Člověk-umění-matematika

Ján Čižmár

Vznik a vývoj algebrickej geometrie

In: Jindřich Bečvář (editor); Eduard Fuchs (editor): Člověk-umění-matematika. Sborník přednášek z letních škol Historie matematiky. (Czech). Praha: Prometheus, 1996. pp. 72–105.

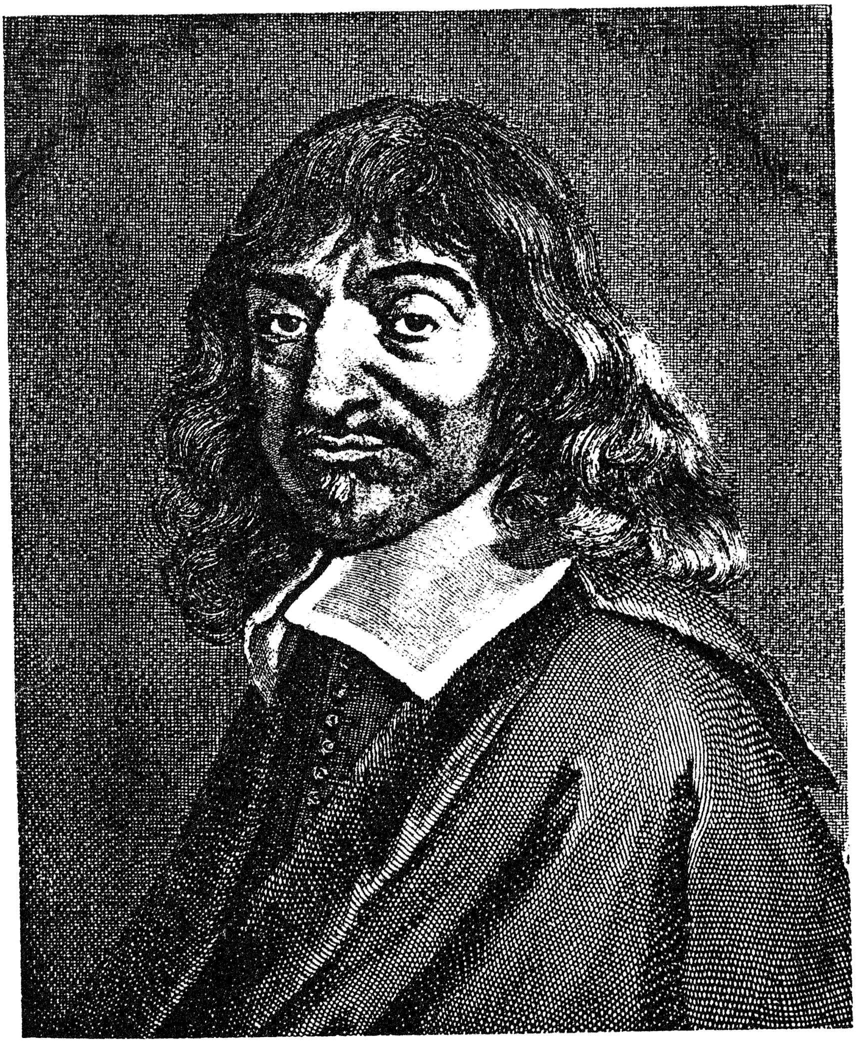
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/400566

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz



RENÉ DESCARTES

(1596 – 1650)

VZNIK A VÝVOJ ALGEBRICKEJ GEOMETRIE

JÁN ČIŽMÁR

Algebrická geometria nepatrí k disciplínam, ktoré by popularitou mohli súťažiť s klasickými oblasťami matematiky, ani k tým moderným odvetviam, ktorých módnosť alebo praktická použiteľnosť priťahujú záujem väčšiny alebo značnej časti nastupujúcich generácií matematikov. Hlavnou príčinou tohto postavenia algebrickej geometrie v sústave matematických disciplín je jej zložitosť, vysoká náročnosť predpokladov a objem vedomostí značne špeciálneho charakteru, s ktorými možno pomýšľať na seriózne štúdium algebrickej geometrie, tým viac na tvorivú prácu v nej. Jej životná spätosť s algebrou, s dostatočne vysokou a efektívne použiteľnou bázou algebrických metód, sú základnou príčinou, prečo sa algebrická geometria ako samostatná matematická disciplína v súčasnom ponímaní začala konštituovať v porovnaní s inými odvetviami modernej matematiky pomerne neskoro – koncom prvej polovice 19. storočia.

Názov „geometria“ v pomenovaní v priebehu celej histórie temer automaticky vyraďoval algebrickú geometriu zo zoznamu predmetov, ktorých znalosť by sa pre ucelené vzdelanie matematika považovala za nevyhnutnú či aspoň užitočnú. U nás je tento postoj k algebrickej geometrii azda ešte výraznejší s výnimkou krátkeho medzivojnového obdobia, v ktorom vedecká a pedagogická autorita akademika B. Bydžovského vydobyla algebrickej geometrii dôstojnejšie miesto v sústave uznávaných disciplín. Ináč stojí algebrická geometria u nás na okraji oficiálneho záujmu a pri živote sa udržiava len vďaka nadšeniu hŕstky zapálených amatérov, ktorých cieľom je uchovať kontinuitu pestovania algebrickej geometrie a priblížiť ju aspoň v niektorých smeroch k súčasnému svetovému stavu, odrážajúcemu podľa mienky niektorých popredných odborníkov trendy vývoja matematiky v budúcom storočí. Nie je to cieľ príliš perspektívny, lebo s postupujúcim obmedzovaním (či likvidáciou) učiteľského štúdia deskriptívnej geometrie – posledného študijného odboru, v ktorého učebných plánoch algebrická geometria figuruje ako povinný predmet – sa stráca legálna základňa, o ktorú sa snahy uvedeného druhu môžu oprieť.

Základným metodologickým problémom výskumu v oblasti dejín algebrickej geometrie je dilema: zvoliť postup chronologický s akcentom na všeobecný vývoj matematiky a súvislosti algebrickej geometrie s progresívne sa rozvíjajúcimi disciplínami toho-ktorého obdobia, alebo sledovať historický vývoj riešenia problémov algebrickej geometrie v niekoľkých nepočetných tematických okruhoch, ktoré sú trvale predmetom záujmu algebrickej geometrie od jej vzniku až po súčasnosť. Je totiž pre algebrickú geometriu príznačný jav, že väčšina jej hlavných problémov sa periodicky – v súvislosti s vývinom v oblastiach, ktoré sú základom metód algebrickej geometrie – vždy znovu stáva centrom záujmu pokroku disciplíny a rieši sa na vyššej úrovni, úplnejšie a všeobecnejšie, pričom temer každé takéto riešenie možno označiť len za relatívne definitívne. Samozrejme, ani jeden z oboch postupov nemá zmysel absolutizovať. V tomto náčrte, pokiaľ vôbec možno hovoriť o rýdzosti metódy, sa uprednostňuje prvá metóda so záverečným zhrnutím hlavných tematických okruhov.

K periodizácii dejín a hodnoteniu prínosu jednotlivých teórií, škôl, národov a geografických oblastí treba poznamenať, že nedostatok prehľadných a ucelených diel o dejinách algebrickej geometrie neumožňuje kritické porovnávanie a dostatočne presné odlíšenie objektívneho pohľadu autorov od ich subjektívneho a často nacionalistického skresľovania významu a zástoja niektorých prúdov vo vývoji algebrickej geometrie.

I. Predhistória

(približne 400 pr. n. l. – 1630 n. l.)

1. Starogrécka matematika

S istou nadsádzkou, ktorej sa sotva možno vyhnúť pri skúmaní prvopočiatkov ktorejkoľvek matematickej disciplíny, možno za prvé zárodky algebrickej geometrie označiť úlohy starovekej matematiky, v ktorých spojenie algebry a geometrie bolo v súlade s charakterom úlohy a predstavovalo účelnú metódu ich riešenia. Príklady tohto druhu sa vyskytujú už v pamiatkach mezopotámskej matematiky s výraznou tendenciou algebrizácie geometrických úloh. Ak sa za vlastný zrod matematiky ako vedy uznajú až výsledky, v ktorých nechýbajú prvky logickej dedukcie – čo je prvotné obdobie vývoja starogréckej matematiky v 6. st. pr. n. l. – za zárodky algebrickej geometrie treba považovať až riešenie úloh geometrickej algebry, ktorých analytickogeometrický prepis dnešnými prostriedkami predstavuje látku elementárnej algebrickej geometrie. V pojmoch geometrickej algebry *číslo* predstavovala *úsečka* (v skutočnosti – *dĺžka úsečky*) a napr. riešenie úlohy, napísanej dnešným zápisom $x^2 = ab$, kde a, b sú známe čísla (teda dĺžky známych úsečiek), znamená nájsť stranu x štvorca, ktorého obsah sa rovná obsahu obdĺžnika so stranami dĺžky a a b. Okrem toho si treba pripomenúť, že jednou z univerzálnych (numerických) metód starogréckej matematiky bola metóda pomerov (proporcií), v reči ktorej by uvedená úloha mala (v dnešnom zápise) tvar $a : x = x : b$.

Hlavným obsahom starogréckej matematiky bolo *riešenie problémov*. Medzi spôsoby, ktorými sa riešenie niektorých problémov hľadalo, patria metódy, ktoré z hľadiska dnešnej klasifikácie predstavujú elementy *teórie kriviek a plôch*. Tak napr. delský problém zdvojnásobenia objemu kocky formulovaný dnešným zápisom v tvare $x^3 = 2a^3$, kde a je dĺžka hrany danej kocky, má v zovšeobecnenej podobe $x^3 = ba^3$ so známou konštantou b u *Hippokrata* (ostrov Chios, okolo r. 440 pr. n. l.) riešenie v tvare „zložených pomerov“

$$a : x = x : y = y : b$$

s neznámymi x, y. Rovnice

$$x^2 = ay \tag{1}$$

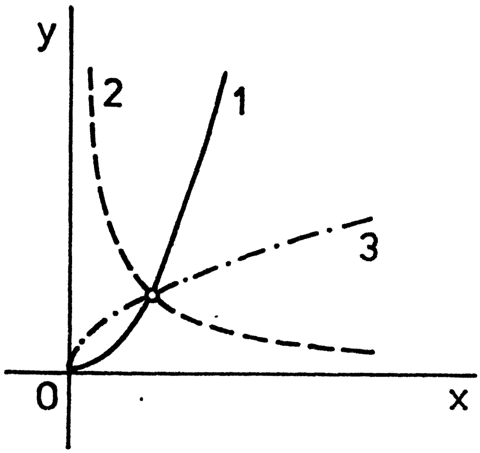
$$xy = ab \tag{2}$$

$$y^2 = bx \tag{3}$$

vyplývajúce z uvedenej zloženej úmery a vedúce k riešeniu

$$a^3 : x^3 = a^3 : a^2b = a : b$$

majú u zakladateľa teórie kužeľosečiek *Menaichma* (okolo r. 350 pr. n. l.) geometrické riešenie v podobe priesečníka paraboly 1, hyperboly 2 a paraboly 3 (obr. 1). (Názvy parabola a hyperbola sa u Menaichma nevyskytujú; pochádzajú až od Apollonia z 3. st. pr. n. l., ktorého traktát o kužeľosečkách bol po stáročia vzorom vedeckého diela.)



Obr. 1

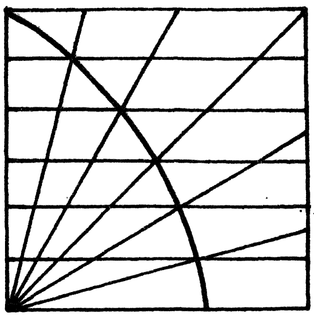
Geometricko-algebrická tematika tvorí aj súčasť matematického diela filozofa a matematika *Demokrita* (Abdera, približne 460–371 pr. n. l.), ktorý sa zaoberal problémami dotyku s kružnicou a guľovou plochou, aproximáciou časti guľovej plochy rovinným útvarom a podobnými otázkami. (Žiaľ, Demokritovo písomné dielo bolo temer celkom zničené.)

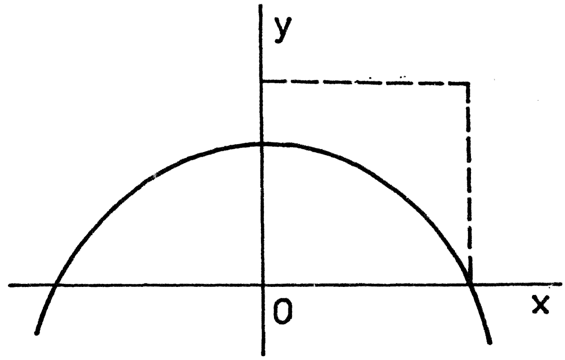
Izolované príklady algebrických a transcendentných kriviek sa vyskytovali v súvislosti s riešením úloh aj u ďalších autorov. *Hippias* (Elida, okolo 420 pr. n. l.) je pôvodcom konštrukcie krivky zvanej kvadratrix (obr. 2), ktorej vyjadrenie v polárnych súradniciach má tvar

$$\varrho \sin \varphi = l\varphi$$

a ktorá je znázornená (v pravouhlej sústave súradníc $(0; x, y)$) na obr. 3. Hippias ju využíval na riešenie ďalšieho klasického problému – úlohy o trisekcii uhla. Neskôr Deinostrates a Nikomedes použili túto krivku pri hľadaní riešenia poslednej klasickej úlohy – kvadratúry kruhu.

Archytas (Tarent, približne 400–365 pr. n. l.) na riešenie úlohy o zdvojnásobení objemu kocky vypracoval dômyselnú stereometrickú konštrukciu, v ktorej použil tieto *rotačné plochy*: valcovú, kužeľovú, guľovú plochu a anuloid.





Obr. 2 a 3

Vyššie spomenutý Menaichmos sa ako prvý systematickejšie zaoberal kužeľosečkami ako rezmi rotačnej kužeľovej plochy vhodnými rovinami.

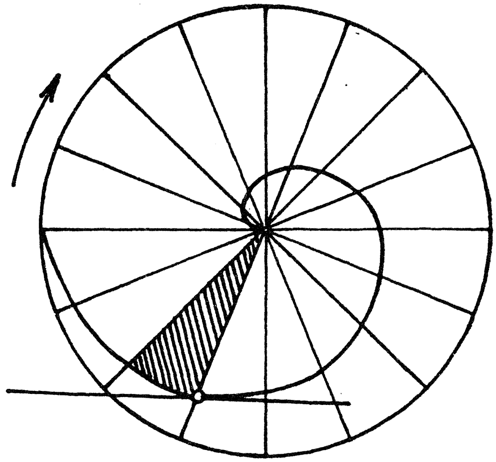
V matematickom diele najväčšieho matematika a fyzika staroveku *Archimeda* (Syrakúzy, 287–212 pr. n. l.) zaberajú krivky a plochy významné miesto. V traktáte O špirálach opisuje konštrukciu bodov krivky nazývanej dnes *Archimedova špirála* (rovnica v polárnych súradniciach: $\varrho = a\varphi$, $a \neq 0$ – konštanta), konštrukciu dotyčnice v ľubovoľnom bode krivky a výpočet obsahu rovinného útvaru ohraničeného dvoma polomermi a oblúkom krivky (obr. 4).

V spise O konoidoch a sféroidoch sa uvádza rotačný paraboloid, dvojdielny rotačný hyperboloid a rotačný elipsoid. I keď hlavná pozornosť sa upriamuje na výpočet objemu častí týchto telies, rutínne narábanie s nimi svedčí o dôkladnom zvládnutí ich geometrickej podstaty. Ešte viac o tom presviedča implicitné využívanie vzťahov medzi kružnicou a elipsou, resp. guľovou plochou a rotačným elipsoidom, ktoré v dnešnej terminológii predstavujú kolmú osovú afinitu v rovine, resp. kolmú rovinovú afinitu v priestore, vyjadrenú v kanonickom tvare rovnicami

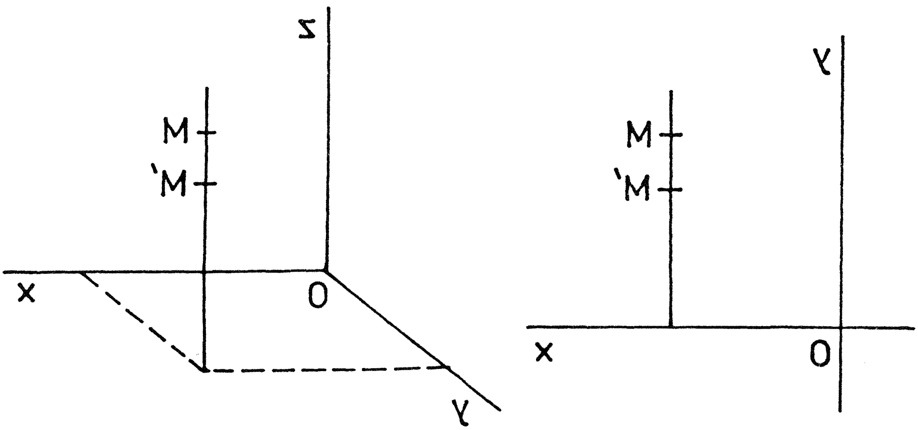
$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= ky \quad (k \neq 0, 1) \quad \text{(obr. 5a)} \end{aligned}$$

resp.

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y \\ z' &= kz \quad (k \neq 0, 1) \quad \text{(obr. 5b)} \end{aligned}$$



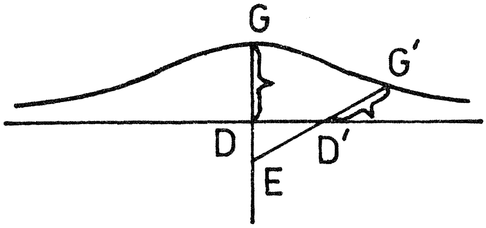
Obr. 4



Obr. 5a, 5b

Nikomedes (Alexandria, okolo 180 pr. n. l.) okrem použitia krivky kvadratrix na riešenie kvadratúry kruhu je známy ako pôvodca krivky *konchoida* (obr. 6) (nazývanej aj jeho menom), ktorú používal na riešenie úloh o trisekcii uhla a o zdvojnásobení objemu kocky.

Apollonios (Perga, 262–190 pr. n. l.) patrí s Euklidom a Archimedom k trojhviezdiu najvýznamnejších starogréckych matematikov. Jeho teória epicyklov a excentrov, ktorú vypracoval na základe štúdia pohybu planét a ich stredov, bola jedným z prameňov Ptolemaiovho astronomického učenia. V diele Kužeľo-



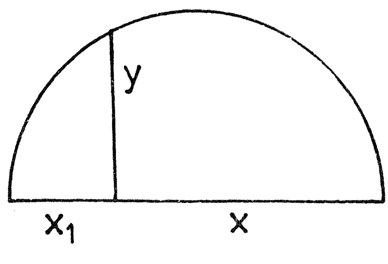
Obr. 6

sečky (Konika), pozostávajúcom z 8 kníh, podal ucelenú teóriu kužeľosečiek, neprekonanú až do čias novovekej modernej matematiky. V jazyku „proporcií“ formuloval vlastnosti kužeľosečiek, ktoré sa analytickým zápisom prepíšu jednoducho na rovnice kužeľosečiek. Napr. pri kružnici (obr. 7) úmera

$$y : x_1 = x : y$$

má v dnešnom zápise tvar

$$y^2 = x_1 x\,.$$



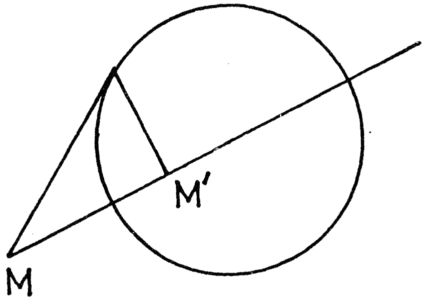
Obr. 7

Analogickou metódou sa dostane rovnica paraboly v tvare

$$y^2 = px\,.$$

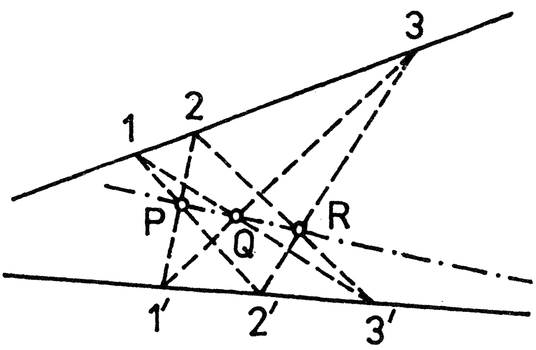
V spise O rovinných miestach používa Apollonios transformácie rovnoľahlosti ($x' = kx$, $y' = ky$, $k \neq 0$) a kružnicovej inverzie (analytické vyjadrenie:

$$x' = \frac{r^2 x}{x^2 + y^2}\,, \qquad y' = \frac{r^2 y}{x^2 + y^2}\ ) \qquad \text{(obr. 8)}.$$



Obr. 8

V období všeobecného úpadku starogréckej matematiky *Pappos* (Alexandria, okolo 320 n. l.) prispel k rozvoju geometrie výsledkami, ktorých hĺbka sa odhalila až v 19.–20. storočí pri skúmaní logických základov geometrií. Patria k nim výsledky o projektívnych transformáciách, z ktorých veta opisujúca incidenčné vlastnosti dvoch trojíc bodov na rôznych priamkach (obr. 9; $12' \cap 1'2 = R$, $13' \cap 1'3 = P$, $23' \cap 2'3 = Q$, body P, Q, R ležia na jednej priamke)



Obr. 9

je ekvivalentná so základnou vetou projektívnej geometrie a ako Pappova axióma je charakteristická pre algebrickú výstavbu projektívnej roviny nad poľom.

2. Stredoveká arabská matematika

Zásluhy stredovekej arabskej matematiky na uchovaní a rozvinutí dedičstva starovekej gréckej matematiky mnohí európski autori dejín matematiky dodnes v plnej miere nedocenili. Hoci v geometrii tento prínos nie je tak zjavný ako napr. v algebre a aritmetike, aj tu použitie kužeľosečiek na riešenie rovníc 3. a 4. stupňa znamenalo v detailoch obohatenie znalostí o vlastnostiach kužeľosečiek. Úlohami tohto druhu sa zaoberali al-Chazín (10. st.), al-Hajtham (10.–11. st.), al-Kúhí (10. st.) a osobitne matematik, astronóm, filozof a básnik Omar Chajjám (11.–12. st.). V jeho podaní sa napr. kubická rovnica špeciálneho typu

$$x^3 + ax = b$$

rieši najprv prevodom na tvar

$$x^3 + p^2x = p^2q$$

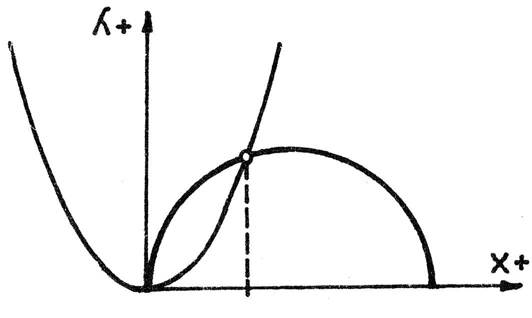
a potom geometricky pomocou kružnice

$$x^2 + y^2 = qx$$

a paraboly

$$x^2 = py$$

(obr. 10).



Obr. 10

Predmetom samostatného teoretického záujmu boli kužeľosečky u bratov banú-Musa, Abu'l-Vafu, Tábita ibn Qurra a ďalších arabských matematikov stredoveku. Celkový charakter arabskej matematiky s jej výraznou algebrizáciou však neumožnil širší rozvoj geometrických ideí ani podstatný pokrok v znalostiach o krivkách a plochách.

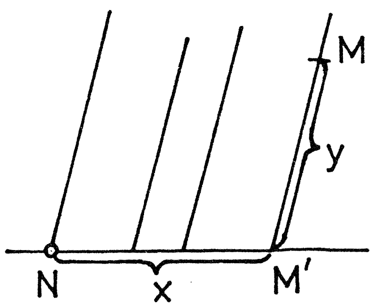
Spojenie algebry a geometrie sa v starogréckej a arabskej matematike nerozvinulo a nesystemizovalo do tej miery (hoci geometrizácia algebry v starogréckej matematike bola dominujúcim javom), aby sa znalosť kvantitatívnych vzťahov medzi dĺžkami úsečiek v geometrických objektoch mohla stať základom *všeobecnej metódy* algebrizácie geometrie.

II. Zárodky algebrickej geometrie

(1630–1800)

Rozhodujúcim predpokladom pre vznik algebrickej geometrie ako samostatnej disciplíny bolo zavedenie *analytickej metódy* Fermatom a Descartom.

Pierre Fermat (1601–1665) v práci Úvod do (štúdia) rovinných a telesových miest (Ad locos planos et solidos isagoge), známej okolo r. 1630 a uverejnenej posmrtne r. 1679 vyjadril základnú ideu analytickej metódy ako možnosť vyjadriť dĺžku y úsečky MM' bodu M známej čiary (priamky alebo kužeľosečky) prechádzajúcej bodom N pomocou algebrickej rovnice medzi x, y (obr. 11).



Obr. 11

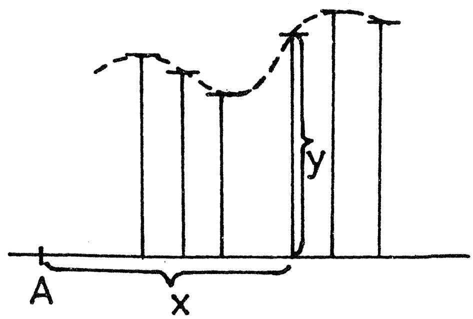
Významným úspechom použitia metódy bol výsledok, že všetky rovnice 2. stupňa v x, y sú vyjadrením práve všetkých afinných typov kužeľosečiek.

U Fermata chýba odvodzovanie geometrických vlastností kriviek podrobnejším rozborom algebrických rovníc. Je mu však známy (explicitne neformulovaný) pojem *rozmeru* v tom zmysle, že jedna algebrická rovnica definuje v rovine krivku, v priestore plochu a že pojem možno formálne rozšíriť aj na väčší počet premenných.

René Descartes (1596–1650) spisom Geometria (Géométrie) z r. 1637 vlastne mienil predviesť ukážku aplikácie svojej filozofickej metódy na špeciálnu vednú disciplínu. Hlbšia erudícia v algebre umožnila Descartovi viac než u Fermata chápať analytickú geometriu ako *metódu*, nástroj riešenia geometrických úloh. V základnom prístupe vyjadrovania bodov pomocou usporiadaných dvojíc čísel niet u Descarta v porovnaní s Fermatom podstatného rozdielu (obr. 12).

Podľa dnešného chápania poloha osi y nie je výslovne fixovaná; je daná len osnova rovnobežiek (do ktorej dnes patrí aj os y) a začiatočný bod merania úsečiek na osi x. Závislosť dĺžky y od vzdialenosti x v tvare

$$y = f(x)$$



Obr. 12

pre všetky body určitej čiary chápe Descartes ako rovnicu čiary. Novým prvkom u Descarta je odvodzovanie geometrických vlastností na základe algebrických úprav a riešenia rovníc. Z tohto hľadiska rozlišuje dva typy úloh:

1. „Určité" úlohy, ktorých algebrické riešenie vedie ku konečnému počtu výsledkov s geometrickou interpretáciou.

2. „Neurčité" úlohy, pri ktorých počet hľadaných geometrických riešení nie je konečný a vyjadruje algebricky hľadanú veličinu pomocou premennej veličiny; výsledkom riešenia je algebrická závislosť veličín, ktorej geometrickou interpretáciou je krivka.

Sám Descartes svoju metódu príliš obšírne nezúžitkoval, ale jasnosťou výkladu a inštruktívnosťou príkladov položil dobré základy používania analytickej metódy pri skúmaní (algebrických) *kriviek* a *plôch* ľubovoľného stupňa.

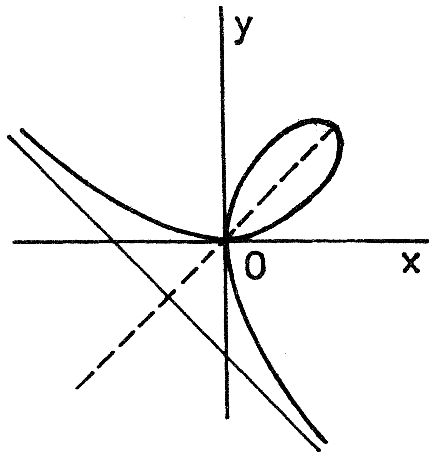
(Jedna z kriviek 3. stupňa s rovnicou

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

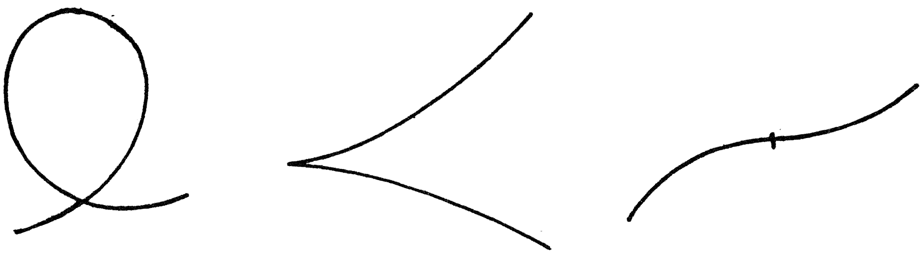
má názov *Descartov list* (obr. 13).)

Analytická metóda mala kardinálny význam ako pracovná metóda diferenciálneho a integrálneho počtu. V syntetizujúcom matematicko-fyzikálnom diele *Isaaca Newtona* (1642–1727) priniesla okrem prvoradých výsledkov fyziky a matematiky ako „vedľajší" produkt aj afinno-metrickú klasifikáciu kriviek tretieho stupňa (v euklidovskej rovine) v diele Vyčíslenie kriviek tretieho rádu (Enumeratio linearum tertii ordinis), ktoré bolo dokončené už r. 1676, ale tlačou vyšlo až r. 1704 ako dodatok k dielu Optika. Celkový počet 72 typov týchto kriviek neskôr Stirling doplnil na 76. Za povšimnutie stojí, že časti kriviek v kvadrantoch so zápornými súradnicami sa považujú za rovnocenné s časťami v kvadrante s oboma súradnicami kladnými. (To je v dnešnej analytickej geometrii samozrejmé, ale v 17. storočí to predstavovalo významné abstraktné rozšírenie oboru záporných čísel do geometrie.)

(Na porovnanie: Dnešná projektívna klasifikácia rovinných algebrických kubík obsahuje 3 typy: typ s uzlovým bodom (obr. 14a), typ s bodom vratu (obr. 14b) a typ bez singulárnych bodov (obr. 14c).)



Obr. 13



Obr. 14a, b, c

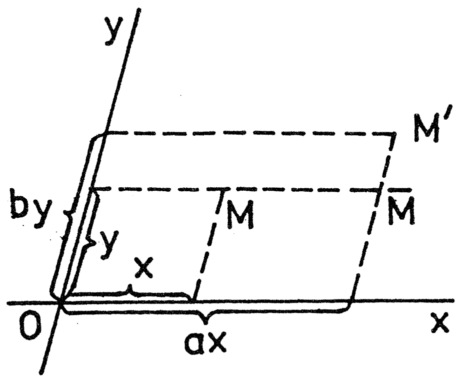
Parametrické vyjadrovanie kriviek v Newtonovom podaní dosiahlo vysokú úroveň.

Ďalší významný pokrok v rozvoji teórie kriviek a plôch priniesol 2. diel knihy *Leonharda Eulera* (1707–1783) Úvod do analýzy nekonečne malých veličín (Introductio in analysin infinitorum), 1748, ktorý možno s istým zjednodušením označiť ako teóriu a aplikáciu analytickej geometrie. Dôležité partie algebrickogeometrickej povahy v diele sú:

- afinná klasifikácia rovinných algebrických kriviek 3. stupňa (16 typov)
- riešenie otázok dotyku čiar, násobnosti bodov na nich (singularít), inflexie (bez hlbšej systemizácie)
- zavedenie a používanie *afinných transformácií*, napr. transformácií typu

$$x' = ax, \quad y' = by$$

(obr. 15)
- obšírna teória a neúplná klasifikácia plôch 2. stupňa.



Obr. 15

Gabriel Cramer (1704–1752), známy najmä svojím prínosom v teórii riešenia sústav lineárnych rovníc (Cramerovo pravidlo), v diele Úvod do analýzy kriviek (Introduction à l'analyse des lignes courbes), vydanom r. 1750, zhrnul a doplnil znalosti o počte určujúcich prvkov krivky, o singularitách, o násobnosti prieseku kriviek a použití metód analýzy do takej miery, že podstatne závažnejších výsledkov v teórii algebrických kriviek sa už v 18. storočí nedosiahlo.

Z výsledkov, ktoré aj dnes tvoria súčasť klasickej teórie kriviek, hodno spomenúť významné vety *Colina Maclaurina* (1698–1746), týkajúce sa číselných invariantov rovinných algebrických kriviek:

- počet jednoduchých nezávislých podmienok určujúcich krivku stupňa n je
$$N = \frac{n(n+3)}{2} = \binom{n+2}{2} - 1\,;$$
tento výsledok je špeciálnym prípadom vety, podľa ktorej počet jednoduchých nezávislých podmienok určujúcich nadplochu stupňa n v m-rozmernom projektívnom priestore je
$$\binom{n+m}{m} - 1$$
- počet dvojnásobných bodov krivky stupňa n, ktorá nemá singularity vyšších rádov, neprevyšuje číslo
$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$
- počet priesečníkov dvoch rovinných algebrických kriviek stupňov m a n za istých zjednodušujúcich okolností sa rovná číslu mn.

Tieto výsledky Maclaurin publikoval v rokoch 1718–1720. Náznaky poslednej vety sa objavili už u Newtona a Leibniza, ktorí načrtli aj účinný proces eliminácie vedúcej k výsledku, ale explicitné vyjadrenie vety pochádza až od Maclaurina. Spresnenie vety, najmä s ohľadom na vlastnosti priesečníkov, ktoré sú násobnými bodmi kriviek, podal r. 1764 *Étienne Bézout* (1730–1783). Od neho pochádza aj zovšeobecnenie vety na prienik troch plôch v trojrozmernom priestore, podľa ktorého počet všetkých spoločných bodov troch plôch stupňov m, n, p so započítaním „násobnosti" je mnp. Zovšeobecňovanie tohto výsledku je dodnes predmetom intenzívneho bádania v modernej algebrickej geometrii.

III. Budovanie základov (projektívna geometria; krivky; plochy) (1800–1860)

1. Projektívna geometria

Výraznejší pokrok smerom k osamostatneniu algebrickej geometrie nebol mysliteľný bez upevnenia logických základov priestoru, ktorý sa následne historicky ukázal ako najvhodnejší priestor algebrickogeometrických objektov. Týmto priestorom bol projektívny priestor.

Základy niektorých partií projektívnej geometrie položil už *Girard Desargues* (1591–1661) pri hľadaní matematického odôvodnenia geometrických metód v niektorých odvetviach. V práci Náčrt prístupu k javom vznikajúcim pri stretnutí kužeľa s rovinou (Brouillon project d'une atteinte aux événements des rencontres du cone avec un plan) z r. 1639 pri štúdiu stredového premietania zavádza „nevlastné" prvky, formuluje a dokazuje niektoré vety projektívnej geometrie (o. i. vetu o dvoch trojuholníkoch v istej špeciálnej polohe; veta sa dnes nazýva Desargovou vetou a je jedným z kardinálnych výrokov projektívnej geometrie), zavádza a používa transformácie, niektoré z nich špeciálneho druhu (involúcia), na jednotnom základe definuje a rozvíja teóriu kužeľosečiek a priamkových plôch 2. stupňa.

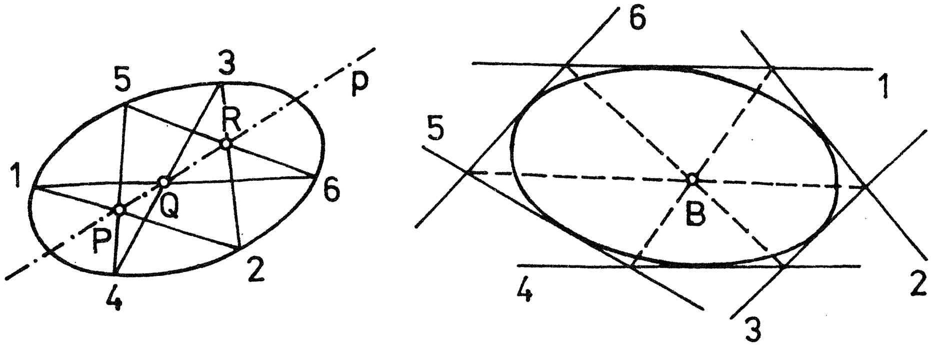
Desargovo dielo – na škodu matematiky – okrem využitia u Pascala a de La Hira nezaznamenalo väčší ohlas. Mnohé z jeho výsledkov boli znovuobjavené až vo všeobecnom rozvoji projektívnej geometrie v 19. storočí.

Vlastnému vzniku projektívnej geometrie tesne predchádzalo dielo *Gasparda Mongea* (1746–1818) Deskriptívna geometria (Géométrie déscriptive, 1799) a dielo jeho žiaka *Lazara N. M. Carnota* (1753–1823) O korelácii útvarov v geometrii (De la corrélation des figures en géométrie, 1801) a Geometria polohy (Géométrie de position, 1803), v ktorých boli uvedené niektoré pojmy a vety projektívnej geometrie, ako napr. niektoré vlastnosti polarity, polohové a číselné invarianty vzhľadom na špeciálne projektívne transformácie, dvojpomer a i.

Za tvorcu prvého viac-menej uceleného systému projektívnej geometrie možno považovať iného Mongeovho žiaka *Jean-Victora Ponceleta* (1788–1867), ktorý v diele Traktát o projektívnych vlastnostiach útvarov (Traité des propriétés projectives des figures, 1822), vychádzajúc zo stredového premietania, položil základy systematického rozvíjania projektívnej geometrie definovaním podstaty *projektívnych* vlastností a ich opisom v rovinných a priestorových útvaroch prevažne syntetickou metódou. Istá nevyhnutnosť použitia algebry sa prejavila v zavedení a používaní imaginárnych prvkov.

K rozvoju francúzskej školy syntetickej projektívnej geometrie prispel aj *Charles J. Brianchon* (1785–1864), ktorý v práci Memoár o čiarach 2. rádu (Mémoire sur les lignes du 2^d ordre, 1817) dospel na prah definície pojmu dualita. Sám pojem duality, ktorý je jedným z kardinálnych pojmov projektívnej geometrie, pochádza až od Ponceleta.

Pomocou polarity sformuloval Brianchon r. 1806 vetu (neskôr nazvanú jeho menom) duálnu k vete Pascalovej.



Obr. 16 a, b

(Pascalova veta charakterizuje incidenciu 6 bodov s jednou kužeľosečkou (obr. 16a): $12 \cap 45 = P$, $23 \cap 56 = R$, $34 \cap 61 = Q$; body P, Q, R incidujú s jednou priamkou. Brianchonova veta charakterizuje incidenčné väzby 6 dotyčníc jednej kužeľosečky (obr. 16b): priamky $(1 \cap 2) \cup (3 \cap 4)$, $(2 \cap 3) \cup (5 \cap 6)$, $(3 \cap 4) \cup (6 \cap 1)$ incidujú s jedným bodom.)

O vypracovanie algebrických metód projektívnej geometrie sa zaslúžili najmä *August Ferdinand Möbius* (1790–1868), *Julius Plücker* (1801–1868) a *Arthur Cayley* (1821–1895). Möbius v diele Barycentrický počet (Der barycentrische Calcul, 1827) obsiahlo rozpracoval analytické metódy projektívnej geometrie a značne pokročil v charakterizácii invariantov vzhľadom na rozličné typy transformácií. V značnej miere tak pripravil predpoklady Kleinovej klasifikácie grúp transformácií na začiatku 70. rokov 19. storočia. Plücker v dvojdielnej knihe Analyticko-geometrické výskumy (Analytisch-geometrische Entwicklungen I, II, 1828–31) a v diele Systém analytickej geometrie (System der analytischen Geometrie, 1835) utvoril pevný algebrický základ takých pojmov projektívnej geometrie, ako sú homogénne súradnice, nevlastné prvky, imaginárne prvky, dualita a i. Zo série Cayleyho článkov o analytických metódach projektívnej geometrie sa za najvýznamnejší považuje Šiesty memoár o formách (A sixth memoir upon quantics, 1859), ktorý bol východiskovým bodom teórie projektívnych metrík.

Popri budovaní algebrických základov projektívnej geometrie pokračoval intenzívny rozvoj syntetickej projektívnej geometrie. V diele *Jacoba Steinera* (1796–1863) Syntetické rozvíjanie vzájomnej závislosti geometrických útvarov (Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander, 1832) je celá projektívna geometria budovaná na základe jednoduchých a názorných geometrických útvarov a transformácií medzi nimi, pričom základnými druhmi transformácií sú perspektívne a od nich odvodené projektívne transformácie útvarov prvého rádu (množina bodov priamky, zväzok priamok). Taktiež *Michel Chasles* (1793–1880) v dielach Traktát o vyššej geometrii (Traité de géométrie superieure, 1852) a Traktát o kužeľosečkách (Traité des sections coniques, 1865) nezávisle od Steinera rozvíjal podobné idey výstavby projektívnej geometrie lineárnych útvarov, kužeľosečiek a kvadratických plôch na báze elementárnych útvarov, projektívnych transformácií a dvojpomeru. Chaslov „princíp korešpondencie" bol v období klasickej algebrickej geometrie zovšeobecnený na jeden z nosných výsledkov teórie korešpondencií s početnými aplikáciami. Fundamentálny prínos do vývinu syntetickej projektívnej geometrie zaznamenal *Christian von Staudt* (1798–1867) svojím dielom Geometria polohy (Geometrie der Lage, 1847) a seriálom Príspevky ku geometrii polohy (Beiträge zur Geometrie der Lage, 1856–60), v ktorých vybudoval všetky základné pojmy projektívnej geometrie nezávisle od metriky a syntetickou metódou zvládol aj zavedenie a použitie imaginárnych elementov.

2. n-rozmerný priestor

S istým časovým posuvom, ale temer súbežne s rozvojom algebrických metód projektívnej geometrie dvoj- a trojrozmerného priestoru prebiehala výstavba algebrickej teórie abstraktných n-rozmerných priestorov. Diela *Hermanna Grassmanna* (1809–1877) Teória lineárnej extenzie (Die lineale Ausdehnungslehre, 1844) a Teória extenzie (Die Ausdehnungslehre, 1862) sú základné pramene, ktorými sa začína teória n-rozmerných vektorových priestorov, hoci terminologicky sú ešte značne vzdialené dnešnému ponímaniu. Plückerovo dielo Nová geometria priestoru postavená na chápanie priamok ako priestorového prvku (Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der geraden Linien als Raumelement, 1868) nemá vo vzťahu k rozmeru priestoru všeobecnosť Grassmannových diel, ale metódou, ideami a blízkosťou k projektívnemu priestoru je podnetnejšie pre rozvíjanie toho smerovania, ktoré vyústilo v pojme n-rozmerného projektívneho priestoru nad poľom reálnych alebo komplexných čísel ako priestoru najvhodnejšieho na vyjadrovanie vlastností objektov algebrickej geometrie. Vyjadrenie priamky trojrozmerného projektívneho priestoru určenej bodmi $(a) = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ a $(b) = (b_0, b_1, b_2, b_3)$ pomocou Plückerových súradníc

$$p_{ij} = \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix}; \quad i,j = 0,1,2,3; \quad i \neq j;$$

ktoré sú viazané vzťahom

$$p_{01}p_{23} + p_{02}p_{31} + p_{03}p_{21} = 0\,, \tag{1}$$

má v dnešnej teórii n-rozmerného projektívneho priestoru analógiu v Grassmannových (v nemeckej literatúre Plückerových) súradniciach d-rozmerného podpriestoru P^d projektívneho priestoru P^n $(d < n)$, určených takto:
Ak $(a^{(0)}) = (a_0^{(0)}, \dots, a_n^{(0)}), \dots, (a^{(d)}) = (a_0^{(d)}, \dots, a_n^{(d)})$ je $d+1$ lineárne nezávislých bodov určujúcich d-rozmerný podpriestor P^d, hodnoty

$$p_{i_0 \dots i_d} = \begin{vmatrix} a_{i_0}^{(0)} & \dots & a_{i_d}^{(0)} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i_0}^{(d)} & \dots & a_{i_d}^{(d)} \end{vmatrix} ; \quad i_0 < \dots < i_d ; \{i_0, \dots, i_d\} \subset \{0, \dots, n\} ;$$

sú Grassmannovými súradnicami podpriestoru P^d. Medzi týmito súradnicami platia tzv. kvadratické p-vzťahy, ktoré sú zovšeobecnením vzťahu (1).

Analytickú výstavbu n-rozmerného euklidovského priestoru v základných črtách zavŕšil *Ludwig Schläfli* (1814–1895) v diele Teória mnohonásobnej kontinuity (Theorie der vielfachen Kontinuität), ktoré síce bolo uverejnené až posmrtne r. 1901, ale jeho základné idey boli publikované už pred r. 1860.

3. Algebrické krivky

V súvislosti s pokrokom algebrických metód v projektívnej geometrii vydelila sa z analytickej geometrie v 1. polovici 19. storočia ako samostatný celok teória algebrických kriviek stupňa vyššieho ako 2. Tento zjav je možné s istou historickou licenciou považovať za *vznik algebrickej geometrie* ako samostatnej matematickej disciplíny. Používanie nevlastných a imaginárnych prvkov našlo v homogénnych projektívnych súradniciach, ktorými mohli byť aj komplexné čísla, svoj pevný algebrický základ. Základným priestorom štúdia algebrických kriviek sa stala projektívna rovina alebo projektívny priestor nad poľom reálnych čísel, doplnené podľa potreby komplexnými elementmi (t. j. bodmi, priamkami, rovinami, ktorých súradnice sú komplexné čísla). Teda najvšeobecnejším ambientným (nosným) priestorom kriviek je priestor, ktorého dnešné n-rozmerné analogón nad poľom komplexných čísel má tvar

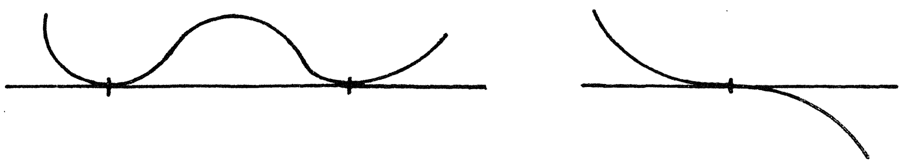
$$P^n(C) = [C^{n+1} - \{(0, \dots, 0)\}]/R,$$

kde R je relácia ekvivalencie, definovaná nasledovne:
$(x_0, \dots, x_n)R(y_0, \dots, y_n)$ práve vtedy, keď existuje také číslo $r \in C$, že $x_i = ry_i$, $i = 0, 1, \dots, n$.

K rozvoju teórie algebrických kriviek v uvádzanom období (približne do r. 1860) významne prispeli také matematické osobnosti, ako boli *Carl Gustav Jacob Jacobi* (1804–1851), *Ludwig Otto Hesse* (1811–1874), H. Grassmann, J. Plücker, A. Cayley, *Rudolph Friedrich Alfred Clebsch* (1833–1872), *Eugenio Beltrami* (1835–1900), *Luigi Cremona* (1830–1903). Už v Systéme analytickej geometrie r. 1835 Plücker opravil mnoho Eulerových nepresností v klasifikácii kriviek 4. stupňa. Sám sa však pre nedostatočné rešpektovanie projektívneho hľadiska dopustil nových omylov. Významným prínosom však bolo úplné vyjasnenie počtu inflexných bodov kubickej krivky a stanovenie všetkých typov singularít kriviek 4. stupňa. Vo fundamentálnom diele Teória algebrických kriviek

(Theorie der algebraischen Curven, 1839) však už Plücker s plným úspechom využil svoje algebrické metódy projektívnej geometrie na stanovenie závislostí medzi dôležitými číselnými invariantmi rovinnej algebrickej krivky:

n - stupeň (maximálny počet spoločných bodov krivky s priamkou)
m - trieda (maximálny počet dotyčníc krivky idúcich jedným bodom)
u - počet uzlových bodov krivky
k - počet bodov vratu krivky
i - počet inflexných bodov krivky (obr. 17)
t - počet dvojnásobných dotyčníc krivky (obr. 18)



Obr. 17 a 18

Použitím duality ukázal, že pre priamky projektívnej roviny možno zaviesť *priamkové* súradnice (u_0, u_1, u_2), pomocou ktorých všetky dotyčnice krivky $f(x_0, x_1, x_2) = 0$ vyjadruje určitá rovnica $\varphi(u_0, u_1, u_2) = 0$. Krivky c_f, resp. c_φ definované rovnicami $f(x_0, x_1, x_2) = 0$ a $\varphi(x_0, x_1, x_2) = 0$ sú navzájem *duálne* krivky a ich body, dotyčnice a číselné invarianty si bijektívne korešpondujú takto:

Na c_f:	Na c_φ:
bod	dotyčnica
dotyčnica	bod
uzlový bod	dvojnásobná dotyčnica
bod vratu	inflexná dotyčnica
inflexný bod	dotyčnica v bode vratu
stupeň	trieda
trieda	stupeň

Pre krivku stupňa n, ktorá okrem u uzlových bodov a k bodov vratu nemá iné singularity, platí:

$$m = n(n-1) - 2u - 3k \tag{2}$$

$$i = 3n(n-2) - 6u - 8k \tag{3}$$

$$n = m(m-1) - 2t - 3i \tag{4}$$

$$k = 3m(m-2) - 6t - 8i \tag{5}$$

Vzťahy (2), resp. (3) sa nazývajú prvý, resp. druhý Plückerov vzorec, (4) a (5) sú *duálne* Plückerove vzorce.

Pri skúmaní inflexných bodov krivky $f(x_0, x_1, x_2) = 0$ sa ukázala dôležitou krivka určená rovnicou

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right| = 0$$

stupňa $3n(n-2)$ študovaná Hessem a neskôr pomenovaná po ňom Hesseho krivkou.

Algebraickú teóriu invariantov kriviek zavŕšil Salmon prácami Traktát o vyšších rovinných krivkách (Treatise on the higher plane curves, 1852) a Moderná vyššia algebra (Modern higher algebra, 1859).

Od Sylvestra pochádza algebrická formulácia eliminačného procesu, ktorým sa určujú spoločné body dvoch rovinných algebrických kriviek. Ak ${}^1c$, resp. ${}^2c$ sú krivky stupňa n, resp. m určené rovnicami

$$\begin{aligned} {}^1c : f(x_0, x_1, x_2) =& u_0(x_0, x_1)x_2^n + u_1(x_0, x_1)x_2^{n-1} + \cdots + \\ &+ u_i(x_0, x_1)x_2^{n-i} + \cdots + u_n(x_0, x_1) = 0 \\ {}^2c : g(x_0, x_1, x_2) =& v_0(x_0, x_1)x_2^m + v_1(x_0, x_1)x_2^{m-1} + \cdots + \\ &+ v_j(x_0, x_1)x_2^{m-j} + \cdots + v_m(x_0, x_1) = 0 \end{aligned}$$

kde f, resp. g sú homogénne polynómy stupňa n, resp. m, u_i, resp. v_j sú homogénne polynómy stupňa i, resp. j, homogénna rovnica

$$R_{x_2}(f, g) = \begin{array}{r} m\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right. \\ n\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right. \end{array} \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & \dots & u_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_0 & \dots & u_{n-1} & u_n & \dots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \dots & 0 & u_0 & u_1 & \dots & u_n \\ v_0 & v_1 & \dots & v_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & v_0 & \dots & v_{m-1} & v_m & \dots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \dots & 0 & v_0 & v_1 & \dots & v_m \end{vmatrix} = 0$$

s neznámymi x_0, x_1 je buď splnená identicky, buď má (so započítaním násobnosti) práve mn koreňov (y_0, y_1). V prvom prípade majú krivky ${}^1c$, ${}^2c$ spoločnú súčasť, v druhom prípade sú korene (y_0, y_1) prvými dvoma súradnicami spoločných bodov kriviek ${}^1c$, ${}^2c$.

Výsledok je algebrickým základom Bézoutovej vety o počte spoločných bodov dvoch kriviek.

4. Algebrické plochy

Trvalým predmetom záujmu projektívnej (a algebrickej) geometrie v 19. storočí boli plochy stupňa 2 a ich lineárne systémy. Rýdzo algebrickogeometrickú tému predstavovali algebrické plochy vyšších stupňov, najmä stupňa 3 a 4.

Osobitne frekventovanou témou boli plochy stupňa 3, ktoré svojimi špeciálnymi vlastnosťami boli vďačným objektom pozornosti, veľmi prístupným na skúmanie analytickými aj syntetickými metódami. Plocha stupňa 3 je totiž podľa Chaslovho princípu korešpondencie plochou najvyššieho stupňa, na ktorej je všeobecne zaručená existencia priamok, a to – pokiaľ nejde o priamkové plochy – v konečnom počte. Existenciu 27 priamok na všeobecnej kubickej ploche ukázali r. 1849 nezávisle Cayley a Salmon. Synteticky sa štúdiu plochy 3. stupňa venoval Steiner. Schläfli poukázal na závažné odlišnosti kubických plôch v reálnom a v komplexnom projektívnom priestore. Prvý materiálny model plochy 3. stupňa, ktorý zhotovil r. 1869 Christian Wiener, bol istý čas považovaný za vrcholný matematický výkon v konštrukčnej geometrii. Jeho význam poklesol po tom, ako Klein vypracoval celú sériu modelov takéhoto druhu. Kubické plochy pútali pozornosť aj v ďalších obdobiach vývoja algebrickej geometrie a ich nové spracovania bývajú skúšobným kameňom účinnosti novonastupujúcich metód. Napr. dielo Jurija Ivanoviča Manina Kubické formy (Kubičeskije formy) z r. 1972 je syntetizujúcim dielom opierajúcim sa o najnovšie metódy algebry, geometrie a teórie čísel v spracovaní problémov, ktorých ústredným bodom sú vlastnosti kubických plôch.

Z plôch stupňa 4 boli atraktívne najmä Kummerove priamkové plochy, ktorých význam je dodnes aktuálny.

Vlastný frontálny rozvoj všeobecnej teórie algebrických plôch nastal až o niekoľko desaťročí v talianskej škole algebrickej geometrie.

IV. Transcendentné metódy

(1850–1866)

Pre rozvoj transcendentných metód, ktoré sa neskôr účinne osvedčili pri zvládnutí opisu lokálnych vlastností algebrických kriviek a plôch, mali veľký význam publikácie *Bernharda Riemanna* (1826–1866) z päťdesiatych rokov 19. storočia. Prácou Základy pre všeobecnú teóriu funkcií jednej premennej komplexnej veličiny (Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen komplexen Grösse, 1851) uzavrel etapu hľadania korektných základov funkcií komplexnej premennej u svojich predchodcov, z ktorých vynikol najmä Cauchy. Pre algebrickú geometriu malo značne väčší význam dielo Teória abelovských funkcií (Theorie der Abelschen Funktionen, 1857), v ktorom boli zahrnuté také dôležité pojmy, výsledky a metódy, ako sú abelovské eliptické integrály tvaru

$$\int \frac{R(t)dt}{\sqrt{P(t)}}$$

($P(t)$ je polynóm 3. alebo 4. stupňa, $R(t)$ je racionálna funkcia), Cauchyho komplexná analýza, algebrická funkcia s komplexnej premennej z definovaná algebrickou rovnicou $F(s,z)=0$ a i. S algebrickou funkciou boli späté pojmy a výsledky zvyšujúce názornosť teórie: n-listová Riemannova plocha bez okraja funkcie $s(z)$, veta o konečnom počte bodov rozvetvenia, definícia vetvy.

Pre účely algebrickej geometrie sa ukázali ešte pôsobivejšie výsledky, ktoré uviedol *Victor Alexandre Puiseux* (1820–1883) v prácach Výskumy o algebrických funkciách (Recherches sur les fonctions algébriques, 1850) a Nové výskumy o algebrických funkciách (Nouvelles recherches sur les foncions algébriques, 1851). Podľa nich vyjadrenie vetvy funkcie v okolí bodu z_0 pomocou uniformizujúceho parametra t – čo má geometrickú interpretáciu v pojme vetvy rovinnej algebrickej krivky v bode z_0 – má tvar

$$z - z_0 = t^h, \quad s - s_0 = a_1 t^{m_1} + a_2 t^{m_2} + \dots, \quad m_1 < m_2 < \dots$$

Pre bod $(s, z) = (0, 0)$ možno toto vyjadrenie uviesť na tvar

$$s = b_1 z^{r_1} + b_2 z^{r_2} + \dots; \quad r_1 < r_2 < \dots;$$

s racionálnymi exponentmi $r_1, r_2, \dots$.

V 20. storočí sa tieto výsledky rozvinuli na teóriu formálnych mocninových radov s koeficientmi v ľubovoľnom poli. Tu však už otázka konvergencie radu, ktorá mala vždy zmysel v prípade poľa reálnych alebo komplexných čísel, závisí podstatne od povahy poľa koeficientov.

Riemann oživil záujem o biracionálne transformácie plôch zavedením transformácií

$$\begin{aligned} x' &= f_1(x, y, z) \qquad & x &= g_1(x', y', z') \\ y' &= f_2(x, y, z) \qquad & y &= g_2(x', y', z') \\ z' &= f_3(x, y, z) \qquad & z &= g_3(x', y', z') \end{aligned}$$

($f_1, \dots, g_3$ sú racionálne funkcie), ktoré sa v špeciálnych tvaroch sporadicky objavovali v matematike už dávnejšie (napr. pre krivky v tvare $x' = \frac{1}{x}$, $y' = \frac{y}{x}$ už u Newtona). Biracionálne transformácie, ktoré sa plného rozkvetu dočkali o niekoľko desaťročí, sa osvedčili ako vhodný aparát na redukciu singulárnych bodov. Pri skúmaní pôsobenia biracionálnych transformácií na krivky odhalil Riemann číselný invariant p, ktorý Clebsch r. 1865 nazval *rodom* krivky a pre ktorý v tom istom roku našiel závislosť od stupňa krivky a počtu dvojnásobných bodov v tvare

$$p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - u - k\,.$$

Riemann pri hľadaní parametrizácie kriviek zistil, že krivky rodu 0 sú parametrizovateľné racionálnymi funkciami – také krivky nazval *racionálne* (unikurzálne), krivky rodu 1 sú parametrizovateľné eliptickými funkciami – také krivky nazval *eliptické* (bikurzálne), a krivky rodu väčšieho než 1 sú parametrizovateľné hypereliptickými funkciami – také krivky nazval *hypereliptické*.

V. Extenzívny rozvoj

(1860–1925)

1. Algebrický prístup

O spresnenie a algebrizáciu transcendentných metód teórie funkcií sa osobitne zaslúžila nemecká algebrická škola druhej polovice 19. storočia.

Richard Dedekind (1831–1916) a *Heinrich Weber* (1841–1913) v práci Teória algebrických funkcií jednej premennej (Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen, 1882) algebrizovali Riemannove idey z teórie funkcií jednej komplexnej premennej zavedením pojmov, ktoré v temer nezmenenej forme dodnes predstavujú účinný aparát algebrickej geometrie. Do sústavy kardinálnych pojmov patria o. i. pole racionálnych funkcií variety, rád funkcie v bode, ohodnotenie a pridružené pojmy (napr. celistvé prvky, okruh ohodnotenia atď.), divízor a pridružené pojmy. Práca obsahuje aj zovšeobecnenie vety v pôvodnej podobe formulovanej Riemannom a spresnenej *Gustavom Rochom* (1839–1866) r. 1864, známej pod názvom Riemannova-Rochova veta, v podobe

$$l(D) - l(\Delta - D) = \operatorname{stup} D + 1 - g\,,$$

kde $l(D)$ je rozmer lineárneho priestoru viazaného na divízor D, Δ je divízor príslušný ku kanonickej triede divízorov, g je rod a $\operatorname{stup} D$ je stupeň divízora.

Leopold Kronecker (1823–1891) v práci Základy aritmetickej teórie algebrických veličín (Grundlagen einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen, 1882) pripravil algebrické základy úvodných pojmov teórie algebrických variet, ako sú definujúci systém rovníc algebrickej variety, zovšeobecnený eliminačný postup, rozmer variety a jeho súvis s počtom definujúcich rovníc, ireducibilita, rozklad variety a i. Problém minimalizácie definujúceho systému rovníc je dodnes aktuálny v podobe klasického problému teórie kriviek – problému, či každá dokonalá krivka projektívneho priestoru je úplným prienikom dvoch plôch.

Kroneckerovu líniu rozvíjali *Emanuel Lasker* (1868–1941) (majster sveta v šachu) v práci K teórii modulov a ideálov (Zur Theorie der Moduln und Ideale, 1905) a *F. S. Macaulay* v diele Algebrická teória modulárnych systémov (Algebraic theory of modular systems, 1916), v ktorom sú početné ukážky použitia vrcholnej súdobej algebry na štúdium kriviek a plôch projektívneho priestoru.

Do línie výrazne algebrického prístupu k štúdiu objektov algebrickej geometrie zapadá aj dielo *Hermanna Schuberta* (1848–1911) Počet enumeratívnej geometrie (Kalkül der abzählenden Geometrie, 1879), ktorého ústredným problémom je určovanie rozmeru sústav lineárnych variet spĺňajúcich isté podmienky incidencie. Pomerne nejasné, viac intuitívne než logické základy teórie boli Hilbertovi pohnútkou k zaradeniu úlohy vybudovať exaktné základy Schubertovho počtu do zoznamu neriešených problémov na svetovom kongrese matematikov r. 1900 v Paríži (15. Hilbertov problém). Okrem toho tzv. Schubertove variety našli modernú podobu v teórii priestorov zástav.

2. Rozvinutie Riemannových ideí

Metódy Riemannovej teórie algebrických funkcií aplikoval úspešne na krivky Clebsch v prácach O rovinných krivkách, ktorých súradnice sú racionálnymi funkciami jedného parametra (Über diejenigen ebenen Curven deren Coordinate rationale Functionen eines Parameters sind, 1865) a O singularitách algebrických kriviek (Über die Singularitäten algebraischer Curven, 1865), ktorých hlavné výsledky boli uvedené v predchádzajúcej kapitole. Okrem toho Clebsch prispel ku klasifikácii kriviek a zaoberal sa aj otázkami algebrických plôch.

Značným prínosom k teórii algebrických plôch v trojrozmernom projektívnom priestore boli práce *Maxa Noethera* (1844–1921) K teórii jednoznačnej korešpondencie algebrických útvarov (Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde, 1870–75) a Rozšírenie Riemannovej-Rochovej vety na algebrické plochy (Extension du théorème de Riemann-Roch aux surfaces algébriques, 1886), ako aj Cayleyho práce o algebrických plochách po r. 1870. Pomocou vyjadrenia plôch rovnicami s nehomogénnymi súradnicami v tvare $F(x,y,z) = 0$ sa študujú vlastnosti integrálov typu $\iint R(x,y,z)\,dx\,dy$, kde R je racionálna funkcia, na týchto plochách.

K tomuto prúdu sa zaraďuje aj *Émile Picard* (1856–1941), ktorý používal aj ďalšie typy abelovských integrálov na štúdium vlastností rezov algebrických plôch osnovou rovnobežných rovín na zisťovanie a charakterizáciu singularít algebrických plôch. Prostriedkami modernej algebry zovšeobecnená metóda rovnobežných rezov patrí aj v súčasnosti do efektívnej výbavy algebrickej geometrie.

3. Talianska škola

Tento smer je najplodnejším a objemom výsledkov najbohatším smerom rozvoja algebrickej geometrie v posledných desaťročiach 19. storočia a prvých desaťročiach 20. storočia. Vychádzajúc z ideí Clebscha a Noethera talianska škola nahromadila v teórii algebrických plôch tak rozsiahly materiál, že jeho spracúvanie modernými metódami, dopĺňanie a korekcia (pri tak extenzívnom rozvoji určité nekorektnosti sú zákonité) sú dodnes živnou pôdou niektorých súčasných prúdov modernej algebrickej geometrie. Nie neprávom sa pre taliansku školu v historiografii matematiky používa aj názov klasická algebrická geometria.

Za zakladateľov talianskej školy sa považujú *Luigi Cremona* (1830–1903), *Corrado Segre* (1863–1924) a *Eugenio Bertini* (1846–1933). Najvýznamnejšími predstaviteľmi školy boli *Guido Castelnuovo* (1865–1952), *Federigo Enriques* (1871–1946) a *Francesco Severi* (1879–1961).

Cremona prácou O geometrických transformáciách rovinných útvarov (Sulle transformazioni geometriche delle figure piane, 1862–65) pripravil základy a dal impulz k štúdiu biracionálnych transformácií, ktoré tvorili jeden z hlavných tematických okruhov talianskej školy ako samostatný objekt štúdia aj ako prostriedok štúdia iných objektov. (Na jeho počesť sa zvykli nazývať aj Cremonovými transformáciami.)

Ďalšími význačnými okruhmi záujmu talianskej školy boli:

- výstavba projektívneho priestoru a štruktúra jeho podpriestorov
- lineárne transformácie (kolineácie) a ich klasifikácia (C. Segre)

- konfigurácie lineárnych podpriestorov
- krivky, ich singularity, transformácie, číselné charakteristiky a klasifikácia
- lineárne sústavy kriviek a plôch a súvisiace problémy (prieseky, násobnosť a i.)

Najvýznamnejšie výsledky dosiahla talianska škola v teórii plôch. Na ich štúdium v mnohom nadväzuje výskumná práca skupiny pracovníkov Matematického ústavu Akadémie vied ZSSR od 60. rokov 20. storočia.

Čestné miesto v zozname významných predstaviteľov klasickej algebrickej geometrie zaujíma akademik ČSAV *Bohumil Bydžovský* (1880–1969), ktorý najmä v teórii konfigurácií dosahoval súdobé vrcholné výsledky.

VI. Prestavba základov. Nové štruktúry

(1925–1950)

Všeobecný rozmach matematiky v 20. rokoch nášho storočia, najmä rýchle napredovanie topológie, algebry, diferenciálnej geometrie a niektorých ďalších disciplín, nezostal bez následkov ani v pretváraní vzhľadu algebrickej geometrie.

1. Špeciálne variety

Zbližovanie predtým značne separovaných oblastí matematiky na báze používania metód novovznikajúcich odvetví viedlo v geometrii ku vzniku objektov, ktoré bolo ťažko podrobiť klasifikácii podľa zaužívaných kritérií. Často o zaradení nových objektov do tej či onej oblasti geometrie okrem podstatných dôvodov rozhodovali aj náhodilé momenty; rýdzosť starých kritérií nebolo možné plne rešpektovať.

Tak napr. *komplexná varieta*, čo je hausdorffovský topologický priestor, v ktorom každý bod má okolie homeomorfné s oblasťou v n-rozmernom euklidovskom priestore $E^n(C)$ nad poľom komplexných čísel a v ktorom transformácia sústavy súradníc je vyjadrená komplexno-analytickými funkciami, má v mnohom ohľade oveľa bližšie k diferencovateľným varietam, čo sú objekty diferenciálnogeometrické, než ku klasickým algebrickým varietam. Na druhej strane však hlbšie štúdium vnútornej štruktúry ukazuje blízkosť podstaty komplexných variet s algebrickými varietami: obsahom Chowovej vety je totiž zistenie, že každá kompaktná komplexná varieta je algebrickou varietou. (Obrátené tvrdenie pre nesingulárnu algebrickú varietu v priestore nad poľom komplexných čísel je zrejmé.)

V medzivojnovom období sa objavila celá plejáda typov variet s metrikami, ktoré mali svoj pôvod v Riemannovej idei vnútornej metriky priestoru a ťažili taktiež z výrazného pokroku komplexnej analýzy. Tak napr. na varietách komplexného priestoru s *hermitovskou* metrikou definovanou vzťahom

$$ds^2 = \sum_i \sum_j g_{ij^*} dz^i d\bar{z}^j \; ; \quad g_{ij^*} = g_{ji^*} \; ;$$

splnením doplňujúcich podmienok

$$\frac{\partial g_{kj^*}}{\partial z^i} - \frac{\partial g_{ij^*}}{\partial z^k} = 0 \, , \quad \frac{\partial g_{ik^*}}{\partial \bar{z}^j} - \frac{\partial g_{ij^*}}{\partial \bar{z}^k} = 0$$

je definovaná kählerovská metrika a variety s touto metrikou sa nazývajú *kählerovské*.

Ďalšie špeciálne typy variet boli po r. 1940 definované aj s použitím homologických prostriedkov a o ich zavedenie mali zásluhy G. De Rham, W. L. Chow, S. S. Chern a ďalší významní matematici nedávnej minulosti a súčasnosti.

Niektoré smery algebrickej geometrie sa rozvíjali v tesnej blízkosti a v spolupráci s algebrickou teóriou čísel a táto symbióza je aj v súčasnej matematike veľmi živá a plodonosná.

2. Abstraktná algebrická geometria

Týmto názvom sa označuje jedna z najvýznamnejších etáp vo vývoji algebrickej geometrie, v ktorej boli základy algebrickej geometrie prebudované tak výrazným spôsobom, že to v celej predchádzajúcej histórii algebrickej geometrie nemalo obdoby. Prívlastkom „abstraktná“, ktorý sa začal používať okolo r. 1950, sa mala vyjadriť odlišnosť od predchádzajúceho „klasického“ obdobia talianskej školy a zdôrazniť spätosť tohto smeru s modernou, „abstraktnou“ algebrou. Algebrické základy abstraktnej algebrickej geometrie boli pripravené v dvadsiatych a tridsiatych rokoch 20. storočia nemeckou algebrickou školou, ktorej ústrednou postavou bola *Emmy Noetherová* (1882–1935), dcéra Maxa Noethera. Jej práce Teória ideálov v okruhoch (Idealtheorie in Ringbereichen, 1921) a Teória eliminácie a všeobecná teória ideálov (Eliminationstheorie und allgemeine Idealtheorie, 1923), ako aj dielo *Wolfganga Krulla* (1899–1971) Teória ideálov (Idealtheorie, 1935) poskytli teóriou takých štruktúr, ako boli okruhy a moduly, najmä noetherovské, ideály v noetherovských okruhoch, telesá a polia, silný algebrický aparát, ktorý sa priam núkal na prestavbu základov algebrickej geometrie. Na túto úlohu sa podujal mladý *Barthel Leendert van der Waerden* (1903), autor slávnej Modernej algebry (Moderne Algebra, 1930–31), ktorý sériou prác K algebrickej geometrii I–XVIII (Zur algebraischen Geometrie I–XVIII) v 20. rokoch uviedol nové algebrické štruktúry ako metódu do algebrickej geometrie. Nie je nezaujímavé, že nedospel v nich k použitiu pojmu ideál, ktorý sa stal kardinálnym pojmom abstraktnej algebrickej geometrie, rovnako ako ho nepoužíval ani vo svojom fundamentálnom diele Úvod do algebrickej geometrie (Einführung in die algebraische Geometrie, 1939). Teória ideálov sa explicitne nevyužíva ešte ani v klasickom diele Oscara Zariského (1899) Algebrické plochy (Algebraic surfaces, 1935), hoci Zariski už na prahu použitia tejto teórie stál a ovládal ju, ako to majstrovsky preukázal v sérii fundamentálnych prác v 40. rokoch, ktorými prekliesnil abstraktnej algebrickej geometrii cestu do života. Z týchto prác majú mimoriadny význam Základy všeobecnej teórie biracionálnych korešpondencií (Foundations of general theory of birational correspondences, 1943) a Redukcia singularít algebrických trojrozmerných variet (Reduction of the singularities of algebraic three-dimensional varieties, 1944). Druhá práca zostávala dvadsať rokov vrcholným výkonom v teórii redukcie singularít, kým ju r. 1964 neprekonal H. Hironaka všeobecným riešením pre variety ľubovoľného rozmeru nad poľom charakteristiky nula. Zariski bol neskoršie spolu s P. Samuelom autorom výbornej dvojdielnej „učebnice“ komutatívnej algebry (Commutative algebra I, 1958, II, 1960), napísanej špeciálne z hľadiska potrieb abstraktnej algebrickej geometrie.

Cesty hľadania spojenia moderných algebrických štruktúr s algebrickou geometriou úspešne zakončil syntézou *André Weil* (1906) v diele Základy algebrickej geometrie (Foundations of algebraic geometry, 1946), ktoré prinajmenšom jednej generácii slúžilo ako učebnica používania ideálových metód v algebrickej geometrii.

V abstraktnej algebrickej geometrii sú paralely a väzby algebrických a geometrických štruktúr tak tesné a očividné, že obvykle stačí zámena algebrickej terminológie geometrickou (a obrátene), aby pojem, výsledok alebo metóda komutatívnej algebry nadobudli geometrický význam (a obrátene). V jazyku teórie kategórií, ktorej pojmy, metódy a terminológia prenikli do algebrickej geometrie koncom päťdesiatych a začiatkom šesťdesiatych rokov, ide o ekvivalenciu niektorých algebrických a geometrických štruktúr.

Nasledujúca schéma naznačuje korešpondenciu algebrických a algebrickogeometrických pojmov, je však len malým ilustračným príkladom oveľa bohatšieho vzťahu, na úplnejší rozbor ktorého v tomto náčrte niet miesta.

Komutatívna algebra	Algebrická geometria
k – základné pole $\bar{k}$ – algebrický uzáver základného poľa Často sa predpokladá, že základné pole je už algebricky uzavreté, t. j. $k = \bar{k}$.	
$k[X] = k[X_1, \ldots, X_n]$ – obor integrity polynómov n neurčitých $X_1, \ldots, X_n$ nad poľom k	$A^n(k) = k^n$ – n-rozmerný afinný priestor nad poľom k
ideál $\underline{a} \subset k[X]$	algebrická varieta $V(\underline{a}) =$ $= \{(x) \in A^n(k); f(x) = 0$ pre každý polynóm $f \in \underline{a}\}$
súčet ideálov $(\underline{a}, \underline{b})$	prienik variet $V(\underline{a}) \cap V(\underline{b})$
prienik ideálov $\underline{a} \cap \underline{b}$	zjednotenie variet $V(\underline{a}) \cup V(\underline{b})$
$\underline{a} = \underline{q}_1 \cap \cdots \cap \underline{q}_r \cap \underline{q}_{r+1} \cap \cdots \cap$ $\cap \underline{q}_s$ – rozklad ideálu $\underline{a}$ na primárne ideály, ktorých radikály $\underline{p}_1, \ldots, \underline{p}_r$ sú izolované a radikály $\underline{p}_{r+1}, \ldots,$ $\underline{p}_s$ sú vložené	$V(\underline{a}) = V(\underline{p}_1) \cup \cdots \cup V(\underline{p}_r)$ $V(\underline{p}_i)$ sú ireducibilné a $V(\underline{p}_i) \not\subset \bigcup_{j \neq i} V(\underline{p}_j)$

Komutatívna algebra	Algebrická geometria
$k[X]/\underline{a} = k[t_1, \dots, t_n] = k[t]$	$t_1, \dots, t_n$ – súradnicové funkcie na variete $V(\underline{a})$; $k[t]$ – okruh regulárnych funkcií na variete
$\underline{a}$ – prvoideál	$V(\underline{a})$ – ireducibilná varieta
$\underline{a}$ – prvoideál $\Leftrightarrow$ $k[t]$ – obor integrity	$(t_1, \dots, t_n)$ – všeobecný bod variety $V(\underline{a})$
podielové pole $k[t]_{(0)} = k(t)$	$k(t)$ – pole racionálnych funkcií na variete $V(\underline{a})$
stupeň transcendentnosti poľa $k(t)$ nad poľom k	rozmer ireducibilnej variety $V(\underline{a})$ nad poľom k

atď.

Okolo r. 1950 bola abstraktná algebrická geometria skonsolidovanou disciplínou s dominantným postavením v celej algebrickej geometrii, s najlepšími predpokladmi prestavať na svojich základoch výsledky klasického obdobia, v potrebných prípadoch ich skorigovať a úspešne pokročiť v riešení starších problémov, ktoré odolávali predchádzajúcim metódam.

VII. Nová prestavba základov. Schémy

(Po r. 1955)

Algebrická geometria ešte nestačila absorbovať všetky stimuly svojich abstraktných metód a rozvinúť metódy v plnej škále ich predností, keď sa znova ocitla v kvase prerodu a chaose, ktorý vždy sprevádza podstatnú prestavbu základov disciplíny. Táto prestavba, ktorá priniesla ďalšie zovšeobecnenie základných štruktúr a metód algebrickej geometrie, sa skryto pripravovala 10–20-ročným vývojom progresívnych odvetví matematiky, ktorých všeobecné metódy a výsledky našli svoju syntézu v algebrickej geometrii schém.

Jedným z najdôležitejších predpokladov vzniku nových štruktúr algebrickej geometrie bol rozvoj *komutatívnej algebry*, najmä lokálnej, v období po 2. svetovej vojne, osobitne v päťdesiatych a neskorších rokoch. Práce a knihy O. Zariského, P. Samuela, D. G. Northcotta, M. F. Atiyaha, I. G. Macdonalda a ďalších autorov sa svojou inklináciou k algebrickej geometrii stali hlavnou oporou prestavby.

Druhou disciplínou, ktorá sa ako metóda stala nevyhnutnou zložkou tvorby novej algebrickej geometrie, je *teória kategórií*, ktorej začiatky spadajú do 40. rokov a ktorá v 60. rokoch po publikovaní monografií B. Mitchella, Ch. Ehresmanna, S. MacLana, I. Bucura a A. Deleanuho a iných začala čoraz viac zaujímať rolu všeobecného metodologického základu mnohých oblastí matematiky, v istom zmysle analogického významu teórie množín na prelome 19. a 20. storočia.

Treťou oblasťou, ktorej metódy tvoria neodňateľnú súčasť algebrickej geometrie súčasnej epochy, je *homologická algebra* a *algebrická topológia*. Jej moderné základy pomáhali budovať H. Cartan, N. Steenrod, S. Eilenberg, R. Godement a i.

Pomerne špeciálnou a širšej matematickej verejnosti nie príliš známou oblasťou je *teória zväzkov*, ktorej základy pri štúdiu štruktúry funkcií na komplexných varietách načrtol J. Leray a o prenesenie ktorej na algebrické variety sa veľmi zdarilo zaslúžil J.-P. Serre.

Prvé práce, ktoré naznačovali nástup novej etapy vo vývoji algebrickej geometrie, sa objavili v prvej polovici päťdesiatych rokov. A. Weil r. 1952 uverejnil prácu Rozvrstvené priestory v algebrickej geometrii (Fibre spaces in algebraic geometry) a r. 1955 publikoval *Jean-Pierre Serre* (1926) rozsiahlu prácu Koherentné algebrické zväzky (Faisceaux algébriques cohérents), ktorá sa všeobecne považuje za prelomové dielo vo vzniku teórie schém.

Na základe podnetov francúzskej algebrickogeometrickej školy (seminár pod vedením H. Cartana a C. Chevalleyho) a osobného pobádania, ktoré prejavili J.-P. Serre, P. Cartier a J. Dieudonné, sa koncom päťdesiatych rokov *Alexandre Grothendieck* (1928) podujal na grandióznu prácu prebudovať základy algebrickej geometrie na podklade metód prevzatých zo štyroch vyššie uvedených oblastí. Hoci sa pôvodne plánovaný zámer neuskutočnil v plnom rozsahu, dosiahnuté výsledky podstatným spôsobom ovplyvnili podobu aj smerovanie modernej algebrickej geometrie. Teória *schém* sa stala základom a hlavným prúdom súčasnej algebrickej geometrie, hoci zaiste nemožno si utvárať zjednodušenú predstavu, že sa ňou vyčerpáva celý obsah algebrickej geometrie. Pojem schémy (v Grothendieckovej terminológii predschémy) bol východiskovým bodom ďalšieho zovšeobecňovania štruktúr, ktoré bolo cez sériu čiastkových zovšeobecnení istým spôsobom uzavreté v pojme *algebrického priestoru*, pochádzajúcom od M. Artina (M. Artin: Algebraic spaces, 1969).

Predobrazom schémy je algebrická varieta $V(\underline{a}) \subset A^n(k)$ vybavená určitou vnútornou štruktúrou, ktorú napr. podľa D. Mumforda možno so zachytením algebrickej a geometrickej paralely priblížiť nasledujúcou schémou.

Algebra	Geometria
$k = \bar{k}$ – algebricky uzavreté pole	
$k[X] = k[X_1, \ldots, X_n]$ – obor integrity polynómov n neurčitých	$A^n(k) = k^n$ – n-rozmerný afinný priestor nad poľom k
ideál $\underline{a} \subset k[X]$	algebrická varieta $V(\underline{a}) \subset A^n(k)$
$R := k[t] = k[t_1, \ldots, t_n] = k[X]/\underline{a}$ – okruh regulárnych funkcií (súradnicový okruh) variety $V(\underline{a})$	$t_1, \ldots, t_n$ – súradnicové funkcie na $V(\underline{a})$ s vlastnosťou $t_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ pre každý $(x) \in V(\underline{a})$
($\underline{a}$ – prvoideál $\Leftrightarrow$ R – obor integrity)	($V(\underline{a})$ – ireducibilná varieta)
ideál $\underline{b} \subset R$	
rozšírenie $\underline{b}' = b \cdot k[X]$	$V(\underline{b}')$ – podvarieta variety $V(\underline{a})$

Algebra	Geometria
$R_{\underline{b}'} = k[X]/\underline{b}' = k[t'] =$	$(t'_1, \dots, t'_n)$ – špecializácia
$= k[t'_1, \dots, t'_n]$	bodu $(t_1, \dots, t_n)$

Na základe tohto vzťahu celú štruktúru podvariet variety $V(\underline{a})$ možno vystihnúť ideálmi okruhu R.

okruh $o_x = \{\frac{f}{g}; f, g \in R, g \neq 0\} -_{\leftarrow \text{ bod } (x) \in V(\underline{a})}$

lokálny okruh bodu (x)

Postupy v okruhu R, ktoré algebricky korešpondujú geometrickým vzťahom na $V(\underline{a})$, možno formalizovať pre ľubovoľný okruh. Z geometrického hľadiska sú však významné len komutatívne okruhy s jednotkovým prvkom.

Nech teda A je komutatívny okruh s jednotkovým prvkom. *Spektrom* (prvospektrom) okruhu A sa nazýva množina všetkých prvoideálov okruhu A (rôznych od A v prípade, keď A je obor integrity); označenie: Spec(A). Prvoideály $\underline{p}_x \subset A$ ako prvky Spec(A) sa nazývajú body a označujú sa x. Spec(A) sa vtedy nazýva priestorom; označíme ho Spec$(A) =: X$. Pre ľubovoľnú podmnožinu $E \subset A$ sa definuje $V(E) \subset X$ ako množina všetkých bodov $x \in X$, ktoré ako prvoideály okruhu A obsahujú E. Podmnožiny $V(E)$ spĺňajú axiómy topológie uzavretých množín priestoru X.

Výstavba základného objektu zvaného *afinná schéma* sa deje týmto postupom:

1. $X = \text{Spec}(A)$ je topologický priestor s uzavretými podmnožinami tvaru $V(E)$, $E \subset A$. Táto topológia sa nazýva *Zariského topológia* a z hľadiska oddeliteľnosti je T_0-topológia.

2. Ku každému bodu $x \in X$ sa priradí lokálny okruh

$$o_x = \{\frac{a}{b}; a, b \in A, b \notin \underline{p}_x\} ,$$

nazývaný *lokálnym okruhom* bodu x, s maximálnym ideálom

$$\underline{m}_x = \{\frac{c}{d}; c \in \underline{p}_x, d \notin \underline{p}_x\} .$$

3. Ku každej otvorenej podmnožine $U \subset X$ sa priradí okruh

$$A(U) = \bigcap_{x \in U} o_x$$

nazývaný *okruhom regulárnych funkcií* na podmnožine U.

Pre každé dve otvorené podmnožiny V, U viazané inklúziou $V \subset U$ existuje homomorfizmus

$$r_V^U : A(U) \to A(V) .$$

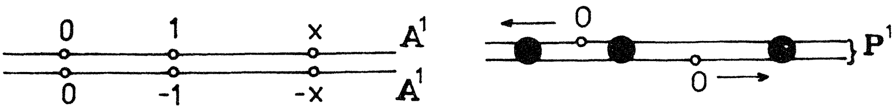
Systém $(A(U), r_V^U)$ pre všetky otvorené podmnožiny priestoru X tvorí *zväzok*; označuje sa $\tilde{A}$. Na vyjadrenie príslušnosti k priestoru X sa označuje aj O_X.

4. Usporiadaná dvojica $(\text{Spec}(A), \tilde{A}) = (X, O_X)$ je špeciálnym prípadom tzv. *okruhovaného priestoru*. Tento okruhovaný priestor sa nazýva *afinná schéma* okruhu A.

5. Okruhovaný priestor, pre ktorý existuje pokrytie (nemusí byť konečné) afinnými schémami, sa nazýva *schéma*.

Pri vhodnej definícii morfizmu schém trieda všetkých schém a morfizmov tvorí kategóriu. Použitie aparátu teórie kategórií umožňuje rozsiahle štúdium vlastností schém a ďalšie zovšeobecňovanie, jedným stupňom ktorého je napr. aj pojem *algebrického priestoru*, ktorý sa získa nasledovne: Ak U je ľubovoľná schéma a $R \subset U \times U$ je relácia ekvivalencie na U, faktorobjekt (v kategórii) $X = U/R$ sa nazýva algebrickým priestorom, ak morfizmus $U \to X$ je tzv. *etálny*, t. j. ak je istým druhom lokálneho izomorfizmu.

Jednoduchým príkladom algebrického priestoru je projektívna priamka $P^1(k)$ nad poľom k, ktorá sa dostane faktorizáciou zjednotenia dvoch exemplárov afinnej priamky $A^1(k)$ nad poľom k podľa relácie ekvivalencie R obsahujúcej všetky dvojice $(x, \frac{1}{x})$ pre $x \neq 0$ a všetky dvojice tvaru $(0, a)$ a $(b, 0)$; $a \neq 0$, $b \neq 0$ (obr. 19a, 19b).



Obr. 19a, b

$$(A^1 \cup A^1)/R = A^1 - \{0\} \cup (0,1) \cup (1,0) \xrightarrow{\sim} P^1$$

VIII. Hlavné tematické okruhy algebrickej geometrie

Z predchádzajúceho krátkeho (a veľmi neúplného) prehľadu dejín algebrickej geometrie sa zreteľne črtá poznanie, že v celom svojom vývoji sa algebrická geometria zaoberala neveľkým počtom tém, ktoré v nej na určitom stupni vývoja vznikali a ku ktorým sa v jednotlivých etapách s rozličnou intenzitou záujmu vracala. Nasledujúca systemizácia tém je viac pokusom než kategorickým výsledkom; napriek tomu však – s istou mierou subjektívnosti, ktorej sa sotva možno vyhnúť – nenecháva bez povšimnutia žiadne objekty, metódy a tendencie, o ktorých bola v prehľade zmienka.

1. Vymedzenie predmetu, stanovenie objektov

Táto téma je prítomná v algebrickej geometrii od čias jej predhistórie. V každom období v etape extenzívneho rozvoja prístup k nej bol viac intuitívny než exaktný; snaha o presné vymedzenie nastupovala v čase triedenia a spresňovania výsledkov.

2. Transformácie

Od nesystematického používania jednotlivých transformácií bez uvedomenia si ich spoločného základu a diktovaného prevažne bezprostrednými utilitaristickými cieľmi cez prvé pokusy o rozlíšenie transformácií rozličnej povahy až po klasifikáciu druhov a zovšeobecnenie v pojmoch korešpondencie a morfizmu tvoria transformácie stabilnú, trvale prítomnú tému algebrickej geometrie. Ich základná funkcia – podrobiť objekty takým zmenám, ktoré dajú vyniknúť istým spoločným vlastnostiam objektov – zostáva po celý čas histórie primárna, a to aj v obdobiach, keď sa stávali samostatným a intenzívne študovaným predmetom záujmu.

3. Klasifikácia objektov
Táto téma stála vždy výrazne v popredí. Jej obsahom bolo úsilie zaviesť systém do chaosu jednotlivostí, stanoviť kritériá typizácie a realizovať triedenie. Príznačne pre historický vývoj je zovšeobecňovanie klasifikačných znakov, zjednodušovanie a zmenšovanie počtu typov.

4. Invarianty
Pojem invariantu je charakteristický dlhým historickým obdobím intuitívneho používania. Jeho explicitné zavedenie a program hľadania invariantov sú nerozlučne spojené so vznikom a rozvojom moderných matematických disciplín 19. storočia. V určitých časových úsekoch hľadanie invariantov patrilo k najaktuálnejším úlohám algebrickej geometrie a bolo kritériom jej napredovania. Teória invariantov má v súčasnosti svoje pevné miesto a vážnosť v systéme dôležitých problémov algebrickej geometrie.

Pri pozornej analýze je zrejmé, že tematické okruhy 1–4, v zúženejšom poňatí 2–4 tvoria jednotný celok, v ktorom oddelenie tém a ich relatívna samostatnosť majú len metodologický význam. Klasifikácia objektov sa v podstate robila vždy na základe hľadania ich invariantov voči určitým transformáciám. To historicky určuje aj faktický vstup týchto tém ako cieľavedomej činnosti do dejín algebrickej geometrie až v druhom časovom období jej vývoja (kapitola II).

5. Singularity; násobnosť prieseku
Sú to stále témy algebrickej geometrie, v plnom zmysle obsahu v nej prítomné až od čias zavedenia analytických metód. Boli síce dlhé obdobia, keď sa singularity v projektívnej geometrii študovali intenzívne aj syntetickými metódami, ale konečný punc exaktnosti dávalo výsledkom vždy až potvrdenie modernými prostriedkami algebry. Teória singularít a násobnosti prieseku variet je aj v súčasnosti popredným a stále aktuálnym odvetvím algebrickej geometrie, ktorého pokrok je v značnej miere meradlom pokroku celej disciplíny.

6. Rozširovanie základného poľa
Téma je aktuálna od čias úplného udomácnenia sa komplexných čísel v matematike. Zavedenie imaginárnych prvkov v projektívnej geometrii a komplexných súradníc v analytickej geometrii znamenalo rozšírenie základného poľa geometrie z poľa reálnych čísel na pole komplexných čísel. Hoci v algebrickej geometrii toto rozšírenie prebehlo bez väčších problémov už na rozhraní prvej a druhej polovice 19. storočia, dodnes sa u nás nedostalo v náležitej miere do obsahu vzdelávania v geometrii ani na stredných ani na vysokých školách. V 20. storočí sa problém v algebrickej geometrii posunul smerom k abstraktným poliam (včítane konečných) a bol v období abstraktnej algebrickej geometrie

riešený zavedením univerzálneho poľa. Analogón zmeny poľa je v teórii schém zmena bázovej schémy.

7. Rozširovanie ambientného priestoru

Druh priestoru, v ktorom sa nachádzajú objekty algebrickej geometrie, prešiel v histórii podstatnými zmenami. Každá z nich prinášala zovšeobecnenie, zahrňujúce predchádzajúci priestor ako špecializáciu. Euklidovský priestor (nad poľom reálnych čísel) bol po staročia jediným priestorom akejkoľvek geometrie. Intuitívne používanie afinného priestoru patrí už k niektorým geometrickým postupom 18. storočia. 19. storočie prinieslo pojem projektívneho priestoru a stalo sa zlatým vekom projektívnej geometrie. Pojem variety v abstraktnej algebrickej geometrii, hoci je definovaný pomocou projektívneho alebo afinného priestoru, má schopnosť zahrnúť aj tieto priestory do svojho obsahu. Pojmy schémy a algebrického priestoru predstavujú v súčasnosti vrchol algebrického zovšeobecňovania geometrického priestoru.

Je prirodzené, že procesy rozširovania základného poľa a druhu priestoru prebiehali často súčasne v jednote alebo súbežne.

8. Metódy matematickej analýzy a topológie

Je zrejmé, že odlišnosť a istá cudzorodosť metód analýzy sa v algebrickej geometrii mohla začať pociťovať až na vysokom stupni rozvoja algebrických metód. Avšak od čias Riemanna sa účinnosť a užitočnosť transcendentných metód (svojím pôvodom metód analýzy) v algebrickej geometrii osvedčila v takej miere a rozsahu, že sa ich algebrická geometria nemohla vzdať; naopak, značne ich rozvíjala pre vlastné potreby a vo vlastnom duchu, takže dnes tvoria rozsiahle a relatívne samostatné odvetvie algebrickej geometrie, plnohodnotné a plnoprávne v sústave algebrickogeometrických smerov a veľmi blízke k témam a metódam hraničiacim s modernou diferenciálnou geometriou a diferenciálnou topológiou.

9. Metódy komutatívnej algebry a homologickej algebry

Od čias exaktnej algebrizácie v 2. polovici 19. storočia cez využitie výsledkov nemeckej algebrickej školy v 20.–30. rokoch 20. storočia sa vývojom po 2. svetovej vojne stali tieto metódy jadrom súčasnej algebrickej geometrie a nástrojom jej pokroku. Neoddeliteľnosť a vzájomné ovplyvňovanie komutatívnej algebry a algebrickej geometrie je stimulátorom napredovania v oboch disciplínach.

Homologická algebra priniesla do algebrickej geometrie nové, veľmi účinné a prehľadné možnosti charakterizácie a klasifikácie objektov.

IX. Filozofické aspekty vývoja algebrickej geometrie

Prítomnosť filozofických súvzťažností a ich naliehavosť v algebrickej geometrii je vymedzená skutočnosťou, že algebrická geometria nie je základná matematická disciplína, ale je disciplínou nadstavbovou, založenou na istom, pomerne vysokom stupni vývoja algebry a geometrie. Preto je z metodologického hľadiska pochopiteľné a odôvodnené, že ani sama, ani zovšeobecňujúce, metodologické a filozofické problémy s ňou spojené sa netýkajú – aspoň nie v prevažujúcej a rozhodujúcej miere – základných filozofických problémov matematiky. Napriek tomu tu spojenie existuje a v niekoľkých tézach sa pokúsime ilustrovať aktuálnosť tejto tematiky na konkrétnej látke algebrickej geometrie.

1. Základné, prvopočiatočné objekty algebrickej geometrie, ktorými boli konkrétne krivky a plochy, majú svoj pôvod v oblasti materiálnej činnosti ľudí, v praxi, z ktorej sa procesom vedeckého poznávania dostali do teórie, kde sa stali predmetom samostatného, od praxe bezprostredne nezávislého štúdia.

Druhotným zdrojom rozvoja algebrickej geometrie bola vedecká prax, problematika tých odvetví vedy, ktoré riešili priamo otázky praxe a časť teoretického riešenia presúvali ako úlohu do algebrickej geometrie. Ako príklad možno uviesť transformácie a klasifikáciu kriviek 3. stupňa u Newtona, kde nešlo o samoúčelnú tému, ale o prípravu podkladov na použitie vo fyzikálnych teóriách.

2. Výsledky algebrickej geometrie, zdanlivo akokoľvek abstraktné, sa môžu v určitom štádiu vývoja vedy a techniky preukázať ako použiteľné, užitočné, ba nevyhnutne potrebné. Tým sa teória vracia k praxi – často k inej, než z ktorej vyšla, ale rovnako dôležitej a užitočnej. Napr. teória kužeľosečiek bola rýdzo abstraktná teória, kým sa Keplerovými zákonmi spolu s Newtonovým zákonom gravitácie nestala súčasťou matematicko-geometrického základu teórie pohybu vesmírnych telies. Algebrické krivky boli od života vzdialenou teóriou, kým sa v období všeobecného rozmachu výroby strojov neukázali ako veľmi užitočný nástroj na navrhovanie mechanizmov a prevodov. (Obrátene treba priznať, že problémy techniky inšpirujúco pôsobili na rozvoj niektorých smerov teórie kriviek (napr. kinematiky), a to nielen algebrických.) Algebrické plochy našli uplatnenie v modernom stavebníctve, teória schém v kvantovej mechanike. V príkladoch by bolo možné pokračovať.

3. Algebrická geometria je v prevažujúcej časti svojej histórie presvedčivým príkladom relatívnej samostatnosti vývoja matematickej disciplíny. Malý počet nie príliš naliehavých problémov praxe tvorí len neveľkú časť bezprostredných podnetov jej rozvoja. Hlavnou hnacou silou jej pokroku sú jej vlastné teoretické problémy, na riešenie ktorých sa upriamuje pozornosť popredných vedeckých pracovníkov v tejto oblasti. Ako disciplína, ktorej logické základy sa netýkajú fundamentálnych matematických pojmov, ale preberajú ich z iných častí matematiky v určitej ustálenej podobe, neprešla obdobiami krízy, v ktorých by boli vystavené pochybnostiam jej kardinálne pojmy. Skôr možno pri nej hovoriť o istých obdobiach relatívnej stagnácie a tvorivej krízy, keď účinnosť používaných prostriedkov a metód zaostávala za náročnosťou problémov, ktoré pred ňou stáli.

4. Vývoj nosných pojmov algebrickej geometrie je eklatantným potvrdením všeobecného procesu zvyšovania abstrakcie matematických pojmov. Už prvotné pojmy algebrickej geometrie sú abstrakciami najmenej druhého stupňa a každá ďalšia etapa vývoja prináša pozdvihnutie abstrakcie na vyšší stupeň, ktorým sa hlbšie preniká k povahe objektov, poznanie sa stáva bohatším a pre pôvodné pojmy aj konkrétnejším. Napr. v postupnosti zovšeobecnení krivka – varieta – schéma nejde len o podriadenie pojmu krivka pojmu schéma, ale aj o možnosť aplikácie metód, prostriedkov a výsledkov teórie schém na krivky, čím sa teória

kriviek dopĺňa, obohacuje a v niektorých prípadoch sa otvára možnosť riešenia problémov v predchádzajúcich štádiách neriešiteľných (napr. proces rozdutia variet znamenal principiálny pokrok v riešení problémov desingularizácie).

5. Historický vývoj algebrickej geometrie potvrdzuje na špecifickej látke jednotu a striedanie procesov analýzy a syntézy, ukazuje ich súčasné, paralelné i vzájomne prelínajúce sa pôsobenie v každej konkrétnej etape a ich spojenie ako jedinú reálnu cestu pokroku disciplíny. Periodizácia dejín neznamená vlastne nič iné, než vyjadrenie a časové roztriedenie etáp evolučného a revolučného vývoja, rast disciplíny do šírky a hĺbky v rámci jednej koncepcie (paradigmy) a prudký zvrat k novej koncepcii, ktorá je v určitom zmysle negáciou predchádzajúcej (napr. talianska škola – abstraktná algebrická geometria).

6. Celá história algebrickej geometrie je názorným príkladom jednoty matematiky, jednoty neustále narúšajúcej sa, rozštepujúcej a súčasne obnovujúcej sa. Algebrická geometria práve svojou povahou nadstavby, syntetizujúcim charakterom spája odvetvia matematiky na prvý pohľad vzdialené a nesúvisiace, uzavreté do ulít vlastných problémov a metód, zdanlivo bez vnútorného, prirodzeného spojiva. Spojenie tak odľahlých oblastí, ako je komutatívna algebra, teória kategórií, algebrická topológia a teória funkcií komplexných premenných v súčasnej algebrickej geometrii je presvedčivým dôkazom, že stále prítomný proces diferenciácie a integrácie matematických disciplín je jedným zo zdrojov životnosti a vnútorného samopohybu matematiky.

LITERATÚRA:

1. Baldassari, M., *Algebraic varieties*, Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1956.
2. Bureš, J., Vanžura, J., *Algebraická geometrie*, SNTL, Praha 1989.
3. Bydžovský, B., *Úvod do algebraické geometrie*, JČMF, Praha 1948.
4. Dieudonné, J., *Algebraic geometry*, Adv. in Math. **3** (1969), 233–321.
5. Dieudonné, J., *Fondements de la géométrie algébrique moderne*, Adv. in Math. **3** (1969), 322–413.
6. Dieudonné, J., *The historical development of algebraic geometry*, Amer. Math. Month. **79** (1972), č. 3, 827–866.
7. Griffiths, Ph., Harris, J., *Principles of algebraic geometry*, I, II, Wiley, New York 1978.
8. Hartshorn, R., *Algebraic geometry*, Springer, New York-Heidelberg-Berlin 1977.
9. Kleiman, S. L., Laksov, D., *Schubert calculus*, Amer. Math. Month. **79** (1972), č. 10, 1061–1082.
10. Lang, S., *Introduction to algebraic geometry*, Interscience Publishers, New York 1958.
11. Šafarevič, I. R., *Osnovy algebraičeskoj geometrii*, Mir, Moskva 1972.
12. Waerden, B. L. van der, *Einführung in die algebraische Geometrie*, Springer, Berlin 1939.
13. Weil, A., *Foundations of algebraic geometry*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. **29**, Sao Paolo 1946.
14. Zariski, O., *Algebraic surfaces*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1971.