Karel Mačák

Bernard Bolzano a počet pravděpodobnosti

In: Jindřich Bečvář (editor); Eduard Fuchs (editor): Matematika v 19. století. Sborník přednášek z 15. letní školy Historie matematiky, Vyškov, 26.-30.8.1994. (Czech). Praha: Prometheus, 1996. pp. 38–55.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/400574

BERNARD BOLZANO

(1781 – 1848)

BERNARD BOLZANO A POČET PRAVDĚPODOBNOSTI

KAREL MAČÁK

1. Úvod

Roku 1834 vyšla anonymně Bolzanova kniha [1]. I když se jedná o spis náboženský, obsahuje i část zajímavou pro pohled na Bolzana jako matematika. Základem této „matematické" části je §15 druhého dílu uvedené knihy, nadepsaný *Ueber den Begriff der Wahrscheinlichkeit und die verschiedenen Arten derselben* (*O pojmu pravděpodobnosti a jejich různých druzích*); pojmy a vzorce tohoto paragrafu jsou pak využity bezprostředně v §§17, 19, 21, 22 a 27. Všechny tyto paragrafy patří do druhé kapitoly II. dílu knihy [1] nazvané *Ueber die Natur der historischen Erkenntniß, besonders in Hinsicht auf Wunder* (*O povaze historického poznání, obzvláště se zřetelem na zázraky*) a lze je chápat jako projev Bolzanovy snahy vyvrátit názory vyslovené v práci skotského matematika a teologa Johna Craiga [2].

V předloženém příspěvku budou stručně shrnuty Bolzanovy „pravděpodobnostní" názory obsažené ve shora uvedených paragrafech knihy [1] a budou uvedeny některé souvislosti historické i některé názory současné, které mohou být zajímavé pro posouzení Bolzanova vztahu k počtu pravděpodobnosti. Termín „počet pravděpodobnosti" je zde volen proto, že se nám jeví pro Bolzanovy úvahy v knize [1] výstižnější než dnes obvyklejší termín „teorie pravděpodobnosti".

2. Pravděpodobnost v *Lehrbuch der Religionswissenschaft*

Druhá kapitola II. dílu knihy [1] obsahuje §§ 13 — 30 a má rozsah 39 stran. Dva úvodní paragrafy ponecháme stranou a přikročíme přímo k výkladu již zmíněného §15, který je poměrně rozsáhlý (více než 9 stran) a je členěn do řady dalších bodů a podbodů.

2. 1. Základní pojmy

§15/2.

Bolzano nejprve upozorňuje:

Ich werde mich aber hier in keine eigentliche Erklärung oder Zerlegung des Begriffes der Wahrscheinlichkeit in seine einfachen Bestandtheile einlassen; sondern mich mit einer bloßen Verständigung über ihn begnügen.

(*Nebudu se zde však pouštět do vlastního objasňování nebo rozkladu pojmu pravděpodobnosti na jeho jednoduché složky; spokojím se s pouhým jeho pochopením.*)

Toto upozornění považujeme za důležité pro porovnání s *Wissenschaftslehre* [3], obzvláště pak s jejím §161, který má název *Verhältniß der vergleichungsweisen Gültigkeit oder der Wahrscheinlichkeit eines Satzes in Hinsicht auf andere Sätze* (*Vztah relativní platnosti čili pravděpodobnosti nějaké věty s ohledem na jiné věty*) a jehož matematický obsah je takřka totožný s obsahem námi studovaného §15 v [1], zaváděné pojmy jsou však v něm rozebírány velice podrobně.

§15/4.

Výchozím pojmem je pojem *der Grad der Wahrscheinlichkeit* (*stupeň pravděpodobnosti*), vymezený v tomto bodu pouze obecně:

Der Grad von Zuversicht, mit welchem wir etwas erwarten, oder vermuthen, oder annehmen können, ist der Grad der Wahrscheinlichkeit, welchen es hat.

(*Stupeň důvěry, se kterým můžeme něco očekávat, nebo tušit, nebo předpokládat, je stupeň pravděpodobnosti, který to má.*)

§15/5.

Zde je podána přesná definice, totožná v podstatě s tím, čemu se dnes říká „klasická definice pravděpodobnosti“:

Die Wahrscheinlichkeit eines Urtheiles ist eine derjenigen Beschaffenheiten, die einen Grad oder eine Größe haben; und zwar wird diese Größe durch einen Bruch gemessen. Um nämlich zu bestimmen, mit welchem Grade der Wahrscheinlichkeit angenommen werden kann, daß unter mehreren nicht erweislich falschen, d. h. problematisch möglichen Antworten auf eine Frage die Antwort A die richtige sey, müssen wir zählen, wie viele nicht erweislich falsche Fälle es in Betreff der Antwort auf die Frage gibt, die alle, weil ein gleicher Theilgrund für sie spricht, auch eine gleiche Wahrscheinlichkeit haben. Die Summe dieser Fälle gibt uns den Nenner des Bruches. Dann müssen wir zählen, wie viele dieser Fälle es gibt, bei deren Annahme die Antwort A zum Vorscheine kommt. Die Summe dieser Fälle gibt uns den Zähler des Bruches.

(*Pravděpodobnost nějakého úsudku je jeho vlastnost, která má nějaký stupeň čili velikost; tato velikost je měřena zlomkem. Abychom totiž stanovili, s jakým stupněm pravděpodobnosti může být předpokládáno, že mezi mnoha nikoli prokazatelně chybnými, tudíž problematicky možnými odpověďmi na nějakou otázku je odpověď A správná, musíme spočítat, kolik existuje případů vzhledem k odpovědi na otázku, které nejsou prokazatelně chybné a které všechny, protože pro ně mluví stejný částečný důvod, mají také stejnou pravděpodobnost. Součet těchto případů nám dává jmenovatel zlomku. Pak musíme spočítat, kolik existuje těchto případů, při kterých se objevuje odpověď A. Součet těchto případů nám dává čitatel zlomku.*)

Následuje příklad: jestliže je v urně 30 koulí bílých a 10 černých, pak stupeň pravděpodobnosti, s nímž lze předpokládat, že při náhodném výběru bude vytažena bílá koule, je roven 3/4.

Z tohoto výchozího pojmu je v §15/(6 - 14) odvozena řada dalších pojmů; uveďme zde pro úplnost jejich přehled:

§15/7.

Je-li stupeň pravděpodobnosti roven 1, pak se jedná o jistotu (*die Gewißheit*).

§15/8.

Je-li stupeň pravděpodobnosti roven 1/2, jedná se o nejistotu (*die Zweifelhaftigkeit*).

§15/(11 – 12).

Je-li stupeň pravděpodobnosti hodně malý, mluvíme o nekonečně malé pravděpodobnosti nebo nekonečně velké nepravděpodobnosti. Případy s takovým stupněm pravděpodobnosti nazýváme morálně nemožné, neboť ve většině takových případů je povinností chovat se jako při úplné nemožnosti; jako příklad takového jevu je uvedeno sestavení prvního verše Iliady náhodným vytahováním písmen z krabice.

Opačná tvrzení se nazývají morálně jistá nebo morálně nutná.

§15/(13 – 14).

Je zavedena pravděpodobnost absolutní a relativní, která se dělí dále na vnější a vnitřní:

Diese nur aus Berücksichtigung gewisser Umstände allein hervorgehende Wahrscheinlichkeit eines Satzes heißt seine relative oder beziehungsweise Wahrscheinlichkeit, zum Unterschied von derjenigen, die er erhält, wenn wir auf alle uns bekannten Umstände oder Gründe merken, die seine absolute Wahrscheinlichkeit genannt wird.

Eine besondere Art der relativen Wahrscheinlichkeit eines Erfolges, nämlich diejenige, die aus der Betrachtung eines Zeugen entsteht, pflegt man die äußere zu nennen; und im Gegentheile diejenige Wahrscheinlichkeit desselben, welche man mit Berücksichtigung aller andern Umstände, die nur nicht Zeugnisse sind, erhält, nennt man die innere Wahrscheinlichkeit.

(*Tato pravděpodobnost nějaké věty, vycházející pouze ze zřetele na jisté okolnosti, se nazývá její relativní nebo vztažená pravděpodobnost, na rozdíl od té, kterou (ona věta) získá, budeme-li přihlížet ke všem nám známým okolnostem nebo důvodům, která je nazývána její absolutní pravděpodobností.*

Zvláštní druh relativní pravděpodobnosti nějakého výsledku, totiž ta, která vznikne z pozorování jednoho svědka, se nazývá vnější; a naopak ona pravděpodobnost téhož, kterou obdržíme při přihlédnutí ke všem jiným okolnostem, které jen nejsou svědectvími, se nazývá vnitřní pravděpodobností.)

2. 2. Vzorce a příklady

Přikročme nyní k výkladu 15. bodu v §15. Tento bod je co do rozsahu (více než 3 stránky) a z našeho hlediska i co do obsahu těžištěm celé 2. kapitoly II. dílu knihy [1]. Je dále členěn do sedmi podbodů a my se tohoto členění v podstatě přidržíme. Poznamenejme ještě, že Bolzano všechna matematická tvrzení v této části knihy dokazuje z uvedené definice pravděpodobnosti.

2. 2. 1. „Klasické“ vzorce

§15/15/a.

Obsahuje větu o pravděpodobnosti doplňkového jevu:

Wenn der Grad der Wahrscheinlichkeit der Behauptung des wirklichen Eintreffens eines Erfolges $= x$ *ist: so ist der Grad der Wahrscheinlichkeit des contradiktorischen Gegentheils, oder der Behauptung, daß sich der Erfolg nicht zutragen werde* $= 1 - x$.

(*Je-li stupeň pravděpodobnosti tvrzení o skutečném výskytu nějakého výsledku* $= x$: *pak je stupeň pravděpodobnosti kontradiktorického opaku, čili tvrzení, že se výsledek nevyskytnul* $= 1 - x$.)

§15/15/b.

Obsahuje větu o násobení pravděpodobnosti pro nezávislé náhodné jevy, přičemž pojem nezávislosti se však u Bolzana neobjevuje a nezávislost se zřejmě pouze intuitivně předpokládá:

Die Wahrscheinlichkeit eines Erfolges M, *der nur bewirkt wird durch die Vereinigung zweier Umstände* A *und* B, *gleicht dem Producte aus den Wahrscheinlichkeiten dieser beiden.*

(*Pravděpodobnost nějakého výsledku* M, *který může být způsoben jen spojením dvou okolností* A *a* B, *je roven součinu pravděpodobností těchto obou.*)

V následujícím podbodu §15/15/c je toto tvrzení zobecněno na více než dva jevy. V §17 *Erfordernisse zur Glaubwürdigkeit eines unmittelbaren Zeugen* (*Požadavky k věrohodnosti bezprostředního svědka*) je pak řešen následující příklad:

Je-li pro nějakého svědka stupeň pravděpodobnosti toho, že

1. zná věc, o které mluví, roven 9/10,
2. má schopnost sdělovat myšlenky, roven 4/5,
3. je pravdomluvný, roven 2/3,

pak se můžeme na jeho výpověď spolehnout se stupněm pravděpodobnosti

$$\frac{9}{10} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{12}{25} .$$

2. 2. 2. Dva speciální vzorce

První vzorec.

§15/15/d obsahuje vzorec, který je pro Bolzana v daných souvislostech skoro tím nejdůležitějším, formulace problému však není bohužel příliš průhledná:

Wenn die Wahrscheinlichkeit eines Erfolges M *in einer gewissen Rücksicht* A *(d. h. wegen des Vorhandenseyns des Umstandes* A*)* $= x$; *in einer andern Rücksicht* B *(d. h. wegen des Vorhandenseyns des Umstandes* B*)* $= y$ *ist: so ist der Grad der Wahrscheinlichkeit des Erfolges* M *aus der Vereinigung von beiden Rücksichten (d. h. weil beide Umstände zugleich vorhanden sind)* *oder die absolute Wahrscheinlichkeit, die aus Vereinigung jener zwei relativen hervorgeht* =

$$\frac{xy}{xy + (1-x)(1-y)} \tag{1}$$

(Je-li pravděpodobnost výsledku M v jistém ohledu A (tj. kvůli výskytu okolnosti A) = x; v jiném ohledu B (tj. kvůli výskytu okolnosti B) = y: pak je stupeň pravděpodobnosti ze spojení obou ohledů (tj. vyskytnou-li se obě okolnosti současně) čili absolutní pravděpodobnost vznikající ze spojení oněch dvou relativních $= (xy)/[xy + (1-x)(1-y)]$.)

Tvrzení je sice odvozeno, ale ani toto odvození není zcela jasné. Protože je však stejná otázka velice podrobně probírána v §161 v [3], uveďme zde pro ilustraci jeden příklad z tohoto pramene:

V jedné urně je 30 černých a 20 bílých koulí, ve druhé urně 70 černých a 50 bílých koulí. Z každé urny byla vytažena jedna koule a víme, že obě byly stejné barvy. Pak pravděpodobnost toho, že obě vytažené koule jsou černé, je dle (1)

$$\frac{\frac{30}{50}\frac{70}{120}}{\frac{30}{50}\frac{70}{120} + (1-\frac{30}{50})(1-\frac{70}{120})} = \frac{21}{31} .$$

Dnešní řešení by spočívalo v použití Bayesovy formule. Označíme:
jev A_1 = obě vytažené koule jsou černé,

$$P(A_1) = \frac{30}{50}\frac{70}{120} = \frac{21}{60} ;$$

jev A_2 = obě vytažené koule jsou bílé,

$$P(A_2) = \frac{20}{50}\frac{50}{120} = \frac{10}{60} ;$$

jev B = obě vytažené koule jsou stejné,

$$P(B/A_1) = P(B/A_2) = 1 ;$$

dostaneme pak

$$P(A_1/B) = \frac{21}{31} .$$

Bolzano ovšem míří k úlohám odlišného charakteru, totiž k posuzování věrohodnosti tvrzení založených na nějakých svědectvích. K tomu však lze opět použít vzorce (1), což je v §161 knihy [3] ilustrováno na dvou příkladech, které zde ocitujeme.

Nejdříve je uvedeno totéž jako v předešlém příkladu, ale s jevy
A_1 = oba svědci mluví pravdu;
A_2 = oba svědci lžou;
B = oba svědci říkají totéž.

Gesetzt, der Grad der Wahrscheinlichkeit, den ein gewisses Ereigniß bloß durch die Aussage des Zeugen A erhält, wäre 3/5, *und der Grad der Wahrscheinlichkeit, den es bloß durch die Aussage des Zeugen B hat,* = 7/12; *so wird, weil wegen der Uebereinstimmung beider Zeugen nur Eines von Beidem Statt finden kann, entweder daß Beide die Wahrheit sprechen oder daß Beide uns täuschen, der Grad der Wahrscheinlichkeit, den das Ereigniß aus der Vereinigung beider Zeugen erhält,* = 21/31.

(*Předpokládejme, že stupeň pravděpodobnosti, který získá jistý jev pouze výpovědí svědka A, je* 3/5, *a stupeň pravděpodobnosti, který má pouze z výpovědi svědka B,* = 7/12; *protože kvůli souhlasu obou svědků může nastat jen jedno ze dvojího, buď že oba mluví pravdu nebo že nás oba klamou, bude stupeň pravděpodobnosti, který jev získá ze spojení obou svědectví,* = 21/35.)

Následující příklad ukazuje, že vzorce (1) lze použít, i když si oba svědci protiřečí:

Auch in dem Falle, wenn ein oder etliche Sätze wider den zu beweisenden Satz sprechen (z. B. Zeugen, die das Geschehenseyn des Ereignisses läugnen), kann man den obigen Lehrsatz gebrauchen, wenn man sich vorstellt, daß statt der Voraussetzung, die der Verneinung unsers Satzes die Wahrscheinlichkeit π *gäbe, eine Voraussetzung vorhanden sey, die seiner Bejahung die Wahrscheinlichkeit* $1-\pi$ *ertheilt. So muß die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, wenn ein Zeuge mit der Wahrscheinlichkeit* = 4/5 *dafür, und ein anderer mit der Wahrscheinlichkeit* = 3/4 *dagegen spricht, eben so gewiß seyn, als die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, für das sich zwei Zeugen, der eine mit der Wahrscheinlichkeit* 4/5, *der andere mit der Wahrscheinlichkeit* 1/4 *erklären; also* = 4/7.

(*Také v případě, že jedna nebo několik vět mluví proti dokazované větě (např. svědkové, kteří výskyt jevu popírají), můžeme shora uvedené poučky použít, představíme-li si, že místo předpokladu, který popření naší věty udílí pravděpodobnost* π, *máme k dispozici předpoklad, který jejímu schválení udílí pravděpodobnost* $1-\pi$. *Musí tedy být pravděpodobnost nějakého jevu, když jeden svědek mluví s pravděpodobností* 4/5 *pro něj a jiný s pravděpodobností* 3/4 *proti němu, právě tak jistá jako pravděpodobnost jevu, pro který mluví dva svědkové, jeden s pravděpodobností* 4/5, *druhý s pravděpodobností* 1/4; *tedy* = 4/7.)

Vraťme se nyní zpět k naší učebnici náboženství. V §15/15/e je vzorec (1) zobecněn na případ více než dvou okolností, v §15/15/f je diskutován případ $x = 1/2$.

Za aplikaci vzorce (1) lze považovat §19 a částečně i §21.

Užití vzorce (1) v §19.

Tento paragraf má název *Bestimmung der absoluten Wahrscheinlichkeit einer Begebenheit, für die man eine Zeugenaussage hat* (*Stanovení absolutní pravděpodobnosti události, pro kterou máme jednu svědeckou výpověď*). V návaznosti na definice podané v §15/(13-14) je zde konstatováno, že každá událost může mít už sama o sobě (bez přihlédnutí k tomu, že byla oznámena nějakým svědkem) nějaký stupeň vnitřní pravděpodobnosti x, což ve spojení se stupněm pravděpodobnosti svědka y vede ke stupni absolutní pravděpodobnosti události vyjádřené pomocí vzorce (1). Hodnota tohoto zlomku se může libovolně přiblížit k jedničce, když se aspoň jedna z hodnot x, y může libovolně přiblížit k jedničce, což znamená, že nějaká událost může být věrohodná, i když je svědek málo věrohodný, ale její vnitřní pravděpodobnost je vysoká, nebo i když je její vnitřní pravděpodobnost malá, ale hodnověrnost svědka vysoká. K této myšlence se Bolzano vrací v §21 (*Ueber Zeugenmehrheit*) (*O množství svědků*), kde říká, že není nezbytně nutné mít více svědků k dostatečnému ujištění o tom, že nějaká událost nastala; dokonce i když událost má nekonečně malou vnitřní pravděpodobnost[1], může výpovědí jediného svědka získat morální jistotu (což je termín zavedený v §15/(11-12)).

V §19 se dále říká, že svědectvím svědka s hodnověrností 1/2 se hodnověrnost události nemění, a je-li hodnověrnost svědka menší než 1/2, pak jeho svědectví dokonce hodnověrnost události zmenšuje. Tuto situaci Bolzano podrobně komentuje a připomíná, že hodnověrnost svědka menší než 1/2 bude mimořádně řídkým případem[2] a v již zmíněném §21 k tomu uvádí příklad[3].

Druhý vzorec.

§15/15/g je posledním podbodem v §15/15 a obsahuje následující, pro Bolzanův výklad důležité tvrzení:

Wenn die Wahrscheinlichkeit eines Erfolges $M = x$, und eines andern N, der jenem widerstreitet $= y$ ist: so ist der Grad der Wahrscheinlichkeit, mit dem wir annehmen können, daß der Erfolg M eher, als der Erfolg N, Statt finden werde

$$= \frac{x}{x+y}\,. \tag{2}$$

(*Je-li pravděpodobnost nějakého výsledku $M = x$ a nějakého jiného N, který prvnímu odporuje, je $= y$: pak stupeň pravděpodobnosti, se kterým můžeme předpokládat, že výsledek M nastane spíše než výsledek N, je $= x/(x+y)$.*)

Ilustrujme toto tvrzení nejprve opět příkladem z §161 knihy [3]. Je-li v urně 100 koulí různých barev, přičemž jen 10 je černých, jen jedna je bílá, a víme-li,

---

[1] Bolzano píše „$= n/\infty$"

[2] *... denn selbst ein Zeuge, der wenig, oder gar keine Liebe zur Wahrheit hat, begründet bloß dadurch, daß er uns etwas erzählt, nicht sogleich die Vermuthung, daß es sich nicht werde zugetragen haben; zumal wenn das Ereigniß, das er erzählt, innere Unwahrscheinlichkeit hat.* (*... neboť dokonce i svědek, který má malou nebo vůbec žádnou lásku k pravdě, nevytváří pouze tím, že něco vypráví, hned dojem, že se to neudálo; zvláště když jev, o kterém vypráví, má vnitřní nepravděpodobnost.*)

[3] *Denn setzen wir, daß Jemand aus einer Million Kugeln, die mit den Nummern 1 bis 1000000 bezeichnet sind, Eine hervorgezogen habe, und daß zwei Zeugen (deren der Eine nichts von der Angabe des Anderen weiß) der herausgezogenen Kugel die Nummer 275 beilegen: wird es nicht schon durch diese Uebereinstimmung äußerst wahrscheinlich, daß beide die Wahrheit berichten, weil es äußerst unwahrscheinlich ist, daß sie sonst Beide auf dieselbe Zahl verfallen wären?* (*Předpokládejme totiž, že někdo vytáhnul jednu z milionu koulí, které jsou označené čísly od 1 do 1000000, a že dva svědkové (z nichž jeden neví nic o údaji druhého) přidělí vytažené kouli číslo 275; nebude už tímto souhlasem nejvýše pravděpodobné, že oba říkají pravdu, protože je nejvýše nepravděpodobné, že by jinak oba napadlo totéž číslo?*)

že náhodně vytažená koule je černá nebo bílá, pak pravděpodobnost toho, že ona vytažená koule je černá, je 10/11.

Nyní ukažme dva příklady z naší učebnice náboženství, při jejichž řešení Bolzano využívá vzorce (2).

V § 22 *Ueber Zeugenwiderspruch* (*O rozporu svědků*) je uveden příklad:

Wenn A erzählt, daß ein gewisser Mann über einen schmalen Steg gehend unversehens in's Wasser gefallen sey; B aber, daß er sich absichtlich hineingestürzt habe; und die Glaubwürdigkeit von A = 3/4, *die innere Glaubwürdigkeit seiner Erzählung* = 1/2; *die Glaubwürdigkeit des B dagegen* = 4/5, *die innere seiner Erzählung* 1/100 *ist; so wird (nach § 19)*[4] *die Wahrscheinlichkeit des ersten Ereignisses* = 3/4, *die des zweiten* = 4/103 *seyn. Also ist das Erste viel glaubwürdiger, als das Letztere, und der Grad der Wahrscheinlichkeit, mit dem wir annehmen können, das sich das Erste und nicht das Letzte zugetragen habe, ist (nach § 15 g)*[5] = 309/325.

(*Vypráví-li A, že jistý člověk šel po úzké lávce a znenadání spadnul do vody; B však (říká o onom člověku), že se úmyslně (do vody) vrhnul; a věrohodnost A* = 3/4, *vnitřní pravděpodobnost jeho vyprávění = 1/2; věrohodnost B naopak* = 4/5, *vnitřní (věrohodnost) jeho vyprávění je* 1/100, *pak bude dle § 19 (tj. dle (1)) pravděpodobnost prvního jevu* = 3/4, *druhého* = 4/103. *Je tedy to první mnohem věrohodnější než druhé a stupeň pravděpodobnosti, se kterým můžeme předpokládat, že se přihodilo první a ne druhé, je dle § 15 g (tj. dle (2))* = 309/325.)

V § 27 s názvem *Auch Wunder können historisch beglaubiget werden* (*Také zázraky mohou být historicky ověřeny*) končí Bolzanovy pravděpodobnostní úvahy v knize [1] příkladem:

Gesetzt, es wäre die innere Unwahrscheinlichkeit eines bestimmten Wunders $= n/\infty$; *die Unwahrscheinlichkeit jeder anderen Voraussetzung aber, welche man machen muß, wenn die Geschichte lügt, wäre noch viel größer, z. B.* $= n/m\infty$ *oder wohl gar* n/∞^2. *In diesem Falle wäre denn also die Wahrscheinlichkeit, mit der wir annehmen müssen, daß sich das Wunder zugetragen habe nach der Formel*

$$\frac{x}{x+y} = \frac{\frac{n}{\infty}}{\frac{n}{\infty} + \frac{n}{m\infty}} = \frac{m}{m+1},$$

welches, wenn m sehr groß ist, der Einheit so nahe kommen kann, als man nur immer will.

(*Předpokládejme, že by byla vnitřní nepravděpodobnost jistého zázraku* $= n/\infty$; *ale nepravděpodobnost jiného předpokladu, který bychom museli učinit, kdyby dějiny lhaly, by byla ještě mnohem větší, např.* $= n/m\infty$ *nebo dokonce* n/∞^2. *V takovém případě by tedy byla pravděpodobnost, s níž musíme předpokládat, že se zázrak stal, podle vzorce*

$$\frac{x}{x+y} = \frac{\frac{n}{\infty}}{\frac{n}{\infty} + \frac{n}{m\infty}} = \frac{m}{m+1},$$

[4] tj. dle (1)
[5] tj. dle (2)

což se může přiblížit jedničce tak blízko, jak jen chceme, je-li m hodně velké.)

3. Počet pravděpodobosti ve *Wissenschaftslehre*

V předešlé části příspěvku jsme výklad několikrát doplnili příklady převzatými z § 161 Bolzanova stěžejního díla *Wissenschaftslehre* [3]. Toto dílo vyšlo roku 1837, tedy později než námi studovaná kniha [1], bylo však dokončeno už před rokem 1830. Jak vidno z úplného titulu této knihy, Bolzano nekoncipoval *Wissenschaftslehre* jako spis matematický, ale logický, a v moderním vydání [3], ze kterého zde vycházíme, je každý svazek opatřen úvodem Jana Berga, ve kterém jsou Bolzanovy myšlenky zařazeny do kontextu moderní logiky; z našeho hlediska je zajímavé, že v souvislosti s pojmem pravděpodobnosti je zde Bolzano spojován s Wittgensteinem[6] a Carnapem[7]. Základní výklad o obsahu *Wissenschaftslehre* lze nalézt např. v [4], str. 67 – 89.

Jak jsme již řekli, námi studovanému § 15 knihy [1] odpovídá v [3] § 161, který je rozsáhlejší a z hlediska výkladu základních pojmů daleko zevrubnější, ale z matematického hlediska neobsahuje takřka nic navíc proti našemu § 15 v [1] až na několik příkladů (z nichž nejzajímavější jsme uvedli) a tvrzení obsažené v § 161/16, které by v dnešní symbolice mělo tvar

$$P(A \cup B) = 1 - (1 - P(A))(1 - P(B)) .$$

Toto tvrzení Bolzano ilustruje následujícím příkladem:

Sonach ist z. B. die Wahrscheinlichkeit, daß Jemand, der in zwei Urnen greift, in deren einer unter 50 *Kugeln* 40, *in deren anderer aber unter* 60 *Kugeln* 45 *schwarze sind, eine schwarze hervorholen werde,* $= 1 - (1 - 40/50)(1 - 45/60) = 19/20$.

(*Je tedy např. pravděpodobnost, že někdo, kdo sáhne do dvou uren, z nichž v jedné je z* 50 *koulí* 40 *černých, ve druhé z* 60 *koulí* 45 *černých, vytáhne černou,* $= 1 - (1 - 40/50)(1 - 45/60) = 19/20$.)

Z matematického hlediska je uvedené Bolzanovo tvrzení jistou analogií věty o sčítání pravděpodobnosti pro nezávislé náhodné jevy. Možná by mohlo být zajímavé zabývat se otázkou, v jaké časové posloupnosti vznikal § 161 v [3] a § 15 v [1], my se zde však spokojíme s konstatováním, že matematické obsahy obou těchto textů jsou takřka stejné a připojíme pouze dvě poznámky, které nám na základě *Wissenschaftslehre* umožní lépe chápat pravděpodobnostní problematiku v [1] (ostatně takto jsme už využili několika příkladů z § 161 v [3]).

---

[6]Wittgenstein, L.: *Tractatus logico-philosophicus.* Londýn 1922. (Česko-německý překlad Praha, OIKÚMENÉ 1993).

[7]Carnap, R.: *Logical foundations of probability.* Chicago 1950. (Český překlad prvních dvou kapitol viz Carnap, R.: *Problémy jazyka vědy.* Praha, Svoboda 1968, str. 166 – 220). K souvislostem mezi Bolzanem a Carnapem kromě prací uvedených v [3] viz též Starčenko, A. A., Tjagnibedina, O. S.: *Besonderheiten der wahrscheinlichkeitslogischen Forschungen B. Bolzanos.* In: *Bernard Bolzano. Studien und Quellen.* Berlin, Akademie – Verlag 1981.

Poznámka 1.

Asi hlavní rozdíl mezi dnešním matematickým chápáním pravděpodobnosti a pojetím Bolzanovým spočívá v tom, že dnes v matematice mluvíme o pravděpodobnosti nějakého jevu, zatímco Bolzano mluví o pravděpodobnosti (přesněji: o stupni pravděpodobnosti) nějakého soudu, tvrzení, věty. Je to zřejmé už z citací z § 15 knihy [1], které jsme uvedli v předešlé části, ale ve *Wissenschaftslehre* (která je důkladným spisem logickým, zatímco [1] je spis náboženský) je tato skutečnost uvedena daleko výrazněji; ocitujme např. z § 320 v [3], Bd. 13/2, S. 108:

Die Wahrscheinlichkeit ist und bleibt immer nur eine Beschaffenheit, die Sätzen überhaupt, gleichviel, ob sie für wahr oder nicht für wahr gehalten, ja auch nur vorgestellt werden, zukommt, ...

(*Pravděpodobnost je a zůstane vždy jen vlastností, která všeobecně přísluší větám, lhostejno, zda jsou považovány za pravdivé nebo nepravdivé, nebo zda jsou jen v představách.*)

Poznámka 2.

Bolzanovi nejde o výklad matematické teorie pravděpodobnosti, ale o důkladné pochopení jejich základních myšlenek. V § 161 v [3] k tomu říká:

Die Sätze[8] *sind nur einige der ersten und leichtesten, die in den Schriften über die Wahrscheinlichkeitsrechnung vorkommen. Ich habe aber geglaubt, den Ausdruck derselben hie und da etwas umständlicher einrichten zu müssen, als man es meistens thut.*

(*Tyto věty jsou jen některé z prvních a nejlehčích, které se vyskytují ve spisech o počtu pravděpodobnosti. Domníval jsem se však, že jejich vyjádření je třeba tu a tam uspořádat poněkud zevrubněji, než se to většinou dělá.*)

Z tohoto důvodu nepovažujeme za nutné porovnávat pravděpodobnostní pasáže v [1] s tehdejšími učebnicemi počtu pravděpodobnosti. Poznamenejme pouze, že Bolzano měl ve své knihovně Lacroixovu učebnici [5][9]; v námi studovaném § 161 knihy [3] je ze známých matematiků zabývajících se pravděpodobností citován ještě Laplace, ale v Bolzanově knihovně (uložené nyní v oddělení rukopisů a starých tisků Národní knihovny v Praze) žádný Laplaceův spis není a je tedy možné, že se jedná o citaci zprostředkovanou.

Uvážíme-li ovšem, že se v tomto příspěvku zabýváme Bolzanovým výkladem počtu pravděpodobnosti v učebnici náboženství [1] napsané před více než stopadesáti lety, pak musíme konstatovat, že Bolzano své potenciální čtenáře nijak nešetřil a uváděl je do počtu pravděpodobnosti skutečně důkladně.

---

[8](tj. věty o pravděpodobnosti v tomto paragrafu)

[9]Silvestre Francois Lacroix (1765 – 1843) (viz např. [6]) učil nejprve na různých vojenských školách, pak na Ecole normale supérieure. Učebnice [5] vyšla ve francouzštině poprvé r. 1816 a dosáhla už v r. 1836 svého čtvrté vydání ve francouzštině, takže ji lze hodnotit jako učebnici úspěšnou.

4 Motivace „pravděpodobnostní" části knihy [1]

Zabývat se (byť jen v omezeném rozsahu a na elementární úrovni) počtem pravděpodobnosti v učebnici náboženství je jistě velice neobvyklé a proto může být zajímavé podívat se podrobněji na motivaci, která Bolznana vedla k napsání příslušné části knihy [1].

Připomeňme nejprve, že Bolzanův výklad počtu pravděpodobnosti je v [1] součástí kapitoly nazvané *Ueber die Natur der historischen Erkenntniß, besonders in Hinsicht auf Wunder*, kde v úvodu říká (§ 13/4):

In neuerer Zeit hat man aber auf verschiedene Art gesucht, den historischen Glauben, besonders in Hinsicht auf Wunder, wankend zu machen, und behauptet, daß Erzählungen von Wundern, vornehmlich solchen, die sich vor vielen Jahrhunderten ereignet haben, nie strenge erweislich wären. Dergleichen Behauptungen haben z. B. Joh. Crayg, Dav. Hume, Bolinbroke, J. J. Rousseau, G. F. Bahrdt, Im. Kant u. m. A. vorgetragen.

(*V novější době byly však činěny různé pokusy rozkolísat historickou víru, obzvláště s ohledem na zázraky, a tvrdilo se, že vyprávění o zázracích, především o takových, které se odehrály před mnoha staletími, nebyla nikdy přísně dokazatelná. Stejná tvrzení předložili např. Joh. Crayg, Dav. Hume, Bolinbroke, J. J. Rousseau, G. F. Bahrdt, Im. Kant a mnozí další.*)

Bolzano hodlá použít počtu pravděpodobnosti jako nástroje k obraně víry proti námitkám uvedených badatelů, což znovu upřesňuje v § 15/15:

Wer einige Kenntnisse in der Buchstabenrechnung hat, wird auch noch folgende mathematische Sätze leicht zu verstehen vermögen, die ich nur darum hier beifügen will, weil sie zur gründlichen Widerlegung jener Einwürfe dienen, die selbst von Mathematikern, z. B. von Joh. Crayg, gegen die Möglichkeit der historischen Beglaubigung eines Wunders mit einem Anscheine von Gelehrsamkeit vorgebracht werden sind.

(*Kdo má nějaké znalosti v počítání se symboly*[10]*, bude také moci lehce porozumět následujícím matematickým větám, které zde chci uvést jen proto, že slouží k důkladnému vyvrácení oněch námitek, které byly vzneseny se zdáním učenosti proti možnosti historického ověření nějakého zázraku dokonce od matematiků, např. od Joh. Crayga.*)

Zdá se tedy, že hlavním motivem k napsání „pravděpodobnostní" části knihy [1] byla Bolzanova snaha vyrovnat se s názory skotského matematika a teologa Johna Craiga (1660 – 1731) (podrobnosti viz např. [7], str. 195). Tento muž od r. 1680 studoval v Cambridgi a v r. 1685 publikoval v Philosophical Transactions XVI, No. 183, p. 185 článek *Methodus figurarum lineis rectis & curvis comprehensarum quadraturas determinandi*, ve kterém uvedl do Anglie základní myšlenky Leibnizova diferenciálního počtu. Z našeho hlediska je však podstatné, že v r. 1699 publikoval spis *Theologiae christianae principia*

[10]doslova: „s písmeny"

mathematica[11]; tento nepříliš rozsáhlý spis (32 stránek osmerkového formátu) je v dějinách matematiky známý (viz např. [7], str. 56) a ve své době měl zřejmě značný ohlas (je např. citován i v již zmíněné učebnici [5]).

Bolzano měl tento spis ve své knihovně (viz [2]) a zdá se, že hlavně s tímto spisem polemizuje, neboť Craig svá teologická tvrzení rovněž dokazuje pomocí „pravděpodobnostní" terminologie.

Craigovo tvrzení, které Bolzano kritizuje, spočívá (stručně řečeno) v názoru, že věrohodnost svědectví o jakékoli události klesá s délkou řady svědků, kteří si svědectví předávají (a tato závislost je dle Craiga lineární), s časem, který od události uplynul (tato závislost je dle Craiga kvadratická) a se vzdáleností od místa události (což je rovněž kvadratická závislost). Při formulaci svých názorů užívá Craig termínu „historická pravděpodobnost", ale z jeho definic[12] je zřejmé, že s pravděpodobností v dnešním pojetí to nemá nic společného. Ubývání počáteční historické pravděpodobnosti počítá Craig jako součet pohybu rovnoměrného (délka řady svědků) a pohybů rovnoměrně zrychlených (čas, vzdálenost), případně více takovýchto pohybů (je-li více „paralelních" řad svědků); inspirace mechanikou je v této části Craigovy práce očividná.

Dle Craiga tato zákonitost platí i pro Písmo svaté a jeho práce byla možná populární hlavně díky tomu, že podle jeho výpočtů ([2], str. 55 – 56) by měla v roce 3150 klesnout víra v Písmo sv. na nulu, z čehož Craig odvodil (s odvoláním na evangelium sv. Lukáše, kap. 18, v. 8), že nejpozději v tomto roce dojde k Poslednímu soudu.

Svědčí o skutečně hluboké náboženské víře Bolzanově, že považoval za nutné vytáhnout do boje proti tomuto názoru, přičemž jako zbraň volil počet pravděpodobnosti. Protože se ovšem u Bolzana jednalo už o „skutečný" počet pravděpodobnosti, dostal se tím problém do zcela jiné matematické polohy než v podání Craigově. Bolzano totiž na základě svých vzorců (1) a (2) a souvisejících úvah tvrdí, že věrohodnost Písma sv. může být stejně veliká jako věrohodnost matematických tvrzení. Jeho argumenty ovšem nejsou vždy přesvědčivé; tak např. v již jednou citovaném § 27 říká:

... selbst jene wenigen Gelehrten, die keine Wunder auf fremdes Zeugniß annehmen wollten, doch manche andere Begebenheiten, die eine eben so große, wenn nicht noch größere innere Unwahrscheinlichkeit haben, als Wunder, auf bloßes Zeugniß glauben, z. B. daß von Zeit zu Zeit Steine vom Himmel herabgefallen seyen, u. dgl.

(*... dokonce i těch několik učenců, kteří by nechtěli přijmout žádné zázraky na základě cizího svědectví, přece jen věří na základě pouhého svědectví mnoha*

[11] Název spisu asi ne náhodou připomíná slavný spis Craigova učitele I. Newtona *Philosophiae naturalis principia mathematica.*

[12] *Probabilitas est apparentia convenientiae vel disconvenientiae duarum idearum per argumenta, quorum connexio non est constans, aut saltim talis esse non percipitur. Probabilitas historica est, quae deducitur ex testimoniis aliorum, qui suam affirmant observationem aut experientiam.* (*Pravděpodobnost je zjevnost souhlasu nebo nesouhlasu dvou myšlenek prostřednictvím argumentů, jejichž spojení není konstantní nebo aspoň jako takové není chápáno. Historická pravděpodobnost je taková, která je odvozena ze svědectví jiných, kteří uvádějí své pozorování nebo zkušenost.*)

jiným událostem, které mají právě tak velikou, ne-li ještě větší vnitřní nepravděpodobnost jako zázraky, např. že čas od času padají z nebe kameny.)

Bolzano tedy považuje meteority za jev méně pravděpodobný než biblické zázraky. Většina jeho argumentů má charakter morálně teologický; ocitujme zde na ukázku malou část § 30 *Ob historische Urtheile, besonders solche, wie sie der Glaube an eine Offenbarung erfordert, eben den Grad der Gewißheit, wie Urtheile a priori, ersteigen können?* (*Zda historické úsudky, zvlášť takové, které se zakládají na víře ve Zjevení, mohou dosáhnout stejného stupně jistoty, jako úsudky a priori?*), neboť tímto paragrafem uzavírá Bolzano námi studovanou kapitolu knihy [1] a pro matematiky to bude ukázka jiné stránky Bolzanova myšlení.

§ 30/6

Hieraus ergibt sich ferner, daß auch historische Erkenntnisse unter gewisssen Umständen einen Grad der Gewißheit ersteigen können, der selbst einem mathematischen Wissen nicht nachsteht. Das es ein Troja einst gegeben habe, ist eine bloß historische Behauptung, die gleichwohl jeder Vernünftige ganz so gewiß finden wird, als etwa den Pythagoräischen Lehrsatz vom Quadrate der Hypotenuse.

(*Z toho dále plyne, že také historické poznatky za jistých okolností mohou dosáhnout takového stupně jistoty, který se dokonce vyrovná matematickému vědění. Že kdysi existovala Troja, je pouhým historickým tvrzením, které nicméně každý rozumný shledá stejně jistým, jako asi Pythagorovu větu o čtverci přepony.*)

§ 30/7

Aber wird auch der Glaube an eine Offenbarung, zumal an eine solche, die vor Jahrtausenden schon gegeben worden ist, und deren Wunder sich auf uralte Zeugnisse stützen, einen solchen Grad der Zuverlässigkeit ersteigen können?

(*Bude však moci také víra ve Zjevení, zvlášť takové, které bylo dáno už před tisíciletími a jehož zázraky se opírají o prastará svědectví, dosáhnout takového stupně věrohodnosti?*)

§ 30/8

Einen eben so hohen, antworte ich, wo nicht einen noch höheren. Denn was ist dazu nöthig, damit der Glaube an eine solche Offenbarung nach sehr vernünftigen Gründen in uns entstehen könne? Nichts Anderes, als: daß wir uns

a) eine hinlänglich sichere Kenntniß von dem Inhalte dieser angeblichen Offenbarung verschaffen; dann uns

b) überzeugen, daß diese Lehren das Merkmal sittlicher Zuträglichkeit für uns besitzen; und daß wir es

c) gewissen außerordentlichen Begebenheiten verdanken, mit ihnen bekannt geworden zu seyn.

(*Stejně vysokého, odpovídám, ne-li ještě většího. Neboť co je nutné k tomu, aby v nás z velmi rozumných důvodů mohla vzniknout víra v takové Zjevení? Nic jiného, než:*

a) utvořit si dostatečně jistou znalost obsahu tohoto domnělého Zjevení; pak
b) přesvědčit se, že toto učení obsahuje pro nás znamení mravní prospěšnosti; a že
c) jsme s ním byli seznámeni dík jistým mimořádným okolnostem.)

V odstavcích § 30/9–11 Bolzano vysvětluje, že Zjevení dané nám Písmem svatým má uvedené vlastnosti a) – c) a celou 2. kapitolu II. dílu knihy uzavírá následujícím odstavcem:

§ 30/12

Und so ersehen wir denn, daß der Glaube an eine göttliche Offenbarung das Eigene hat, daß er, obschon auf historischen Sätzen von ungewisser Art beruhend, doch diese Ungewißheit nicht mit ihnen theilet, weil es sich hier durchgängig nicht darum handelt, wie die Sache an sich sey, sondern nur darum, wie sie uns erscheint. Was sich uns nach gehöriger Prüfung als göttliche Offenbarung darstellt, ist es auch in der Wahrheit.

(*A tak vidíme, že víře v Boží Zjevení — třebaže spočívá na historických větách nejisté povahy — je vlastní, že nesdílí tuto nejistotu, protože se zde veskrze nejedná o to, jak jsou věci o sobě, ale jen o to, jak se nám jeví. Co se nám po příslušném přezkoušení jeví jako Boží Zjevení, je jím také ve skutečnosti.*)

5. Současný pohled na problém

Otázka studovaná Bolzanem (tj. jak věrohodné závěry lze činit na základě nejistých výchozích tvrzení) je dodnes zkoumána (např. v rámci teorie expertních systémů) a existuje řada přístupů k této otázce. Tyto přístupy většinou nevycházejí z teorie pravděpodobnosti; zdá se, že jako matematický základ pro řešení této otázku se osvědčují spíš pojmy a metody vycházející z teorie fuzzy množin. Základní přehled problematiky lze nalézt např. v knihách [8, 9]; zde vyjdeme z matematického rozboru problému podaného v několika pracích P. Hájka (konkrétně z česky psané práce [10], protože anglicky psané práce téhož autora se nám nepodařilo bohužel získat) a podíváme se, jak by do této dnešní teorie zapadaly názory a postupy B. Bolzana.

Výchozí situaci v Bolzanovu § 15/15/d v knize [1] lze v Hájkově terminologii formulovat takto:

Nechť pravidlo (tj. implikace) $A \to M$ má váhu $x \in \langle 0,1\rangle$, pravidlo $B \to M$ má váhu $y \in \langle 0,1\rangle$; jiná pravidla k tvrzení M nevedou. Vzniká otázka, jaké binární operace $*$ použít k výpočtu váhy tvrzení M z vah x, y.

Hájek formuluje dvě skupiny intuitivně zcela přirozených požadavků, kterým má operace $*$ vyhovovat:

1.1 $0*1$ a $1*0$ není definováno.

1.2 $x \neq 0 \Rightarrow x*1 = 1*x = 1$.

1.3 $x \neq 1 \Rightarrow x*0 = 0*x = 0$.

Hodnoty 0 a 1 budou v dalším nazývány extrémními. Pro neextrémní x, y, z platí:

2.1 $(x*y)*z \ = x*(y*z)$;

2.2 $x * y = y * x$;
2.3 pro každé neeextrémní x existuje neutrální prvek ϕ takový, že $x * \phi = x$;
2.4 pro každý neextrémní prvek x existuje opačný prvek $-x$ takový, že $(-x) + x = \phi$;
2.5 $(x \leq y) \Rightarrow (x * z) \leq (y * z)$.

Podíváme-li se nyní z hlediska těchto požadavků na Bolzanem navrženou funkci (1)

$$x * y = \frac{xy}{xy + (1-x)(1-y)} ,$$

pak snadno zjistíme, že tato funkce splňuje všechny tyto požadavky, přičemž neutrální prvek $\phi = 1/2$ a opačný prvek $(-x) = 1 - x$.

Jak uvádí Hájek, operací $*$ splňující uvedené požadavky existuje mnoho a každá z nich vytvoří na neextremních vahách uspořádanou komutativní grupu. Obvyklými příklady takových grup jsou
(i) množina reálných čísel s operací sčítání, neutrálním prvkem 0 a opačným prvkem $-x$ (tj. obvyklá aditivní grupa reálných čísel), nebo
(ii) množina kladných reálných čísel s operací násobení, jednotkovým prvkem 1 a inverzním prvkem $1/x$,
a jednou z cest k získávání různých operací sdružování vah je isomorfní zobrazování grupy (i) nebo (ii) na interval (0, 1).

Z našeho hlediska je zajímavé, že Hájek uvádí jako jeden z příkladů možných zobrazení grupy (ii) funkci

$$f(x) = \frac{x}{1+x} ,$$

která isomorfně převádí uspořádanou grupu (ii) na uspořádanou grupu na (0, 1) s operací $*$ danou vztahem (1) (viz výše). Funkce sdružování vah (1) není přímo v Hájkově práci uvedena, je však uvedena v práci Silvertově [11] (citováno dle [9], str. 81 a násl.), který vyšel z jiné formulace problému než Hájek a uvedl Bolzanovu funkci (1) jako jedno z možných řešení.

6. Závěr

V našem příspěvku jsme věnovali pozornost dosud neznámému faktu, že se B. Bolzano snažil v učebnici náboženství [1] využít počtu pravděpodobnosti ke zdůvodnění věrohodnosti Písma svatého. Podrobně jsme vyložili příslušné pasáže knihy [1] a výklad jsme doplnili příklady z odpovídající části *Wissenschaftslehre*. Ukázali jsme, co asi Bolzana vedlo k napsání příslušné části knihy [1] a uvedli jsme i dnešní matematický pohled na Bolzanem zkoumanou matematickou problematiku; teologické aspekty problému jsme pochopitelně nechali stranou.

Z hlediska celého Bolzanova díla se jedná o záležitost zcela okrajovou, ale z hlediska poznání osobnosti B. Bolzana se nám jeho snaha o využití počtu pravděpodobnosti (tj. matematiky) k obhajobě Písma sv. a zařazení příslušné matematické partie do učebnice náboženství jeví jako charakteristické; pro Bolzana zřejmě matematika, filosofie a teologie představovaly pouze různé cesty k témuž cíli, který zformuloval ve svém životopise ([12], str. 27, český překlad str. 39):

Es währte jetzt kaum einige Wochen, so war ich zu meiner völligen Beruhigung überzeugt geworden, daß wir am Christenthume, und zwar gerade an dem katholischen — eine wahre göttliche Offenbarung und die vollkommenste aller Religionen haben. Ich fühlte so lebhaft die Wohlthätigkeit dieser Ueberzeugung, und wie erstprießlich es wäre, wenn alle gebildete Menschen dieselbe Ansicht von der Sache erhielten, daß ich mir die Verbreitung dieser Begriffe von nun an zu meiner Lebensaufgabe machte.)

(*Trvalo nyní sotva několik týdnů a byl jsem k svému naprostému uklidnění přesvědčen, že máme v křesťanství, a to právě v katolickém křesťanství, pravé Boží Zjevení a nejdokonalejší ze všech náboženství. Cítil jsem tak živě blahodárnost tohoto přesvědčení, i jak by bylo prospěšné, kdyby všichni vzdělaní lidé získali o věci stejné mínění, že jsem učinil od této chvíle rozšiřování těchto názorů svým životním úkolem.*)

Matematické prostředky, kterých zde Bolzano použil, jsou sice elementární, ale zkoumaný problém (tj. posouzení věrohodnosti závěrů tvořených na základě nejistých výchozích tvrzení) jistě elementární není a je i dnes předmětem výzkumů. Z těchto důvodů se domníváme, že pro lepší poznání osobnosti B. Bolzana má cenu zabývat se i touto jeho prací. Uvážíme-li navíc, že u nás v první polovině 19. století teorie pravděpodobnosti patrně vůbec nebyla pěstována (srov. [13], str. 140), pak máme další důvod k tomu, abychom se Bolzanovou snahou o aplikaci počtu pravděpodobnosti v teologii zabývali.

Autor předloženého příspěvku se seznámil s Bolzanovou knihou [1] při vyhledávání starých matematických tisků v knihovně kostela sv. Kříže v Liberci, založené děkanem A. I. Kopschem v r. 1759[13]. Sám fakt, že se v této farní knihovně nachází kniha B. Bolzana i přesto, že k jeho názorům měla církevní hierarchie značné výhrady, je svým způsobem zajímavý, neboť ho lze považovat za jistý důkaz toho, že Bolzanův vliv zasahoval nejen do kruhů pražských studentů a intelektuálů, ale i do širších vrstev katolického duchovenstva mimo významná kulturní a náboženská centra.

Poděkování

Autor děkuje libereckému římskokatolickému arciděkanovi P. Františku Opletalovi za laskavost a pochopení, se kterým umožnil autorovi nerušenou práci v knihovně kostela sv. Kříže.

Předložená práce vznikla v rámci interního grantového projektu VŠST Liberec č. 70543.

[13]Předběžná informace viz [14], podrobnější informace je připravována k publikaci

Literatura

[1] *Lehrbuch der Religionswissenschaft, ein Abdruck der Vorlesungshefte eines ehemaligen Religionslehrers an einer katholischen Universität, von einigen seiner Schüler gesammelt und herausgegeben.* Sulzbach, 1834.

[2] Craig, J.: *Theologiae christianae principia mathematica.* 1. vydání Londýn 1699;

(Bolzano měl ve své knihovně vydání z Lipska z r. 1755 s úvodem a komentářem J. D. Titiuse a tohoto exempláře bylo použito při přípravě předloženého příspěvku.)

[3] Dr. B. Bolzanos *Wissenschaftslehre. Versuch einer ausführlichen und größtentheils neuen Darstellung der Logik mit steter Rücksicht auf deren bisherige Bearbeiter.* 1. vydání Sulzbach 1837;

(Při přípravě předloženého příspěvku bylo použito nového vydání, které vychází v Bernard-Bolzano-Gesamtausgabe (redaktor Jan Berg), Stuttgart - Bad Cannstatt, Bd. 12/1 (§§ 121 - 163), 1987 a Bd. 13/2 (§§ 307 - 348), 1990.)

[4] Berka, K.: *Bernard Bolzano.* Horizont, Praha 1981.

[5] Lacroix, S. F.: *Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Erfurt 1817.

[6] Poggendorf, J. C.: *Bibliographisch - literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exacten Wissenschaften.* Leipzig 1863.

[7] Cantor, M.: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.* Bd. III. Zweite Aufgabe, Leipzig 1901.

[8] Novák, V.: *Fuzzy množiny a jejich aplikace.* 1. vyd. SNTL, Praha 1986.

[9] Dubois, D., Prade, H.: *Teorija vozmožnostej.* Radio i svjaz, Moskva 1990. (Překlad 2. francouzského vydání *Théorie des possibilités.* Masson, Paris 1988.)

[10] Hájek, P.: *Teorie šíření nejisté informace v konsultačních systémech.* In: *Expertní systémy. Principy, realizace, využití.* ČSVTS–FEL–ČVUT, Praha 1984, str. 70 - 80.

[11] Silvert, W.: *Symmetric summation: a class of operations on fuzzy sets.* IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics 9 (1979), 657 - 659.

[12] *Lebensbeschreibung des Dr. B. Bolzano mit einigen seiner ungedruckten Aufsätze und dem Bildnisse des Verfassers eingeleiten und erläutert von dem Herausgeber.* Sulzbach 1836. (Český překlad Bolzano, B.: *Vlastní životopis.* Odeon, Praha 1981.)

[13] Nový, L. a kol.: *Dějiny exaktních věd v českých zemích do konce 19. století.* ČSAV, Praha 1961.

[14] Mačák K.: *Die Anfänge der Mathematik in Liberec.* In: *Proceedings of Mathematics in Liberec 1993.* (Edited by the occasion of the 40th anniversary of Technical University in Liberec), str. 115 - 128. Liberec 1993.