O NĚKTERÝCH DŮLEŽITÝCH ŘADÁCH

JIŘÍ VESELÝ

Jednou z důležitých partií infinitezimálního počtu, které tvoří přechodový můstek mezi střední a vysokou školou, jsou posloupnosti a řady. V době, kdy počet hodin věnovaný matematice na střední škole klesá, je nutno pečlivě vážit, co má z vyšších partií matematiky na střední škole zůstat a co ne. Přirozenými kritérii jsou jednoduchost, užitečnost a silné vazby na další látku i ostatní předměty. Diskrétní charakter posloupností a řad činí tuto látku relativně snadno pochopitelnou. V následujícím textu bych chtěl ukázat některé, někdy málo zdůrazňované souvislosti a „přimluvit se“ za malou modifikaci: žáci by se měli seznámit i s divergentními řadami. Zvažujeme-li totiž to, o kterých řadách by se měli žáci na střední škole něco dozvědět, jsou jistě přirozenými kandidáty *geometrická* a *harmonická* řada. Byly totiž prvními řadami, se kterými se lidé naučili zacházet, a to dávno před tím, než byla konvergence řady přesně definována.[1] Kromě toho jsou *obě* velmi důležité a tak se jeví jejich zařazení do výuky jako velmi žádoucí. Problémem zde může být přesnost výkladu, avšak pokud se učitel neuchýlí k výrokům typu „je snadno vidět, že ..., lehce se dá spočítat ...“ apod. a eventuálně něco časově náročnějšího ve třídě s malou časovou dotací vynechá s upozorněním, v čem je problém, je toto zařazení poměrně snadno proveditelné.

Začátek bývá, podle toho, kdy k prvnímu seznámení s geometrickou řadou dochází, někdy eventuálně obtížnější. Je však vhodné, aby se žáci se vzorečkem (2) seznámili *podstatně dříve*, nežli provedeme (ať již na intuitivní či na potřebných pojmech infinitezimálního počtu založenou) závěrečnou úvahu.

Zpravidla se postupuje takto: položíme-li

$$a_0 = aq^0, \quad a_1 = aq^1, \quad \dots, \quad a_n = aq^n, \quad \text{a dále}$$
$$s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n\,, \tag{1}$$

snadno postupně dostaneme

$$\begin{aligned} s_n &= a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n \\ qs_n &= \phantom{a_0 + {}} a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} \\ \hline s_n\,(1-q) &= a_0 \phantom{{}+ a_1 + a_2 + \dots + a_n} - a_{n+1} = a\,(1-q^{n+1}) \end{aligned}$$

[1] Z terminologického hlediska poznamenejme ještě tuto zajímavost: jsou-li $G(a,b)=\sqrt{ab}$ a $H(a,b)=2ab/(a+b)$ geometrický a harmonický průměr čísel a, b, snadno nahlédneme, že v geometrické řadě jsou členy geometrickým průměrem obou sousedních členů, zatímco v harmonické řadě jsou harmonickým průměrem sousedních členů.

a pro $q \neq 1$

$$s_n = a\,\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{a}{1-q} - a\,\frac{q^{n+1}}{1-q}\,. \tag{2}$$

V tomto okamžiku se někdy výklad na střední škole přesune do intuitivní roviny. Například se poznamená, že jestliže je $|q| < 1$, pak je druhý zlomek pro vzrůstající n stále menší a menší a vše se uzavře zapsáním vzorečku pro součet s

$$s = s_\infty = \frac{a}{1-q}\,.$$

Žáci střední školy teprve sbírají první poznatky o reálných číslech a mají o nich jen velmi mlhavou představu; je však třeba s ní vystačit. Přesto je nutné zaváděné pojmy *definovat*. Geometrická řada nám později může pomoci jako jednoduchý ilustrativní příklad a umožní i hlubší vhled na vztah racionálních a iracionálních čísel. Dnes nabývají opět významu úlohy úrokového počtu a ty jsou příležitostí k prvnímu seznámení s geometrickou posloupností: lze např. startovat od zkoumání případu střadatele, který si uložil jistou částku do banky a pravidelně si úroky vybírá, nebo je v bance ponechává, případně pravidelně jistou částku ukládá.

Přechod k infinitezimální úvaze je pro žáky i ve vyšších třídách obtížný, je na místě být však již přesnější a zdůraznit, že vyjádření pro *zbytek* r_n *po* s_n, tj. po sečtení až po člen a_n, jsme de facto již našli a že (vzhledem k tomu, že index prvního členu je 0, je a_n ve skutečnosti v pořadí $(n+1)$-ním členem) platí

$$r_n = \frac{a}{1-q} - s_n = a\,\frac{q^{n+1}}{1-q}\,. \tag{3}$$

Abychom se vyrovnali s konvergencí zbytku k 0, připomeneme nejprve vyjádření vzdálenosti na číselné ose pomocí absolutní hodnoty a pak přistoupíme k vlastní definici *součtu řady*

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots = \sum_0^\infty a_n \tag{4}$$

(sumačních symbolů není třeba užívat, začátečníky navíc často mate užití stejného symbolu pro řadu i pro její součet).

Připomeňme, že částečné součty s_n jsme definovali v (1). Součtem řady (4) je takové číslo s, od něhož se pro všechna dostatečně veliká $n \in \mathbb{N}$ částečné součty s_n libovolně málo liší. Je-li tedy dána libovolně malá maximální povolená odchylka $\varepsilon > 0$, pak existuje takové $k \in \mathbb{N}$, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n > k$, platí $|s - s_n| < \varepsilon$.[2]

Pro geometrickou řadu s kvocientem q, $|q| < 1$ toto chování lehce ověříme: zvolíme-li libovolně $\varepsilon > 0$ (pro žáky raději provedeme úvahu nejprve např. s $q =$

[2] Je docela užitečné zdůraznit, že jde vlastně o všechna n až na konečný počet a používat pak fráze „*Pro skoro všechna n* …“.

0,01), stačí s ohledem na (3) dokázat existenci přirozeného čísla k tak, že pro všechna přirozená n, pro něž je $n > k$, platí

$$|r_n| = |a| \frac{|q|^{n+1}}{1-q} \leq \frac{|a||q|^{n+1}}{1-|q|} < \varepsilon .$$

Protože je zřejmě $|q|^k > |q|^n$ pro všechna $n > k$ (využíváme monotonie), stačí nalézt jedno takové n a to zvolit za k. Jelikož má platit

$$|q|^{n+1} < \frac{\varepsilon(1-|q|)}{|a|} , \tag{5}$$

stačí volit $n < (\log \varepsilon + \log(1-|q|) - \log|a|)/\log|q| - 1$. Mohli bychom samozřejmě spočítat i *nejmenší* vhodné k, pro naše úvahy nám však stačí jen existence nějakého takového k.

Nemáme-li k dispozici funkci log, lze se jednoduše o existenci potřebného k přesvědčit následujícím způsobem (užijeme Bernoulliovu nerovnost, kterou bychom měli pro její užitečnost dokázat v každém případě): z binomické věty ihned vidíme, že pro všechna $n \in \mathrm{N}$ a pro $x \geq 0$ platí $(1+x)^n \geq 1+nx$. Pokud potřebujeme procvičit matematickou indukci, snadno to dokážeme také pro $x \geq -1$. Indukční krok provedeme takto:

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x .$$

Je-li nyní $|q| < 1$ a je dáno libovolné $\varepsilon > 0$, stačí nalézt k tak, aby platilo

$$|r_k| \leq \frac{|a||q|^{k+1}}{1-|q|} < \varepsilon ,$$

neboli

$$|q|^{k+1} < \frac{\varepsilon(1-|q|)}{|a|} =: \varepsilon' .$$

Symbol :=, resp. =: užíváme pro rovnost, kterou definujeme nový výraz či proměnnou, zde tedy ε'. Přejdeme nyní k opačné nerovnosti pro převrácené hodnoty; s využitím Bernoulliovy nerovnosti platí

$$\frac{1}{|q|^{k+1}} = \left(1 + \frac{1-|q|}{|q|}\right)^{k+1} \geq 1 + (k+1)\frac{1-|q|}{|q|}$$

a nyní již snadno zvolíme k tak, aby poslední výraz byl větší než $1/\varepsilon'$. (Bernoulliovu nerovnost lze použít dokonce v slabší podobě s $x > 0$.) Můžeme tedy shrnout: pro dané $|q| < 1$ a pro všechna dostatečně velká n je tedy

$$|r_n| < \varepsilon .$$

Je užitečné, např. pomocí kalkulačky, udělat srovnání geometrických řad s kvocienty blízkými 0 a 1. Položme např. $q = 0,1$; pak po sečtení čtyř členů řady

$1 + q + q^2 + \cdots$ dostaneme výsledek s chybou rovnou $(900)^{-1}$. Abychom pro řadu s $q = 0,9$ dostali menší chybu, musíme sečíst alespoň desetkrát tolik členů (jednou z rozšířených pověr totiž je, že geometrická řada – protože ji umíme sečíst – konverguje *dobře* a tedy *rychle*). V jaké míře je možné s žáky tyto úvahy provést, musí rozhodnout učitel podle jejich matematické vyspělosti.

Budeme-li potřebovat při probírání této látky motivační úvahu, poslouží dobře „sladká" historka, která se vypráví o matematikovi s exotickým jménem BELA VON KÉRÉKJÁRTÓ (1898 – 1946); ta ukazuje, že číslo s nekonečným periodickým desetinným rozvojem („něco špatně představitelného") lze vyjádřit jako jednoduchý zlomek („něco vcelku představitelného"), resp. jak sečíst geometrickou řadu, která je pro exaktní zavedení těchto čísel zapotřebí:

> Kérékjártó jako dítě jedl rád čokolády firmy, která z reklamních důvodů přidávala do každého balíčku s tabulkou čokolády i kupón. Deset těchto kupónů bylo možno vyměnit za další balíček čokolády, obsahující pochopitelně i další kupón. Problém pramení z toho, že za cenu balíčku bylo možno dostat jednu tabulku čokolády, desetinu tabulky ve formě kupónu a tedy vlastně setinu tabulky s desetinou kupónu (za něž bylo možno možno kupón vyměnit) atd.
> Kupovalo se tedy 1,111 ... čokolády. Mladý Kérékjártó si koupil 9 balíčků čokolády. Tak získal i 9 kupónů. Pak šel zakoupit desátou čokoládu, kterou „zaplatil" již získanými 9 kupóny, ke kterým přidal kupón ze zakupované čokolády. Tak získal za cenu 9 balíčků celkem 10 tabulek čokolády (a žádný kupón mu nezbyl), neboli dospěl experimentem k poznatku 1,111 ... =10/9.

Podobných úloh dokáže dobrý učitel vymyslit více, aby své žáky vhodně motivoval k touze poznat společný obecný princip, pokud jsou ovšem v dostatečné míře „motivovatelní". Populární jsou např. úlohy o mouše (moucha létá mezi jedoucím cyklistou a cílem jeho cesty), nebo podobná úloha o psovi, hajném a jejich putování z hospody domů (Např.: Opilý hajný ujde 3 km/hod, pes běží dvakrát rychleji a tak neustále běhá mezi hájovnou a hajným; po dvou hodinách dorazí hajný do hájovny. Kolik naběhá jeho pes?). Než se na problém podíváme z trochu jiné stránky, poznamenejme, že vysokoškolsky vzdělaní lidé příklady uvedeného typu často řeší skutečně sčítáním *řady*, nicméně jen málo z nich zvládne její sečtení.

Z uvedené „sladké historky" lze však vytěžit více: pokud by kupón přiložený v balíčku čokolády byl poukázkou na jednu q-tinu čokolády (předpokládáme, že pro $q \in \mathbb{N}$ platí $q > 1$), stačí úvahu zopakovat se zakoupenými $(q - 1)$ čokoládami. Platí pak

$$1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \cdots + \frac{1}{q^n} + \cdots = \frac{1}{1 - (1/q)} = \frac{q}{q - 1}.$$

Pokud bude kupón přiložený v balíčku čokolády poukázkou na (p/q)-tin čokolády (předpokládáme, že $0 < (p/q) < 1$ a $p, q \in \mathbb{N}$), je třeba „zakoupit

$q-p$ čokolád a při posledním nákupu požádat o p čokolád, za které odevzdáme $(q-p)+p$ poukázek na celkem $q.(p/q)=p$ balíčků": proto je

$$1+\frac{p}{q}+\left(\frac{p}{q}\right)^2+\cdots+\left(\frac{p}{q}\right)^n+\cdots=\frac{1}{1-(p/q)}=\frac{q}{q-p}.$$

Jak vidíme, cesta k odvození vzorečku byla v tomto případě jednoduchá, použili jsme však trik. Poučné je i vědět, jak se se sčítáním geometrické řady vyrovnávali matematici v dávné minulosti. Uveďme několik historických příkladů.

Abstrakce spojená s představou nekonečného opakování nějaké operace a s precizací pojmů limity posloupnosti nebo součtu (nekonečné) řady je velmi obtížná. Svědčí o tom historie vývoje pojmu konvergence. Je však známo, že i při vágním pojetí takových pojmů bylo geniálními matematiky (ISAAC NEWTON (1643 – 1727), JOHANN BERNOULLI (1667 – 1748), LEONARD EULER (1707 – 1783)) získáno mnoho cenných (a jen zcela výjimečně nesprávných) poznatků. Nutnost precizovat pojmy a zacházet s novými objekty velmi opatrně a tak, abychom si počínali korektně, je však vhodné žákům ihned předvést: lze to ilustrovat např. předvedením následujícího „počítání":

$$\begin{aligned}0&=(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots\\&=1-1+1-1+1-1+1-1+\cdots\\&=1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\cdots=1\end{aligned}$$

Nalezený spor ukazuje, že takto mechanicky se s nekonečnými součty zacházet nedá – není zapotřebí zacházet do detailů (divergence řady apod.).

Teoretické zkoumání pohybu činilo našim předkům obtíže. Všimněme si blíže jedné ze známých aporií, jejichž autorem byl jeden z duchovních otců dialektiky ZENON (490 – 430 před n.l.); bývá nazývána *Achilles a želva*. Uvedeme ji v modifikované podobě. Zenon se táže, jak může Achilles dohonit želvu na stadiónu, dá-li jí náskok jedno kolo a běží-li dvakrát rychleji než ona. Komentuje: Uběhne-li Achilles jedno kolo, je želva o půl kola před ním, uběhne-li Achilles tuto polovinu kola, je želva opět před ním o čtvrt kola atd. Prostý úsudek ukáže, že za dobu, kterou potřebuje Achilles k uběhnutí dvou kol želva uběhne jedno kolo a bude tedy dostižena bez ohledu na to, že Zenonem prováděná úvaha je „nekonečná". Z matematického hlediska se paradox „nekoná"; na tom, že *nekonečná* řada může mít *konečný* součet,[3] tj. že

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=1\,,$$

není z dnešního pohledu nic paradoxního.

Použijeme-li moderní terminologie, pak fakt, že geometrická řada má součet, byl znám už ARISTOTELOVI (384 – 322 před n.l.). Je však velmi pravděpodobné,

[3]A to je právě to, co si nedovedli staří Řekové představit, neboť to odporovalo představě o pouze omezené dělitelnosti a nikoli dělitelnosti na libovolně malé části.

že již staří Babylóňané prováděli úvahy typu

$$1+1=2,\quad 1+1+2=4,\quad 1+1+2+4=8,\dots,\qquad \text{tedy}$$
$$1+1+2+\cdots+2^{n-1}=2\cdot 2^{n-1}\,,\qquad \text{a tedy}$$
$$1+2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1\,.$$

Všimněme si blíže, jak se vyrovnává s podobnými úvahami EUKLEIDES (365 – asi 300 před n.l.). V jeho *Základech* nacházíme (viz § 34) takovouto úvahu: označíme-li členy geometrické řady a částečný součet jako v (1), platí

$$\frac{a_1-a_0}{a_0}=\frac{a_{n+1}-a_0}{s_n},\qquad \text{tedy}$$
$$s_n\,(1-q)=a_0-a_{n+1}=a\,(1-q^{n+1})\,. \tag{6}$$

Jeho důkaz probíhá takto: pro geometrickou řadu (řadu „se stálým poměrem členů") platí

$$\frac{a_1}{a_0}=\frac{a_2}{a_1}=\cdots=\frac{a_{n+1}}{a_n}\,.$$

Odečtením jedničky od každého zlomku a úpravou dostáváme

$$\frac{a_1-a_0}{a_0}=\frac{a_2-a_1}{a_1}=\cdots=\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}\quad [=: q-1]\,.$$

Eukleides uměl dokázat, že pro takové zlomky (poměry) jsou ve stejném poměru i součty všech čitatelů a součty všech jmenovatelů, tj.

$$\sum_{k=0}^{n}(a_{k+1}-a_k)=(q-1)\sum_{k=0}^{n}a_k\,,$$

z čehož plyne (6), resp. (2).

Pro speciální q určil Eukleides součet geometrické řady v souvislosti s *exhaustivní metodou* a určováním objemu jehlanu a rotačního kužele. Tuto metodu přivedl později k téměř naprosté dokonalosti ARCHIMEDES (287 – 212 před n.l.). Použil ji např. při kvadratuře (tj. výpočtu obsahu) parabolické úseče: vyjádřil její obsah jako součet řady

$$A+\frac{A}{4}+\frac{A}{4^2}+\frac{A}{4^3}+\cdots\,[=(4/3)A]\,. \tag{7}$$

Ponechme stranou to, jak se exhaustivní metoda aplikovala (vrátíme se k ní podrobněji v samostatném článku) a jaký geometrický význam má konstanta A; k číslu $(4/3)A$ Archimedes dospěl korektně tak, že ukázal, že na levé straně (7) je výraz vyjadřující číslo, které nemůže být ani větší, ani menší než $(4/3)A$. Úvahy podobného typu se prováděly zdaleka ne ojediněle; jde o metodu *dvojího sporu*. Pozor, náš stručný zápis nesmí být tedy chybně pochopen a vést k představě, že Archimedes znal pojem limity posloupnosti; trvalo totiž ještě mnoho let, než se matematici naučili myšlenkově zvládat a bezchybně používat ono „tajemné nekonečno“.[4]

Seznámení s elementárními řadami je vhodnou problematikou pro střední školu. Je třeba říci, že výše uvedená standardní úvaha je často prakticky tím jediným, co se – kromě nácviku početní techniky – žák střední školy (zpravidla gymnázia) o řadách dozví. Pro inspiraci k volbě vhodného obohacení výkladu (jistě však ne pro jeho zkomplikování) lze použít historických úvah. Jedna věc by však měla mít přednost: žáci by měli alespoň jednou vidět vzájemný převod mezi zlomky a periodickými desetinnými rozvoji.

Jistě není obtížné pochopit, že zlomek je reprezentován buď číslem s ukončeným desetinným rozvojem (ve kterém jsou od jistého členu počínaje další členy rovny 0), nebo periodickým desetinným rozvojem (a pak je snadné odhadnout maximální délku periody, ale dosti nesnadné pochopit význam výsledku či případně to, jak se s takovými čísly provádějí elementární operace).

Pro zlomek p/q při dělení můžeme dostat jako zbytek po nejvýše q krocích 0, nebo se jeden z možných nenulových zbytků vyskytne v těchto q krocích opakovaně, což vede k periodicitě. Je vhodné na jednom speciálním případě také ukázat (podobnost s π je ovšem čistě náhodná), jak probíhá „obrácený převod“:

$$\begin{aligned}
3,1415\overline{926} &= \frac{31415}{10000} + 926\left(\frac{1}{10^7} + \frac{1}{10^{10}} + \cdots\right) \\
&= \frac{31415}{10000} + \frac{926}{10^7}\left(1 + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^6} + \cdots\right) \\
&= \frac{31415}{10000} + \frac{926}{10^7}\cdot\frac{1000}{999} = \frac{31415}{10000} + \frac{926}{9990000} \\
&= \frac{31384511}{9990000}
\end{aligned}$$

Dokonce i dříve, před zvládnutím vzorce pro součet nekonečné geometrické řady, jsme schopni předvést následující obrat: od $31415,\overline{926}$ $(= 3,1415\overline{926} \times 10000)$ odečteme původní číslo násobené 10 a dostaneme tak

$$\begin{aligned}
9990 \times 3,141\overline{592} &= 31415,926926926\ldots \\
&- \quad 31,415926926\ldots \\
\hline
&= 31384,511
\end{aligned}$$

Je tedy

$$3,1415\overline{926} = \frac{31384511}{9990000}\,.$$

Podstatu *drobného podvodu*, kterého se na žácích přitom dopustíme, není snad třeba podrobněji rozebírat. Ano, je to podvod, založený na tom, že se nepříjemné „nekonečné části“ desetinného čísla elegantně zbavíme, aniž pátráme po

[4]Dá se říci, že staří Řekové měli určitý strach z nekonečna a úvahám o něm se při odvozování a dokazování vyhýbali.

jejím smyslu; je však dobré na něj žáky upozornit (srovnejte s našimi úvahami o geometrické řadě).

Myslím, že při dobře naplánovaném postupu žáci nakonec myšlenkově celou věc dobře zvládnou; snad se tak zbavíme jedné „zaklínací formule" o periodických desetinných rozvojích (*Periodické desetinný rozvoj dává číslo racionální*), kterou žáci při příchodu na vysokou školu mnohdy sice perfektně na verbální úrovni znají, ale velice často vůbec nechápou.

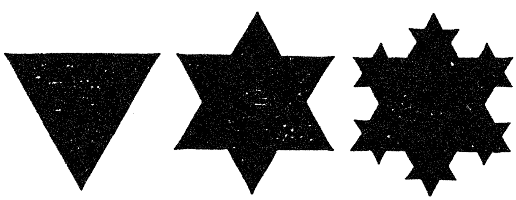
K obohacení výkladu máme i na střední škole ještě další možnosti: uveďme některé z nich. Poměrně vděčné jsou úlohy o vepisování pravidelných n-úhelníků: středy stran pravidelného n-úhelníku jsou vrcholy do něj vepsaného podobného n-úhelníku. Tuto operaci vepisování neustále opakujeme a tážeme se, jaký je součet obsahů takto vytvořených polygonů. Je-li výchozí polygon rovnostranný trojúhelník o obsahu rovném 1, dospějeme posléze k součtu

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \cdots = \frac{1}{3},$$

zatímco např. pro jednotkový čtverec dospějeme k řadě

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \cdots = 1.$$

Zajímavým objektem objasnitelným žákům na relativně elementární úrovni je *fraktál* zpravidla nazývaný *Kochova vločka*[5] nebo *Kochův ostrov*. Vznikne z rovnostranného trojúhelníka (označme délku jeho strany a) operací, která má nekonečně mnoho kroků: v každém z nich zvětšujeme obsah vznikajícího útvaru připojením stále většího počtu podobných trojúhelníků. Nejprve „přilepíme centrálně" ke každé straně základního trojúhelníka trojúhelník o straně $(a/3)$ (tak po prvním kroku vznikne „Davidova hvězda"), pak přilepíme ke každé z jejích $3 \cdot 4$ stran rovnostranné trojúhelníčky o stranách délky $(a/9)$ atd. Připojený nákres přibližuje myšlenku konstrukce dostatečně přesně a žáci poměrně snadno akceptují fakt, že tento proces se opakuje nekonečněkrát.



Obr. 1

Nyní lze použít geometrické řady a ukázat, že vzniklý útvar má *konečný obsah*: označíme-li A obsah základního trojúhelníka, je součet obsahů přidávaných trojúhelníků roven součtu řady

$$3\left(\frac{1}{9} + \frac{4^1}{9^2} + \frac{4^2}{9^3} + \cdots\right)A = 3\frac{1/9}{1-(4/9)}A$$

[5]Podle švédského matematika HELGE N. F. KOCHA (1870 – 1924), který je znám mnohem více svými pracemi z funkcionální analýzy.

a tedy, s ohledem na $A = (a^2\sqrt{3})/4$, pro celkový obsah platí

$$P_{\text{Koch}} = \left(1 + \frac{3}{5}\right) A = \frac{2\sqrt{3}}{5} a^2 \,.$$

Délka hranice Kochovy vločky je (na rozdíl od délek hranice každého polygonu, který vzniká vždy po jednom kroku procesu) *nekonečná*, to však ukážeme v další části článku, kde se charakter řad, se kterými zacházíme, podstatně změní: budeme se věnovat divergenci.

Je-li v geometrické řadě kvocient $q = 1$, pak pro $a \neq 0$ řada $a + a + a + \cdots$ zřejmě diverguje. Přitom poukážeme na to, že ani *zbytek*, ani *n-tý člen* nekonvergují k 0. Co to však znamená „divergovat k nekonečnu" ? Pro řadu s kladnými členy to vyložíme jednoduše: je to patrně dokonce pochopitelnější nežli konvergence řady. Řada $\sum a_n$ diverguje k nekonečnu (říkáme, že její součet je $+\infty$, přičemž píšeme $\sum a_n = \infty$), je-li splněna tato podmínka: ať zvolíme jakkoli $K > 0$, částečné součty s_n budou od jistého n vesměs větší než toto K. Pomineme-li triviální případ nekonečného součtu $1 + 1 + 1 + \cdots$, či obecněji výše uvedené řady $a + a + a + \cdots$, je patrně „nejpopulárnější" divergentní řadou s kladnými členy harmonická řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots, \tag{8}$$

jejíž n-tý člen konverguje k 0. I když jde o věc zdánlivě náročnější, s lepšími žáky ji (např. v rámci rozšiřující výuky) snadno zvládneme. I zde je poučné si všimnout historie.

Divergenci harmonické řady lze dokazovat různě: takto probíhá velmi stará a dnes již zcela standardní úvaha, kterou použil poprvé patrně kolem r. 1360 NICOLE ORESME (1323 – 1382). Před jejím předvedením je však nutné detailně objasnit, že tato úvaha poskytuje prostředek ukázat, jak lze částečné součty harmonické řady udělat větší než libovolně zvolené $n \in \mathbb{N}$ (musíme se vyrovnat s možností využít závorkování). Pak ji teprve lze schematicky popsat takto:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} &= \left(\frac{1}{1} + \cdots + \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{99}\right) + \\ &+ \left(\frac{1}{100} + \cdots + \frac{1}{999}\right) + \cdots \geq \left(\frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{10}\right) + \\ &+ \left(\frac{1}{100} + \cdots + \frac{1}{100}\right) + \left(\frac{1}{1000} + \cdots + \frac{1}{1000}\right) + \cdots = \\ &= \frac{9}{10} + \frac{90}{100} + \frac{900}{1000} + \cdots = \frac{9}{10} + \frac{9}{10} + \frac{9}{10} + \cdots \,.\end{aligned}$$

Důkaz, který podal Oresme, byl založen na stejné myšlence, avšak využíval mocnin o základu 2; seskupení členů bylo provedeno takto:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \cdots \\ &\qquad > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots\end{aligned}$$

V této formě bývá důkaz divergence nejčastěji prezentován, pro žáky na střední škole je však „dekadická“ verze patrně přirozenější.

Poznamenejme ještě, že Oresme pracoval i s geometrickou řadou a pro „mnoho“ kvocientů dokázal (s přesností v té době obvyklou) její konvergenci. Ukázal nejprve, že pro všechna a a všechna $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{a}{k}\left(1+\left(1-\frac{1}{k}\right)+\left(1-\frac{1}{k}\right)^2+\cdots+\left(1-\frac{1}{k}\right)^{n-1}\right)+a\left(1-\frac{1}{k}\right)^n=a$$

a pak se omezil na konstatování, že člen $(1-\frac{1}{k})^n$ jde s rostoucím n k 0. Spolu s historickou poznámkou můžeme příklad použít např. při procvičování indukce.

Připomeneme i jiné možnosti, jak ukázat divergenci harmonické řady; je jich mnoho, jsou ale pro matematicky neškoleného člověka daleko méně pochopitelné. Navíc, pokud mu je předvedeme, neuvědomí si, že pracuje s aparátem, o němž vlastně nic neví.

Předpokládejme, že harmonická řada má (konečný) součet s. Potom

$$s=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}>\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}=\frac{s}{2}+\frac{s}{2}=s$$

a dostáváme $s>s$. To je potřebný spor. Lze k němu dojít i takto

$$s=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1},$$

odkud plynou rovnosti

$$s-\frac{s}{2}=\frac{s}{2}=\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots,$$

ale to je již vcelku nepodstatná modifikace (spor dává porovnání odpovídajících členů a rovnost součtů). I přes svoji jednoduchost byl Oresmův důkaz divergence harmonické řady zapomenut a proto se slavní matematici minulosti k tomuto problému často vraceli. Je poučné si všimnout některých jejich důkazů, které opět jen naznačíme: nalezli je JAKOB BERNOULLI (1655 – 1705) a jeho bratr JOHANN BERNOULLI (1667 – 1748). První z roku 1689 od Jakoba má podobnou myšlenku jako je ta, kterou jsme již použili: n^2-n členů v následujícím výrazu odhadneme tím nejmenším

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n^2}>(n^2-n)\left(\frac{1}{n^2}\right)=1-\frac{1}{n},$$

a tedy po přičtení výrazu $(1/n)$ k oběma stranám nerovnosti

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n^2}>1.$$

Toto však např. ukazuje, že zbytek po sečtení n členů harmonické řady nemůže konvergovat k 0, resp. jak seskupit (podobně jako v předcházejících případech) členy pro dosažení libovolně velkého částečného součtu:

$$1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{5^2}\right)+\cdots .$$

Další postup je již zřejmý.

Johannův „důkaz" nejsnáze zachytíme takto: (uvědomte si, že se s řadami často manipulovalo, ale bez zdůvodňování legitimity úprav) dokázal nejprve rovnost

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k-1)k}=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots=1\,. \tag{9}$$

Pokud ji budeme chtít žákům dokázat, budeme vycházet přímo z definice součtu řady a využijeme zřejmých vztahů

$$\begin{aligned} s_n &:= \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-1)k}=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) \\ &=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{n}\longrightarrow 1\,. \end{aligned}$$

Johann Bernoulli však postupoval formálně odlišně:

$$1=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\right)=$$

$$\left((1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots\right)=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k-1)k}$$

Potom dále manipuloval s řadami takto:

$$s-1=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k-1}{(k-1)k}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{3}{3\cdot 4}+\cdots=$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} = & \frac{1}{1\cdot2} & + & \frac{1}{2\cdot3} & + & \frac{1}{3\cdot4} & + & \frac{1}{4\cdot5} & + & \cdots & + \\ & & + & \frac{1}{2\cdot3} & + & \frac{1}{3\cdot4} & + & \frac{1}{4\cdot5} & + & \cdots & + \\ & & & & + & \frac{1}{3\cdot4} & + & \frac{1}{4\cdot5} & + & \cdots & + \\ & & & & & & + & \frac{1}{4\cdot5} & + & \cdots & + \end{array}$$

Použijeme-li již odvozeného vzorce (9), resp. jeho malé modifikace, a vztahu

$$\frac{1}{(k-1)k}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\,,$$

dospějeme poměrně snadno sečtením „dílčích" řad ke vztahu

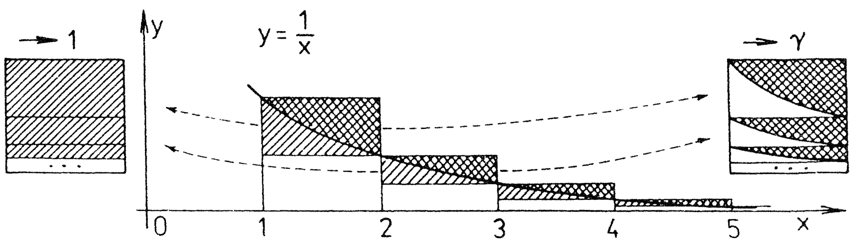
$$s-1=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots=s\,.$$

Bernoulli si byl vědom ošidnosti úvodních „odvozovacích“ úvah. Podobně totiž odvodil

$$2 = 2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \cdots - \Big(\frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \cdots\Big) =$$
$$\Big((2 - \frac{3}{2}) + (\frac{3}{2} - \frac{4}{3}) + \cdots\Big) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)k}\,,$$

vedoucí ke sporu s (9). Všiml si nejen toho, že v prvním případě pro výchozí řadu platí $a_n = (1/n) \longrightarrow 0$ a ve druhém případě $a_n = (n+1)/n \longrightarrow 1 \neq 0$, ale odhalil také to, že je to podstatné: naznačené manipulace jsou korektní pro takovou řadu $\sum_1^\infty a_n$, pro kterou platí $a_n \longrightarrow 0$.

Nebylo by zdaleka vhodné všechny předvedené úvahy žákům vykládat – jsou zajímavostí pro hlubší zájemce a mají problém divergence jen osvětlit z více stran. Na druhé straně základní myšlenku ze zavádění divergence je vhodné žákům přiblížit. Je rovněž vhodné se později k této problematice vrátit, ať již na vysoké škole nebo v zájmovém kroužku. Pak se nám může hodit, připravíme-li si dříve půdu následujícím velmi názorným obrázkem:



Obr. 2

Označíme-li plochu pod grafem funkce f na intervalu $[a,b]$ symbolem $P(f;a,b)$, vidíme (porovnáním ploch obdélníčků na obrázku) srozumitelné znázornění vztahu

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} > P(x^{-1};1,n) > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\,.$$

Tak budeme moci poměrně snadno později odhadnout „rychlost divergence“ harmonické řady pomocí *přirozeného* logaritmu. Pohledem na obrázek odhadneme i velikost chyby: součet rozdílů obsahů opsaných a vepsaných obdélníčků je zřejmě

$$\Big(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\Big) + \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Big) + \Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\Big) + \cdots \le 1\,,$$

což je řada (9), jejíž součet jsme již určili. Z obr. 2 je dobře patrné, jak se částečné součty (9) se vzrůstajícím n blíží k 1: stačí umístit všechny označené obdélníčky pod sebe do jednotkového čtverce.

Všimněme si ještě rozdílu

$$\gamma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n ,$$

který je na obr. 2 znázorněn jako součet obsahů „křivočarých trojúhelníčků", které vždy vyplňují část jednotkového čtverce. I žáci střední školy budou ochotni patrně akceptovat myšlenku, že se vzrůstajícím n se součty γ_n těchto obsahů blíží k nějakému číslu γ (obrázek má v tomto případě značnou ilustrační hodnotu). Máme ještě nějaké možnosti k obohacení žáků o nové podněty? Ano, k následujícím experimentům však potřebujeme počítač.

Programy pro tzv. *počítačovou algebru* (computerized algebra je, bohužel, již vžitý anglický termín, zahrnující manipulaci s objekty daleko za hranicemi tradiční algebry), jako jsou *Mathematica* nebo *Maple*, si s podobnými výpočty snadno a velmi rychle poradí: doba potřebná k výpočtu údajů je minimální, nejvíce práce zde dá naučit se s těmito programy zacházet.

V okamžiku tak získáme přesně prvních deset částečných součtů harmonické řady

$$1, \frac{3}{2}, \frac{11}{6}, \frac{25}{12}, \frac{137}{60}, \frac{49}{20}, \frac{363}{140}, \frac{761}{280}, \frac{7129}{2520}, \frac{7381}{2520}$$

nebo zadáním `Sum[1/k,k,1,100]` její stý částečný součet, jehož hodnota s_{100} je

$$\frac{14466636279520351160221518043104131447711}{2788815009188499086581352357412492142272} = 5,18737\ldots .$$

(k získání desetinného tvaru stačilo napsat `NSum[1/k,k,1,100]`).

Bohužel však ne každá škola má k dispozici takový vhodný program a není možné při stávajících cenách programového vybavení obětovat desítky tisíc za popsané programové balíky. Snad je však užitečné upozornit na to, že některé jsou dostupnější a že se snad s nimi i na úrovni středních škol brzo setkáme. Na vysoké úrovni je vyvíjený program *MuPad* z Paderbornu, který je pro vědecké instituce a školy zdarma, počítá však s náročným počítačovým vybavením. V Rakousku je populární program *Derive,* který rakouské ministerstvo školství zakoupilo pro všechna gymnázia a který se stal standardním vybavením škol.

Dnes tedy není obtížné sestavit následující tabulku. Udává částečné součty harmonické řady s_n pro $n = 2^k - 1$, $k = 1, 2\ldots$; ve sloupci označeném γ_n ukazuje, jak se γ_n „blíží" ke γ a umožňuje nám toto přibližování kvantitativně vyjádřit. Můžeme eventuálně žákům prozradit, že číslo γ, ke kterému rostoucí posloupnost čísel γ_n konverguje, je svázáno se jménem Leonard Euler a že o této tzv. *Eulerově konstantě* $\gamma = 0,5772156649\ldots$ dodnes nevíme, zda je to číslo racionální nebo iracionální. Zároveň se mohou přesvědčit o přesnosti poměrně hrubého odhadu použitého Oresmem pro důkaz divergence.

n	s_n	γ_n
1	1.0000000000	1.000000
3	1.8333333333	0.734721
7	2.5928571428	0.646946
15	3.3182289932	0.610178
31	4.0272451954	0.593257
63	4.7282659037	0.585131
127	5.4253345925	0.581147
255	6.1204387128	0.579175
511	6.8145634095	0.578193
1023	7.5081991097	0.577704
2047	8.2015904905	0.577459
4095	8.8948597563	0.577335
8191	9.5880679757	0.577276

Divergence harmonické řady souvisí se zajímavými experimenty, které velmi často žáky upoutají a překvapí. Jedním z nich je úloha o kladení cihel stejného formátu na sebe tak, aby se průmět té nahoře vzdálil co nejvíce od průmětu té vespod. Často si žáci myslí, že např. vždy musí průmět té nahoře mít neprázdný průnik s průmětem spodní, jinak že by se konstrukce zhroutila. Zkušenost ukazuje, že tato úloha poměrně snadno vyprovokuje žáky k experimentování – a to je dobře. Ideálním objektem pro experiment ve třídě jsou hrací karty.

Položme balíček karet na okraj stolu tak, aby kratší strana byla právě na hraně stolu. Je třeba posunovat karty tak, aby se balíček nezhroutil a vrchní karta nebyla žádnou svojí částí nad stolem. Nechte žáky hledat ideální řešení s maximálním možným přesahem. Zde je řešení této (velmi vágně) formulované úlohy – vede na vyšetřování částečných součtů harmonické řady.

Popišme si „začátek“ (načrtnutím obrázku můžete podpořit svoji představivost): *první* kartu shora lze posunout o maximálně polovinu délky mimo stůl (karta bude v rovnovážné poloze). Zafixujeme její polohu vůči druhé kartě a poznamenáme si přesah přes hranu stolu vyjádřený v jednotkách daných délkou karty: $(1/2) = (1/2) \times (1)$. Další možné posunutí horní *dvojice karet* je o $(1/4)$, tj. tak, aby se nad hranu třetí karty dostal „půlící bod překryvu“ prvých dvou. Přesah pak je $(1/2) + (1/4) = (1/2) \times (1 + (1/2))$. Zafixujme nyní vzájemnou polohu prvních tří karet a posunujme tyto tři karty opět tak daleko, jak je to možné. Maximální posun činí $(1/6)$ délky karty a celkový přesah je $(1/2) \times (1 + (1/2) + (1/3))$. Představme si nyní, že je již n vrchních karet v balíčku posunuto popsaným způsobem o $(1/2) \times (1 + (1/2) + \cdots + (1/n))$. Zafixujeme jejich polohu vůči $(n+1)$-ní kartě a budeme posunovat těchto $(n+1)$ karet: pro rovnováhu na páce, kterou je $(n+1)$-ní karta (otáčí se „kolem hrany další karty“), platí při posunu o x

$$\left(\frac{(1-x)}{2} \cdot (1-x)\right) = x \cdot n + \frac{x}{2} \cdot x,$$

odkud $x = (1/2)(1/(n+1))$. Odtud ovšem vyplývá možnost libovolně velkého celkového přesahu při použití dostatečného počtu karet, protože je součet řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}$ roven ∞.

Podobnou úlohu lze formulovat o velmi jednoduchých „mobilech“ ze stébel, ale to ponechám čtenářům k rozmyšlení či k vyhledání v literatuře (i u nás jsou mobily občas ještě k vidění např. ve formě rybiček apod.).

V první části článku jsme se věnovali geometrické řadě. Jako ilustraci jsme spočetli obsah složitějšího geometrického obrazce (Kochova vločka). Ukažme si nyní, že její dosti obtížně představitelná hranice má nekonečnou délku. Označíme-li stranu základního trojúhelníka opět a a jeho obvod o_0, vzroste po prvním kroku („přilepení 3 menších trojúhelníků“) obvod o $3 \cdot a/3$, tedy na $o_1 = (4/3)o_0$. Při každém dalším kroku délka každé strany roste přilepením menšího trojúhelníčku na 4/3 své velikosti a totéž tedy platí i pro obvod: $o_2 = 4/3o_1, \ldots$. Proto jsou obvody postupně vznikajících polygonů rovny členům posloupnosti

$$\{3a,\ 3a\frac{4}{3},\ 3a\frac{4^2}{3^2}, \ldots,\ 3a\frac{4^n}{3^n}, \ldots\},$$

což je geometrická posloupnost s prvním členem $3a > 0$ a kvocientem $(4/3)$; je tedy (pokud žáci přijmou bez dalšího vysvětlení fakt, že délka hranice Kochovy vločky je větší než délka hranice každého z polygonů) nekonečnost délky hranice „dokázána“. Poznamenejme ještě, že toto tvrzení lze lokalizovat, tj. délka každé netriviální souvislé části hranice je rovněž nekonečná.

Již víme něco o růstu částečných součtů harmonické řady: její divergence je relativně „pomalá“. Představme si, že nyní vynecháme z harmonické řady všechny členy tvaru $(1/n)$, které mají v dekadickém zápisu jmenovatele n alespoň jedenkrát použitu určitou, pevně zvolenou číslici, např. 0. Dostaneme tak řadu

$$\frac{1}{1} + \cdots + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} + \cdots + \frac{1}{29} + \cdots \\ + \frac{1}{91} + \cdots + \frac{1}{99} + \frac{1}{111} + \cdots + \frac{1}{119} + \cdots . \tag{10}$$

Ukážeme, že každá taková řada konverguje. Stojíme tak před úkolem objasnit žákům de facto srovnávací kritérium, ale pro popisovaný, zatím jen značně vágní přístup, nám stačí jen intuitivní pochopení. Odhadneme nejprve shora všechny zlomky s jednomístným jmenovatelem hodnotou 1; těchto zlomků je maximálně 9 (pokud jsme si vybrali číslici 0), resp. 8. Zlomky s dvoumístným jmenovatelem odhadneme hodnotou $(1/10)$; těchto zlomků je pro výběr číslice 0 maximálně $90 - 9 = 81$, resp. opět ještě méně. Zlomky s trojmístným jmenovatelem odhadneme hodnotou $(1/100)$; těchto zlomků je maximálně $9^3 = 729$, atd. Proto je součet při každém z možných výběrů menší než

$$\frac{9}{1} + \frac{9^2}{10} + \frac{9^3}{100} + \cdots = 9\left(1 + \frac{9}{10} + \frac{9^2}{100} + \cdots\right) = 90 .$$

Pozoruhodné jsou dvě věci: tyto řady konvergují velice pomalu, ale – a to je zajímavější – dají se přesto relativně snadno s dostatečnou přesností sečíst. Ani s výkonnými počítači však nelze uplatnit přístup aplikování „hrubé síly“. I velmi jednoduchý odhad ukazuje proč. Postupem obdobným jako při důkazu konvergence odhadneme (proveďme odhady pro případ číslice 0), že zbytek po sečtení všech členů, u nichž má jmenovatel nejvýše n číslic, dostaneme sečtením 9^{n+1} zlomků se jmenovatelem větším než 10^{n+1}, atd. Zbytek je tedy po sečtení 9^n členů (jemněji: dokonce po $9 + 9^2 + 9^3 + \cdots + 9^n$) větší než

$$\left(\frac{9}{10}\right)^{n+1} + \left(\frac{9}{10}\right)^{n+2} + \left(\frac{9}{10}\right)^{n+3} + \cdots = 10 \times \left(\frac{9}{10}\right)^{n+1} .$$

Odtud se dá snadno spočítat, že vezmeme-li v úvahu začátek řady (10) až po třináctimístné jmenovatele, musíme sečíst $9^{13} > 2,5 \times 10^{12}$ členů, přičemž zbytek bude stále větší než $10 \times (9/10)^{14} > 2$![6]

Ideu sečtení budeme ilustrovat na řadě, odpovídající vynechávání členů s n obsahujícím 0. Budeme *odhadovat* zbytek s takovou přesností, abychom dostali s požadovanou přesností součet. Označíme si S_n součet převrácených hodnot n-místných čísel. Tak např.

$$S_2 = \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{98} + \frac{1}{99} .$$

Zbytek po sečtení převrácených hodnot nejvýše dvojmístných čísel obsahuje nejprve členy S_3: ty odhadneme tak, že je „uzávorkujeme po devíti“. Máme tedy v první závorce čísla $1/111, \ldots 1/119$, ve druhé $1/121, \ldots 1/129, \ldots$ v poslední $1/991, \ldots 1/999$. Každou ze závorek odhadneme zdola a shora, čímž pro S_3 dostaneme odhad

$$\frac{9}{10}\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \cdots + \frac{1}{100}\right) < S_3 < \frac{9}{10}\left(\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{99}\right) .$$

Označíme-li odhad zbytku po sečtení $S_1 + S_2$ písmenem R_2, a opakujeme-li celou úvahu na další členy $S_4, S_5, \ldots$, dostaneme

$$U_2\left[\frac{9}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \cdots\right] = 9U_2 < R_2 < 9S_2 = S_2\left[\frac{9}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \cdots\right],$$

kde U_2 vznikne z S_2 zvětšením každého jmenovatele o 1. Pro výsledný součet s tedy platí

$$S_1 + S_2 + 9U_2 < s = S_1 + S_2 + R_2 < S_1 + S_2 + 9S_2 = S_1 + 10S_2 .$$

Protože lze snadno (dokonce i na kalkulačce) spočíst S_1, S_2 a U_2, dostaneme $22,8027 < s < 23,4841$. Příklad dává příležitost ukázat, že i nejlepší počítače občas trošku té někdy vehementně zavrhované „matematické teorie“ potřebují. Zároveň dosti hrubé odhady mohou probudit touhu zkusit získat lepší výsledek (problém sčítání řad tohoto typu je velmi starý, v literatuře lze nalézt další prameny: viz [Wa], [Ap]; přesnější výsledky lze nalézt již v práci [Ir] z r. 1916).

[6] Podobně sečtením všech členů se jmenovatelem nejvýše o dvaceti číslicích obdržíme částečný součet, který se od součtu řady bude lišit o více než 1.

Nabízí se otázka po jiných možných způsobech vynechávání členů harmonické řady a zkoumání konvergence řad vznikajících tímto způsobem – tou také výklad uzavřeme. Její přirozenost dokumentuje fakt, že se takovým problémem zabýval již L. Euler. Jde o problém divergence řady

$$\sum_{p \text{ prvočíslo}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \cdots . \tag{11}$$

Její divergenci „dokázal" již Euler, nikoli však příliš korektně (jde o hlubší problém, ne pouze o to, že v té době byla divergence stále chápána intuitivně). Použil přitom „rovnosti"

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \prod_{p \text{ prvočíslo}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} .$$

Jeho důkaz později spravil LEOPOLD KRONECKER (1823 – 1891). Z velkého počtu důkazů tohoto tvrzení, které lze nalézt v literatuře (P. ERDÖS, R. BELLMAN, L. MOSER, E. DUX, ...) na nás dýchne snaha nalézt opravdu *elementární* důkaz. Jistý přehled o tom podává článek [Ey], kde jsou jednotlivé důkazy popsány. Zákon o zachování vynaloženého úsilí dává tušit jisté hranice, na které narážíme. Následující důkaz publikoval IVAN NIVEN (nar. 1915). Využívá výsledků o řadách, s nimiž jsme se seznámili, a také i pokročilejšího aparátu (např. násobení řad, vlastností exponenciály apod.).

Pokud se nám podaří dokázat divergenci řady $\sum' 1/k$, kde sčítáme přes všechna $k \in \mathbb{N}$, která ve svém prvočíselném rozkladu *nemají žádné prvočíslo ve vyšší mocnině než první* a přes 1 (tento součet je označen sumačním symbolem s čárkou)[7], dostaneme odtud snadno divergenci řady (11). Množinu všech těchto čísel označme například A. Rozepíšeme-li několik prvních členů této řady, dostaneme součet tvaru

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{10} + \cdots .$$

Z rozkladu na prvočinitele plyne, že každé $n \in \mathbb{N}$ je součinem čísla $n_1 \in A$ a $n_2 \in \mathbb{N}$, kde n_2 *je čtvercem* čísla z $\mathbb{N}$. Proto snadno pro každé $n \in \mathbb{N}$ dostáváme

$$\left(\sum_{k<n}' 1/k\right) \left(\sum_{j<n} 1/j^2\right) \geq \sum_{m<n} 1/m .$$

Protože je při $n \to \infty$ součet na pravé straně nekonečný a druhý součet na levé straně konečný, dostáváme i divergenci $\sum' 1/k$. Předpokládejme dále, že řada

[7] Taková k se někdy nazývají *squarefree numbers*, přičemž číslo 1 k nim přiřazujeme definitoricky.

$\sum_{p \text{ prvočíslo}} 1/p$ konverguje k β. Z $e^x > 1 + x$ plyne postupně pro $x > 0$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$\exp(\beta) > \exp\Big(\sum_{\substack{p \text{ prvočíslo} \\ p<n}} 1/p\Big) = \prod_{\substack{p \text{ prvočíslo} \\ p<n}} (1 + 1/p) \geq \sum_{k<n}{}' 1/k ,$$

což dává potřebný spor s konečností β (pro ověření poslední nerovnosti zvažte, že po roznásobení posledního součinu dostaneme mezi sčítanci mj. i všechny členy posledního součtu). Odtud vyplývá (pravda, poněkud složitěji, než jsme zvyklí) to, co by žáci měli znát: množina všech prvočísel je *nekonečná*. Nakonec bych rád poděkoval kolegům, kteří mi laskavě pomohli odstranit některé nedostatky textu a upozornili mne na méně srozumitelná místa a také těm, kteří se rozhodli předběžné verze textu při výuce využít.

LITERATURA:

[Ap] Apostol T. M. and al., *A century of calculus I, II*, The Mathematical Association of America, 1992.

[Bo] Boas R. P., *Calculus as an experimental science*, Amer. Math. Monthly **78** (1971), 664–667.

[Ed] Edwards C. H., *The historical development of the calculus*, Springer, New York, 1979.

[Ey] Eynden Ch. V., *Proofs that $\sum 1/p$ diverges*, Amer. Math. Monthly **87** (1980), 394–397.

[Ir] Irwin F., *A curious convergent series*, Amer. Math. Monthly **23** (1916), 149–152.

[Ja] Jarret J. A., *Regular polygons and geometric series*, Mathematics Teacher (1982), 258–261.

[Ni] Niven I., *A proof of the divergence of $\sum 1/p$*, Amer. Math. Monthly **78** (1971), 272–273.

[Wa] Wadhwa A. D., *An interesting subseries of the harmonic series*, Amer. Math. Monthly **82** (1975), 931–933.