NIKOLAJ IVANOVIČ LOBAČEVSKIJ

(1793 – 1856)

OBJEVOVÁNÍ NEEUKLEIDOVSKÉ GEOMETRIE

Pohled učitele

MILAN HEJNÝ

1. Úvod

Objevování neeukleidovské geometrie patří k nejvzrušivějším příběhům historie lidského myšlení. Cílem našeho příspěvku však není sledovat dramatický tok historie. Pokusíme se na některé myšlenky více než dvě tisíciletí trvajícího procesu objevování nové geometrie podívat očima učitele, který ve fylogenesi hledá poučení o zákonitostech ontogenze, v historii hledá inspiraci didaktickou. Více než sled objevů a zklamání nás budou zajímat příčiny, které k těmto objevům a zklamáním vedly, a překážky, které musel lidský intelekt na cestě k objevu překonat.

Učitel, který se zamýšlel nad omyly, blouděním, hledáním a úspěchy velikých matematiků, je lépe připraven porozumět omylům svých žáků a lépe připraven pomáhat žákům hledat orientaci při bloudění. Je lépe připraven, protože lépe rozumí složitým procesům odhalování matematiky.

Snad nejvážnějším problémem didaktiky matematiky je nemoc formalismu. Jen málo žáků usiluje o porozumění jevům, které jim předkládá učebnice a učitel matematiky. Značný počet žáků se snaží zapamatovat si definice, poučky, vzorce, řešitelské postupy i důkazy. Příčinu nežádoucího stavu vidíme, jako snad většina didaktiků matematiky, v instruktivním charakteru vyučování matematice. Společně s kolegou Kuřinou (viz [KF1], [KF2]) i autor statě je přesvědčen, že nákazu formalismu lze léčit zvýrazňováním konstruktivního a oslabováním instruktivního charakteru vyučování.

Konstruktivní vyučování podněcuje zvídavost žáka, vede jej ke zkoumání pojmů a situací, k experimentování, k hledání argumentů, k promýšlení souvislostí.

Historie neeukleidovské geometrie nabízí vše, co jsme právě uložili pod střechu konstruktivního přístupu k matematice. Proto je tato historie poučná zejména pro učitele usilujícího o konstruktivní přístup k vyučování matematiky. Některá poučení leží přímo na povrchu, k těm hlouběji ležícím se dopracujeme, když pronikneme k zákonitostem vývoje matematického myšlení ležícím pod jevovou hladinou historických faktů.

Hledat vývojové zákonitosti znamená zkoumat příčiny, které řídily tok historie, ptát se

1. jak ti, kdo šli za světlem poznání, tápali, objevovali a nacházeli a
2. proč objevovatelé nových matematických pravd šli tak, jak právě šli.

Didaktická poučení, která z uvedeného zkoumání vytěžíme, uvádíme pod označením **Didaktika**.

V hledání se zaměříme na dva okruhy myšlenek: na pojmotvorný proces a několik případů „důkazu" pátého postulátu. Zájemci o další náměty najdou vhodné odkazy v literatuře.

Faktografii čerpal autor zejména z práce [RBA]. Hlavním zdrojem impulsů pak byly práce [VP1] a [VP2].

2. Existence pojmu — skutečná a domnělá

Pojmy jsou základní kameny myšlení i komunikace. Dítě se jich zmocňuje již v prvních letech života, když se učí mluvit. V důsledku získávání nových životních zkušeností se ve vědomí jedince pojmy diferencují a upřesňují. Některé nové pojmy vznikají, jiné se výrazně mění nebo dokonce zanikají. Třeba pojem „Ježíšek" označující nadpřirozenou bytost, která nosí dárky pod stromeček, se výrazně mění v okamžiku, kdy se dítě dozví pravdu.

Podobný pojmotvorný proces probíhá i při vědeckém bádání, když člověk odhaluje nové, dosud nepoznané jevy. Jejich uchopení do slov dává vznik novým pojmům, někdy však též pouze pojmům domnělým. Jako v této smyšlené příhodě o pojmu „vodní lom".

Při koupání badatel zjistil, že se tyč při ponoření do vody láme a po vynoření se opět narovná. Badatel pojmenoval tento jev „vodní lom". Později termín upřesnil — vodním lomem nazval velikost úhlu lomu. Rozhodl se úhel změřit. Očekával, že vodní lom bude záviset na délce tyče, na rychlosti a sklonu ponoření tyče do vody a možná i na kvalitě vody. S překvapením však zjistil, že úhel lomu závisí především na místě pozorovatele. Kdyby tedy vodní lom téže tyče měřili současně dva lidé ze dvou různých míst, naměřili by různé hodnoty. Tímto myšlenkovým experimentem badatel s nevolí zjistil, že „vodní lom" byl klam smyslů, že ve skutečnosti tento jev neexistuje.

Nabytá zkušenost nadále znepokojovala badatele. Nelíbilo se mu, že jev, který jasně vidí, nelze zkoumat. O věci opakovaně rozjímal a po jisté době najednou uzřel, že „vodní lom" přece jen existuje, ale jinak, než se původně domníval. To, co se láme, není tyč, ale světelný paprsek spojující oko pozorovatele a tyč. Tak se jev „vodní lom" stal legitimním objektem výzkumu a badatel přistoupil k měření.

K pojmovému bloudění a hledání dochází nejen v přírodních vědách, ale i v matematice. Příkladem může být hledání zlatého řezu, poměru přirozených čísel $a < b$ pro něž $a : b = b : (a+b)$. Názornější příklad poskytne další smyšlená příhoda, tentokráte o pojmu „trojpravoúhelník".

Nejkrásnější ze všech čtyřúhelníků je čtverec, neboť má všechny úhly pravé. Tedy nejkrásnější ze všech trojúhelníků bude „trojpravoúhelník", jehož všechny tři úhly jsou pravé. Chtěl jsem vysněný trojpravoúhelník nakreslit, ale nešlo to. Když jsem se dověděl, že součet úhlů v každém trojúhelníku je roven 180^o, pochopil jsem, že je to nemožné. Můj „trojpravoúhelník" je nesmysl. Neexistuje. Je to prázdný pojem. Později, když jsem už leccos z geometrie znal, začal jsem zkoumat geometrii sféry. Objevil jsem, že nejkratší spojnice dvou bodů na sféře, tj. „úsečka na sféře", je oblouk hlavní kružnice (= řez sféry rovinou jdoucí jejím středem). To mi umožnilo zavést na sféře pojem „trojúhelník" jako útvar ohraničený třemi „úsečkami". S nadšením jsem zjistil, že zde „trojpravoúhelník" existuje a že je skutečně krásný. Připadal mi hezčí než čtverec v rovině.

3. Vymezování pojmu

Dítě na chrousta řekne „ptáček", ale slepici odmítne nazvat ptákem, protože *pták je živý tvor, který létá.* Řekneme, to dítě se mýlí. Není to přesné. Přesnější by bylo říct — to dítě chápe pojem „pták" jinak, než jej chápeme my, dospělí.

Různost našich představ o významu téhož slova je příčinou mnoha nedorozumění. Proto je nutné, zejména v oblasti vědeckého dialogu, přesně vymezit slova označující předmět výzkumu. Řekové při vymezování pojmů hledali především jejich podstatu (*úsia*), tj. „to, co je příčinou bytí" ([A1], str. 139).

Řecký termín pro vymezení nebo definici je „horos" nebo „horismos". Původní význam tohoto slova byl hraniční kámen, jímž jsou oddělena dvě různá pole, města nebo státy. „Cílem hraničního kamene je zamezit možným hádkám o území. Přeneseně pak „horos" je kritérium, které umožňuje rozhodnout o každém konkrétním objektu, zda náleží do našeho pojmu, nebo ne. Kritérium bude zdokonalováno a upřesňováno, kdykoli se objeví nový objekt, který lze pod daný pojem zahrnout. Tedy kvalita kritéria vypovídá o rozsahu objektů, jež byly v souvislosti s daným pojmem zkoumány." píše Heath v [HT], Vol. 1, str. 143. [1])

Didaktika. Heathova úvaha je poučná pro vyučování matematiky, protože upozorňuje na genesi pojmu. Ve školské praxi běžně zavádíme nový pojem definicí. Domníváme se, že tím předcházíme nedorozumění, neboť hned od začátku práce s pojmem je zcela jasné, co pojem označuje. Ve skutečnosti se však tato jasnost a přesnost týká pouze učitele. Žák často vnímá definici jako shluk slov, za kterými nemá žádnou nebo velice chatrnou a nepřesnou představu. Když pak i kvalitu žákova poznání pojmu posuzujeme podle toho, jak přesně umí definici odříkat, dochází k nežádoucímu paměťovému učení. Uvedeme ilustraci ze života.

Žák Petr přesně řekl definici pojmu „shodné trojúhelníky", ale byl zcela bezradný, když po něm učitel žádal nakreslit příklad. Na naléhání učitele nakreslil na tabuli rovnoramenný trojúhelník. Když byl žádán o vysvětlení, dodal „rovnoramenný trojúhelník má shodná ramena". Uvedená shodnost byla zřejmě jediná představa, kterou slovo „shodnost" vyvolalo v Petrově hlavě. Definice, kterou odříkal, byla pro něj pouze shlukem slov.

Tato skutečná událost ukazuje, jak dodržování teze „pojem zavádíme přesnou definicí" přispívá k pronikání bacilu formalismu do kognitivní struktury žáka. V historii *matematického* myšlení se žádný důležitý pojem, jako například *limita, prostor, funkce, mnohostěn, vektor,* ... nezrodil vymyšlením definice. Vždy zde byla nejprve intuitivní představa nebo soubor představ. Pak následovala dlouhá, někdy i staletí trvající, posloupnost etap vyjasňování a upřesňování a teprve pak bylo možné pojem přesně definovat.

Poučení, které nám dává historik sir Thomas Heath, zní: Učit žáky pojmu X neznamená učit je **definici** pojmu, ale rozšiřovat jejich zkušenosti s konkrétními případy pojmu X.

Analýzou pojmů *bod, přímka, úsečka, rovnoběžka* začneme naše putování do říše neeukleidovské geometrie.

4. Pojmy Eukleidových Základů, pojem „bod“

Dnešní matematik se neptá po podstatě bodu nebo přímky. Pro něj nositelem podstaty nejsou jednotlivé pojmy, ale jejich vzájemné soužití, tj. struktura. Snahu porozumět pojmům bod nebo přímka vně struktury považuje za dětinskou, ne-li škodlivou.

Řečtí myslitelé zkoumali podstatu (*úsia*) všech důležitých pojmů — filosofických i matematických. Výsledky těchto průniků k podstatám často výrazně zasáhly do myšlenkového života Řeků. Například Zénón z Eleje skvělými aporiemi zpochybnil pojem „pohyb“. Tím výrazně přispěl k tomu, že se Eukleidés ve své koncepci geometrie tomuto pojmu v maximální možné míře vyhýbá.

Vstup do první knihy Eukleidových *Základů* (*Stoicheia*) tvoří dvacet tři vymezení (*horoi*). Pět z nich má pro naše zkoumání zásadní význam. Podívejme se na ně podrobněji. Řecký termín *eutheia* nepřekládáme; příčinu ozřejmíme v kap. 5.

1. *Bod jest co nemá dílu (části).*
2. *Čára pak délka bez šířky.*
3. *Hranicemi čáry jsou body.*
4. *Eutheia je čára, která svými body táhne se přímo.*

23. *Rovnoběžky jsou dvě euthey ležící v téže rovině a prodlouženy jsouce na obě strany do nekonečna, nikde se neprotínají.* [2])

Pro bod měli Řekové dva termíny: *sémeion* (= znak, označení) a *stigmé* (= místo na těle, kde do kůže vnikl hrot šípu). Oba termíny říkají, že bod je **označením místa** čili **pozice**. Takové chápání bodu, jak dokládá Proklos Diadochos (410–485), nacházíme u Pýthagora (?580–?500).

Aristoteles (384–322) přisuzuje bodu podstaty dvě: místo a nedělitelnost. Dočteme se o tom například ve Fyzice IV,1 a VI,1: „Nemôžem však presne určiť rozdiel medzi bodom a miestom bodu“ ([A2], str. 122); „... čiara nemôže byť utvorená z bodov, pretože je súvislá a bod je nedeliteľný. Ani najkrajnejšie konce bodov nemôžu tvoriť jedno, pretože nedeliteľné nemá koniec, ..., lebo vec, čo nemá časti, nemá ani koniec, pretože koniec a to, čoho je koncom, sa líšia“ ([A2], str. 166).

Konečně Eukleidés, jak vidíme z prvního výměru, přiznává bodu jedinou podstatu: **nedělitelnost**. Domníváme se, že příčinu této volby nutno hledat v platónské tradici. Podle ní podstata tkví v neměnné ideji, ne však v pomíjivých konkretizacích ideje. Nedělitelnost je společná vlastnost všech bodů, nemění se od případu k případu. Pozice je však pro každý bod jiná.

Didaktika. Podobně jako Eukleidés i žáci ZŠ při debatách o podstatě bodu upřednostňují jeho malost před pozicí. Na rozdíl od profesionálního matematika žák ZŠ, zejména pokud jde o žáka zvídavého, považuje takové debaty za smysluplné, někdy až fascinující. Eukleidův geometrický svět je mu v mnoha ohledech srozumitelnější než geometrický svět učebnic budovaných na strukturálním pojetí geometrie.

5. Pojmy „čára“ a „eutheia“

Druhé Eukleidovo vymezení je věnováno pojmu čára (*grammé*). Pro Eukleida idea *čáry* splývá s ideou *jednorozměrnosti*, neboť je vymezena pomocí dvou idejí: **délky** — pozitivně a **šíře** — negativně.

Hranice (*peras*) čáry je vymezena jinak než ostatní pojmy. Eukleidés zde neříká, co to je, co tvoří její podstatu. Uvádí pouze, co může zastávat funkci hranice čáry, totiž bod. Přitom ono *peras* je nejen *hranice*, která odděluje čáru od nečáry. Je to i *cíl* pro bod jdoucí po čáře, i *konec* takového putování. Je však případně i *východ* z čáry, která je touto hranicí omezena.

Slovem *eutheia* označuje Eukleidés přímou čáru. My toto slovo překládáme, podle kontextu, slovy *přímka* nebo *úsečka*. Takový překlad je nepřesný. Eukleidova eutheia není ani přímka, ani úsečka. Eutheiu lze prodloužit, přímku ne. Eutheia nemá krajní body, úsečka ano. Proto zde považujeme za přesnější slovo eutheia nepřekládat. Teď k vlastnímu vymezení pojmu eutheia.

Podle vymezení 4 obsahuje *eutheia* pouze ideu **přímosti** a ideu **čáry**, která, jak již víme, splývá s ideou **jednorozměrnosti**. Podstata euthey není však ideami přímosti a jednorozměrnosti vyčerpána. Další idea, která je zde přítomná, je **nepřetržitost**. Eukleidés ji přímce přiznává až dodatečně, v postulátu 2 — viz kap. 6. Domníváme se, že ideu nepřetržitosti shledává Eukleidés tak samozřejmou, že ji při vymezování euthey neuvede.

Zřejmě nejpodstatnější ze všech tří idejí je *přímost*, neboť ona dala *přímce* jméno. Nejen v češtině, ale i v latině *linea recta* — *recta*, v angličtině *stright line* — *stright*, francouštině *driot* — *droite*, němčině *die Gerade* — *gerade* a ruštině *prjamaja* — *prjamo*.

Chce-li Eukleidés rozšířit eutheiu o ideu ohraničenosti nebo o ideu neohraničenosti, musí psát *eutheia peperasmenés* (= ohraničená), tj. *úsečka*, nebo *eutheia ekballomenai eis apeiron* (= prodloužená do nekonečna), tj. *přímka*. Tak přímka i úsečka (a konečně i polopřímka) jsou pouze speciální případy euthey, asi jako pravý, tupý a ostrý úhel jsou speciální případy úhlu.

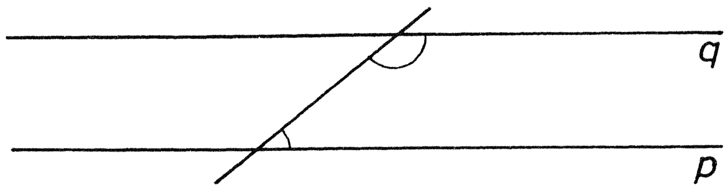
Když jsem se poprvé s pojmem eutheia setkal, jevil se mi nepřesný a neúplný. Dnes naopak se mi Eukleidova terminologie jeví jako přirozenější než naše: vždyť přímá čára, kterou nakreslím pomocí pravítka na papíře je eutheia. Úsečkou se stane, až na ni vyznačím koncové body, a přímkou, až ji v mysli přiznám neohraničenost na obě strany.

Didaktika. Představy žáků o pojmu „přímka“ více odpovídají pojmu „eutheia“ než naší přímce. Svědčí o tom například i následující experiment. Žákům pátých a šestých tříd byl předložen obrázek: na čtverečkovaném papíře je vyznačena přímka p a několik dalších čar a bodů. Jedna z otázek testu zněla „Kolik mřížových bodů leží na přímce p ?“. Více než polovina žáků na tuto otázku odpověděla „čtyři“, protože **eutheia** p procházela skutečně právě čtyřmi body.

6. Rovnoběžnost a postuláty (Aitémata) Eukleidových Základů

Eukleidovo vymezení rovnoběžnosti má vážnou slabinu. Je negativní (euthey jsou rovnoběžné, když se <u>ne</u>protnou) a tedy též neefektivní (ne vždy jej lze použít k ověření rovnoběžnosti dvou eutheií). Jestliže se totiž dvě euthey po n-násobném prodloužení nakonec protnou, víme, že se jedná o různoběžky. Jestliže se neprotnou, zůstáváme v nejistotě, neboť nevíme, zda se neprotnou po dalším prodloužení.

Uvedenou slabinu vymezení rovnoběžnosti odstranil Eukleidés tím, že podal efektivní návod na identifikaci rovnoběžnosti: zkoumané dvě euthey proťal třetí eutheou, změřil vhodné dva z osmi úhlů, které tak vznikly a pomocí velikosti jejich součtu jednoznačně rozhodl, zda původní euthey jsou rovnoběžné. Tento postup je ukotven v pátém postulátu (obr. 1).



Obr. 1

Podívejme se na soubor všech pěti postulátů, které Eukleidés uvádí hned za skupinou 23 vymezení.

1. *Od kteréhokoli bodu ke kterémukoli bodu lze vésti eutheiu.*
2. *Eutheiu lze nepřetržitě (syneches) prodloužit.*
3. *Z jakéhokoli středu jakýmkoli poloměrem lze sestrojit kruh.* [3])
4. *Všechny pravé úhly jsou navzájem stejné.*
5. *Když dvojice eutheií proťata třetí eutheou tvoří na téže straně vnitřní úhly menší dvou pravých,* [pak] *ony dvě euthey, prodlouženy jsouce do nekonečna, sbíhají se na té straně, kde jsou úhly menší dvou pravých.*

Postuláty jsou základní evidence, pravdy, které jsou zcela zřejmé a nepotřebují tedy žádné další postupy osvětlování. Zcela zřejmé je to, co se odehrává přímo před naším zrakem. Proces prodlužování eutheií do nekonečna však tuto kvalitu nemá. Čím více eutheiu prodlužujeme, tím více se vzdalujeme z osvětlené části světa do přítmí. Jistota pohledu se vytrácí. Proto, prý ještě za Eukleidova života, se objevily názory, že se v případě pátého postulátu nejedná o postulát, o pravdu, kterou evidujeme bezprostředním pohledem do světa geometrických idejí, ale o tvrzení, které je třeba k evidenci přivést pomocí již evidovaných čtyř postulátů.

Již první pokusy o důkaz pátého postulátu přinesly jeho novou, průzračnější formulaci. Dvojice eutheií do nekonečna prodlužovaných byla nahrazena dvojicí přímek, eutheií do nekonečna již prodloužených. Proces sbíhání se (*sympiptein*) eutheií byl nahrazen vztahem protínání se (*empiptúsa*) přímek. Původní Eukleidova myšlenka byla nahrazena soudobou formulací:

Postulát E. *Bodem A, který neleží na dané přímce b, lze vést právě jednu rovnoběžku s přímkou b.*

7. Příčiny náročnosti problému pátého postulátu

Je podstatný rozdíl mezi hledáním předmětu známého a předmětu neznámého. V prvním případě vím, co hledám, a jen co hledanou věc zahlédnu, okamžitě ji identifikuji. Když hledaný předmět neznám, když mám o něm pouze dílčí představu, pak je moje hledání tápavější. Může se mi dokonce stát, že na hledaný předmět hledím a přesto jej neuchopím, protože jeho vzhled neodpovídá mé představě o něm. Úplně beznadějné se pak jeví hledání předmětu, jehož skutečná podoba protiřečí mé představě o něm. Přesně takové bylo hledání řešení problému pátého postulátu. G. Saccheri již v roce 1733 na řešení hleděl, ale neviděl je. J. H. Lambert v roce 1786 dokonce řešení jasně opíše, ale zamítá je jako snílkovství.

Matematici byli přesvědčeni, že hledané řešení má podobu důkazu. Ve skutečnosti však toto řešení mělo podobu nového geometrického světa. Tato **překvapivost** byla první příčinou náročnosti řešení problému pátého postulátu.

Druhou příčinou byla **neuvěřitelnost** řešení. Bylo nutné připustit, že ve světě neplatí postulát E, ale

Postulát N. *Bodem A, který neleží na dané přímce b, lze vést aspoň dvě různé rovnoběžky s přímkou b.*

Zkušenosti, které jsme získali s jevem rovnoběžnosti při rýsování, výrazně protiřečí postulátu N. Stejně, ne-li ostřeji, naše zkušenosti protiřečí mnoha dalším tvrzením, které jsou důsledkem postulátu N. Proto se nelze divit Lambertovi, který již v roce 1786 popsal nejen ucelenou teorii neeukleidovské geometrie, ale dokonce i její možnou realizaci, a přesto ji jako snílkovství zamítl.

Objev neeukleidovské geometrie byl převratný krok vývoje lidského myšlení. Podobně jako objev komplexních čísel nebo heliocentrické soustavy ukázal něco, co protiřečilo obecně přijatému názoru i každodenní smyslové zkušenosti člověka. Navíc to bylo poprvé, co se povedlo dokázat, že v rámci daného axiomatického systému jisté tvrzení dokázat nelze. Tato myšlenka se pak stala jedním z pilířů vnímání světa i lidských možností.

Didaktika. Historická zkušenost nás vybízí k větší odvaze dávat žákům příležitost hledat nepoznané. Rozvíjet intuici i fantazii žáků, podněcovat jejich schopnost vytvářet v imaginaci objekty, které zatím neviděli, nebo dokonce ani netušili. Rozvíjet jejich schopnost vysvětlit, proč ten nebo onen objekt neexistuje.

Takovou výzvou mohou být například úlohy:

1. Na čtverečkovaném papíře najdi tři uzlové body, které jsou vrcholy rovnostranného trojúhelníka.
2. Najdi zlomek, který nejlépe aproximuje číslo $\sqrt{3}$.

3. Sestroj v rovině stobodovou množinu tak, že libovolné tři z těchto bodů jsou vrcholy tupoúhlého trojúhelníka.
4. Z tuctu rovnostranných trojúhelníků a jednoho čtverce sestroj síť mnohostěnu.
5. Rozřež čtverec na ostroúhlé trojúhelníky.

Žák, který necítí potřebu dokazovat, hledá důkaz jen proto, že to od něj učitel žádá. Taková práce je člověka nedůstojná. Jak dosáhnout toho, aby žák důkaz potřeboval? Hledejme poučení v historii.

8. Potřeba dokazování

V současnosti jsou všechny základní disciplíny matematiky položeny na axiomatický základ. Axiomatický výklad (primitivní pojmy, axiómy, definice, věta, důkaz) je výchozí paradigma pro většinu vysokoškolských učebnic matematiky. Proto se nám zdá, že **důkaz** je především

stavební kámen axiomatické struktury některé disciplíny.

Naši současnou zkušenost však nemůžeme podsouvat těm, kdo hledali důkaz pátého postulátu v minulosti. Uvědomme si, že diferenciální počet byl po dvě století rozvíjen jako intuitivní struktura, že axiomatický systém přirozených čísel vytvořil G. Peano teprve v roce 1889, „čistý" axiomatický systém planimetrie D. Hilbert v roce 1899 a pojmy jako pole nebo obor integrity tvořící kostru axiomatizace algebry jsou až z 20. století.

Je sice pravda, že axiomatická stavba Základů byla již od starověku vnímána jako vzor přesného budování matematické disciplíny, ale chápána byla především jako cvičiště pro gymnastiku ducha, nikoli jako norma. A konečně Eukleidés sám, jak ukazuje Vopěnka ([VP1], str. 275–281), chápal dokazování (*deiknimi*) ve smyslu sjednávání jistoty. Aspoň na začátku Základů. Tedy až do druhé poloviny 19. století důkaz byl cestou k hlubšímu pochopení jevů, cestou

k odstraňování pochybností a sjednávání jistoty.

Pěkně to napsal Platón v dialogu Kratylos: „tím *dokázat* rozumím dát před oči" ([P], 430e). Tedy dokázat znamená uvidět, uzřít. Tam, kde vidíme, kde nemáme pochybnosti, tam je důkaz zbytečný. Tedy k tomu, aby člověk dokazování vnímal jako smysluplnou činnost ducha, aby důkaz potřeboval, aby se jej dožadoval, aby jej hledal, jsou nutné pochybnosti o pravdivosti výpovědi, která je předmětem dokazování. Bez těchto pochybností se dokazování stává pouze logickou hrou, která sice může sloužit jako gymnastika ducha, ale nezasahuje do hlubin, ve kterých přebývá Pravda, vnímaná jako hodnota světa.

Didaktika. Z uvedeného rozboru plyne pro nás, učitele matematiky, poučení. Chceme-li, aby žák vnímal dokazování jako smysluplnou činnost ducha, aby důkaz potřeboval, aby jej hledal, aby se jej dožadoval, je nutné kultivovat jeho kritické myšlení, jeho schopnost pochybovat. Dokazovat žákům, že dvě přímky, rovnoběžné s přímkou třetí jsou i vzájemně rovnoběžné, je pochybené. O těchto faktech žák nepochybuje a proto nechápe, proč je má dokazovat. Důkaz požadujeme tam, kde pochybujeme. V tomto směru je naše vyučování málo vyvážené. Učíme žáky dokazovat, ale neučíme je pochybovat. Málo pozornosti věnujeme kultivaci schopnosti nedůvěřovat, kultivaci kritického myšlení. Učíme žáky chodit po přímých cestách, ale neučíme je rozumnému chování člověka hledajícího, bloudícího a pochybujícího. Málo těžíme z moudrosti Aristotela: „Kdo chce v řešení otázek dojít k dobrému výsledku, musí dovést správně pochybovat.“ ([A1], III,1). Dodejme, že kriticky myslící občan je asi hlavní zárukou demokracie před hrozbou totality.

9. Důvody pochybností a hledání jistoty

Řekli jsme, že zřídlem důkazu je pochybnost. Podívejme se na důvody, které vedly k zpochybnění pravdivosti pátého postulátu. Domníváme se, že důvody jsou dva.

Prvním byla neskladná formulace myšlenky. Zjevná pravda by se měla dát naformulovat stručně. Formulace pátého postulátu je hlučná. Bylo k ní zapotřebí více slov než jich spotřebovaly čtyři postuláty předcházející — v češtině i řečtině.

Druhým důvodem pochybností byly zkušenosti Řeků s ošidností smyslového poznání. Slavné Zénónovy aporie, skvělý příklad kultivace kritického myšlení, vznikly více než dvě století před Eukleidem a vytříbily citlivost a ostražitost mysli zejména ke dvěma fenoménům: pohybu a nekonečnu. Oba tyto fenomény jsou v pátém postulátu přítomny. Pohyb implicitně, v procese prodlužování eutheií a nekonečno explicitně jako směřování procesu prodlužování. Navíc nekonečno z pátého postulátu bylo ještě nepříjemnější než nekonečno v, řekněme, Zénónově příběhu o Achilleovi a želvě. Zatímco závod Achillea se želvou probíhá přímo před našimi zraky, je existence průsečíku sbíhajících se přímek odsunována do neosvětlených částí světa. A tam, kdož ví, co se může přihodit. K pochybnostem mohla pak přispět i opatrná formulace Eukleidova. On nehovoří o tom, že se dané přímky *protínají*, ale pouze že se *sbíhají*. A sbíhat se mohou i asymptoticky. Například hyperbola a její asymptota se při společné cestě k obzoru neomezeně přibližují, ale nikdy se nesetkají. Podobně některé další křivky, například konchoida.

Dokázat pátý postulát tedy znamená sjednat si jistotu, že při označení obrázku 1 platí: je-li součet vyznačených úhlů menší než $2R$, pak se přímky p, q protnou. Najít tento důkaz znamená najít jiný způsob evidence rovnoběžnosti, ideu, která je

1. určující pro jev rovnoběžnosti,
2. vyvoditelná z prvních čtyř postulátů a
3. ověřitelná v rámci osvětlené části roviny.

Z mnoha pokusů o nalezení takové ideje jsme vybrali pět.

* Posidonios (?135–?50) našel ideu rovnoběžnosti v pojmu, který dnes nazýváme ekvidistanta.
* Ptolemaios Klaudius (?100–?178) postavil svůj důkaz na dobrém základě, ale dopustil se logické chyby.
* Proklos Diadochos (410–485) předpokládal, že vzdálenost společných kolmic na danou přímku je ohraničená.

* Ibn Quarra (830–901) vzal přímku p a mimo ní bod A; svazek Σ polopřímek vycházejících z bodu A rozdělil do tří tříd: na vzdalující se od p, protínající p a dvě zbývající, které společně tvoří hledanou rovnoběžku. Druhý Ibn Quarrův argument byl založen na předpokladu, že existuje posunutí.
* Bertrand (1731–1812) předpokládal, že platí postulát N a rovinu pak rozložil dvěma způsoby: na nekonečný počet shodných pásů a konečný počet shodných úhlů, přičemž úhel byl částí pásu. Tím došel ke sporu.

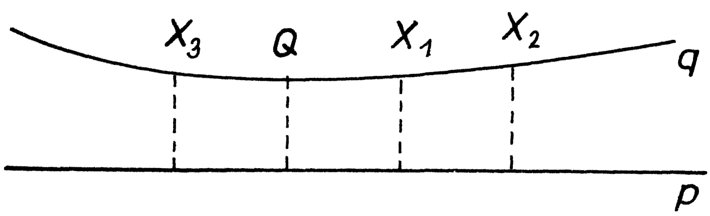
Každý z uvedených pěti pokusů prozkoumáme.

10. Posidonios (?135–?50)

Byzantský matematik a filosof Proklos dokládá, že Posidonios navrhoval jinou definici rovnoběžky. V soudobé terminologii by Posidoniova definice zněla:

Definice A. Nechť je dána přímka p a mimo ni bod Q. Přímku q, která se skládá ze všech bodů X poloroviny pQ, pro něž platí $|pX| = |pQ|$, nazveme rovnoběžka s přímkou p vedená bodem Q.

Není těžké z uvedené definice vyvodit důkaz postulátu E. Na druhé straně je zarážející, že náročnost důkazu zásadně závisí na definici některého pojmu. Důvěrnější pohled na obě definice pojmu rovnoběžnosti nám odhalí, v čem tkví zdánlivý paradox. Rovnoběžka Eukleidova (přímka neprotínající danou přímku) je něco zcela jiného než rovnoběžka v Posidoniově smyslu. Podstatou Posidoniova důkazu je přesvědčení, že rovnoběžka, kterou definice A zavádí, je přímkou. Odkud bere Posidonios uvedené přesvědčení? Zřejmě z intuice. Když však tuto intuici podrobíme kritice, zjistíme, že musíme postupovat opatrněji. Ideu, která je zde ztotožněna s ideou přímky, musíme od ideje přímky oddělit. Učiníme tak novou definicí (viz obr. 2).



Obr. 2

Definice B. Nechť je dána přímka p a mimo ni bod Q. Čáru q, která se skládá ze všech bodů X poloroviny pQ, pro něž platí $|pX| = |pQ|$, nazveme ekvidistanta přímky p vedená bodem Q.

Podstata Posidoniova důkazu spočívá v neoprávněném a asi nevědomém ztotožnění idejí ekvidistanty a přímky. Posidoniovu chybu jasně viděl Geminos z Rhodu (1. st. př. K.), který však, dle svědectví Prokla, „by považoval existenci rovnoběžek, které nejsou ekvidistanty, za nejparadoxnější (*paradoxotaton*) v celé geometrii". Tedy Geminos si již plně uvědomoval, že idea rovnoběžky není totožná s ideou ekvidistanty. Byl však přesvědčen, že tyto ideje jsou neodlučitelné.

Didaktika. S podobnou nekorektností — že totiž ve výroku, který je předkládán jako definice, je ukryto tvrzení — se v historii matematiky vůbec, a v historii pátého postulátu pak zvláště, setkáváme nezřídka. A nejen v historii. Podobné nekorektnosti najdeme i v soudobých učebnicích. V jedné z nich například čteme: „**Definice.** Trojúhelník, jehož strany jsou shodné a jehož každý vnitřní úhel je 60^o, se nazývá rovnostranný".

Umět vymezovat pojmy bez uvedeného nedostatku, nebo dokonce umět takový omyl odhalit, je známkou značné vyspělosti matematického myšlení žáka.

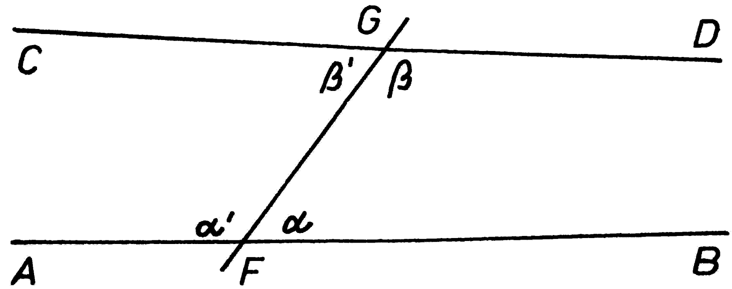
Existuje několik způsobů, jak lze kultivovat schopnost žáků analyzovat a tvořit definice. Jeden z nich zde uvedeme. Žák dostane seznam pěti — deseti podmínek, které všechny se vztahují k, řekněme, čtyřúhelníku. Úkolem žáka je vybrat ze seznamu skupinu podmínek P splňující dva požadavky:

1) skupinou P je pojem *čtverec* definován a
2) žádnou vlastní podskupinou skupiny P pojem *čtverec* definován není.

11. Ptolemaios Klaudius (?100–?178)

Astronom, matematik, geograf, jeden ze zakladatelů sférické trigonometrie, autor Almagestu, učebnice, která po staletí patřila k nejpoužívanějším učebnicím matematiky, tvůrce na svou dobu přesných trigonometrických tabulek (hodnoty čísel $\sin 1^o$ i π zjistil s přesností 10^{-4}).

Ptolemaiův „důkaz" (viz obr. 3).



Obr. 3

Nechť jsou dány rovnoběžky AB a CD a nechť FG je jejich transverzála. Úhly $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ označme jako na obrázku. Pak je úhel $\alpha + \beta$ buď větší, nebo rovný, nebo menší než $2R$. Předpokládáme, že když některý z těchto případů (např. $\alpha+\beta > 2R$) platí pro jednu dvojici rovnoběžek, platí pro každou dvojici. Nyní FB, GD jsou rovnoběžné; tedy i FA, GC jsou rovnoběžné. Protože je $\alpha + \beta > 2R$, je též $\alpha' + \beta' > 2R$. Pak $\alpha + \beta + \alpha' + \beta' > 4R$, což je zřejmě nemožné. Tedy $\alpha + \beta$ nemůže být větší než $2R$. Stejně nemůže být ani menší než $2R$. Proto musí být $\alpha + \beta = 2R$.

Podstatou Ptolemaiova důkazu je idea homogenity roviny: když jistá zákonitost platí pro jednu dvojici rovnoběžek, platí pro každou dvojici rovnoběžek. Idea homogenity roviny je hluboká a pravdivá. Zde se Ptolemaios nemýlil. Chyby se dopustil při použití této myšlenky. A nebyla to chyba dětinská. Odhalit ji dělá nemalé potíže i matematicky vyspělým středoškolákům.

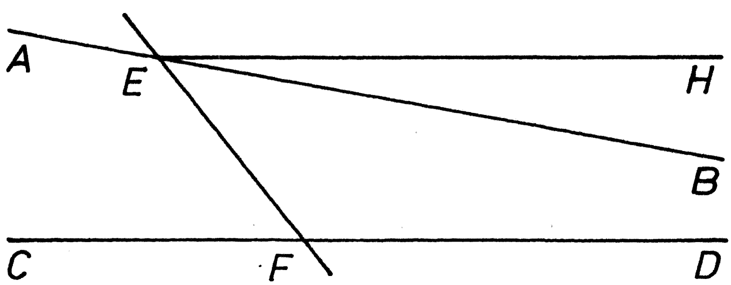
Jádrem chyby je nejasná klasifikace možných případů: vztah $\alpha+\beta > 2R$, tak jak jej Ptolemaios interpretuje, charakterizuje vzájemnou polohu polopřímek, nikoli přímek. Je-li $\alpha + \beta \geq 2R$ pak se polopřímky FB a GD neprotínají. Je-li současně $\alpha' + \beta' \geq 2R$, pak se polopřímky GC a FA neprotínají. Zde ovšem k žádnému sporu nedocházíme.

Obhájce Ptolemaiova důkazu může vůči naší argumentaci namítat, že jsme nedodrželi podmínky: body A, B, F leží na přímce i body C, D, G leží na přímce. V takovém případě z obrázku 3 vymažu řecká písmena $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ a na jejich místa napíši velikosti úhlů $88^o, 89^o, 92^o, 91^o$. Pak se zeptám Ptolemaiova obhájce, zda pro přímky AB a CD platí $\alpha + \beta > 2R$ nebo $\alpha + \beta < 2R$. Odpověď na položenou otázku závisí od toho, které úhly označím α a β. Tedy uvedená klasifikace je nekorektní. Korektní klasifikace připouští pouze dvě třídy: první je charakterizována vztahem $\alpha + \beta = 2R$, druhá vztahem $\alpha + \beta \neq 2R$.

Didaktika. Analýza Ptolemaiova „důkazu“ dává žákům příležitost zamyslit se hned nad dvěma myšlenkovými procesy, v nichž se často chybuje. Jsou to klasifikace a označování geometrických objektů. Ilustrací posledního může být označování trojúhelníků. Podle učebnice jsou termíny „trojúhelník ABC“ a „trojúhelník ACB“ různé, ale žáci, a často ani učitelé, je tak nevnímají. Nevěříte? Zkuste si udělat experiment. Nakreslete rovnostranný trojúhelník ABC a zeptejte se žáků, kolik je na tabuli trojúhelníků shodných s trojúhelníkem ABC.

12. Proklos Diadochos (410–485)

Proklos při dokazování pátého postulátu vycházel ze situace popsané Eukleidem: přímky AB a CD jsou proťaty příčkou EF tak, že součet úhlů DFE a BEF je menší než dva pravé (obr. 4).



Obr. 4

Pak sestrojil přímku EH tak, aby součet úhlů DFE a HEF byl rovný dvěma pravým. Konečně uvedl argument: protože se body na ramenech úhlu HEB při vzdalování se od bodu E neomezeně vzdalují a vzdálenost přímek CD a EH je omezena, musí nutně rameno EB protnout přímku CD.

Technickým nedostatkem Proklovy argumentace je vágní popis oněch dvou bodů, které se pohybují po polopřímkách EB a EH a neomezeně se vzdalují od bodu E. Nedostatek lze lehce odstranit například tím, že požadujeme, aby spojnice těchto bodů byla kolmá na přímku EH. Nebo tím, že požadujeme, aby vzdálenost obou pohybujících se bodů od bodu E byla stále stejná.

Neodstranitelným nedostatkem Proklovy argumentace je použití zdánlivě samozřejmého, ale nedokázaného tvrzení: „vzdálenost polopřímek FD a EH je omezená". Dodejme, že zdánlivá samozřejmost uvedeného tvrzení vynikne ještě lépe, když přímku EF volíme jako kolmici na AB. Tedy *podstatou* Proklova pokusu je idea vzdálenosti rovnoběžek a víra, že tato vzdálenost je omezená.

Porovnejme chyby, jichž se dopustili Posidonios, Ptolemaios a Proklos. Na první pohled vidíme, že charakter chyby Posidonia i Prokla je týž. Spočívá v přijetí jistého tvrzení, které, ač zdánlivě samozřejmé, dokázáno nebylo (a dodejme, že se dokázat ani nedá). Jinak řečeno, tito muži nahradili postulát E jiným tvrzením, které lze vzít místo postulátu E. Posidoniovo tvrzení uvedeme dokonce ve dvou formulacích. První je přesnější, druhá umožňuje porovnání myšlenek Posidonia a Prokla.

Posidonios 1. *Ekvidistanta přímky je přímka.*

Posidonios 2. *Vzdálenost společných kolmic dané přímky je konstantní.*

Proklos. *Vzdálenost společných kolmic dané přímky je omezená.*

Posidonios žádá více než Proklos. Měřím-li velikost rozchodu dvou rovnoběžek v různých místech, pak takto měřená vzdálenost je podle Posidonia *stále stejná*, podle Prokla *možná různá, ale omezená předem daným číslem.*

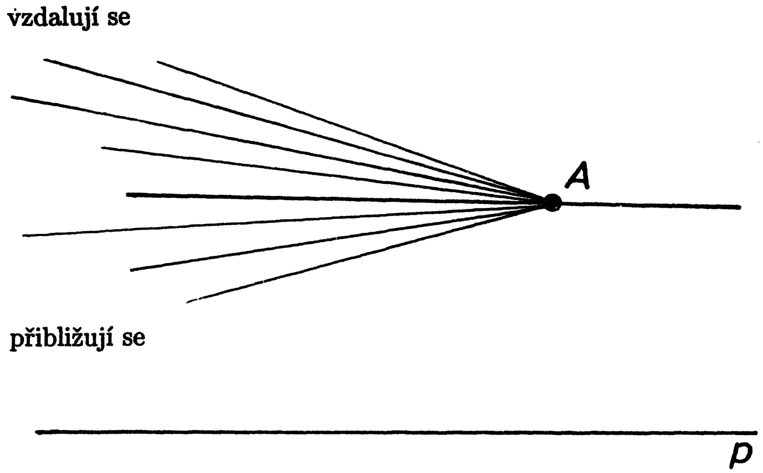
Předností Posidoniovy myšlenky je její efektivnost: když chci zjistit, zda jsou přímky p, q rovnoběžné, zvolím na q tři různé body a změřím vzdálenost každého z nich od přímky p. Přímky jsou rovnoběžné právě když všechny tři výsledky jsou stejné.

Proklova myšlenka sice neposkytuje efektivní způsob verifikace zda jsou dvě konkrétní přímky rovnoběžné, zato se však jeví jako hlubší, protože je slabší. Podmínka *omezenosti* funkce je výrazně slabší než podmínka její *konstantnosti.*

Ptolemaios, na rozdíl od Posidonia a Prokla, neodhalil žádnou novou ideu jevu rovnoběžnosti. Jeho příspěvek k objevu neeukleidovské geometrie je mizivý. Z hlediska didaktického je však Ptolemaiova chyba poučná. Právě proto jsme ji zde uváděli.

13. Ibn-Quarra (830–901)

Arabský matematik bagdádské školy. Uvedeme dvě z mnoha jeho úvah věnovaných pátému postulátu.



Obr. 5

První, mírně modifikovanou, máme na obr. 5. Nechť A je bod neležící na přímce p. Nechť Σ je svazek všech polopřímek s počátkem v bodě A. Ve svazku vyčleníme dvě třídy: v první budou polopřímky, které se od přímky p vzdalují, ve druhé ty, které se k p přibližují. Obě tyto třídy jsou pak odděleny dvěma polopřímkami tvořícími jedinou přímku — to je rovnoběžka s p vedená bodem A.

Ibn-Quarrova úvaha je opisem, nikoli argumentem. Autor ukazuje, jak lze na jev rovnoběžnosti pohledět, ale nedokazuje, že každá přibližující se polopřímka nutně přímku p protne.

Cena ibn-Quarrovy úvahy je v novém pohledu. Ve všech předchozích úvahách se rovnoběžnost uvažovala buď jako vztah dvou přímek, nebo jako limitní případ jevu různoběžnosti. Zde poprvé se rovnoběžnost chápe jako rozhraničující případ v množině polopřímek — jako hranice mezi třídou přibližujících se a třídou vzdalujících se polopřímek. Myšlenka definovat náročný pojem jako objekt rozhraničující dvě snadno popsatelné množiny byla v roce 1872 užita R. Dedekindem na zavedení pojmu reálné číslo — Dedekindův řez.

Druhá úvaha užívá přímočarý pohyb pevného tělesa. Na tělese zvolím vhodně dva body A, B a těleso kousek přímočaře posunu ve směru kolmém na přímku AB. Tím se body A, B přemístí do bodů C, D. Pak ibn-Quarra dokáže, že čtyřúhelník $ABDC$ je obdélník se čtyřmi pravými úhly. Odtud již pátý postulát vyplynul v té době známými postupy. V tomto druhém vtipném „důkazu" objevil Ibn Quarra další tvrzení ekvivalentní postulátu E: *v rovině existuje posunutí.* Víme, že Eukleidés ideu pohybu do geometrie nepřipouštěl.

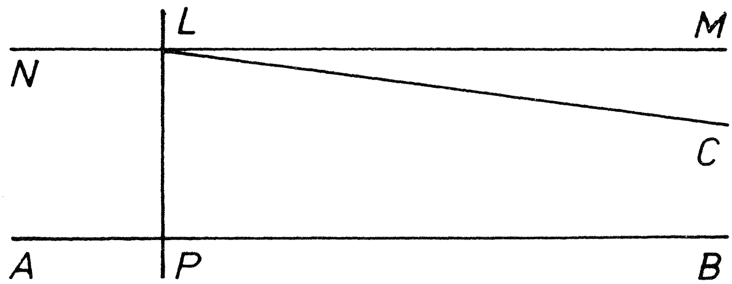
Didaktika. Podívejme se na obě úvahy očima učitele. V první vidíme významný metodologický posuv: místo jednotlivých objektů uvažuje ibn-Quarra celou množinu objektů. Idea, kterou je vývoj matematiky prostoupen a která patří k základním myšlenkovým operacím nejen matematiky, ale každého teoretického myšlení. Vznik pojmu číslo, vznik algebry, nebo vznik funkcionální analýzy — to všechno jsou příklady uvedeného myšlenkového zobecňování.

V druhé úvaze je geometrie zkoumána prostřednictvím pohybu. Podle našich zkušeností je zavedení pohybu do geometrických situací pro některé žáky osvětlením, pro jiné spíše zatemněním problematiky. Někteří žáci upřednostní statické (S) uchopení pojmu nebo jevu, jiní kinematické (K). Typickými příklady jsou pojmy: *úhel* (část roviny — S, otočení — K), *rotace* (otočení — S, otáčení — K), *vektor* (třída vázaných vektorů — S, posunutí — K).

Dodejme, že žádný ze studentů, budoucích učitelů matematiky, s nimiž jsme o problematice diskutovali, neodhalil, v čem je podstata omylu druhé argumentace ibn-Quarry.

14. Louis Bertrand (1731–1812)

Švýcarský matematik, žák Eulerův. Bylo mu 11 let a 5 měsíců, když začal navštěvovat Ecole Polytechnique. V druhém dílu práce [BL] z roku 1778 uvádí tento kouzelný „důkaz" pátého postulátu (viz obr. 6).



Obr. 6

Nechť jsou AB a MN kolmice na úsečku PL ($P \in AB, L \in MN$). Nechť LC je rovnoběžka s AB, přičemž C leží uvnitř pásu rovnoběžek AB a MN. Pak celý úhel CLM (nebo úhel CLN) leží uvnitř daného pásu. Pásů lze do roviny uložit nekonečně mnoho. Stačí osovou souměrností podle hranice pásu tvořit pás následující. Avšak úhel se do roviny vejde pouze konečně krát. To je spor. Ušlechtilá chyba je založena na tom, že s nekonečnými množinami děláme operace jako by byly konečné. Dodejme, že v uvedené době byly zkušenosti matematiků s rozkladem nekonečných množin malé.

Didaktika. Bertrandův „důkaz" byl jedním z asi deseti „důkazů", které jsem ukazoval žákům na jednom týdenním soustředění olympioniků. Většině žáků se právě tento argument jevil nejen jako nejduchaplnější, ale též jako nejpřesvědčivější.

Olympionici chybu neobjevili ani po dvou dnech. Pak jsem jim ukázal několik překvapení, která lze zažít, když s nekonečnými množinami nebo objekty nekonečné míry pracujeme, jako by to byly objekty konečné. Žáci všechny mé příklady víceméně akceptovali, ale jejich víru v Bertrandův důkaz to neoslabilo. Jejich obhajoba Bertrandova důkazu vyústila do hypotézy, která byla ostřejší než domnělý Bertrandův paradox, protože pracovala pouze s konečnou a ne nekonečnou soustavou podmnožin.

Hypotéza. Nechť je v geometrickém prostoru P dán útvar U a jeho vlastní podútvar V. Nechť dále $V_1, V_2, \cdots, V_n$ je taková n-tice útvarů shodných s útvarem V, která pokrývá celý prostor P. Nechť konečně $U_1, U_2, \cdots, U_{n+1}$ je jakákoli $(n+1)$-tice útvarů shodných s útvarem U. Pak v prostoru P existuje bod X, který je vnitřním bodem aspoň dvou z útvarů U_i.

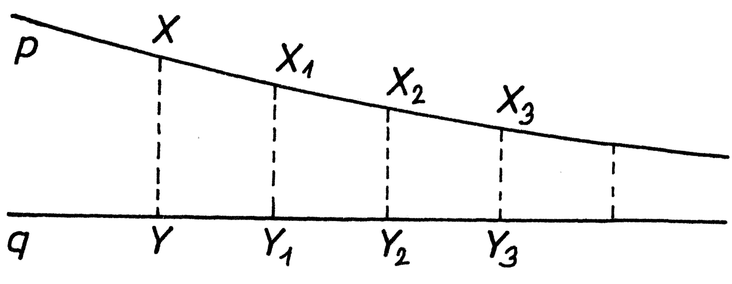
Žáci se dožadovali, abych Hypotézu vyvrátil protipříkladem. Až pak prý uvěří, že Bertrandův důkaz je chybný. Slabinou uvedené hypotézy je pojem „geometrický prostor P". Proto jsem žádal žáky, aby přesně řekli, co tím míní. Nejprve řekli, že tím míní rovinu, ve které platí první čtyři Eukleidovy postuláty. Pak postupně tento pojem rozšiřovali. Řekli, že P může být přímka, nebo i plocha kulová, nebo anuloid, nebo povrch krychle, ...

Hledal jsem požadovaný protipříklad uvnitř eukleidovského světa, ale neuspěl jsem. Nevím, zda takový příklad existuje. Když neexistuje, pak je Bertrandova idea upravena do uvedené hypotézy ekvivalentní pátému postulátu.

Jediný způsob, kterým bych uměl vyvrátit námitky žáků, je seznámit je s některým z modelů neeukleidovské roviny. To je však cesta příliš náročná a dlouhá. Má-li čtenář jiný nápad, jak vybřednouti z této didaktické pasti, uvítám jeho poučení.

15. Saccheri a jeho nový přístup k důkazu pátého postulátu

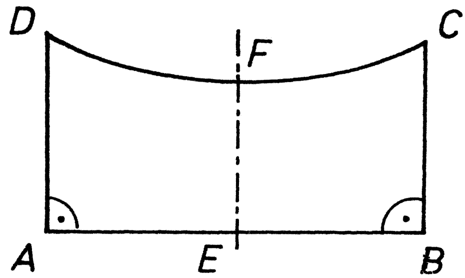
Přes dvoutisícileté úsilí předních matematiků se nepodařilo najít vymezení rovnoběžnosti, které by bylo vyvoditelné z prvních čtyř postulátů a ověřitelné v osvětlené části roviny. Nový přístup k řešení problému objevil Girolamo Saccheri (1667–1733). I on se však nejprve pokoušel najít přímý důkaz. Podívejme se, jak „dokázal", že neexistují sbíhající se přímky. Nechť p, q jsou sbíhající se přímky (obr. 7).



Obr. 7

Veďme z bodu X přímky p kolmici XY na q; $Y \in q$. Posouvejme bod X směrem do toho nekonečna, k němuž se p, q sbíhají. Při tomto pohybu se bude úsečka XY zkracovat a její úhel s přímkou p se bude blížit k pravému úhlu. V nekonečnu body X, Y splynou, ale přesto směr přímky XY zde existuje a je kolmý k oběma přímkám p, q. Saccheri zavírá úvahu tvrzením „to odporuje přirozenosti přímky“.

Uvedená konstrukce je vtipná, ale dovolává se *přirozenosti přímky* a její nejdůležitější krok se uskuteční na hranici obzoru, v temné části zkoumaného světa. Sám Saccheri není s „důkazem“ spokojen a dokonce se zříká naděje najít přímý důkaz postulátu E. Volí zcela nový přístup. Pokouší se vyvrátit postulát N pomocí kontradikce. Chce dokázat, že postulát N je neslučitelný s prvními čtyřmi Eukleidovými postuláty. Jeho myšlenka, jako konečně mnoho jiných skvělých myšlenek, je prostá. Připustí, že platí současně jak postulát N, tak i první čtyři eukleidovské postuláty. Protože věří, že tato tvrzení jsou logicky neslučitelná, je přesvědčen, že když bude tento rozporuplný systém dostatečně dlouho rozvíjet, nutně dospěje ke sporu. Tím bude postulát N vyvrácen a tedy postulát E potvrzen. V práci [SC] (*Eukleidés ode všech poskvrn zbavený, čili pokus stanoviti nejprvnější počátky celé geometrie*) z roku 1733 zkoumá důsledky plynoucí ze zavrhnutí postulátu E.



Obr. 8

Sestrojí čtyřúhelník $ABCD$ (viz obr. 8), ve kterém jsou strany AD a BC shodné a úhly $\sphericalangle A$ a $\sphericalangle B$ pravé. Přímka EF spojující střed E strany AB a střed F strany CD je osou souměrnosti obrázku. Proto jsou úhly $\sphericalangle C$ a $\sphericalangle D$ shodné. Teoreticky vzato mohou být a) tupé, b) pravé, c) ostré. Případ a) je nemožný, případ b) vede na Eukleidovu geometrii. Zbývá zkoumat případ c), který bývá citován jako *třetí hypotéza* nebo *hypotéza ostrého úhlu.*

Po různých úvahách Saccheri pomocí infinitesimálního počtu, nejmodernějšího nástroje té doby, hledá délku ekvidistanty mezi body C, D. Chybně zjistí, že je to vzdálenost AB a správně pak z toho vyvodí, že se kolmice AD a BC nemohou rozcházet. Od Proklových dob bylo známo, že toto tvrzení je ekvivalentní s pátým postulátem. [4])

G. Saccheri měl tedy cíl v dohledu, ale nebyl si toho vědom. Ještě blíže cíle byl Saccheriho pokračovatel J. H. Lambert, kterým ukončíme náš pohled do historie předchůdců objevu neeukleidovské geometrie.

16. Johann Henrich Lambert a šťastný konec povídání

J. H. Lambert (1728–1777), německý matematik, fyzik, astronom i filosof. Zavedl funkce sin a cos. Proslavil se důkazem iracionality čísel π a e. Kromě toho otevřel dokořán okno do neeukleidovské geometrie a uzřel nejen hluboké pravdy tohoto světa, ale i jejich vztah ke geometrii eukleidovské. Přesto se nestal objevitelem neeukleidovské geometrie. Nedokázal se zbavit předsudku, že to, co vidí, je fatamorgána.

V práci [LJH] z roku 1786 Lambert vyvodil celou sérii tvrzení, která plynou z hypotézy ostrého úhlu, tj. z postulátu N. Podívejme se na tři z nich.

1. *Existuje apriorní míra délky, obsahu i objemu.*
2. *Jsou-li dva útvary podobné, pak jsou shodné.*
3. *Součet úhlů v trojúhelníku nedosahuje* 180° *a tento dluh je vždy úměrný obsahu daného trojúhelníka.*

Lambert znal sférickou geometrii. Věděl, že i tam platí tvrzení 1 a 2 a dokonce i tvrzení analogické k tvrzení 3:

3'. *Součet úhlů v trojúhelníku přesahuje* 180° *a tento nadbytek je vždy úměrný obsahu daného trojúhelníka.*

Udivující paralela mezi známou geometrii sféry a „pomyslnou" rovinou komentoval Lambert poznámkou: „Ich sollte daraus fast den Schlußmachen, die dritte Hypothese komme bey einer imaginären Kugelfläche vor. Wenigstens muß immer etwas seyn, warum sie sich bey ebenen Flächen lange nicht so leicht umstoßen läßt, als es sich bei der zwoten thun ließ." ([CM], str. 401). [5])

Překročit předsudky o existenci jediné rovinné geometrie a objevit existenci geometrie neeukleidovské bylo dopřáno třem lidem. Objev jako první zveřejnil v roce 1829 Rus Nikolaj Ivanovič Lobačevskij (1792–1856). Pak, nezávisle na něm, v roce 1832 Maďar Janos Bolyai (1802–1860). Třetím objevitelem byl Němec Karl Friedrich Gauss (1777–1855). Ten, ač novou geometrii objevil zřejmě jako první, svůj objev tajil. Obával se, že převratnost myšlenky přivolá na hlavu objevitele blesky lidí mocných, nepřipravených překonávat předsudky.

Epochální objev nebyl matematickou obcí akceptován. Byl příliš nečekaný a odporoval staleté zkušenosti člověka. Bylo potřebné další půlstoletí, aby se našel přesvědčivější argument než logická konzistentnost nové geometrie. V roce 1868 potvrdil italský geometr Eugenio Beltrami (1835–1900) Lambertovu předpověď o platnosti „pomyslné geometrie" na „imaginární sféře". Našel plochu, jejíž geometrie je geometrií neeukleidovské roviny. Tím rozhodujícím způsobem prolomil pochybnosti o existenci neeukleidovské geometrie. Později Němec Felix Klein (1849–1925) a Francouz Henri Poincaré (1854–1912) ukázali, jak se dá neeukleidovská rovina modelovat v rovině eukleidovské: buď jako vnitřek eukleidovského kruhu, nebo vnitřek eukleidovské poloroviny.

Poslední etapu objevu jsme pouze načrtli, abychom nenechali příběh nedokončen. Rozklady didaktické však již dělat nebudeme.

Poznámky

[1]) To, zda bude nebo nebude nový objekt pod obecný pojem zahrnut, je často věcí dohody. Například zda nekonvexní čtyřúhelník budeme považovat za čtyřúhelník. Jestliže nový objekt uvede existující kritérium a naši intuici do

nesouladu, dochází obvykle k změně kritéria. Když k takové situaci dojde ve třídě, otevírá se učiteli skvělá příležitost, nechat problém otevřen. Například, když se poprvé objevila rovnice, jejímž řešením byl zlomek a ne celé číslo, část třídy řešení odmítla a dovolávala se předchozích zkušeností. Několik žáků však řešení považovalo za legitimní. Spor jsem nechal otevřen. Po nějakou dobu byly ve třídě rovnice řešeny ve dvou alternativních teoriích, až konečně ta, která připouštěla i racionální řešení, zvítězila. Podobně při zkoumání výrazu 0/0 bylo po více než jeden rok ve třídě několik teorií.

[2]) Ve vymezeních 5.– 22. jsou zavedeny pojmy *plocha, hranice plochy, rovina, rovinný úhel dvou čar, přímý úhel, kolmice, tupý a ostrý úhel, meze, útvar, kruh a jeho obvod, střed, průměr, polokruh a jeho střed, mnohoúhelník, trojúhelník rovnostranný, rovnoramenný, různostranný, trojúhelník pravoúhlý, tupoúhlý, ostroúhlý, čtverec a obdélník, kosočtverec, kosodélník, lichoběžník.*

[3]) Pojem *poloměr* (*diastémati*) užívá Eukleidés ve dvou významech: jako úsečku SA, kde S je střed kruhu a A libovolný bod hraniční kružnice, nebo jako délku této úsečky.

[4]) Čtyřúhelník na obr. 8 zkoumali již dříve arabští matematici al-Chajjám (1048–1131) a at-Túsí (1201–1274). Přesto nese tento čtyřúhelník jméno Saccheriho. Asi oprávněně. Jeho analýzy daného čtyřúhelníka byly výrazně hlubší než zkoumání obou jeho předchůdců.

[5]) Překlad J. B. Pavlíčka, viz [PJB] str. 168: „Z toho bych měl činit takřka závěr, že třetí hypothesa platí pro imaginární kulovou plochu. Jistě v tom musí něco být, že ji nelze pro rovinu zdaleka tak snadno vyvrátit, jako se to podařilo s druhou hypothesou."

Literatura

[A1] Aristoteles: *Metafyzika.* Překlad A. Kříže, Jan Laichter, Praha 1946

[A2] Aristoteles: *Fyzika.* In: Od Aristotela po Plotina, preklad J. Špaňár, Pravda, Bratislava, 1972

[BL] Bertrand Luis: *Development nouveau de la partie élémentaire des mathématique*, Ženeva 1778,

[BR] Bonola Roberto: *Non-Euclidean Geometry, A Critical and Historical Study of its Developments.* Dover Publications, INC. 1955.

[CM] Cantor Moritz: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik IV.* Leipzig, B. G. Teubner, 1908.

[GJ] Gray Jeremy: *Ideas of Space, Euclidean, Non-Euclidean and Relativistic.* Second Edition, Oxford Science Publications, 1989.

[HT] Heath Thomas L. sir: *The thirteen books of Euclid's Elements.* Cambridge at the University Press, 1926.

[KF1] Kuřina František: *Didactical Structure of Geometry.* In: ICMI Study Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century, Catania, 1995, 130–133.

[KF2] Kuřina František: *Dva přístupy k vyučování; instruktivní a konstruktivní (pět příkladů).* VŠPed v Hradci Králové, 1995.

[LHJ] *Theorie der Parallellinien.* Leipzig, 1786

[JAP] Juškevič, A. P.: *Dějiny matematiky ve středověku.* Academia, Praha, 1979.

[P] Platon: *Dialógy 1.* Překlad J. Špaňar, Tatran, Bratislava, 1990

[PJB] Pavlíček, J. B.: *Základy neeukleidovské geometrie Lobačevského.* Přírodovědecké vydavatelství, Praha, 1953.

[RBA] Rozenfel'd Boris Abramovič: *Istorija neevklidovoj geometrii.* Nauka, Moska, 1976.

[SG] Saccheri Girolamo: *Euclides ab omni naevo vindicatus sive Conatus geometricus, quo stabiliuntur prima ipsa universae geometriae principia.* Milano, 1733

[VP1] Vopěnka Petr: *Rozpravy s geometrií.* Panorama, Praha, 1989.

[VP2] Vopěnka Petr: *Druhé rozpravy s geometrií.* Koedice Fokus a Práh, Praha, 1991.

Práce vznikla za podpory grantu GAČR 406/96/1186.