Jiří Veselý

Poznámky k historii funkce gama

In: Jindřich Bečvář (editor); Eduard Fuchs (editor): Člověk-umění-matematika. Sborník přednášek z letních škol Historie matematiky. (Czech). Praha: Prometheus, 1996. pp. 49–71.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/400563

POZNÁMKY K HISTORII FUNKCE GAMA

JIŘÍ VESELÝ

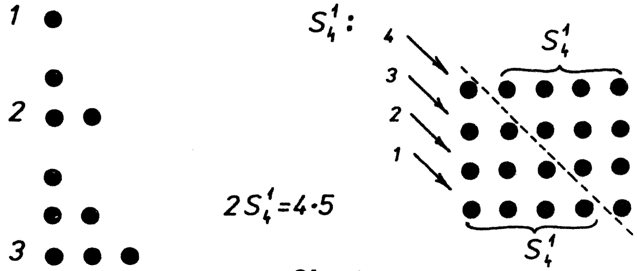
Aside from the so-called „elementary functions" ..., the special function that occures most frequently in analysis is undoubtedly the Gamma function. (Viz [Sto], str. 460.)

Jednou z nejdůležitějších funkcí, se kterými matematici musí velmi často pracovat, je tzv. *gama-funkce* (Γ). Je složitější než obyčejné elementární funkce (polynomy, racionální funkce); je také složitější než transcendentní elementární funkce školské matematiky (exponenciální funkce, logaritmus či sinus). Přitom k jejímu zavedení vede poměrně jednoduchá cesta, která je dílem mnoha matematiků. Stojí za to se s ní seznámit, ať již v poměrně kondenzované populárnější podobě z [Da], nebo i trošku podrobněji, s některými odbočkami, tak jak se matematika standardně vyvíjí. Na začátku této křivolaké cesty stojí použití velmi starých prostředků, avšak ta cesta poměřena časem je asi dvě stě let stará a přesahuje rámec 19. století. Zahrnuje v sobě použití integrálu i studium primitivního interpolačního problému, který se ukázal velmi obtížným. Na této cestě leží nejen *Stirlingova formule*, ale i kořeny základních poznatků analýzy, jakými jsou např. *Taylorův rozvoj* nebo *konvexita.*

Zhruba asi první polovina tohoto textu je věnována poznámkám o vývoji relevantních problémů, druhá je věnována opakování konvexity, historii a podrobně zpracovanému zavedení funkce Γ. Druhá polovina textu má odlišnou strukturu, neboť se pro ni systém „věta – důkaz" lépe hodí.

Některé interpolační problémy. Začněme skutečně od Adama: figurálními čísly se zaobírali již pythagorejci dávno před počátkem našeho letopočtu. Tak například čísla 1, 3, 6, 10, ... se nazývala čísla *trojúhelníková*. Připojený obrázek názorně ukazuje důvod i cestu k názornému odvození formulky (symbol := užíváme k označení rovnosti, kterou definujeme symbol na straně dvojtečky)

$$S_n^1 := 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n}{2}(n+1)$$



Obr. 1

Levá strana této rovnosti má rozumný smysl pro $n \in \mathbb{N}$, do pravé však lze dosadit za n libovolné *reálné* číslo. Podobná situace s násobením je nesrovnatelně obtížnější: rozšířit funkci $M(n) = n!$ byť jen na kladnou poloosu lze mnoha způsoby, jen jediný však vede k funkci Γ a ten vůbec není jednoduchý. Bylo by však hrubým zkreslením obrazu vývoje matematických poznatků se domnívat, že zmíněný jednoduchý interpolační problém byl jediný, který byl motivem k vyšetřování interpolace faktoriálů.

Opravdovým mistrem ve zvládání interpolačních problémů byl nesporně již ISAAC NEWTON (1643 - 1727); svědčí o tom i řada všeobecně užívaných jmen (např. Newton-Gaussova formule, Newton-Besselova formule apod.) Již dříve bylo nutno interpolovat v souvislosti se vznikem tabulek; tuto část historie vzhledem k její obsažnosti pomineme. Standardní úlohou s vazbou na astronomická pozorování bylo určení hodnoty funkce f v bodě x_{n+1} na základě jejích hodnot v bodech $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, s intervaly o různých délkách $x_k - x_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots, (n+1)$. Označíme-li postupně $f_0 := f(x_0)$, $f_1 := \bar{f}(x_0, x_1) := (f(x_1) - f(x_0))/(x_1 - x_0)$ a obecněji

$$\begin{aligned} f_{k+1} :=& \bar{f}(x_0, x_1, \ldots, x_{k+1}) \\ :=& \frac{\bar{f}(x_0, x_1, \ldots, x_k) - \bar{f}(x_1, x_2, \ldots, x_{k+1})}{x_0 - x_{k+1}}, \qquad k = 1, 2, \ldots , \end{aligned}$$

pak lze výpočtem ověřit rovnost

$$\begin{aligned} f(x_0) =& f(x_1) + (x_0 - x_1)\bar{f}(x_0, x_1) = \\ =& f(x_1) + (x_0 - x_1)\left[\bar{f}(x_1, x_2) + (x_0 - x_2)\bar{f}(x_0, x_1, x_2)\right] = \cdots \\ =& f(x_1) + (x_0 - x_1)\bar{f}(x_0, x_1) + (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\bar{f}(x_0, x_1, x_2) + \cdots + \\ &+ (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n)\bar{f}(x_0, x_1, \ldots, x_n) + R_n . \end{aligned}$$

Zde pro R_n platí

$$R_n = (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_{n+1})\bar{f}(x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}) .$$

Nahradíme-li x_0 proměnnou x, dostaneme formuli, kterou Newton používal; je-li přitom f polynom stupně n, je $R_n = 0$.

Výsledek může být čtenáři silně nepovědomý, pokusme se tedy ještě o další zjednodušení. Definujme pro $h > 0$

$$\begin{gathered} \Delta^0_{x,h} f = f(x) , \qquad \Delta^1_{x,h} f = f(x+h) - f(x) , \\ \Delta^2_{x,h} f = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x) , \\ \Delta^{k+1}_{x,h} f = \Delta^1_{x,h}(\Delta^k_{x,h} f) , \qquad k = 1, 2, \ldots . \end{gathered}$$

Podobně je vhodné zavést ještě toto zkrácené označení

$$(x)_{0,h} = 1 , \ (x)_{1,h} = x , \ (x)_{k,h} = x(x-h)\cdots(x-(k-1)\,h) , \ k = 1, 2, \ldots .$$

Snadno ověříme, že platí

$$(x)_{k,1} := (x)_k = k!\binom{x}{k} = \frac{x!}{(x-k)!}\,,$$

a také

$$\begin{aligned}\Delta^1_{x,1}(x)_k &= (x+1)_k - (x)_k = (x)_{k-1}\,[(x+1) - (x-(k-1))]\\ &= k\,(x)_{k-1}\,.\end{aligned}$$

Pracujeme-li tedy s rovnoměrně rozloženými body, dostaneme formulku mnohem povědomější: pro polynom P stupně n platí (srovnejte s Taylorovým, resp. Maclaurinovým polynomem)

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\,(x)_k\,\Delta^k_{0,1} P\,. \tag{1}$$

Podobně lze zavést symetrické rozdíly

$$\begin{gathered}\delta^0_{x,h} f = f(x)\,, \qquad \delta^1_{x,h} f = f(x+h/2) - f(x-h/2)\,,\\ \delta^2_{x,h} f = f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)\,,\\ \delta^{k+1}_{x,h} f = \delta^1_{x,h}(\delta^k_{x,h} f)\,, \qquad k = 1,2,\dots\,,\end{gathered}$$

a analogické zkrácené označení

$$[x]_{0,h} = 1\,, \qquad [x]_{1,h} = x\,, \qquad [x]_{k,h} = x(x+(k-2)\,h/2)\,, \qquad k = 1,2,\dots\,.$$

I v tomto případě dostaneme při zavedení zkráceného zápisu $[x]_k := [x]_{k,1}$ vyjádření polynomu ve formálně velmi podobném tvaru

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\,[x]_k\,\delta^k_{0,1} P\,. \tag{2}$$

Záměna $(x)_k$, resp. $[x]_k$ za x^k a $\Delta^k_{x,h} P$, resp. $\delta^k_{x,h} P$ za $P^{(k)}(x)$, $k = 1,2,\dots$, v (1) a (2) vede k vyjádření koeficientů polynomu pomocí derivací

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\,x^k\,P^{(k)}(0)\,. \tag{3}$$

Pro obecnější funkce než polynomy dostáváme (nekonečné) rozvoje obdobných typů. Připomeňme, že otázkami jejich konvergence se tehdy matematici nezabývali. K podobným výsledkům, jako jsou výše uvedené, dospěl nezávisle i skotský matematik James Gregory (1638 – 1675), jeden z objevitelů infinitezimálního počtu. Jeho objevy však málo ovlivnily vývoj soudobé matematiky, protože zůstaly většinou po delší dobu neznámé.

Newton i Gregory měli přítele, který byl spolehlivým informátorem o matematických objevech. Byl to JOHN COLLINS (1625 – 1683), který korespondoval s mnoha matematiky své doby a přispíval tím k šíření objevených poznatků. V dopise Collinsovi ze dne 23. listopadu 1670 uvádí Gregory interpolační formule podobného typu. Poznamenávám, že někteří badatelé (srv. [Go], str. 75) soudí, že pomocí nich Gregory dospěl k rozvojům, které dnes spojujeme s Taylorovým jménem; Gregory dospěl k 16 konkrétním rozvojům tohoto typu.

Známý BROOK TAYLOR (1685 – 1731) byl sekretářem anglické Royal Society; v r. 1712 ohlásil a r. 1715 publikoval tvar rozvoje, jemuž dnes dáváme obvykle jeho jméno. Nezabýval se však konvergencí řady a tak jeho teoretický vklad do pokladnice matematických znalostí nebyl veliký. Relativně nedoceněn zůstává v běžných knížkách o kalkulu COLIN MACLAURIN (1698 – 1746), jemuž se připisuje speciální tvar Taylorovy řady (o středu 0). My se u něj zastavíme a pokusíme se ozřejmit tzv. *Euler-Maclaurinovu formuli*, kterou budeme potřebovat pro další výklad.

Maclaurin byl zázračným dítětem: již ve 12 letech začal studovat na univerzitě v Glasgow a v 19 letech byl (v dnešní terminologii) vedoucím katedry matematiky v Aberdeenu. Získal prestižní pocty, mj. v roce 1740 spolu s Eulerem a D. Bernoullim za práce o přílivu a odlivu. Za zmínku stojí, že Newton si ho velmi vážil a nabízel dokonce i částečné Maclaurinovo finanční zajištění v pozici Gregoryho asistenta (srv. [Go], str. 84). Vraťme se však o mnoho let zpět.

Bernoulliovy polynomy, Bernoulliova čísla. JAKOB BERNOULLI (1654 – 1705) proslul mj. svým dílem *Ars Conjectandi*, v němž se zabýval i problematikou určování součtů typu

$$S_p^n := \sum_{k=1}^{n} k^p \,. \tag{4}$$

Vyšel ze schématu, kterému dnes říkáme Pascalův trojúhelník, z něhož lze lehce vyčíst různé vztahy mezi kombinačními čísly. Obsahuje mj. již zmíněná trojúhelníková čísla, která tvoří v níže uvedené obdélníkové verzi (5) třetí sloupeček; jsou to vlastně součty čísel ze druhého sloupečku. Jak snadno nahlédneme, platí to obecněji.

1	0	0	0	0	0	⋯
1	1	0	0	0	0	⋯
1	2	1	0	0	0	⋯
1	3	3	1	0	0	⋯
1	4	6	4	1	0	⋯
1	5	10	10	5	1	⋯
⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯

Nahraďme ještě čísla v předcházející tabulce kombinačními čísly, abychom mohli ze vzniklého schématu snadněji vyčíst potřebné zákonitosti. Dostaneme tak tuto „binomiální tabulku“ :

$$\begin{array}{ccccccc}
\binom{0}{0} & \binom{0}{1} & \binom{0}{2} & \binom{0}{3} & \binom{0}{4} & \binom{0}{5} & \cdots \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & \binom{1}{2} & \binom{1}{3} & \binom{1}{4} & \binom{1}{5} & \cdots \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \binom{2}{3} & \binom{2}{4} & \binom{2}{5} & \cdots \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \binom{3}{4} & \binom{3}{5} & \cdots \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & \binom{4}{5} & \cdots \\
\binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array} \tag{5}$$

Snadno nahlédneme, že platí vztahy

$$\sum_0^n \binom{k}{0} = \binom{n+1}{1} = n+1\,, \qquad \sum_1^n 1 = n\,,$$

$$\sum_0^n \binom{k}{1} = \binom{n}{2} + \binom{n}{1} = \binom{n+1}{2}\,, \qquad \sum_1^n k = \frac{n\,(n+1)}{1\cdot 2}\,.$$

Jak to vypadá obecně se součty (4) ? Ukažme si při použití soudobého označení, jak k tomuto problému přistupoval Johann Bernoulli; je to jedno z možných zajímavých zpestření cvičení z matematiky pro budoucí učitele. Tak např. pro určení součtu pro $p = 2$ je relevantní vztah

$$\sum_{k=1}^n \binom{k-1}{2} = \binom{n}{3}\,,$$

který snadno vyčteme z poslední tabulky. Také další vztahy se dají vyčíst přímo z tabulky a snadno je i dokážeme; obecněji platí pro $p = 3, 4, \ldots$ vztah

$$\sum_{k=1}^n \binom{k-1}{p} = \binom{n}{p+1}\,.$$

Vraťme se k případu $p = 2$; jeho rozepsáním a jednoduchou úpravou dostáváme

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n k^2 - \frac{3}{2}\sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 = \frac{1}{6}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n\,.$$

Budeme pracovat s touto rovností: snadno nahlédneme, že některé součty, které v ní vystupují, již známe. Dosadíme-li za ně do uvažované rovnosti a provedeme jednoduché úpravy, dostaneme vzoreček pro součet čtverců prvních n přirozených čísel, který si někteří pamatují zpaměti:

$$\begin{aligned} S_n^2 = \sum_{k=1}^n k^2 &= 2\left(\frac{3}{2}\frac{n(n+1)}{2} - n + \frac{1}{6}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n\right) \\ &= \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}\,. \end{aligned}$$

Tento vzoreček můžeme dokazovat indukcí, a stejně tak i další obdobné vzorečky pro S_n^p, pokud ovšem známe jejich tvar, tj. jejich pravou stranu. Z předcházejícího postupu je zřejmé, jak můžeme postupně další podobné vzorečky *odvodit*; přehled o nich poskytuje následující tabulka[1]:

$$\sum_1^n k^1 = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

$$\sum_1^n k^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

$$\sum_1^n k^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$$

$$\sum_1^n k^4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$$

$$\sum_1^n k^5 = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2$$

$$\sum_1^n k^6 = \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n$$

$$\sum_1^n k^7 = \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{1}{12}n^2$$

$$\sum_1^n k^8 = \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \frac{2}{9}n^3 - \frac{1}{30}n$$

$$\sum_1^n k^9 = \frac{1}{10}n^{10} + \frac{1}{2}n^9 + \frac{3}{4}n^8 - \frac{7}{10}n^6 + \frac{1}{2}n^4 - \frac{3}{20}n^2$$

$$\sum_1^n k^{10} = \frac{1}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^9 - \frac{1}{1}n^7 + \frac{1}{1}n^5 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{5}{66}n$$

$$\dots$$

Existují konstanty B_{2k}, $k = 1, 2, \dots$ tak, že pro $p \in \mathrm{N}$ platí vzoreček

$$\begin{aligned} S_p^n = \sum_1^n k^p = \frac{1}{p+1}n^{p+1} + \frac{1}{2}n^p + \frac{p}{2}B_2 n^{p-1} + \\ + \frac{p(p-1)(p-2)}{4!}B_4 n^{p-3} + \\ + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)}{6!}B_6 n^{p-5} + \cdots, \end{aligned} \tag{6}$$

[1] Poslední členy v sudých řádcích budeme ještě dále zkoumat. Za zmínku snad stojí i fakt, že na posledním místě řádku popisujícího tvar S_9^n byla v Bernoulliových výpočtech později v hodnotě koeficientu nalezena chyba.

kde sčítáme tak dlouho, dokud jsou klesající mocniny n kladné. Dosaďme nyní v předcházející tabulce $(n-1)$ za n do pravých stran součtových formulí; tak dostaneme postupně polynomy v proměnné n, které označíme $b_1, b_2, \dots$. Platí tedy

$$S_p^n = \sum_1^n k^p = b_p(n+1)\ .$$

Povšimněme si blíže některých obecných zákonitostí v tabulce. Snadno nahlédneme, že má rekurentní charakter: v obecném případě odvozování vzorce pro S_p^n dostaneme po úpravě rovnost, obsahující *pouze tento neznámý součet*, ostatní součty s menšími p jsme určili v předcházejících krocích. Existuje také vazba mezi koeficienty v jednotlivých řádcích: jejich součet je vždy roven 1. Koeficienty u lineárních členů (poslední členy v sudých řádcích) jsou čísla B_{2k}, $k = 1, 2, \dots$, ze vzorce (6). Platí tedy např. $B_2 = 1/6$, $B_4 = -1/30$, $B_6 = 1/42$, $B_8 = -1/30$ atd. Johann Bernoulli uvádí řadu jmen svých předchůdců (mezi nimi figuruje i JOHN WALLIS (1616 – 1703), s nímž se ještě setkáme), avšak byl to on, od něhož se odvíjí další vývoj v tomto směru. Již zmíněné koeficienty B_{2k} jsou známy jako *Bernoulliova čísla*; s nimi souvisí i tzv. *Bernoulliovy polynomy*, což jsou derivace $\mathcal{B}_p$ polynomů, které jsme výše označili b_p, $p = 1, 2, \dots$. Platí tedy

$$b_p'(x) = \mathcal{B}_p(x), \qquad x \in \mathbb{R},\ p = 1, 2, \dots$$

a $B_p = \mathcal{B}_p(0)$ (definice se mohou v literatuře lišit ve znaméncích, zde nepanuje univerzální shoda). V dnešní době definujeme Bernoulliovy polynomy zpravidla trochu jednodušeji (srovnej se (7) a s formulí, která následuje)[2]. Podle již uvedeného je tedy (definujeme i $\mathcal{B}_0$)

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_0(x) &= 1\ ,\\
\mathcal{B}_1(x) &= x - \frac{1}{2}\ ,\\
\mathcal{B}_2(x) &= x^2 - x + \frac{1}{6}\ ,\\
\mathcal{B}_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}\ ,\dots
\end{aligned}$$

Pak lze přepsat již uvedený vzoreček (6) ve tvaru

$$\sum_{k=1}^n k^p = \frac{1}{p+1}\left[\mathcal{B}_{p+1}(n+1) - B_{p+1}\right]\ .$$

Všimněte si faktu, že pravá strana má rozumný smysl i tehdy, dosadíme-li za n i reálné číslo a že je to *polynom*, tj. funkce relativně jednoduchá.

Bernoulli nedokázal obecnou součtovou formuli korektně. Následující stručně popsaný důkaz je převzat z [Wa]. Položme

$$\sigma_n := \sum_0^n \mathrm{e}^{kx} = 1 + \sum_{p=0}^\infty \frac{x^p}{p!}(1^p + 2^p + \dots + n^p) = \sum_{p=0}^\infty \frac{S_p^n}{p!}x^p\ ,$$

[2]Relevantní partie jsou velmi hezky vyloženy v [Br].

resp. po jednoduché úpravě

$$\sigma_n = \frac{x}{e^x - 1} \frac{e^{(n+1)x} - 1}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+1)^{k+1} x^k}{(k+1)!} .$$

Jestliže nyní vynásobíme obě řady vpravo a porovnáme koeficienty u x^p, dostaneme rovnost

$$\frac{S_n^p}{p!} = \frac{B_0 (n+1)^{p+1}}{0!(p+1)!} + \frac{B_1 (n+1)^p}{1!p!} + \cdots + \frac{B_p (n+1)}{p!1!} .$$

Ta se dá upravit na žádaný tvar (6)

$$S_n^p = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{1}{2} n^p + \sum_{k=2}^{p} \frac{B_k}{k} \binom{p}{k-1} n^{p+1-k}, \qquad p = 1, 2, \dots .$$

Poznamenejme konečně, že dnes se obvykle definují (možných způsobů definování je více) Bernoulliova čísla jako koeficienty Maclaurinova rozvoje vztahem

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!} ; \tag{7}$$

s ohledem na předchozí úvahy to není zase až tak překvapující. Bernoulliovy polynomy pak definujeme pomocí vztahu

$$B_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k x^{n-k} = x^n + \binom{n}{1} B_1 x^{n-1} + \binom{n}{2} B_2 x^{n-2} + \cdots + B_n .$$

Vynásobením rovnosti (7) faktorem $(e^x - 1)/x$ dostaneme

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

s $c_0 = 1$ a $c_1 = c_2 = \cdots = 0$. Platí

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!(n-k+1)!} = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k ,$$

z čehož dále plyne rekurentní výpočtové schéma pro Bernoulliova čísla

$$\begin{aligned} B_0 &= 1 , \\ B_0 + 2B_1 &= 0 , \\ B_0 + 3B_1 + 3B_2 &= 0 , \dots \end{aligned}$$

Obecně mají tyto rovnice tvar

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k = 0 , \qquad n = 1, 2, \dots .$$

Bernoulliova čísla se objevují v některých důležitých vyjádřeních, např. v rozvojích

$$\operatorname{tg} x = \sum_{1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{B_{2k}}{(2k)!} 4^k (4^k - 1) x^{2k-1} , \quad \operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} \sum_{0}^{\infty} (-1)^n \frac{B_{2k}}{2k!} 4^k x^{2k} ,$$

a také v Eulerem nalezeném vzorci (správném, ale nekorektně dokazovaném) pro součty převrácených hodnot sudých mocnin přirozených čísel[3]; použijeme-li k zápisu ζ-funkci, platí:

$$\zeta(2p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2p}} = \frac{(-1)^{p+1} B_{2p} (2\pi)^{2p}}{2(2p)!} , \qquad p = 1, 2, \dots . \tag{8}$$

Poznamenejme ještě, že Bernoulliova čísla s lichými indexy jsou (s výjimkou prvního) nulová, tj. platí

$$B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_{2p+1} = 0, \quad p = 1, 2, 3, \dots ;$$

(Euler nazýval Bernoulliovými čísly čísla $|B_{2p}|, p = 1, 2, \dots$).

Stirlingova formule. Pro pochopení výsledku, k němuž dospěl JAMES STIRLING (1692 – 1770) a který předcházel definici funkce Γ, použijeme Euler-Maclaurinovu formuli[4]. Pomineme podrobnosti a napíšeme ji ve tvaru

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} f(k) = \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}[f(n) - f(0)] + \frac{B_2}{2!}[f'(n) - f'(0)] + \\ + \frac{B_4}{4!}[f''(n) - f''(0)] + \dots + \\ + \frac{B_{2k}}{(2k)!}[f^{(2k-1)}(n) - f^{(2k-1)}(0)] + R_k , \end{aligned} \tag{9}$$

kde $f \in C^{(2k+1)}(\langle 0, n \rangle)$, tj. f je $(2k+1)$-krát spojitě diferencovatelná funkce. Stirling, ale ani Maclaurin, neuváděli zbytek R_k a pracovali s *řadou*, která však je ve všech praktických příkladech divergentní. Maclaurinův přístup byl z dnešního hlediska modernější. Pro zbytek platí

$$R_k = \frac{1}{(2k+1)!} \int_0^n f^{(2k+1)}(x)\, B_{2k+1}(x)\,\mathrm{d}x ,$$

[3]Zatímco pro převrácené hodnoty sudých mocnin lze dokázat uvedený velmi uspokojivý výsledek, např. o $\sum k^{-3}$ víme jen, že je to číslo iracionální.

[4]Moderně pojatou tuto partii (na vyšší úrovni a tedy i obtížněji přístupnou) nalezne čtenář v [Bo]; v dodatku k této partii jsou též zajímavé historické poznámky.

kde $\mathcal{B}_k$ jsou výše definované Bernoulliovy polynomy (ani zde není terminologie zcela stabilní, někdy bývají definovány Bernoulliovy polynomy jako součiny $\mathcal{B}_k \cdot k!$). Euler i Maclaurin dospěli k vyjádření patrně nezávisle, Maclaurin je publikoval v r. 1742. V Eulerových pracích se s ním setkáváme na více místech; Euler k němu dospěl za svého prvního petrohradského pobytu.

Stirling de facto nalezl pomocí „nekonečného rozvoje" následující vyjádření (píšeme ho v upravené formě)

$$\log n! = \left(n + \frac{1}{2}\right)\log n - n + \log\sqrt{2\pi} + \frac{B_2}{1\cdot 2}\frac{1}{n} + \frac{B_4}{3\cdot 4}\frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{B_{10}}{9\cdot 10}\frac{1}{n^9} + \cdots$$

a určil B_{2k} pro $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Toto dává po úpravě pro faktoriály vyjádření

$$n! = \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}\exp\left[\frac{B_2}{1\cdot 2}\frac{1}{n} + \cdots\right]$$

Teprve však ABRAHAM DE MOIVRE (1667 – 1754) dospěl v r. 1730 k vyjádření, které dnes běžně nazýváme Stirlingovou formulí a zapisujeme zpravidla ve tvaru

$$n! \sim (n/e)^n\sqrt{2\pi n}\,. \tag{10}$$

Historie gama-funkce. Obraťme se nyní přímo k funkci Γ. První seriózní zavedení „budoucí Γ-funkce" provedl Euler, i když se uvádí, že náznaky můžeme nalézt již u Wallise (viz [Ev]). LEONHARD EULER (1707 – 1783) se seznámil z dnešního hlediska nutně vágní formulací problému interpolace pro faktoriály prostřednictvím dopisu, který mu zaslal CHRISTIAN GOLDBACH (1690 – 1764). Euler v letech 1729 – 30 dospěl způsobem, o němž postrádáme přesnější informace, k řešení[5] tohoto problému, a to ve dvou různých rovinách. V první fázi podal řešení ve formě nekonečného součinu, ve druhé pak nalezl integrální vyjádření definované funkce.

Problém rozšíření faktoriálů z přirozených čísel (např. na kladná reálná čísla) má samozřejmě nekonečně mnoho řešení, byla to však především Eulerova geniální intuice, která ho dovedla k řešení, které se ukázalo později tak významné. Obtížnost řešení problému prostřednictvím zavedení funkce Γ byla podstatně větší než při odvození formulek pro součty p-tých mocnin přirozených čísel. Funkce Γ je již *podstatně* složitější: je transcendentní, ba dokonce v jistém smyslu „transcendentnější" než běžné elementární transcendentní funkce[6].

Již motto tohoto příspěvku zdůrazňuje výjimečnou užitečnost funkce Γ. Proto je další výklad veden tak, aby (samozřejmě po nezbytných úpravách) posloužil i jako prostředek k co nejjednoduššímu zavedení této funkce. Funkce Γ se typicky vyskytuje při řešení *složitých* problémů, proto se vždy těšila zájmu

[5]Toto řešení popsal v dopisech Goldbachovi z 13. 10. 1729 a z 8. 1. 1730; bylo publikováno v r. 1738.

[6]Transcendenci funkce Γ dokázal již Euler. Ten se také klasifikací funkcí z tohoto hlediska podrobněji zabýval a my tuto klasifikaci s nezbytnými modifikacemi užíváme dodnes. R. 1887 OTTO L. HÖLDER (1859 – 1937) dokázal, že funkce Γ není dokonce ani řešením žádné algebraické diferenciální rovnice.

předních matematiků. Vyšetřování funkce Γ je věnována v učebnicové literatuře velká pozornost; viz např. [BF], [St], [Ja2], [Kle], [Wa] apod. Jde o relativně náročné věci, vybral jsem však cestu poskytující při modifikacích co největší variabilitu a ukazující, že i elementární přístup k definici Γ-funkce je možný.

Euler dospěl způsobem, o němž postrádáme přesnější informace, k nekonečnému součinu (označíme ho (11))

$$\left[\left(\frac{2}{1}\right)^n \frac{1}{n+1}\right]\cdot\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{2}{n+2}\right]\cdot\left[\left(\frac{4}{3}\right)^n \frac{3}{n+3}\right]\cdots = \prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+1}{k}\right)^n \frac{k}{k+n} = n!\,.$$

Jestliže budeme v prvním výraze (nekonečněkrát) krátit, dospějeme opravdu k $n!$, v té době se však otázky konvergence či legitimity podobné úpravy pomíjely. Také lze odsud dospět k dnes obvyklejšímu vyjádření pomocí vzorce, který odvodil Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855)

$$n! = \lim_{m\to\infty} \frac{m!(m+1)^n}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}\,.$$

Zde se však Euler nezastavil. Poměrně snadnou manipulací lze z (11) dostat pro $n = 1/2$ formulku, kterou objevil již v r. 1655 Wallis (dnes ji odvozujeme daleko jednodušším způsobem než Wallis)[7].

$$\frac{\pi}{2} = \left(\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\right)\left(\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\right)\left(\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\right)\cdots\,.$$

Ta souvisí s integrálem vyjadřujícím obsah jednotkového půlkruhu a tak Euler hledal dále. Dospěl až k vyjádření

$$n! = \int_0^1 (-\log x)^n \,\mathrm{d}x\,, \tag{12}$$

které je dnes označováno jako Eulerův integrál druhého druhu. Vyšel v podstatě od jiné funkce (Eulerův integrál prvního druhu, resp. *beta-funkce*)

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t\,.$$

Nebudeme jeho postup popisovat (viz např. [Kl], [Da]), poznamenejme jen, že dospěl i k vzájemnému vztahu $B(x,y)$ a funkce Γ (viz následující Definice 1)

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\cdot\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\,.$$

Dnešním studentům je zpravidla známa tato

[7] Lze např. použít rozvoje funkce $\sin\pi x$ v nekonečný součin, dosadit $x = 1/2$ a vcelku jednoduše součin upravit; viz [Wa], str. 351.

Definice 1.

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty \exp(-t)\, t^{x-1}\, dx\,, \qquad x \in (0,\infty)\,. \tag{13}$$

Autorem tohoto stabilizovaného vyjádření včetně označení „gama-funkce" symbolem Γ a názvů Eulerův integrál prvního a druhého druhu je ADRIEN MARIE LEGENDRE (1752 – 1833). Euler sám použil tohoto modernějšího vyjádření, které souvisí s transformací nalezené formulky (12) na vyjádření $\Gamma(n+1)$, v pozdější práci z r. 1781 (otištěna 1794).

Ještě jednou interpolace ... Pokusme se nyní podrobněji rozebrat výše zmíněný interpolační problém. Tak například nalezení libovolné či spojité funkce na intervalu $(0,\infty)$, která by pro všechna $n \in \mathrm{N}$ dala „správné hodnoty" faktoriálů

$$f(n) = (n-1)! \qquad (\text{klademe } 0! = 1)\,,$$

není problémem; např. jednoduché, po částech lineární rozšíření na intervalu $\langle 1,\infty)$ a na $(0,1\rangle$ např. pomocí $f(x) = x^{-1}$, je jedním z možných řešení. Navíc přičtení libovolné periodické funkce s periodou 1, která nabývá v celých číslech hodnoty 0, splnění podmínky vyjádřené předchozí rovností neohrozí.

Faktoriály můžeme popsat pro $x \in \mathrm{N}$ i rekurentním vzorečkem

$$f(x+1) = xf(x) \quad \text{s} \quad f(1) = 1\,. \tag{14}$$

Situace se poněkud zkomplikuje, budeme-li žádat, aby zmíněné rozšíření splňovalo rovnost (14) pro *všechna* $x \in (0,\infty)$. Poznamenejme, že jsme de facto dospěli k funkcionální rovnici[8]

$$f(x+1) = xf(x)\,, \qquad x \in (0,\infty)\,. \tag{15}$$

Z ní velmi jednoduše plynou vztahy

$$f(x+2) = (x+1)xf(x)\,,$$

resp.

$$f(x+n) = (x+n-1)(x+n-2)\dots(x+1)xf(x)\,, \tag{16}$$

platné pro všechna $x \in (0,\infty)$ a všechna $n \in \mathrm{N}$. Zde si povšimneme faktu, že řešení rovnice (15) mají jednu vlastnost společnou s periodickými funkcemi: znalost funkce f např. na intervalu $(0,1\rangle$ nám umožňuje určit pomocí (14) funkci f na intervalu $(1,2\rangle$ a pak dále na intervalu $(2,3\rangle$ atd. Můžeme ostatně použít nerekurentní vzoreček (16), z něhož dostaneme jednoduchou úpravou

$$f(x) = \frac{1}{x(x+1)\dots(x+n-1)} f(x+n)\,. \tag{17}$$

[8]Funkcionálními rovnicemi se zabýval již kolem roku 1750 JEAN D'ALEMBERT (1717-1783) v souvislosti s vyšetřováním chvění strun. Později se zabýval podobnými rovnicemi systematičtěji LOUIS A. CAUCHY (1789-1857).

Ten nám ukazuje i možnost „postupu zpět". Shrneme-li tyto poznatky, vidíme, že hodnoty v každém intervalu tvaru $(n, n+1\rangle$, kde $n = 0, 1, 2, \ldots$, určují f na celé kladné poloose $(0, \infty)$ a dokonce i na $\mathbb{R} \setminus \{-1, -2, -3, \ldots\}$.

Je poučné se vrátit ještě jednou k funkcionální rovnici (15) a jejímu důsledku (16). Volba $f \equiv 0$ v intervalu $(0, 1\rangle$ dává při popsaném rozšíření $f \equiv 0$ na $(0, \infty)$, což je na tomto intervalu konvexní funkce (nenabývá však hodnot faktoriálů pro $n \in \mathbb{N}$)[9].

Funkce, kterou bychom dostali postupným rozšířením funkce $f(x) = x^{-1}$ z intervalu $(0, 1\rangle$ na intervaly $(1, 2\rangle, (2, 3\rangle, \ldots$ pomocí rovnosti (14), by byla také konvexní a tuto chybu by již neměla; tato funkce nabývá v bodě 1 hodnoty 1 a *dopočtením* pomocí odvozených vzorečků dostáváme $f \equiv 1$ na intervalu $(1, 2\rangle$, tedy i $f(2) = (2-1)! = 1$, $f(x) = x - 1$ na $(2, 3\rangle$ spolu s $f(3) = 2, \ldots$; další polynomy, kterými se definuje f v $(3, 4\rangle$, $(4, 5\rangle, \ldots$ jsou $(x-1)(x-2)$, $(x-1)(x-2)(x-3), \ldots$[10].

Je již obtížnější ukázat, že $f(1) = 1$ a konvexita ani s podmínkou, aby funkce f byla diferencovatelná (jednou, dvakrát, ba i nekonečněkrát), nevede k jednoznačně určenému řešení funkcionální rovnice (15); viz např. [Da], kde je tento problém rozebírán podrobněji[11].

Konvexní funkce. Dále budeme popisovat cestu, jejímž autorem je EMIL ARTIN (1898 – 1962); je převzata z [Ar] (viz též [Bol], [Ru] apod.); pokusíme se využít co nejvíce všech předností jejích dalších modifikací, které se v literatuře vyskytují. Nežli však přistoupíme k systematickému výkladu o Γ-funkci, připomeneme matematický aparát, který budeme používat. Potřebujeme totiž relativně dobrou znalost *konvexity* funkcí jedné proměnné; zavedeme ji standardním názorným způsobem:

Definice 2. *Funkce f na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ je konvexní na I, jestliže pro každé dva body $x, y \in I$ a každé $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$ platí*

$$f(\alpha x + (1-\alpha) y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) . \tag{18}$$

Jednoduchá geometrická interpretace uvedené podmínky znamená, že sečna grafu funkce f procházející body $[x, f(x)]$ a $[y, f(y)]$, $x \neq y$, leží „mezi body" x a y nad grafem funkce f.

Na intuitivní úrovni se konvexitou, dokonce v jisté axiomatické podobě, zabýval již ARCHIMEDES (287 – 212 před n. l.)[12], její moderní pojetí se však datuje od doby, kdy se jí věnoval HERMANN MINKOWSKI (1864 – 1909). Zásadních výsledků o konvexitě v eukleidovském prostoru dosáhl jeho často neprávem opomíjený žák EDUARD HELLY (1884 – 1943); souvisí to poněkud s tím, že jedno z klíčových Hellyho tvrzení dokázal nezávisle JOHANES RADON (1887 – 1956). Konvexita množin a funkcí úzce souvisí (konvexní funkce má konvexní „nadgraf" a obráceně funkce s touto vlastností jsou konvexní). Na počátku tohoto

[9] Zásadní role konvexity je vysvětlena níže.

[10] Tato funkce nemá ani první derivaci v intervalu $(0, \infty)$.

[11] Viz též [Ku]: ani analyticita není dostatečně silnou podmínkou. Zajímavá jsou cvičení v [BF], str. 441 a násl., kde je vliv jednotlivých podmínek na jednoznačnost studován.

[12] Zejména v traktátu o kouli a válci.

století se konvexitou také, ale z trochu jiného zorného úhlu, zabýval J. L. W. V. JENSEN (1859 – 1925), i když i on měl v tomto směru několik předchůdců[13]. Celkově však by bylo vyšetřování historického vývoje konvexity samostatným velmi obsáhlým (a také i potřebným) tématem. Vše, co dále zopakujeme, se dá najít v mnoha knížkách o kalkulu, nebo např. v monografii [RW] na prvních cca 20 stránkách.

Vraťme se znova k definici konvexní funkce. Zvolíme-li body $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$, můžeme položit

$$\alpha = (x_3 - x_2)/(x_3 - x_1); \quad \text{potom zřejmě} \quad 1 - \alpha = (x_2 - x_1)/(x_3 - x_1)$$

a podmínka (18) po dosazení x_1 za x a x_3 za y bude mít tvar

$$f\left(\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}x_1 + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}x_3\right) \le \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}f(x_3) \,. \tag{19}$$

Argument funkce f vlevo snadno zjednodušíme a dostaneme x_2. Z (19) tak plyne

$$f(x_2) = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_1}f(x_2) \le \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}f(x_3) \,,$$

což po jednoduché úpravě dá

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \,. \tag{20}$$

Podobně můžeme získat podmínky

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}, \text{ resp. } \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \le \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \,. \tag{20'}$$

Každá z nerovností v (20) a v (20') charakterizuje spolu s podmínkou

$$x_1 < x_2 < x_3 \,, \quad x_1, x_2, x_3 \in I \,,$$

konvexitu na intervalu I, pokud je splněna pro každou trojici bodů z I. Doporučuji čtenáři, aby si načrtl obrázek a uvědomil si geometrický význam uvažovaných nerovností (porovnávají se *směrnice sečen* grafu konvexní funkce).

Z podmínky (20) plyne pomocí věty o existenci limity monotonní omezené funkce existence jednostranné derivace $f'_+(x)$ v každém vnitřním bodě intervalu $x \in I$. Analogické tvrzení dostaneme pro $f'_-(x)$ z druhé z nerovností (20'). Konečně pro libovolné dva vnitřní body $x, y \in I$, $x < y$, platí

$$f'_-(x) \le f'_+(x) \le f'_-(y) \le f'_+(y) \,. \tag{21}$$

Odtud plyne snadno

[13] Funkce je *J-konvexní*, resp. konvexní v Jensenově smyslu, je-li podmínka (18) z předchozí definice splněna pro $\alpha = 1/2$. Tak jako u aditivních funkcí, též J-konvexní funkce jsou buď spojité, nebo velmi patologické.

Tvrzení 1. *Konvexní funkce f na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ je spojitá ve všech vnitřních bodech I*[14]*. Obě jednostranné derivace konvexní funkce f existují uvnitř I a jsou to neklesající funkce. Existuje-li $f'(x)$ všude v otevřeném intervalu I, pak f je konvexní na I, právě když je f' neklesající v I. Existuje-li $f''(x)$ všude v otevřeném intervalu I, pak f je konvexní na I, právě když je $f'' \geq 0$.*

Poznamenejme, že standardní důkaz je založen na Lagrangeově větě o přírůstku funkce.

Artin používal k definici konvexity méně známou podmínku; pro zajímavost ji uveďme. Jestliže v (20) převedeme oba zlomky na pravou stranu nerovnosti, dostaneme po snadné úpravě

$$0 \leq -f(x_2)(x_3 - x_1) + f(x_1)(x_3 - x_2) + f(x_3)(x_2 - x_1)\ , \quad \text{resp.}$$
$$0 \leq x_1(f(x_2) - f(x_3)) + x_2(f(x_3) - f(x_1)) + x_3(f(x_1) - f(x_2))\ . \tag{22}$$

I tato podmínka má velmi názorný smysl; pokud nerovnost ještě dělíme součinem dvojčlenů $(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_2 - x_1)$, lze ji popsat následujícím tvrzením:

Tvrzení 2. *Funkce f je konvexní na intervalu I, právě když pro každou trojici navzájem různých bodů x_1, x_2, x_3 z I platí*

$$\frac{x_1(f(x_2) - f(x_3)) + x_2(f(x_3) - f(x_1)) + x_3(f(x_1) - f(x_2))}{(x_3 - x_2)(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)} \geq 0\ . \tag{23}$$

Využijeme-li znalostí z elementární algebry, můžeme přepsat (22) ve tvaru

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & f(x_1) & 1 \\ x_2 & f(x_2) & 1 \\ x_3 & f(x_3) & 1 \end{pmatrix} \geq 0\ .$$

Podmínka (22) tedy říká, že (orientovaný) obsah trojúhelníku, jehož strany jsou určeny již zmíněnými sečnami grafu funkce f, je vždy nezáporný. Srovnej s [Kla], str. 97, kde se tato podmínka ve cvičeních studuje.

Ať již z podmínky (18) z definice konvexity či z jiné s ní ekvivalentní (uvedli jsme si jich více), dostaneme pro konvexitu následující tvrzení:

Tvrzení 3. *Jsou-li g, h konvexní funkce na intervalu $I \subset \mathbb{R}$, pak je též $g + h$ konvexní funkce na I. Je-li $\sum f_n$ konvergentní řada konvexních funkcí na I, je též její součet konvexní funkce na I.*

Poznamenejme, že druhou část tvrzení dostaneme po malé námaze limitním přechodem. Dále budeme ještě potřebovat pojem logaritmicky konvexní funkce.

[14]Poznamenejme, že i funkce $f(x) = 0$ pro $x \in (0,1)$, $f(0) = f(1) = 1$, je konvexní na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

Definice 3. *Funkce f definovaná na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ se nazývá logaritmicky konvexní, je-li složená funkce* $\log * f$ *konvexní na* I.

Je zřejmé, že logaritmicky konvexní funkce jsou kladné (jinak nemá definice smysl). Také je zřejmé, že součin konečně mnoha logaritmicky konvexních funkcí je také logaritmicky konvexní. Dá se dále dokázat (ale není to patrné přímo z definice!), že i součet logaritmicky konvexních funkcí je funkce logaritmicky konvexní; viz [Ar], str. 7. Toto tvrzení dokazovat nebudeme (a také ho nebudeme používat). Zajímavé vlastnosti logaritmicky konvexních funkcí jsou např. předmětem cvičení 10 na str. 204 v [Sto].

Zpět k funkci gama. Integrál v (13) konverguje pro všechna $x > 0$, nicméně diverguje pro $x \leq 0$. Již nyní zdůrazněme, že je konečným naším cílem podat definici funkce Γ nezávislou na pojmu integrálu, a to pomocí modifikace Gaussova vzorce.

Jednoznačnost řešení funkcionální rovnice (15), resp. (14) nezaručí sebevětší předpokládaná hladkost hledaného řešení. Tou klíčovou vlastností vedoucí k potřebnému výsledku je logaritmická konvexita. Platí totiž následující věta, popisující fundamentální vlastnosti funkce Γ:

Věta 1. *Funkce Γ má následující vlastnosti:*

(i) *vyhovuje funkcionální rovnici* (15), *tj. platí pro ni*

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)\ , \qquad x \in (0,\infty)\ ,$$

(ii) *platí* $\Gamma(1) = 1$,

(iii) *funkce Γ je na intervalu* $(0,\infty)$ *logaritmicky konvexní.*

Větu vcelku snadno dokážeme: pomocí metody per-partes pro Newtonův integrál dostaneme

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^\infty \exp(-t)t^x\,\mathrm{d}t = \\ &= \left[-\mathrm{e}^{-t}t^x\right]_{t=0}^\infty + x\int_0^\infty \exp(-t)t^{x-1}\,\mathrm{d}t = x\Gamma(x)\ , \quad x>0\ ,\end{aligned}$$

a tedy platí (15) (podmínka (i)). Ještě snáze vypočteme $\Gamma(1) = 1$, z čehož plyne (ii). Pro důkaz poslední vlastnosti potřebujeme Hölderovu nerovnost v integrálním tvaru (viz standardní učebnice pokročilejší analýzy, např. [Ja2]). Zvolme $p \in \mathbb{R}$, $p > 1$ a $q \in \mathbb{R}$ tak, aby platilo $(1/p) + (1/q) = 1$. Podle Hölderovy nerovnosti platí pro všechna $x, y \in (0,\infty)$

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{x}{p}+\frac{y}{q}\right) &= \int_0^\infty t^{(x/p)+(y/q)-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \left(t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\right)^{1/p}\left(t^{y-1}\mathrm{e}^{-t}\right)^{1/q}\mathrm{d}t \leq \\ &\leq \left(\int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right)^{1/p}\cdot\left(\int_0^\infty t^{y-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right)^{1/q} = (\Gamma(x))^{1/p}(\Gamma(y))^{1/q}\ .\end{aligned}$$

Po logaritmování nerovnice dostaneme jednoduchou úpravou

$$\log \Gamma\left(\frac{x}{p}+\frac{y}{q}\right) \le \frac{1}{p}\log \Gamma(x) + \frac{1}{q}\log \Gamma(y)\ ,$$

což dává logaritmickou konvexitu funkce Γ.

Je možné dokázat jednodušeji, že funkce Γ definovaná integrálem (13) je logaritmicky konvexní ? Odpověď není příliš uspokojivá: i když sama definice logaritmické konvexity není až zas tak obtížná, jiné cesty jsou patrně neméně složité. Připomeňme, že lze pomocí věty o derivování integrálu podle parametru poměrně snadno odvodit formuli

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} (\log t)^n \,\mathrm{d}t\ , \qquad x \in (0,+\infty)\ ,$$

která platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Logaritmickou konvexitu funkce Γ lze odůvodnit např. takto: protože Eulerův integrál definuje funkci třídy $C^{(\infty)}$ na intervalu $(0,+\infty)$ a platí

$$(\log \Gamma)''(x) = \frac{\Gamma''(x)\Gamma(x) - (\Gamma'(x))^2}{\Gamma^2(x)}\ ,$$

stačí dokázat nerovnost

$$(\Gamma'(x))^2 \le \Gamma''(x)\,\Gamma(x)\ , \qquad x \in (0,+\infty)\ .$$

Ta však je opět důsledkem Hölderovy nerovnosti pro exponent $p = 2$[15], aplikované na odhad čtverce součinu funkcí (srovnej např. s [Tr])

$$\exp(t/2)t^{(x-1)/2} \qquad \text{a} \qquad \exp(t/2)t^{(x-1)/2}\log t\,.$$

Další odlišný důkaz logaritmické konvexity Eulerova integrálu (13) lze nalézt např. v práci [Ar], nebo v [Bo2], ale ten vyžaduje důkaz několika pomocných tvrzení o integrálu. Podstatné však je, že logaritmická konvexita je již tou poslední ingrediencí, kterou k „elementárnímu" zavedení funkce Γ potřebujeme.

Věta 2. *Existuje právě jedna funkce f definovaná na intervalu $(0,\infty)$, která*

(i) *vyhovuje funkcionální rovnici*

$$f(x+1) = xf(x)\ , \qquad x \in (0,\infty)\ ,$$

(ii) *podmínce $f(1) = 1$, a*

(iii) *je logaritmicky konvexní na intervalu $(0,\infty)$.*

[15] Často se jí říká Cauchy-Schwarz-Bunjakovského nerovnost. Naleznete ji snadno v elementárních učebnicích analýzy; potřebujete její „integrální tvar". Viz opět např. [Ja2].

Uvedená krásná věta pochází z r. 1922 a jejími autory jsou dánští matematici HARALD BOHR (1887 – 1925)[16] a JOHANNES MOLLERUP (1872 – 1937); protože se Artinovi podařilo důkaz opravdu *podstatným způsobem* zjednodušit, bývá Věta 2 někdy spojována se jmény Bohr, Mollerup a Artin. Je též potřebným klíčem ke „královské“ cestě k zavedení funkce Γ pomocí méně náročné alternativní definice.

Předcházející Věta 1 říká, že funkce f s uvedenými vlastnostmi skutečně existuje: je to např. funkce Γ. Jednoznačnost plyne z následujícího

Tvrzení 4. *Nechť f je libovolná funkce splňující podmínky* (i), (ii) a (iii) *z Věty 2. Potom pro každé $x \in (0,\infty)$ existuje*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

a hodnota $f(x)$ je rovna této limitě.

Položme $h = \log * f$, kde f je funkce vyhovující podmínkám uvedeného tvrzení, a zvolme $x \in (0,\infty)$. Z (i) plyne vztah

$$h(x+1) = h(x) + \log x \,. \tag{15'}$$

Z podmínky (ii) dostaneme $h(1) = 0$, zatímco z poslední podmínky (iii) plyne, že funkce h je konvexní. Snadno též obdržíme rovnost $h(n+1) = \log(n!)$. Uvažujme nyní nerovnosti (plynou z konvexity h a z (20), (20'))

$$\frac{h(n+1)-h(n)}{(n+1)-n} \le \frac{h(n+x+1)-h(n+1)}{(n+x+1)-(n+1)} \le \frac{h(n+2)-h(n+1)}{(n+2)-(n+1)}\,,$$

z nichž plynou po zjednodušení nerovnosti

$$x\log n \le h(x+n+1) - h(n+1) \le x\log(n+1)\,, \tag{24}$$

nebo-li

$$\log n \le \frac{\log f(x+n+1) - \log f(n+1)}{x} \le \log(n+1)\,.$$

Odtud po úpravě a „odlogaritmování“ dostáváme

$$\log(n^x n!) \le \log f(x+n+1) \le \log((n+1)^x n!)\,.$$

S ohledem na (15) platí

$$n^x n! \le x(x+1)\dots(x+n) f(x) \le (n+1)^x n!\,, \quad \text{resp.}$$

$$1 \le f(x)\cdot\left(\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}\right)^{-1} \le \left(\frac{n+1}{n}\right)^x\,, \tag{25}$$

z čehož plyne platnost tvrzení. Speciálně kombinace Tvrzení 4 a Věty 1 dává

---

[16] **HARALD BOHR byl bratr NIELSE BOHRA, známého dánského fyzika (model atomu); Harald studoval v r. 1909 u EDMUNDA LANDAUA (1877 – 1938). Viz [Sl].**

Důsledek. *Pro každé $x \in (0, \infty)$ platí*

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} . \tag{26}$$

Výše uvedený postup zvolený k důkazu Věty 2 využíval definici funkce Γ pomocí integrálu (13). Vzniká přirozená otázka: nelze se při důkazu Věty 2 Eulerovu integrálu (13) a, řekněme, integrálu vůbec, vyhnout? Odpověď je *ano* a cesta k ní vede přes jedno jednoduché pozorování a níže uvedená dvě lemmata.

Pozorování. *Nechť funkce f splňuje na intervalu $(0, \infty)$ podmínky* (i), (ii), (iii) *z Věty 2, $h = \log * f$. Pro $k \geq 1$, $n \geq 1$ a $x > 0$ položme*

$$u_k(x) := x \log \frac{k+1}{k} - \log \frac{x+k}{k} , \tag{27}$$

$$h_n(x) = -\log x + \sum_{k=1}^{n} u_k(x) . \tag{28}$$

Potom pro každé $x \in (0, \infty)$ platí

$$h(x) = \lim_{n\to\infty} h_n(x) = -\log x + \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) .$$

Skutečně, je-li opět h funkce $\log * f$, můžeme použít již dokázaného vztahu (24). Upravíme v (24) střední člen a dostaneme

$$h(x+n+1) - h(n+1) = h(x) + \log x + \sum_{k=1}^{n} (\log(x+k) - \log k) .$$

Rozepíšeme-li ještě

$$\log n = \sum_{k=1}^{n-1} \log \frac{k+1}{k} ,$$

dostaneme

$$x \sum_{k=1}^{n-1} \log \frac{k+1}{k} \leq h(x) + \log x + \sum_{k=1}^{n} (\log(x+k) - \log(k)) \leq x \sum_{k=1}^{n} \log \frac{k+1}{k} ,$$

což pro názornost přepišme ještě do tvaru

$$-\log x + x \sum_{k=1}^{n-1} \log \frac{k+1}{k} - \sum_{k=1}^{n} (\log(x+k) - \log(k)) \leq h(x) ,$$

$$h(x) \leq -\log x + x \sum_{k=1}^{n} \log \frac{k+1}{k} - \sum_{k=1}^{n} (\log(x+k) - \log(k)) .$$

Porovnání tvaru součtů na levé i pravé straně ukazuje, že je vhodné definovat funkce u_k a h_n pomocí (27) a (28); pak pro $x \in (0, \infty)$ platí

$$h_n(x) - x \log \frac{n+1}{n} \leq h(x) \leq h_n(x) .$$

Pokud tedy *existuje* na tomto intervalu řešení h rovnice (15'), je rovno limitě funkcí $h_n(x)$, protože pro $n \to \infty$ je $\log((n+1)/n) \to 0$.

Lemma. *Řada* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *konverguje pro všechna* $x \in (0, \infty)$.

Z definice $u_k(x)$ plyne pro fixované $x > 0$

$$u_k(x) = x \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) - \log\left(1 + \frac{x}{k}\right) .$$

Položme pro $t \in \langle 0, \infty)$

$$\varphi(t) = \frac{t^2}{2} - (t - \log(1+t)) .$$

Je zřejmě $\varphi(0) = 0$ a $\varphi'(t) = (t^2)/(1+t) \geq 0$ pro $t > 0$. Proto platí

$$t - \log(1+t) \leq t^2/2, \qquad t > 0 .$$

Odtud plyne pro každé $x \in (0, \infty)$

$$|u_k(x)| = \left| x\left(\log\left(1+\frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k}\right) + \left(\frac{x}{k} - \log\left(1+\frac{x}{k}\right)\right)\right| \leq \frac{x(1+x)}{2k^2}$$

a řada ve vyjádření

$$h(x) = -\log x + \sum_{1}^{\infty} u_k(x) \tag{29}$$

konverguje dokonce lokálně stejnoměrně na intervalu $(0, \infty)$. Dokážeme ještě další

Lemma. *Definujme funkci* h *na intervalu* $(0, \infty)$ *pomocí* (29) *a uvažujme funkci* $f = \exp * h$. *Potom* f *splňuje podmínky* (i), (ii), (iii) *z Věty 2.*

Využijeme vlastností konvexních funkcí: každá z funkcí u_k a také $-\log$ je zřejmě konvexní na intervalu $(0, \infty)$; proto je i funkce h konvexní a f logaritmicky konvexní na $(0, \infty)$.

Dále pro všechna $k \geq 1$ platí $u_k(1) = 0$, z čehož plyne $h(1) = 0$ a tedy $f(1) = 1$. Konečně je s ohledem na (27)

$$u_k(x+1) = (x+1) \log \frac{k+1}{k} - \log \frac{x+k+1}{k} =$$

$$= u_k(x) + \log \frac{x+k}{x+k+1} + \log \frac{k+1}{k} = u_k(x) + \log \frac{x+k}{k} - \log \frac{x+k+1}{k+1} .$$

Sečtením v mezích od 1 do n dostaneme s použitím „teleskopičnosti" ve druhém součtu na pravé straně

$$\sum_{k=1}^{n} u_k(x+1) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) + \sum_{k=1}^{n} \left(\log \frac{x+k}{k} - \log \frac{x+k+1}{k+1}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} u_k(x) + \log(x+1) - \log \frac{n+1+x}{n+1} ,$$

z čehož plyne jednoduchou úpravou

$$\left(-\log(x+1)+\sum_{k=1}^{n} u_k(x+1)\right) =$$
$$\left(-\log x+\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right)+\log x+\log\left(1+\frac{x}{n+1}\right) ,$$

resp. s využitím označení z (28)

$$h_n(x+1)=h_n(x)+\log x+\log\left(1+\frac{x}{n+1}\right) .$$

Odtud již limitním přechodem pro $n\to\infty$ dostaneme pro h (15'), resp. (15) pro funkci f. Postup je až na nepatrnou modifikaci převzat z [Bo2] a je variací původních Artinových úvah.

Vraťme se ještě k vyjádření (26)

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} .$$

Tento vzorec umožňuje po vhodné úpravě pohodlně rozšířit funkci Γ do komplexního oboru. Připomeňme, že existuje

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n\right)=\gamma .$$

Číslo γ je tzv. Eulerova konstanta[17] a je $\gamma = 0.5772156649\ldots$. Snadno nahlédneme, že je

$$\frac{1}{n+1}<\int_n^{n+1}\frac{dt}{t}=\log\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}$$

a tedy pro všechna $n\geq 2$ a

$$x_n:=\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}-\log n\right), \qquad y_n:=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n\right)$$

platí vztahy $x_n < x_{n+1}$, $y_{n+1} < y_n$, $x_n + 1/n = y_n$, tedy limity $\lim_{n\to\infty} x_n$ a $\lim_{n\to\infty} y_n$ obě existují a jsou si rovny. Poznamenejme, že pokud si představíme x_n geometricky jako rozdíl obsahu obrazce odpovídajícího speciálnímu hornímu Riemannovu součtu s celočíselnými body dělení intervalu $\langle 1,n\rangle$ a Riemannova integrálu pro funkci $1/x$ přes interval $\langle 1,n\rangle$ (načrtněte si obrázek),

[17] Někdy se užívá označení Euler-Mascheroniova konstanta. Euler ji určil asi r. 1834 s přesností na 15 desetinných míst, LORENZO MASCHERONI (1750 – 1800) na 32 míst, z toho však bylo pouze 19 míst správně. Je zajímavé, že se ani v dnešní době patrně neví, zda je γ racionální nebo iracionální číslo.

jsou monotonie posloupnosti x_n, její konvergence a konečně také i fakt, že $1/2 < \gamma < 1$, zřejmé.

Vzorečku (26) lze dát i jiný tvar:

$$\begin{aligned}
\Gamma(x) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x} \frac{n!\,\mathrm{e}^{x(\log n)}\cdot \mathrm{e}^{x/1}\cdot \mathrm{e}^{x/2}\dots \mathrm{e}^{x/n}\mathrm{e}^{-x/1}\cdot \mathrm{e}^{-x/2}\dots \mathrm{e}^{-x/n}}{(1+(x/1))\,(1+(x/2))\cdots(1+(x/n))\cdot n!} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x} \mathrm{e}^{x(\log n - \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{n})} \prod_{n=1}^{n} \frac{\mathrm{e}^{(x/n)}}{1+(x/n)}\,, \qquad x \in (0,\infty)\,.
\end{aligned}$$

Tak dostáváme pro $x \in (0,\infty)$ ještě vzoreček

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x}\mathrm{e}^{-\gamma x} \cdot \prod_{n=1}^{n} \frac{\mathrm{e}^{x/n}}{1+(x/n)}\,,$$

neboli

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\mathrm{e}^{-\gamma x} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{x/n}}{1+(x/n)}\,, \qquad x \in (0,\infty)\,.$$

Poznamenejme, že nekonečný součin v poslední rovnosti vpravo konverguje dokonce pro každé $x \in \mathbb{C} \setminus \{-1,-2,\dots\}$ k holomorfní funkci, která je tak analytickým pokračováním funkce Γ z kladné reálné poloosy na $\mathbb{C} \setminus \{-1,-2,\dots\}$. V bodech $-1,-2,\dots$ má funkce póly. Jestliže takto funkci Γ definujeme všude v $\mathbb{C} \setminus \{-1,-2,\dots\}$, platí pro všechna z z této množiny

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\mathrm{e}^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1+\frac{z}{n}\Big)\mathrm{e}^{-z/n}\,,$$

přičemž vpravo stojící nekonečný součin určuje funkci holomorfní dokonce v celé komplexní rovině $\mathbb{C}$.

Zároveň se dá vyjádření funkce $\log * \Gamma$ zjednodušit, tj. pro funkci h na intervalu $(0,\infty)$ platí

$$\log * \Gamma(x) = -\gamma x - \log x + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{x}{k} - \log\Big(1+\frac{x}{k}\Big)\Big)\,, \quad x \in (0,\infty)\,.$$

Materiál k procvičování znalostí o funkci Γ je četný; řadu pěkných příkladů najdeme ve cvičení 6, str. 394 v [Sto]. Kniha [Sto] obsahuje i značně kondenzovaný výklad o funkci Γ, a to na str. 460 – 473. Velmi dostupným pramenem je [Ja2].

LITERATURA:

[Ap] Apostol T. M. and al., *A century of calculus I, II*, The Mathematical Association of America, 1992.

[Ar] Artin E., *Einführung in die Theorie der Gammafunktion*, Teubner, Leipzig – Berlin, 1931.

[BF] Barner M., Flohr F., *Analysis I*, Walter de Gruyter, Berlin, 1987.

[Bo] Bourbaki N., *Funkcii dějstvitělnogo peremenogo*, Nauka, Moskva, 1965 (ruský překlad francouzského díla „Fonctions d'une variable réelle" (Éléments de Mathématique, Livre IV)).

[Br] Bressoud D., *A radical approach to real analysis*, The Mathenatical Association of America, Washington, 1994

[Da] Davis P. J., *Leonhard Euler's integral: A historical profile of the Gamma function*, Amer. Math. Monthly **66** (1959), 849 – 868 (též v The Chauvenet Papers: A collection of prize-winning expository papers in mathematics, Vol II, MAA 1978, str. 332 – 351).

[Ed] Edwards C. H., *The historical development of the calculus*, Springer, New York, 1979.

[Ev] Eves, H., *An introduction to the history of mathematics*, CBS College Publishing, New York, 1982 (5. vydání, první je z roku 1953).

[Go] Goldstine, H. H., *A History of Numerical Analysis from the 16th through the 19th Century*, Springer Ver., New York, 1977.

[Ja2] Jarník V., *Integrální počet II*, Academia, Praha, 1984 (4. vydání, první je z roku 1955).

[Je] Jensen J. L. W. V., *Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes*, Acta Math. **30** (1906), 179 – 191.

[Kle] Klein F., *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus*, Springer Ver., Berlin, 1908.

[Kli] Kline M., *Mathematical Thoughts from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, New York, 1972.

[Kn] Knopp K., *Theorie und Anwendungen der unendlichen Reihen*, Springer Ver., Berlin, 1924.

[Ko] Koecher M., *Klassische elementare Analysis*, Birkhäuser Ver., Basel, 1987.

[Ku] Kuczma M., *An Introduction to the Theory of Functional equations and Inequalities; Cauchy's Equation and Jensen's Inequality*, PWN a Uniwersytet Śląski, Warszawa – Kraków – Katowice, 1985.

[π] Lukeš & kol., *Problémy z matematické analýzy*, SPN, Praha, 1972.

[RW] Roberts A. W., Varberg D. E., *Convex functions*, Academic Press, New York and London, 1973.

[Ru] Rudin W., *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill Comp., New York, 1976 (3. vydání, v předcházejících není obsaženo).

[Sl] Slavík J., *Niels Henrik David Bohr*, Filosofické otázky matematiky a fyziky, 7. seminář, Jevíčko – srpen 1994, JČMF, Brno, 1995.

[Sto] Stromberg K. R., *An introduction to classical real analysis*, Wadsworth, Inc., Belmont, CA, 1981.

[Stu] Struik D. J., *Dějiny matematiky*, Orbis, Praha, 1963 (český překlad z německé verze Abriss der Geschichte der Mathematik, Berlin, 1963).

[Tri] Tricomi F. G., *Lekcii po uravněnijam v častnych proizvodnych*, Izdatěl'stvo inostrannoj litěratury, Moskva, 1957, (ruský překlad italského originálu Lezioni sulle equazionia derivate parziali vydaného r. 1954).

[Wa] Walter W., *Analysis 1*, Springer Ver., Berlin, 1992 (3. vydání, původně třetí svazek řady Grundwissen Mathematik).