prováděným jen pomocí pravítka. Užijeme-li druhou odmocninu (tento obrat odpovídá řešení kvadratické rovnice a tedy užití kružítka), můžeme (ale nemusíme) se z tělesa T dostat „ven“ (odmocňujeme-li např. číslo 4, zůstaneme v tělese T). Často však dospějeme k „většímu“ tělesu, které vzniklo tzv. *adjunkcí* druhé odmocniny nějakého prvku $c \in T$ k původnímu tělesu T, tj. k tělesu

$$T(\sqrt{c}) = \{a + b\sqrt{c}\ ;\ a, b \in T\}\ .$$

Po konečném počtu takovýchto kroků dostaneme posloupnost těles

$$T = T_0 \subset T_1 \subset T_2 \subset \cdots \subset T_k \ ;$$

každé těleso T_i tedy vzniklo adjunkcí druhé odmocniny nějakého prvku tělesa T_{i-1} k tomuto tělesu. Protože jde o adjunkci *druhé* odmocniny, hovoříme o tělese T_i jako o kvadratickém nadtělese tělesa T_{i-1}.

Když jsme takto, tj. v řeči obecné algebry, vyjádřili algebraickou podstatu problému konstrukcí pravítkem a kružítkem, můžeme zformulovat další nutnou a postačující podmínku pro existenci takovéto konstrukce.

Bod X o souřadnicích (x, y) se dá z bodů $C_1, \cdots, C_m$ sestrojit pravítkem a kružítkem právě tehdy, existuje-li konečná posloupnost těles

$$T = T_0 \subset T_1 \subset T_2 \subset \cdots \subset T_k \ ,$$

kde
- *každé těleso T_i je kvadratickým rozšířením tělesa T_{i-1} ;*
- *$x, y \in T_k$.*

Zásadním problémem však zůstává, jak v daném případě poznáme, zda se čísla x, y dají získat řešením konečné posloupnosti výše popsaných soustav dvou rovnic, resp. zda se čísla x, y dají získat z čísel $a_1, b_1, \cdots, a_m, b_m$ pomocí sčítání, odčítání, násobení, dělení a užitím druhých odmocnin (při konečně mnoha operacích), resp. zda existuje výše popsaná posloupnost těles.

Souřadnici x (a podobně y) hledaného bodu X je často možno vyjádřit nějakou algebraickou rovnicí s koeficienty z výše uvažovaného tělesa T. Umíme-li ji algebraicky vyřešit a dostaneme-li číslo x jako výraz, který je vytvořen „z prvků tělesa T" jen pomocí sčítání, odčítání, násobení a dělení a obsahuje-li jen druhé odmocniny, pak je úsečka délky x konstruovatelná pravítkem a kružítkem.

Může se však stát, že tuto rovnici algebraicky řešit neumíme, nebo ji řešit umíme, ale hledané x dostaneme v „nevhodném tvaru"; např. jako výraz, který obsahuje „vyšší" odmocniny.

Jde-li např. o problém zdvojení krychle o straně a, pak hledáme řešení rovnice $x^3 = 2a^3$. Zřejmě je $x = a \cdot \sqrt[3]{2}$. Nevíme však, zda neexistuje jiné vyjádření čísla x, které by kromě sčítání, odčítání, násobení a dělení užívalovalo jen druhé odmocniny.

Na problém, který jsme nastínili, částečně odpovídá následující věta; její důkaz se však tomuto pojednání vymyká (viz např. [61]).

Věta V: *Nechť $x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ je polynom, který je ireducibilní nad tělesem T. Jestliže se jeho kořen x dá zapsat jako výraz utvořený z prvků tělesa T pomocí sčítání, odčítání, násobení, dělení a druhých odmocnin, pak je číslo n mocninou dvojky.*

Připomeňme, že polynom je nad tělesem T ireducibilní, jestliže se nedá rozložit v součin dvou polynomů s koeficienty z tělesa T, které mají menší stupeň. Polynom, který je ireducibilní nad tělesem T a má stupeň alespoň 2, tedy nemůže mít v tělese T žádný kořen.

Pro další výklad budeme potřebovat ještě jednoduché lemma.

Lemma L: *Nechť $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ je rovnice s celočíselnými koeficienty. Má-li tato rovnice racionální kořen $\frac{p}{q}$, kde p, q jsou čísla nesoudělná, potom p dělí a_n a q dělí a_0.*

Důkaz tohoto lemmatu je snadný; přenecháváme ho laskavému čtenáři za domácí cvičení.

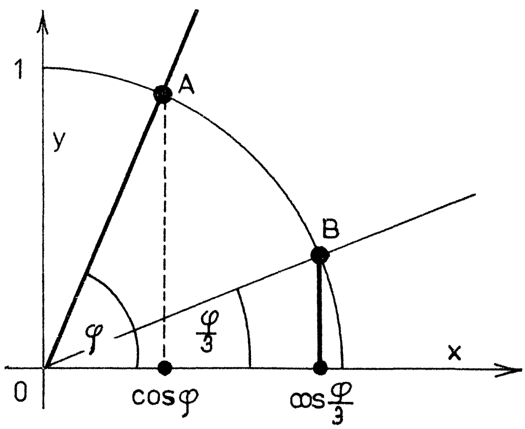
Nyní se již můžeme vrátit k proslulým úlohám staré řecké matematiky a na základě výše uvedených výsledků ukázat jejich neřešitelnost.

(i) Zdvojení krychle

Úloha na zdvojení krychle o straně 1 vede na rovnici $x^3 - 2 = 0$. Podle lemmatu **L** snadno zjistíme, že tato rovnice nemá racionální kořeny, tj. polynom $x^3 - 2$ je nad tělesem **Q** ireducibilní. Protože stupeň tohoto polynomu není mocninou čísla 2, není jeho kořen podle věty **V** sestrojitelný pravítkem a kružítkem.

(ii) Trisekce úhlu

Mějme dán úhel φ; zvolíme-li vhodně kartézskou souřadnou soustavu, můžeme předpokládat, že je úhel φ zadán x-ovou souřadnicí bodu A, tj. hodnotou $\cos\varphi$ (viz obr. 64).



obr. 64

Sestrojit úhel $\frac{\varphi}{3}$ je problém ekvivalentní s úlohou najít x-ovou souřadnici bodu B, tj. sestrojit úsečku délky $\cos\frac{\varphi}{3}$. Připomeňme si vzorec

$$4 \cdot \cos^3\frac{\varphi}{3} - 3 \cdot \cos\frac{\varphi}{3} = \cos\varphi\ .$$

Položme $x = \cos \frac{\varphi}{3}$. Úloha na trisekci úhlu tedy vede na rovnici

$$4x^3 - 3x - \cos\varphi = 0 .$$

Zvolíme-li např. úhel $\varphi = \frac{2}{3}\pi$, jde o rovnici

$$8x^3 - 6x + 1 = 0 .$$

Podle lemmatu **L** snadno zjistíme, že odpovídající polynom nemá racionální kořeny (žádné z čísel $\frac{1}{q}$, kde $q = 1, -1, 2, -2, 4, -4, 8, -8$, nevyhovuje), je tedy nad tělesem $\mathbf{Q}$ ireducibilní. Protože jeho stupeň není mocninou čísla 2, není možno úsečku délky x podle věty **V** sestrojit pravítkem a kružítkem. Obdobný výsledek dostaneme pro úhel $\varphi = \frac{1}{3}\pi$.

Některé úhly je však možno pravítkem a kružítkem na tři stejné části rozdělit; dobře to víme ze školské geometrie. Je-li např. $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, dostáváme rovnici $4x^3 - 3x = 0$, která má kořeny 0, $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ (odpovídající polynom je nad tělesem $\mathbf{Q}$ reducibilní); úsečku délky $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ sestrojíme snadno.

Je-li dále $\varphi = \frac{1}{4}\pi$, dostaneme rovnici $8x^3 - 6x - \sqrt{2} = 0$; odpovídající polynom je rozložitelný nad tělesem $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$:

$$8x^3 - 6x - \sqrt{2} = (4x^2 - 2\sqrt{2}\cdot x - 1)(2x + \sqrt{2})$$

Kořeny uvažované rovnice je tedy možno pravítkem a kružítkem sestrojit.

Jak jsme viděli, libovolně zvolený úhel rozdělit pravítkem a kružítkem na tři stejné části není možno. Proto je problém trisekce úhlu eukleidovsky neřešitelný.

(iii) Rektifikace kružnice a kvadratura kruhu

Provést rektifikaci kružnice o poloměru 1 znamená sestrojit pravítkem a kružítkem úsečku délky 2π, provést kvadraturu kruhu o poloměru 1 znamená sestrojit pravítkem a kružítkem úsečku délky $\sqrt{\pi}$. Obě tyto úlohy jsou ekvivalentní s problémem sestrojení úsečky délky π.

Číslo π bychom tedy měli vytvořit z čísel racionálních pomocí sčítání, odčítání, násobení, dělení a užitím druhých odmocnin. Dá se ukázat – vymyká se to však tomuto článku, že číslo π by pak bylo možno získat jako kořen nějaké algebraické rovnice s racionálními koeficienty (taková čísla se nazývají *algebraická*).

Roku 1882 však bylo dokázáno, že číslo π není algebraické, ale *transcendentní.* To znamená, že není kořenem žádné algebraické rovnice s racionálními koeficienty. Odtud vyplývá, že ani problém rektifikace, ani problém kvadratury není pravítkem a kružítkem řešitelný.

(iv) Konstrukce pravidelných n-úhelníků

Zkonstruovat pravidelný n-úhelník znamená rozdělit plný úhel na n stejných částí. Víme, že tento geometrický problém odpovídá problému algebraickému. Jde o řešení rovnice $x^n - 1 = 0$; komplexní čísla, která jsou kořeny této rovnice, tvoří v Gaussově komplexní rovině právě vrcholy pravidelného n-úhelníka.

Sestrojit pravidelný n-úhelník tedy znamená sestrojit úhel $\frac{2\pi}{n}$, neboli – jak jsme již viděli v případě trisekce úhlu – úsečku délky $\cos\frac{2\pi}{n}$. Snadno se ukáže, že dají-li se eukleidovsky sestrojit pravidelný n_1-úhelník a pravidelný n_2-úhelník, kde čísla n_1 a n_2 jsou nesoudělná, dá se eukleidovsky sestrojit i pravidelný n_1n_2-úhelník. Stačí tedy zkoumat, za jakých podmínek se dá sestrojit pravidelný p^k-úhelník, kde p je prvočíslo a k číslo přirozené. Pro $p = 2$ a $k \geq 2$ je situace triviální. Na přelomu 18. a 19. století bylo ukázáno, že v ostatních případech musí mít prvočíslo p speciální tvar a navíc musí být $k = 1$. Tyto výsledky jsou shrnuty v následující větě, jejíž důkaz se zcela vymyká tomuto pojednání.

Věta M: *Pravidelný n-úhelník je možno sestrojit pravítkem a kružítkem právě tehdy, má-li číslo n tvar*

$$n = 2^m \cdot p_1 \cdot p_2 \cdots p_k \ ,$$

kde $m \geq 0$ a $p_1, p_2, \cdots, p_k$ jsou navzájem různá Fermatova prvočísla.

Poznamenejme, že Fermatova prvočísla jsou prvočísla tvaru $2^{2^r} + 1$. Pro $r = 0, 1, 2, 3, 4$ dostáváme prvočísla 3, 5, 17, 257, 65 537. Pro $r = 5$ však již dostáváme číslo složené. Není dosud známo, zda vůbec existují další Fermatova prvočísla. Problém konstrukce pravidelných n-úhelníků je tedy větou **M** převeden na problém ekvivalentní, který zatím uzavřen není.

Pro podrobnější výklad této problematiky odkazujeme čtenáře na literaturu (např. [61]).

Proslulými úlohami staré řecké matematiky se zabývalo mnoho významných matematiků; jmenujme jen namátkou: Leonardo Pisánský zvaný Fibonacci (1170?–1230?), Al-Kaší (15. stol.), F. Viète (1540–1603), I. Newton (1643–1727), A. C. Clairaut (1713–1765), M. Chasles (1793–1880), A. A. Kochanski (1631–1700).

Francouzský matematik, filozof a přírodovědec René Descartes byl snad první, kdo jasně zformuloval domněnku, že problém zdvojení krychle pravítkem a kružítkem řešitelný není; tvrdil, že když třetí odmocnina z racionálního čísla je číslo iracionální, nelze je vyjádřit „konečným počtem druhých odmocnin“.

Roku 1801 vydal jeden z největších matematiků 19. století K. F. Gauss velkou práci *Disquisitiones arithmeticae*, ve které byl mimo jiné první zcela přesný důkaz tzv. *základní věty algebry*. V sedmé části této knihy Gauss studoval rovnici $x^n - 1 = 0$. Dokázal, že je algebraicky řešitelná; navíc ukázal, pro která n je možno její řešení vyjádřit jen pomocí druhých odmocnin, tj. pro která n jsou pravidelné n-úhelníky eukleidovsky konstruovatelné (věta **M**).

Neřešitelnost problémů trisekce úhlu a zdvojení krychle pravítkem a kružítkem dokázal až roku 1837 P. L. Wantzel (1814–1848). Pro zasvěcené poznamenejme, že tento francouzský matematik dokázal i to, že nastane-li pro kubickou rovnici tzv. *casus irreducibilis*, nelze reálné kořeny této rovnice algebraicky vyjádřit bez pomoci komplexních čísel.

Na zásadní výsledek týkající se rektifikace a kvadratury si však museli matematici ještě počkat. Roku 1766 dokázal německý matematik, astronom, fyzik a filozof J. H. Lambert (1728–1777), že číslo π (a rovněž číslo e – základ přirozených logaritmů) není racionální (viz [86]). Po více než sto letech, roku 1882, dokázal další německý matematik K. L. F. Lindemann (1852–1939), že číslo π je dokonce transcendentní. Využil myšlenky francouzského matematika C. Hermitea (1822–1901), který o devět let dříve dokázal, že číslo e je transcendentní. Teprve tímto výsledkem byla definitivně vyřešena otázka kvadratury kruhu a rektifikace kružnice. Problémy, které téměř dva a půl tisíce let zaměstnávaly celé generace matematiků, se ukázaly jako neřešitelné.

Více než sto let tedy víme, že kvadratura kruhu, rektifikace kružnice, trisekce úhlu a zdvojení krychle jsou úlohy pravítkem a kružítkem neřešitelné. Přesto se stále a znovu objevují „řešení“ těchto proslulých úloh; jejich autoři většinou nepochopili podstatu problému a slovo *neřešitelné* si vykládají jako *dosud nevyřešené*. Uveďme pro zajímavost úryvek dopisu, který začátkem května 1994 došel na Matematicko fyzikální fakultu UK.

Věc: řešení problému kvadratury kruhu a čtverce

Pracoval jsem na tomto problému a při výpočtech jsem zjistil, že vzorec na výpočet plochy kruhu je chybný. Je logické, že odmocněním jakéhokoliv obsahu, získáme stranu čtverce, takže pokud uvedený problém vznikl, bylo to chybným utvořením kruhu daného rozměru (obsahu), event. chybným určením d kruhu a tedy poloměru.

Pro tento výpočet je nutné znát koeficient kvantové geometrické řady. Tímto koeficientem se zvětšují (zmenšují) obsahy (rozměry) ploch čtverců.

Následuje jakýsi výpočet, jsou přiloženy další výpočty a obrázky na milimetrovém papíře.

Tyto údaje jsou lehce kontrolovatelné, proto Vás žádám o uvedení nového vzorce do života, než nás předeběhnou jiné státy.

Existují již dokonce články s „metodickými pokyny“, jak se chovat, máme-li co do činění s řešiteli kvadratury či trisekce.

Třetič (angl. trisector) *je člověk, který si myslí, že umí pouze pomocí pravítka a kružítka rozdělit libovolný úhel na tři stejné části. Objeví se, když vám pošle svou práci s žádostí o váš názor, nebo – což je horší – když vám zavolá a chce s vámi o své konstrukci debatovat. Dostaví-li se osobně, je to ten nejhorší případ. Myslíte si možná, že problém, jak jednat s třetiči, není vůbec důležitý; mám v úmyslu vám ukázat, že důležitý je.*

Třetiči tvoří podmnožinu matematikou posedlých bláznů, která je ovšem podmnožinou všech bláznů. ...

To jsou počáteční věty článku *Co dělat, když se objeví třetič*, který vyšel před lety v Pokrocích matematiky, fyziky a astronomie (viz [18]).

Třetičů či trisektorů v poslední době značně přibylo; dělení v poměru 1 : 2 se uskutečnilo, nikoli však pravítkem a kružítkem. Kdyby se tak třetiči vyžívali v tom, že doma oprašují svůj trisektorový nábytek!

Vraťme se však k matematice. Její krása je i v tom, že vyřešení problému přináší nové problémy, nové pohledy a novou motivaci. Tak tomu ostatně je i s proslulými problémy starověku, kterým jsme v tomto pojednání věnovali takovou pozornost. Vážnějším zájemcům o tyto otázky doporučujeme dva články z Pokroků matematiky, fyziky a astronomie: *Kvadratura kruhu ve dvacátém století* a *Maďarský matematik rozřešil kvadraturu kruhu* (viz [12], [76]).

Závěrečná poznámka

Toto pojednání nazvané *Hrdinský věk řecké matematiky* vzniklo podstatným rozšířením stejnojmenné přednášky, kterou měl autor v srpnu 1993 na *1. semináři z historie matematiky* v Jevíčku. Přesto zdaleka nezahrnuje všechny významné výsledky, které do řecké matematiky 6. – 4. stol. př. Kr. patří (chápání nekonečna, problémy související se spojitostí, exhaustivní metoda, Eudoxova teorie proporcí, zkoumání iracionality, vliv Platóna a Aristotela na další vývoj matematiky atd.).

Nezbývá než doufat, že čtenáři toto pojednání přinese alespoň část intelektuálního potěšení, které úvahy o řecké matematice poskytly autorovi při přípravě přednášek pro seminář v Jevíčku a při sepisování těchto odstavců. Autor se snad k této problematice v dohledné době vrátí, ať už při přípravě přednášek nebo při sepisování další části tohoto pojednání.

Za pečlivé narýsování obrázků autor děkuje dr. Aleně Šarounové, CSc.

Komentář k literatuře

Následující seznam literatury obsahuje převážně české tituly; uvedeny jsou i některé významnější cizojazyčné knihy, které jsou v našich knihovnách a studovnách běžně k dispozici. Je zde zařazena i vědecko populární literatura o Řecku, knihy o antické filozofii, které vyšly v době vzdálenější i v posledních měsících. Dále jsou uvedeny i některé prameny, které běžně v knihovnách nejsou, ale které bylo rozumné v textu či v soupisu literatury připomenout.

Z publikací pojednávajících o řeckých dějinách, umění a kultuře, ale i o životě ve starém Řecku, zde připomínáme pěkně psané knihy Antonína Bartoňka (nar. 1926), Vojtěcha Zamarovského (nar. 1919) a řadu dalších titulů ([4–8], [10], [14–15], [19], [35], [52], [62], [65], [68–69], [79–83]). Vřele doporučujeme čtenářům i četbu Homéra, Hésioda, Hérodota, Xenofóna a dalších klasiků ([29], [30–31], [33–34], [77–78]).

Z dějin filozofie jsou zde v první řadě uvedeny *Malé dějiny filozofie* H. J. Störiga, které u nás vyšly již ve třech vydáních, velmi pěkná publikace *Mýtus, filosofie a věda I. a II* od Z. Kratochvíla (nar. 1952) (zajímavá je i jeho další knížka [47]); stále ještě jsou podnětné i *Dějiny filosofie* G. W. F. Hegela (1770–1831) (viz [25], [46], [64]).

Řecké filozofii jsou věnovány práce Jana Patočky (1907–1977), knížka D. Machovce (nar. 1929); klasickým dílem je čtyřdílný spis Františka Novotného (1881–1964) *O Platónovi*; zajímavé jsou i publikace F. Ch. Kessidiho, nově vyšlá kniha *Zakladatelé myšlení* (viz [23], [39–41], [49], [51], [53–55]). Je však možno (a třeba) nahlédnout přímo do klasiků. Zlomky předsókratovských filozofů máme v češtině k dispozici v publikacích [59] a [85], Platónovy dialogy znovu vycházejí (viz např. [56–57]); dále je možno sáhnout po Aristotelovi, Hérakleitovi ([1–2], [28]) a dalších.

Řeckou vědou v 6. – 5. stol. př. Kr. se zabývá B. Farrington v prvním díle své knížky [21]; zdůrazňuje velký význam technických dovedností pro rozvoj vědeckého myšlení a pro pokrok vědy. O nejstarším období řecké vědy a filozofie píše též G. Thompson ([70]); o počátcích lidského myšlení vůbec se můžeme dočíst např. v knížkách [36–37] G. V. Childea (1892–1957). O studii [71] J. P. Vernanta jsme se již zmiňovali.

Pro podrobné studium dějin matematiky je možno doporučit monografie, C. B. Boyera, A. P. Juškeviče, M. Klinea a J. Stillwella ([9], [38], [42], [62]), speciálněji zaměřené jsou knihy R. Freuda, T. L. Heatha, O. Neugebauera, O. Scholze, M. J. Vygodského a B. L. van der Waerdena ([22], [24], [50], [60], [73], [74–75]). Populárnějšími tituly jsou [3], [66], [84]; knížky [13] a [45] jsou věnovány historickým úlohám.

Upozorňujeme na to, že některé tituly obsahují pasáže, které jsou silně poznamenány dobou nedávno minulou; mohou však čtenáře dobře pobavit (jako reprezentativní příklad uvádíme zejména tituly [43–44]).

Zdůrazněme, že uvedený seznam literatury si nečiní naprosto žádné nároky na úplnost či reprezentativnost. Vážnější zájemci jistě snadno naleznou další potřebné odkazy v přehledech literatury jednotlivých titulů zde uvedených.

Literatura

[1] Aristotelés: Metafysika, J. Laichter, Praha 1946 (1. vyd. 1927)
[2] Aristoteles: Organon I - VI (Kategorie, O vyjadřování, První analytiky, Druhé analytiky, Topiky, O sofistických důkazech), nakl. ČSAV, Praha 1958–1978
[3] F. Balada: Z dějin elementární matematiky, SPN, Praha 1959
[4] A. Bartoněk: Odysseové na mořích historie, Mladá fronta, Praha 1976
[5] A. Bartoněk: Světem starých Řeků, Orbis, Praha 1977
[6] A. Bartoněk: Zlatá Egeis, Mladá fronta, Praha 1969
[7] A. Bartoněk: Zlaté Mykény, Panorama, Praha 1983
[8] A. Bartoněk, D. Bartoňková: Přímořským světem Helady, Blok, Brno 1987
[9] C. B. Boyer: A History of Mathematics, New York 1968
[10] J. Burian, P. Oliva: Civilizace starověkého Středomoří, Svoboda, Praha 1984
[11] M. T. Cicero: Tuskulské hovory, Svoboda, Praha 1976
[12] B. A. Cipra: Maďarský matematik rozřešil kvadraturu kruhu, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 35(1990), 337–339
[13] V. D. Čistjakov: Starinnye zadači po elementarnoj matematike, Vyšejšaja škola, 3. vyd., Minsk 1978
[14] Dějiny pravěku a starověku I, II, Praha 1979
[15] Dějiny umění I - X (J. Pijoan), Praha 1977–1984
[16] Diofant: Arifmetika i kniga o mnogougol'nych čislach, Nauka, Moskva 1974
[17] Diogenés Laertios: Životy, názory a výroky proslulých filosofů, ČSAV, Praha 1964 (slovensky: Životopisy slávnych filozofov I, II, SAV, Bratislava 1954)
[18] U. Dudley: Co dělat, když se objeví třetič, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 30(1985), 207–216
[19] Encyklopedie antiky (L. Svoboda a kol.), Academia, Praha 1973
[20] Eukleidovy Základy (Elementa), přeložil F. Servít, JČM, Praha 1907
[21] B. Farrington: Věda ve starém Řecku a její význam pro nás I, II, Rovnost, Brno 1950, 1951
[22] R. Freud (ed.): Grosse Augenblicke aus der Geschichte der Mathematik, Akadémiai Kiadó, Budapest 1990
[23] R. M. Hare, J. Barnes, H. Chadwick: Zakladatelé myšlení. Platón, Aristotelés, Augustin, Svoboda, Praha 1994
[24] T. L. Heath: A Manual of Greek Mathematics, Oxford at the Clarendon Press 1931
[25] G. W. F. Hegel: Dějiny filosofie I, II, III, Nakladatelství ČSAV, Praha 1961, 1965, Academia 1974
[26] W. A. Heidel: The Heroic Age of Science, Washington 1933
[27] M. Hejný a kol.: Teória vyučovania matematiky 2, SPN, 2. vyd., Bratislava 1990
[28] Hérakleitos: Řeč o povaze bytí, Herrmann a synové, Praha 1993
[29] Hérodotos: Dějiny aneb devět knih dějin nazvaných Músy, Odeon, Praha 1972
[30] Hésiodos: Zpěvy železného věku, Svoboda, Praha 1990
[31] Hesiodos: Práce a dni, Rovnost, Brno 1950

[32] T. Hobbes: Výbor z díla, Svoboda, Praha 1988
[33] Homér: Ílias, J. Laichter, Praha 1926, 1934
[34] Homér: Odysseia, Odeon, Praha 1967
[35] R. Hošek: Země bohů a lidí. Pohledy do řeckého dávnověku, Svoboda, Praha 1972
[36] G. Childe: Na prahu dějin, Orbis, Praha 1966
[37] G. Childe: Člověk svým tvůrcem, Svoboda, Praha 1949
[38] A. P. Juškevič (red.): Istorija matěmatiki I, II, III, Nauka, Moskva 1970, 1970, 1972
[39] F. Ch. Kessidi: Od mýtu k logu, Pravda a Svoboda, Bratislava 1976
[40] F. Ch. Kessidi: Hérakleitos, Svoboda, Praha 1985
[41] F. Ch. Kessidi: Sókratés, Svoboda, Praha 1980
[42] M. Kline: Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, New York 1972
[43] A. Kolman: Dějiny matematiky ve starověku, Academia, Praha 1968
[44] A. Kolman: O podstatě a původu pythagoreismu, Česká mysl 40(1946–47), 141–152, 240–253
[45] A. G. Konforovič: Významné matematické úlohy, SPN, Praha 1989
[46] Z. Kratochvíl: Mýtus, filosofie a věda I, II, Praha 1993
[47] Z. Kratochvíl: Studie o křesťanské a řecké filosofii, ČKA, Praha 1994
[48] E. Landau: Über quadrierbare Kreisbodenecke, Berichte Berliner Math. Ges. 2(1903), 1–6
[49] D. Machovec: Dějiny antické filosofie, Jinočany 1993
[50] O. Neugebauer: The Exact Sciences in Antiquity, New York, Dover 1969
[51] F. Novotný: O Platónovi I - III, Laichter, Praha 1948–49, IV, Academia, Praha 1970
[52] P. Oliva: Zrození řecké civilizace, Praha 1976
[53] J. Patočka: Předsokratovská filosofie, FF UK, Praha 1967
[54] J. Patočka: Sókratés, SPN, Praha 1991
[55] J. Patočka: Platón, SPN, Praha 1992
[56] Platón: Euthydémos. Menón, OIKOYMENH, Edice OIKÚMENÉ, Praha 1992
[57] Platon: Dialógy I, II, III, Tatran, Bratislava 1990
[58] B. Riečan: Cis a des alebo temperované ladenie, Matematické obzory 38(1992), 47–55
[59] Řečtí atomisté, Svoboda, Praha 1980
[60] E. Scholz (Hrsg.): Geschichte der Algebra. Eine Einführung, Wissenschaftsverlag, Mannheim/Wien/Zürich 1990
[61] Š. Schwarz: Základy náuky o riešení rovníc, SAV, Bratislava 1967
[62] Slovník antické kultury, Svoboda, Praha 1974
[63] J. Stillwell: Mathematics and Its History, Springer–Verlag 1989
[64] H. J. Störig: Malé dějiny filozofie, Zvon, Praha 1991, 1992, 1993
[65] D. E. Strong: Antické umění, ARTIA, Praha 1970
[66] D. J. Struik: Dějiny matematiky, Orbis, Praha 1963
[67] F. J. Swetz, T. I. Kao: Was Pythagoras Chinese? The Pennsylvania State University Press 1977, 1980

[68] A. Swiderková: Helada králů, Praha 1972
[69] A. Swiderková: Tvář helenistického světa, Praha 1983
[70] G. Thompson: První filosofové, O staré řecké společnosti II, SNPL, Praha 1958
[71] J. P. Vernant: Počátky řeckého myšlení, OIKOYMENH, Edice OIKŮMENÉ, Praha 1993
[72] P. Vopěnka: Rozpravy s geometrií, Panorama, Praha 1989
[73] M. J. Vygodskij: Arifmetika i algebra v drevnem mire, Nauka, Moskva 1967
[74] B. L. van der Waerden: Ontwakende wetenschap, egyptische, babylonysche en criekse wiskunde, P. Noordhoff N. V., Groningen 1950 (anglický překlad: Science Awakening, Oxford University Press, New York 1961, ruský překlad: Probuždajuščajasja nauka, GIFML, Moskva 1959)
[75] B. L. van der Waerden: Geometry and Algebra in Ancient Civilizations, Springer–Verlag, Berlin/Heidelberg/New York/Tokyo 1983
[76] S. Wagon: Kvadratura kruhu ve dvacátém století, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, 28(1983), 320–328
[77] Xenofón: Řecké dějiny, Svoboda, Praha 1982
[78] Xenofón: Vzpomínky na Sókrata, Svoboda, Praha 1972
[79] V. Zamarovský: Řecký zázrak, Mladá Fronta Praha 1972
[80] V. Zamarovský: Objevení Tróje, Mladá Fronta, Praha 1970
[81] V. Zamarovský: Vzkříšení Olympie, Olympia, Praha 1980
[82] V. Zamarovský: Bohové a hrdinové antických bájí, Praha 1960
[83] V. Zamarovský: Za sedmi divy světa, Albatros, Praha 1980
[84] Š. Znám a kol.: Pohl'ad do dejín matematiky, ALFA, SNTL, Bratislava, Praha 1986
[85] Zlomky předsokratovských myslitelů, Praha 1944, nakl. ČSAV, Praha 1962 (2. vyd.)
[86] J. Žáčková: Problém kvadratury kruhu a Lambertův důkaz iracionality čísla π, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 11(1966), 240–250

Pýthagorás

Byl pak tu muž, jenž ze Samu pocházel, prchl však z něho
před pány, tyranskou vládu měl v záští a z vlastní své vůle
vyhnancem byl. Ten muž až k bohům pronikl v duchu,
vzdáleným v končinách nebes, a postřehl duševním zrakem
všechno, co lidským očím kdy příroda vzala a skryla.
Když pak prozkoumal vše svou bdělou prací a duchem,
předkládal veřejně nauku svou a mlčícím žákům,
žasnoucím nad jeho slovy, rád vykládal velkého světa
počátky, příčiny všeho, a učil, co to je božstvo,
co jest příroda, odkud je blesk a z čeho jsou sněhy,
zdali snad rozráží vítr či Jupiter oblaka hřmící,
cože to otřásá zemí, dle jakého zákona hvězdy
krouží, i vše, co skryto. On první zavrhl přísně
předkládat na stůl maso, a první otevřel ústa
k takovým moudrým slovům, ač nedošla bohužel víry:

„Lidé, hříšným jídlem se varujte poskvrňovati
těla! Obilí máte a ovoce, které svou tíhou
sklání haluze k zemi, a na révě nalité hrozny;
máte i rostliny sladké a takové, které se mohou
zjemnit a změkčit v ohni; a nikdo vám mléčného moku
nebere, nebere med, jenž voní mateřídouškou.
Hýřivě dává země jak bohatství, tak také pokrm
lahodný, dává co jísti, a bez vraždy, prolití krve.
Masem ukájí hlad jen zvěř, a ještě ne všechna!“

....

Publius Ovidius Naso: *Proměny*, přeložil F. Stiebitz

....

... přichází Meton s velikými hůlkami, rozmanitě upravenými.

Meton

Já přicházím –

Pisthetairos

Ha, tu je nový chlap! Co tady chceš? Kam míří záměr tvůj? Co zamýšlíš? Nač jdeš tak vyzbrojen?

Meton

Chci rozměřiti vzduch a rozděliti jej na ulice.

Pisthetairos

Bozi! Kdopak jsi?

Meton

uraženě

Kdo jsem? Jsem geometr Meton přec, a zná mě s Kocourkovem celý svět!

Pisthetairos

A co to neseš?

Meton

Na vzduch měřítka. Hle, vzduch se všeobecně podobá poklopu na sýr. Tedy přiložím to pravítko zde k obvodu a shora zasadím to kružítko – nu, rozumíš mi?

Pisthetairos

Čerta rozumím!

Meton

Pak přiložím to přímé měřítko, by vznikly v kruhu čtyři výseče, a v středu umístíme náměstí, tam všechny třídy přímo povedou jak k svému centru – asi jako z hvězd, jež jsou přec koule, přímo paprsky se rozbíhají z centra na stranu.

Pisthetairos

Můj bože, nový Thales! – Metone!

Meton

Co jest?

Pisthetairos

Já smýšlím s tebou dobře: jdi, ať už jsi v prachu – poslechni mých slov!

Meton

postrašeně

Co se tu děje?

Pisthetairos

Jako ve Spartě je tady na cizince honička; jsou mozky vzrušeny a po městě tu řádí výprasková nákaza.

Meton

Což je tu vzbouření?

Pisthetairos

To ne, bůh chraň!

Meton

Tak čím to přijde –

Pisthetairos

Lid se usnesl, že všechny podvodníky utluče.

Meton

To já se ztratím –

Pisthetairos

Ano, není-li už pozdě.

Bije ho bičem.

Hle, už jde ta nákaza –

Meton

prchaje

Já nešťastník! Au!

Pisthetairos

Neřek' jsem ti to už dávno? Jen se odtud rysuj pryč!

....

Aristofanés: *Ptáci*, přeložil F. Stiebitz

....

Kreslení prasátek se zavřenýma očima, které zavedla o jednom masopustním večeru sama nejvyšší místa a jež od té doby bylo hojně pěstováno, vyvinulo se v geometrická cvičení trpělivosti, na něž časem vynakládali své duchovní síly všichni hosté na Berghofu a jimž náležely i poslední myšlenky a projevy energie umírajících. Po týdny a týdny žil celý ústav ve znamení složité figury, která se skládala aspoň z osmi velkých a malých kruhů a několika protínajících se trojúhelníků. Hosté měli mnohotvárný plošný útvar nakreslit jedním tahem; nejvyšší metou však bylo dokázat to s očima pevně zavázanýma — a to se podařilo, zamhouříme-li oči nad nepatrnými nedokonalostmi, jen státnímu zástupci Paravantovi, který byl hlavním představitelem této scestné důvtipnosti.

Víme, že propadl matematice, víme to od samého dvorního rady a známe také umravňující pružiny této vášně, neboť jsme slyšeli velebit její zchlazující účinky, které otupovaly tělesné žádosti; kdyby bylo více lidí následovalo tohoto příkladu, byla by bývala patrně zbytečná některá opatření, jež musila správa sanatoria v poslední době učinit. Tato opatření záležela v tom, že všechny průchody mezi balkóny byly uzavřeny dvířky, neboť přepážka z mléčného skla mezi nimi nesahala až k zábradlí; dvířka zamykal na noc lázeňský a všichni se tomu pošklebovali. Od té doby těšily se velké oblibě pokoje v prvním poschodí nad verandou, kde se dala přelézt balustráda, po přečnívající skleněné střeše obejít dvířka a dostat se z oddělení do oddělení. Kdyby šlo jen o státního zástupce, nemusila být tato discipinární novinka vůbec zaváděna. Paravant už dávno zdolal těžké pokušení, kterému byl vystaven zjevem egyptské Fatmy, a to byla poslední žena, jež vzburcovala jeho přirozené sklony. S dvojnásobným zanícením vrhal se od té doby do náručí jasnooké bohyně, o jejíž uklidňující moci dvorní rada dovedl pronést taková mravní ponaučení, a stejnou vytrvalost a sportovní houževnatost, se kterou dříve — před svou tak často prodlužovanou dovolenou, z níž se hrozil stát trvalý odpočinek — usvědčoval ubohé hříšníky, vynakládal teď na problém, jemuž ve dne v noci patřilo všechno jeho přemýšlení, a tento problém nebyl nic jiného než kvadratura kruhu.

Tento z kolejí vyšinutý úředník nabyl při svých studiích přesvědčení, že důkazy, jimiž věda dovozuje nemožnost takové konstrukce, neobstojí a že plánující prozřetelnost vyvedla právě jeho, Paravanta, ze světa smrtelníků tam dole a přivedla ho sem, protože ho vyvolila, aby tento transcendentní cíl přenesl do sféry, kde je možno dosáhnout ho s přesností, jaká je na světě vůbec možná. Takové to s ním bylo. Kreslil kruhy a počítal, kudy chodil, pokrýval hromady papíru obrazci, písmeny, číslicemi a algebraickými symboly a jeho opálený obličej, obličej muže napohled skrznaskrz zdravého, měl vizionářský a zarytý výraz maniaka.

Mluvil výhradně a strašně jednotvárně o poměrném čísle π, o tomto zatraceném zlomku, který Zacharias Dase, obdařený nicotným nadáním počítat zpaměti, jednoho dne vypočetl na dvě stě desetinných míst — bylo to docela zbytečné, protože ani dvěma tisíci desetinných míst by se nebyl přiblížil nedosažitelné přesnosti tak, aby se dalo říci, že se přesnost zvětšila. Všichni prchali před utýraným myslitelem, neboť když se mu podařilo někoho zadržet, na toho se snesl žhavý proud jeho řeči, který v něm měl vzbudit pocit hanby nad tím, jak je lidský duch potřísněn zoufalou iracionalitou tohoto mystického vztahu. Neplodnost věčného násobení průměru číslem π, aby vypočetl obsah čtverce nad poloměrem a plochu kruhu, způsobila, že státní návladní propadal pochybnostem, zda si snad lidstvo vyřešení tohoto problému od dob Archimedových příliš neztížilo a zda snad řešení není ve skutečnosti dětsky prosté. Jakže, což nelze z kružnice udělat přímku a každou přímku zase ohnout v kružnici? Někdy si Paravant myslil, že je blízek odhalení. Často vysedal ještě pozdě večer v opuštěné a špatně osvětlené jídelně u stolu, z něhož stáhl ubrus, a na holé desce usilovně utvářel z tkanice kruh a pak jej prudkým pohybem natáhl do přímky, potom však opět seděl s hlavou v dlaních a oddával se trpkému přemítání. Dvorní rada ho tu a tam v této trudnomyslné hře podporoval a vůbec ho v tomto jeho koníčku povzbuzoval. Také k Hansi Castorpovi přišel tento trpitel jednou se svým zamilovaným soužením, a pak k němu přicházel častěji, protože u něho našel hodně přátelského pochopení a citlivé účasti pro tajemství kruhu. Znázorňoval mladému muži zoufalé π, ukazuje mu přesný nákres, na kterém byla nejvýš pracně nakreslena kružnice, jež byla vedena tak těsně, jak jen je v lidských silách, mezi dvěma mnohoúhelníky o nesmírném počtu drobounkých stran, z nichž jeden byl kružnici vepsán a druhý opsán. To, co zbývá, to zakřivení, které uniká racionálnímu zachycení ve výpočtu — to je právě π, řekl státní zástupce a chvěla se mu při tom brada! Hans Castorp při všem pochopení nedovedl se tolik pro π nadchnout jako státní zástupce. Říkal, že je to šaškovina, radil panu Paravantovi, aby se při té své honičce moc neuhřál, a hovořil o neprodlužitelných bodech obratu, z nichž se skládá kruh od svého neexistujícího začátku do svého neexistujícího konce, i o nezřízené melancholii, která tkví ve věčnosti, jež ubíhá sama v sobě bez trvalého směru s takovou odevzdanou nábožností, že aspoň načas měla na státního zástupce uklidňující vliv.

....

Thomas Mann: *Kouzelný vrch*, přeložili J. Fučíková, B. a P. Levitovi

....

„Johne,“ zapřísahala ho Anna, „nech už toho podmáslí! Rozpaluje tě jenom do nepříčetnosti. Z toho nikdy nic kloudného nevzešlo.“

„Inu, holka,“ zasmál se trpce hospodář s hlavou opět ve džbánu, „co na tom, jestli se rozpálím do nepříčetnosti!“

„Ach, Johne, měl by sis radši číst v Knize knih než drsně proklínat! Tu máš, tatínku, čti si —“ a podala mu z poličky ohmataný černý svazek. Enderby se na okamžik odmlčel drže svazek v ruce. On ani jeho žena nechodívali v první třídě obecné do náboženství, avšak prvotřídní laická výchova, jíž se hospodáři dostalo, mu za to byla dobrou náhradou.

„Tu máš tu knihu!“ řekla Anna. „Čti si, Johne, v této hodině zármutku, to tě utěší!“

Hospodář jí vzal z ruky ohmataný výtisk Euklidových *Základů* a odloživ se zbožnou úctou klobouk, přečetl nahlas: „Úhly při základně rovnoramenného trojúhelníka jsou si rovné, a kdybychom sestrojili obě ramena, hle, i ona budou rovna jedno druhému.“

Hospodář odložil knihu.

„Není to nic platné, Anno. Nemůžu dneska nějak číst ta slova slov.“

Povstal, dovrávoral ke džbánu s podmáslím, a než mu žena mohla zadržet ruku, vyprázdnil obsah do poslední krůpěje.

Pak ztěžka klesl na židli.

....

Sosnová polena v krbu znovu zaplápolala. Podmáslí kolovalo z ruky do ruky. William i Henry znovu vyprávěli o svých dobrodružstvích. Zasklenými dveřmi vpadl paprsek božíhodového jitra.

„Inu, synkové moji,“ řekl John Enderby, „od nynějška se vždycky držme přímé cesty! Jak to stojí v Knize knih: Přímá čára je taková čára, která se táhne rovně mezi oběma svými krajními body.“

Stephen Leacock: *Literární poklesky*, přeložil F. Vrba