VZNIK A VÝVOJ TEORIE GRAFŮ

PAVEL ŠIŠMA

1. Úvod

Teorie grafů patří mezi mladé a v tomto století se bouřlivě rozvíjející části matematiky. Zatímco vznik a vývoj většiny matematických odvětví byl na počátku ovlivněn potřebami praxe, vznikala teorie grafů v 18. a 19. století jako nástroj k řešení různých úloh, které řadíme k tzv. rekreační matematice. Pojem graf v našem smyslu slova užil poprvé až v roce 1878 J. J. Sylvester. Můžeme říci, že toto období „prehistorie" teorie grafů končí až v roce 1936, kdy maďarský matematik Dénes Kőnig napsal první knihu věnující se zcela teorii grafů [11]. Rozvoj teorie grafů nastává zejména po roce 1945, kdy prudce roste počet matematiků věnujících se tomuto oboru. Dochází k aplikacím výsledků teorie grafů v mnoha oborech lidské činnosti (řízení provozů, sociologie, lingvistika, chemie apod.). Rozvoj a aplikace samozřejmě souvisí s využitím výpočetní techniky 20. století.

Historie teorie grafů není dlouhá. Za první práci teorie grafů je považován článek L. Eulera z roku 1736, ve kterém řeší tzv. problém mostů města Königsbergu. Se jménem Eulera jsou spojeny také problémy týkající se „úlohy jezdce", která v grafové interpretaci vede k nalezení hamiltonovské kružnice v grafu.

Další zdroje naší teorie nalezneme až v polovině 19. století. V roce 1847 G. Kirchhoff rozpracoval některé otázky teorie stromů v souvislosti s řešením soustav lineárních algebraických rovnic, které obdržel při výpočtu neznámých proudů v elektrických sítích. Problematika stromů se pak rozvíjela zejména v souvislosti s praktickými úlohami chemie. A. Cayley studoval v roce 1857 problém isomerů uhlovodíků C_nH_{2n+2}, který formuloval obecně. Otázkami stromů se zabývali dále J. J. Sylvester a C. Jordan.

V roce 1859 vymyslel W. R. Hamilton hru, kterou nazval „Icosian game". Šlo v ní vlastně o hledání hamiltonovských kružnic v grafu, který odpovídá pravidelnému dvanáctistěnu.

Nejznámější úlohou, která od poloviny minulého století vzrušovala mnoho matematiků i nematematiků, byl „problém čtyř barev". Jde o důkaz všeobecně známého faktu, že k obarvení libovolné mapy (v rovině či na kulové ploše) stačí pouhé čtyři barvy. Problém byl vyřešen v roce 1976 s využitím počítačů a do té doby podnítil k práci v teorii grafů řadu matematiků 19. a 20. století.

Jak již bylo řečeno, rozvoj teorie grafů nastává v druhé polovině 20. století. Kőnigova kniha z roku 1936 (znovu vydaná v roce 1950) sloužila dlouhou dobu jako jediná učebnice. V roce 1958 vydává svoji knihu francouzský matematik C. Berge [1] a čtyři roky po něm norský matematik O. Ore [14]. Klasickou a u nás dobře známou knihou je i dílo amerického matematika F. Hararyho [8] z roku 1969. V dalším období je to už celá řada knih různých autorů.

První práci s grafovou tematikou v Československu napsal brněnský matematik O. Borůvka v roce 1926. Řešil úlohu ekonomické elektrifikace moravských vesnic a vytvořil pro ni první algoritmus nalezení minimální kostry ohodnoceného grafu. Touto problematikou se dále zabývali V. Jarník a M. Kössler.

První knihou z teorie grafů u nás byla kniha J. Sedláčka z roku 1964, která byla přeložena do bulharštiny a dvakrát do němčiny. Její další vydání v češtině jsou z let 1977 a 1981 [16]. Zatímco do roku 1961, kdy se v Liblicích u Mělníka konal první celostátní seminář z teorie grafů v Československu, se touto problematikou zabývali jen jednotlivci, nastává v dalším období prudký rozvoj i u nás. O tom svědčí mimo jiné i mezinárodní konference věnované teorii grafů pořádané v Československu (první již roku 1963 ve Smolenicích na Slovensku).

V této krátké práci se budeme zabývat čtyřmi oblastmi teorie grafů. V první části se seznámíme s vývojem pojmu eulerovský graf, který patří k vůbec prvním studovaným pojmům teorie grafů. V druhé části se budeme věnovat problémům, které souvisí s hamiltonovskými grafy. Třetí část je věnována problému čtyř barev. V poslední části ukážeme přínos českých matematiků k otázce nalezení minimální kostry ohodnoceného grafu.

2. Eulerovské grafy

Na počátku 18. století se objevil následující problém: Ve městě Königsbergu ve Východním Prusku byly v centru města na řece Pregel dva ostrovy, které s oběma břehy spojovalo sedm mostů. Úkolem bylo najít cestu, která by spojovala všechny části města, začínala a končila ve stejné části a při které by každý most byl použit právě jedenkrát.

S tímto problémem seznámil L. Eulera, který v té době působil na Petrohradské akademii, jeho přítel Carl Leonhard Gottlieb Ehler v dopise z 9. března 1736. Euler bez potíží problém vyřešil. Už 13. března píše do Vídně italskému matematiku Marinonimu o nesplnitelnosti tohoto úkolu. Podrobné řešení je pak známé z dopisu Ehlerovi, který je psaný 3. dubna. Euler píše, že tento úkol nemá mnoho společného s matematikou, ale že bude rád, když dostane nějaké podobné [7]. Nakonec se Euler rozhodl své řešení publikovat. Ve své práci řeší problém obecně. V dnešní grafové terminologii bychom řekli, že hledáme eulerovský tah v grafu, jehož uzly představují jednotlivé části města a hrany odpovídají sedmi mostům přes řeku Pregel. Euler si je vědom, že v daném případě je možno prozkoumat všechny možnosti, ale u složitých případů by tato metoda byla obtížná. První věta teorie grafů, která je dokázána v této práci, zní v dnešní terminologii takto:
Nechť $G = (V, E)$ je konečný graf, přičemž $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ je množina uzlů grafu G a $E = \{h_1, h_2, \dots, h_m\}$ je množina hran grafu G. Pak platí:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{st}(v_i) = 2m.$$

Odtud ihned vyplývá, že graf může obsahovat jen sudý počet uzlů lichého stupně.

Své další úvahy v závěru shrnuje do následujících pravidel (jsou opět vyjádřena dnešním jazykem), která nám umožňují v podobných problémech rozhodnout, zda hledaná cesta existuje:

1. Jsou-li v grafu více jak dva uzly lichého stupně, pak eulerovský tah neexistuje.
2. Jsou-li v grafu právě dva uzly lichého stupně, pak existuje otevřený eulerovský tah začínající v jednom z těchto uzlů a končící v druhém.
3. Jestliže jsou v grafu všechny uzly sudého stupně, pak eulerův tah existuje.

Euler samozřejmě uvažuje jen souvislé grafy, jak vyplývá z formulace úlohy.

Musíme konstatovat, že Euler dokázal jen první dvě tvrzení. Důkaz třetího podal až v roce 1873 mladý německý matematik C. Hierholzer. Ten s velkou pravděpodobností Eulerovu práci neznal. Cituje pouze práci J. B. Listinga z roku 1847, který se zabývá známým úkolem nakreslit obrázek složený z uzlů a čar jedním tahem. Listing zjistil, že pokud obrázek obsahuje $2p$ ($p > 0$) uzlů lichého stupně, pak k jeho nakreslení je zapotřebí minimálně p otevřených tahů. Toto tvrzení dokázal později E. Lucas.

Za zmínku stojí ještě článek L. Poinsota z roku 1809, který se zabývá existencí eulerovského tahu v úplných grafech K_n. Metodou podobnou jako byla Eulerova dokazuje, že pro $n = 4, 6, 8, \dots$ eulerovský tah neexistuje. Zajímavá interpretace pro K_7 se objevila v roce 1849 v Nouvelles Annales de Mathématiques, když byl tento problém vyjádřen v termínech hry domino. Obecný případ „domina" s čísly $n = 0, 1, 2, \dots, \alpha_0 - 1$ studoval v roce 1849 O. Terquem. Položil otázku, kolik různých tahů v úplném grafu existuje. Pro domino tento problém vyřešil v roce 1871 M. Reiss. Obecné řešení podává G. Tarry v roce 1886.

Eulerova průkopnická práce nebyla zapomenuta úplně. V roce 1851 použil É. Coupy Eulerův postup k řešení problémů mostů v Paříži. Také v Königsbergu si problém pamatovali, protože když byl v roce 1875 postaven další most, tak L. Saalschütz píše, že úloha už má řešení [2]. Tato úloha je součástí většiny knih rekreační matematiky, ale také teorie grafů.

3. Hamiltonovské kružnice

Jak jsme se již zmínili, s hledáním hamiltonovských kružnic souvisí tzv. „úloha jezdce". V této úloze má jezdec projít prázdnou šachovnici tak, aby každým polem prošel právě jednou a vrátil se při posledním tahu na výchozí pole (tato podmínka se někdy vynechává). Také této úloze se jako první věnoval L. Euler. Píše o ní v roce 1757 Ch. Goldbachovi [17] a v roce 1759 úlohu zobecňuje pro šachovnici $n \times n$. Dalším významným příspěvkem je práce A. T. Vandermonda z roku 1771. Ten se zabývá klasickou šachovnicí 8×8 a nachází algebraické řešení. Využívá přitom symetrie šachovnice. Práci obou matematiků ocenil v roce 1833 Gauss, když napsal, že jde o jediné významné výsledky v „Geometriam situs". V roce 1884 interpretoval tuto úlohu grafově P. G. Tait. Přirozená otázka kolik je cest jezdce na šachovnici nebyla dodnes vyřešena.

V roce 1855 zaslal Royal Society svoji první práci T. P. Kirkman, který působil po 50 let jako kněz v anglickém hrabství Lancashire. Přes svoji izolaci a zaneprázdnění duchovní prací je autorem řady matematických článků. Je znám zejména svým problémem „patnácti školaček". V roce 1857 byl zvolen členem Royal Society. V práci z roku 1855 si klade otázku, zda každý graf, který dostaneme promítnutím nějakého mnohostěnu do roviny, obsahuje kružnici, která prochází všemi uzly tohoto grafu. Ve svých úvahách se dopouští chyby. Je ale první, kdo se takovou úlohou zabývá. Jeho přínos spočívá v tom, že ukazuje třídu grafů, které nemohou obsahovat takovou kružnici.

Ve stejný čas se podobnými úvahami začal zabývat W. R. Hamilton. Pro svou nekomutativní algebru, která patří k jeho nejvýznamnějším objevům, našel model, který představoval graf pravidelného dvanáctistěnu a který nazval „The Icosian Calculus". Na jeho základě vznikla hra, která se od roku 1859 prodávala a nesla název „The Icosian Game". Později vznikly další verze této hry, např. „Cesta kolem světa". V této hře uzly dvanáctistěnu představovaly světová města a každý uzel byl označen kolíkem. Cílem této hry bylo natáhnout vlákno, které by procházelo kolem všech kolíků a tvořilo kružnici.

V pozdější době vznikly spory o to, kdo byl autorem myšlenky zkoumat kružnice dvanáctistěnu. Je třeba říci, že zatímco Vandermonde a Hamilton zkoumali konkrétní případy grafů, Kirkman byl první, kdo se pokusil o zobecnění.

Nutná a postačující podmínka pro existenci hamiltonovské kružnice v grafu nebyla dosud nalezena. Po roce 1936 byly nalezeny některé postačující podmínky pro existenci hamiltonovských kružnic:

(1) **1952 Dirac** Je-li G obyčejný graf s n ($n \geq 3$) uzly a jestliže stupeň každého uzlu je nejméně $\frac{1}{2}n$, pak G obsahuje hamiltonovskou kružnici.

(2) **1960 Ore** K tomu, aby graf G s n ($n \geq 3$) uzly obsahoval hamiltonovskou kružnici, stačí, aby pro každé dva nesousední uzly u, v platilo

$$\operatorname{st} u + \operatorname{st} v \geq n.$$

(3) **1963 Pósa** Nechť G je graf s n ($n \geq 3$) uzly takový, že pro každé celé číslo j splňující nerovnost

$$1 \leq j < \frac{1}{2}n$$

počet uzlů, jejichž stupeň nepřevýší j, je menší než j. Potom G obsahuje hamiltonovskou kružnici [16].

K této části ještě několik poznámek. Z předpokladů Diracovy věty se dá při dostatečně velkém počtu uzlů odvodit víc než pouhá existence jediné hamiltonovské kružnice. Je dále vidět, že Diracova věta je důsledkem Oreho věty. Časově ovšem předcházela. Zajímavé dále je, že Pósa byl v roce 1963 sotva středoškolského věku. Z českých matematiků se problematikou hamiltonovských grafů (grafů, které obsahují hamiltonovskou kružnici) věnoval např. brněnský matematik M. Sekanina.

4. Problém čtyř barev

Jedním z problémů, které po desetiletí podněcovaly rozvoj teorie grafů, byla následující zdánlivě jednoduchá otázka. Mějme v rovině nebo na kouli zeměpisnou mapu s několika státy. Každý stát máme obarvit jednou barvou a chceme, aby žádné dva sousední státy nebyly obarveny stejně. Sousedními přitom rozumíme ta dvě území, jež mají společnou hraniční čáru. Mají-li dva státy společné jen izolované body, nepokládáme je tedy za sousední. Rovněž neuvažujeme případ, kdy je stát rozdělen na několik navzájem oddělených částí. Ptáme se, kolik potřebujeme na obarvení takové mapy barev. Praxe ukazuje, že čtyři barvy stačí. Dokázat toto tvrzení se však podařilo až v roce 1976. Barvení mapy se dá převést na barvení uzlů grafu, který získáme takto: uvnitř každého státu zvolíme libovolný bod a prohlásíme ho za uzel grafu, jehož hrany dostaneme tak, že spojíme dva uzly právě tehdy, když jsou odpovídající státy sousední. Barvení států je pak možno převést na barvení příslušných uzlů. Z názoru je zřejmé, že graf odpovídající zeměpisné mapě je rovinný.

První zmínku o tomto problému nalézáme v dopise A. De Morgana adresovaném W. R. Hamiltonovi. Je psán 23. října 1852 a De Morgan seznamuje Hamiltona s otázkou, kterou mu položil jeden ze studentů University College v Londýně. Tento student se jmenoval Frederick Guthrie a problém nevymyslel on, ale jeho bratr Francis, který byl později profesorem matematiky v Kapském Městě. Oba si všimli, že někdy jsou potřeba k obarvení mapy skutečně čtyři barvy. Nenašli případ, kdy čtyři barvy nestačí, ale dokázat že skutečně čtyři barvy stačí, se jim nepodařilo. Frederick tedy položil tuto otázku De Morganovi. Ten důkaz také neznal a proto se obrátil na Hamiltona. Odpověď dostal už 26. října, kdy Hamilton odpověděl, že se touto otázkou nebude v nejbližší době zabývat.

Problém, který začal De Morgan šířit, se stal brzy součástí matematického folklóru. Už v roce 1860 o důkazu přednášel C. S. Peirce v Harvardu. Je zřejmé, že důkaz nebyl správný, i když jeho znění neznáme. S problémem se seznámil A. Cayley. V roce 1879 publikuje článek o této otázce. Z jeho úvah je zřejmé, že se nedomníval, že je důkaz tohoto tvrzení možný.

Důkaz podává v roce 1879 Alfred Bray Kempe (student Cayleyho v Cambridge) v American Journal of Mathematics. Kempe používá metody zvané „Kempe chains“ a dopouští se při ní chyby. Důkaz vyvolal velké nadšení a Cayley navrhl autora za člena Royal Society. Brzy se objevily další „důkazy“ odvozené z Kempeho důkazu a problém se zdál být jasný.

Na chybu, které se Kempe dopustil, upozornil v roce 1890 P. J. Heawood. Ve své práci dokázal, že pět barev k obarvení libovolné rovinné mapy stačí [2]. Dlouhou dobu šlo o jediný výsledek s definitivní platností. Když se nedařil důkaz, snažili se někteří matematici sestrojit protipříklad, který by domněnku vyvrátil. Ukazovalo se, že mapa, pro kterou by čtyři barvy nestačily, by musela být hodně složitá. Uveďme pro zajímavost některé autory, kteří se touto otázkou zabývali. Čísla udávají, pro jak velkou mapu (co se týče počtu států) se jim podařilo dokázat, že čtyři barvy stačí k jejímu obarvení. 25 – P. Franklin v roce

1922, 27 – C. N. Reynolds v letech 1926–27, 31 – P. Franklin v roce 1938, 35 – C. E. Winn v roce 1940, 44 – G. A. Doněc, W. Stromquist v roce 1970. Poslední hodnotou bylo 95, které dosáhl profesor francouzské literatury v Montpellier J. Mayer kolem roku 1974.

Konečně v roce 1976 K. Appel a W. Haken z univerzity v Illinois oznámili, že problém čtyř barev kladně vyřešili. O řešení problému napsal u nás článek J. Bosák [5]. Důkaz si vyžádal asi 1200 hodin strojového času na počítačích a muselo se při něm rozlišovat téměř 2000 různých případů. Je jistě zajímavé si uvědomit, že problém barvení mapy se podařilo poměrně brzy vyřešit na různých „složitých" plochách. Již P. J. Heawood například dokázal, že k obarvení libovolné mapy na anuloidu stačí 7 barev [16].

5. Minimální kostra grafu

Jak jsme již vzpomenuli, jednou z prvních prací v oblasti teorie stromů, byla práce G. Kirchhoffa z roku 1847. Autor v ní formuluje své dva zákony pro toky proudu v elektrické síti, které umožňují sestavit soustavu lineárních algebraických rovnic pro tyto neznámé proudy. Tato soustava však většinou obsahuje rovnice, které jsou lineárně závislé na ostatních. Druhý zákon totiž neříká, pro které obvody máme psát rovnice, a tak je píšeme pro všechny. Kirchhoff ukázal, že stačí uvažovat jen tzv. nezávislé obvody a uvedl metodu pro jejich nalezení. Elektrické síti přiřadil graf, který ignoruje fyzikální podstatu prvků obvodu. Dále našel nějakou kostru tohoto grafu a k této kostře vždy přidal jednu ze zbývajících hran. Tak dostal postupně všechny tyto nezávislé obvody. Pro ně napsané rovnice budou lineárně nezávislé. Kirchhoff dokázal, že počet těchto nezávislých rovnic je roven číslu $\nu(\mathrm{G}) = |E| - |V| + 1$, což je tzv. cyklomatické číslo grafu.

Můžeme na tomto místě připomenout, že užitím teorie grafů při zkoumání elektrických sítí se v 60. letech zabývali K. Čulík, M. Fiedler a V. Doležal [6].

Uvažujme nyní graf, který má hrany ohodnoceny reálnými čísly. Objevuje se otázka, jak najít kostru tohoto grafu, která má součet ohodnocení na svých hranách minimální. Této kostře říkáme minimální kostra. Její nalezení má praktický význam např. při budování rozvodu elektrické energie, plynu ap. Pokud uzly grafu představují odběratele a ohodnocení hrany odpovídá nákladům na vybudování elektrického vedení mezi těmito odběrateli, pak nalezení minimální kostry tohoto grafu odpovídá nalezení optimální elektrické sítě. Problém minimální kostry patří mezi starší grafové úlohy. Jako první se touto úlohou zabýval brněnský matematik O. Borůvka v roce 1926, právě inspirovaný úkolem nalézt optimální elektrickou síť. Borůvka dává také první algoritmus nalezení minimální kostry grafu. Vzhledem k praktické aplikaci uvažuje úplný graf, který je ohodnocen tak, že žádné dvě hrany nemají stejné ohodnocení. Takovému ohodnocení říkáme ostré ohodnocení. V článku [4] formuluje úkol v pojmech teorie matic :

„Budiž dána matice M čísel $r_{\alpha\beta}(\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n; n \geq 2)$, až na podmínku $r_{\alpha\alpha} = 0, r_{\alpha\beta} = r_{\beta\alpha}$, kladných a vzájemně různých.

Jest vybrati z ní skupinu čísel vzájemně a od nuly různých takovou, aby: 1^0 bylo možno, jsou-li p_1, p_2 libovolná od sebe různá přirozená čísla $\leq n$, vybrati z ní skupinu částečnou tvaru

$$r(p_1c_2), r(c_2c_3), r(c_3c_4), \dots , r(c_{q-2}c_{q-1}), r(c_{q-1}p_2)$$

2^0 součet jejích členů byl menší než součet členů kterékoliv jiné skupiny čísel vzájemně a od nuly různých, hovící podmínce 1^0."

Jak je pak prakticky možno nalézt minimální kostru uvádí v článku [3], který časově těsně předchází vydání práce [4].

„V rovině (v prostoru) jest dáno n bodů, jejichž vzájemné vzdálenosti jsou vesměs různé. Jest je spojiti sítí tak, aby:

1. každé dva body byly spojeny buď přímo a nebo prostřednictvím jiných,
2. celková délka sítě byla co nejmenší.

Řešení je následující:
Každý z daných bodů spojím s bodem nejbližším. Obdržím řadu polygonálních tahů. Každý z nich spojím s tahem nejbližším. Obdržím řadu polygonálních tahů. Takto postupuji stále dál, až obdržím konečně jediný polygonální tah, jenž řeší danou úlohu."

Na Borůvkovu práci reaguje 12. února 1929 V. Jarník, který mu v dopise (jeho část byla později publikována [9]) píše své jednodušší řešení. Ani on neuvažuje v pojmech teorie grafů, což nepřekvapuje. Oba autoři se touto problematikou nezabývali a literatura prakticky neexistovala. Jarník v podstatě dokázal existenci minimální kostry a našel algoritmus, který ji nalezne. Opět uvažuje graf, který má ostré ohodnocení. Jeho postup můžeme dnešním jazykem popsat takto:
„Nechť je dán úplný graf K_n, jehož hrany jsou ohodnoceny vesměs různými kladnými čísly. Za a_1 zvolme libovolný uzel grafu K_n. Budiž a_2 definováno vztahem

$$r(a_1, a_2) = \min r(a_1, l)$$

$$l = 1, 2, \dots , n$$

$$1 \neq a_1.$$

V k-tém kroku máme definovánu posloupnost

$$a_1, a_2, \dots , a_{2k-3}, a_{2k-2} \qquad (2 \leq k < n) \qquad (*)$$

a definujeme(a_{2k-1}, a_{2k}) vztahem

$$r(a_{2k-1}, a_{2k}) = \min r(i, j),$$

kde i probíhá všechny uzly $a_1, a_2, \dots , a_{2k-2}$; j všechny ostatní uzly. Přitom budiž a_{2k-1} jedno z čísel posloupnosti $(*)$, takže a_{2k} není obsažen mezi uzly $(*)$."

Jarník dále podává názornou interpretaci problému:
„Je dáno n kuliček, jež jsou očíslovány čísly $1, 2, \ldots, n$, a jež jsou po dvou spojeny tyčemi v počtu $\frac{1}{2}n(n-1)$. Hmota tyče, jež spojuje kuličku a s kuličkou b, budiž $r(a, b)$. Ty tyče buďte eventuelně tak prohnuty, aby se navzájem nestýkaly. Jest odstraniti z tohoto systému tyčí některé tak, aby těch n kuliček drželo pohromadě a aby hmota zbylých tyčí byla co nejmenší.“

Jiný podobný postup vytvořil J. Lukasziewicz. Jeho postup je založen na tom, že ke každému uzlu se vybere minimálně ohodnocená hrana, jejímž je koncovým uzlem. Tato konstrukce je oprávněna jen za předpokladu, že jde o ostře ohodnocený graf [6].

Základními pracemi v této oblasti jsou práce J. P. Kruskala z roku 1956 a práce R. C. Prima z roku 1957. Kruskal znal Borůvkovu práci, která se opsána na psacím stroji objevila v USA. Kruskal ve své práci [13] studuje také ostře ohodnocené grafy, ale požadavek úplnosti grafu nepovažuje za nutný. Chybějící hrany by se daly nahradit hranami s dostatečně velkým ohodnocením.

Kruskal sestrojil tři konstrukce minimální kostry, které v další části dokazuje.
„A. Provádějme následující krok tolikrát, kolikrát je možné. Mezi hranami grafu G, které ještě nejsou vybrány, vybereme nejkratší, která netvoří kružnici s těmi, které už byly vybrány.
B. Buď V libovolná, ale pevná neprázdná podmnožina uzlů z G. Pak provádějme následující krok tolikrát, kolikrát je možné. Mezi hranami grafu G, které doposud nebyly vybrány a které jsou incidentní s některým z uzlů V nebo s hranou, která již byla vybrána, vybereme nejkratší z těch, které s již vybranými hranami netvoří kružnici. Množina vybraných hran tvoří minimální kostru grafu G. V případě, že množina V je rovna množině všech uzlů grafu G, pak konstrukce B je vlastně konstrukce A.
A'. (V jistém smyslu duální k A). Provádějme následující krok tolikrát, kolikrát je možné. Mezi hranami, které dosud nebyly vybrány, vybereme nejdelší z těch, jejichž odstranění neporuší souvislost. Pak množina hran, které po provedení posledního kroku zůstanou, tvoří minimální kostru grafu G.“

Kruskal píše, že mu není známo, zda konstrukce B má také duální formu.

Stejnou konstrukci jako je A použil A. Kotzig v [12]. Kotzig znal Kruskalovu práci a jeho zobecnění spočívá v tom, že tato konstrukce je možná i pro grafy, které nejsou ohodnoceny ostře.

H. Loberman a A. Weinberger upravili konstrukci A tak, aby byla použitelná pro počítač [6].

Stejný postup jako vymyslel V. Jarník, objevil v roce 1957 R. C. Prim a nezávisle na něm E. W. Dijkstra v roce 1959. V dnešní době existuje celá řada modifikací úlohy o minimální kostře. Např. v roce 1975 navrhli a řešili F. Glover a D. Klingman následující úlohu: Pro daný graf G s reálným ohodnocením hran, číslo k a daný uzel v grafu G máme najít minimální kostru, v které má uzel v stupeň k [15].

Je třeba se zmínit o jednom starém problému, který s minimální kostrou úzce souvisí. Na počátku 19. století J. Steiner vyřešil následující úlohu: Pro dané tři body A, B, C v rovině máme najít spojovací síť nejkratší možné délky. Zobecnění této úlohy pro více bodů studovali V. Jarník a M. Kössler v roce 1934 [10] a nyní je znám jako Steinerův problém v rovině (resp. obecněji v n-rozměrném euklidovském prostoru). Každá optimální síť má tvar stromu a proto hovoříme o steinerovském stromu. Další podrobnosti lze nalézt v Plesníkově knize [15].

6. Závěr

Historie matematiky zatím nechává teorii grafů téměř bez povšimnutí. Dosud existují většinou jen podobné přehledy, jako je tato naše krátká práce. Dá se říci, že jedinou (zato však velmi dobrou) prací v této oblasti je kniha [2]. Autoři se v ní věnují eulerovským grafům, hamiltonovským kružnicím, stromům, mnohostěnům, rovinným grafům, rozkladu grafů a problému čtyř barev. V této práci je uvedeno 37 původních prací (přeložených do angličtiny), které jsou dále doplněny mnoha historickými údaji. V literatuře ovšem chybí další obsáhlejší práce, které by zpracovaly řadu dalších oblastí a problémů teorie grafů.

Český čtenář se může s mnoha historickými poznámkami setkat v Sedláčkově knize [16], kde je například podrobněji vyložena historie problému čtyř barev.

7. Biografické údaje

Arthur CAYLEY — 16. 8. 1821 - 26. 1. 1895
V mládí studoval práva v Cambridge a poté se věnoval právnické praxi. Do roku 1863 napsal 300 matematických prací. V tomto roce své profese zanechal a přijal nově zřízenou Sadlerianovu katedru matematiky v Cambridge. Cayley je autorem asi 1000 matematických prací. Položil základy současné algebraické geometrie a stanovil vztah mezi teorií invariantů a projektivní geometrií. Vytvořil dále algebru matic.

Augustus De MORGAN — 27. 6. 1806 - 18. 3. 1871
Absolvent Cambridge z roku 1827 působil v letech 1828–31 a 1836–66 na University College v Londýně jako profesor matematiky. Je znám svými pracemi v algebře, matematické analýze a zejména v matematické logice. Pozornost věnoval i historii matematiky a napsal řadu knih z aritmetiky.

Leonhard EULER — 15. 4. 1707 - 18. 9. 1783
Byl žákem Johanna Bernoulliho a přítelem jeho synů. Nejprve na přání otce studoval teologii a orientální jazyky, ale pak se věnoval matematice. Když byla v roce 1725 založena Petrohradská akademie, odešel tam i Euler a působil zde v letech 1727–41. Na pozvání Friedricha II. odešel na Berlínskou akademii a zde pracoval až do roku 1766. Poté se vrátil zpět do Petrohradu, kde působil až do své smrti. Je autorem více jak 800 prací. Věnoval se všem oblastem tehdejší matematiky a také aplikacím.

William Rowan HAMILTON — 3. 8. 1805 - 2. 9. 1865
Již v mládí se projevil jeho talent, když ovládl několik jazyků a studoval Newtona. V 17 letech objevil podstatnou chybu v Laplaceově Mécanique céleste.

Již během svého studia na Trinity College v Dublinu se stal „královským astronomem Irska“ a v této funkci setrval až do své smrti. Jako praktický astronom žádných velkých výsledků nedosáhl, ale proslavil se svými pracemi v geometrické optice, dynamice a algebře. Je objevitelem kvaternionů.

Percy John HEAWOOD — 8. 9. 1861 - 24. 1. 1955
Absolvent Oxfordu, který od roku 1887 přednášel matematiku na Durham University a strávil zde zbytek svého života. Proslavil se jednak svojí prací na problému čtyř barev a jednak při záchraně Durham Castle.

Alfred Bray KEMPE — 6. 7. 1849 - 21. 4. 1922
Advokát, který studoval matematiku v Cambridge a čas od času se jí věnoval. Do historie matematiky vstoupil svým „důkazem“, že čtyři barvy stačí k obarvení libovolné rovinné mapy. Mnoho let byl pokladníkem Royal Society. Napsal několik prací z algebry a matematické logiky.

Gustav Robert KIRCHHOFF — 12. 3. 1824 - 17. 10. 1887
V 21 letech jako student univerzity v Königsbergu formuloval své slavné zákony pro toky elektrického proudu v sítích. Působil jako fyzik v Berlíně, Breslau a Heidelbergu, kde v roce 1854 vyslovil svůj základní zákon o elektromagnetickém záření.

Thomas Penyngton KIRKMAN — 31. 3. 1806 - 3. 2. 1895
Více jak 50 let působil jako kněz v anglickém hrabství Lancashire. Publikoval kromě teologických prací řadu matematických článků (zejména v algebře, geometrii a kombinatorice). K jeho prvním pracím patří tzv. „problém patnácti školaček“. Od roku 1853 se zabýval problémy mnohostěnů, kterým se věnoval po zbytek života. Jako první přichází s myšlenkou hledat hamiltonovské kružnice.

Dénes KŐNIG — 21. 9. 1884 - 19. 10. 1944
Studoval matematiku v Budapešti a v Göttingenu. Zbytek života učil v Budapešti, kde od roku 1927 přednášel o grafech a vychoval řadu žáků. Jeho žáky byli P. Erdős, T. Gallai a G. Hajós. V roce 1936 napsal svoji knihu o grafech [11]. V roce 1944 dobrovolně ukončil svůj život, aby tak zabránil perzekuci své osoby pro svůj židovský původ.

James Joseph SYLVESTER — 3. 9. 1814 - 15. 3. 1897
Matematik, který společně s Leibnizem patřil k nejvýznamnějším tvůrcům nové symboliky (zavedl pojmy graf, invariant, jakobián a mnoho dalších). Dvakrát působil v Americe (1841–42 ve Virginii a v letech 1876–1883 na Johns Hopkins University v Baltimoru). Je autorem systému zkoušek z matematiky na amerických univerzitách. Založil American Journal of Mathematics. Je autorem velkého množství prací z algebry, teorie čísel, mechaniky a matematické fyziky.

Alexandre-Theophile VANDERMONDE — 28. 2. 1735 - 1. 1.1796
Člen Académie des Sciences Paris od roku 1731. Zabýval se otázkami řešitelnosti algebraických rovnic, determinanty a faktoriály.

LITERATURA

1. BERGE, C., *Théorie des graphes et ses applications*, Dunod, Paris, 1958.
2. BIGGS, N. L. — LLOYD, E. K. — WILSON, R. J., *Graph theory 1736 - 1936*, Clarendon Press, Oxford, 1976.
3. BORŮVKA, O., *Příspěvek k řešení otázky ekonomické stavby elektrovodných sítí*, Elektrotechnický obzor **15** (1926), 153–154.
4. BORŮVKA, O., *O jistém problému minimálním*, Práce moravské přírodovědecké společnosti v Brně **3** (1926), 37–58.
5. BOSÁK, J., *Ako bol vyriešený problém štyroch farieb*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie **24** (1979), 181–201.
6. ČULÍK, K. — DOLEŽAL, V. — FIEDLER, M., *Kombinatorická analýza v praxi*, SNTL, Praha, 1967.
7. EULER, L., *Perepiska-annotirovannyj ukazatel*, Izdat. Nauka, Leningrad, 1967.
8. HARARY, F., *Graph theory*, Reading - Menlo Park - London - Don Mills, 1969.
9. JARNÍK, V., *O jistém problému minimálním*, Práce moravské přírodovědecké společnosti v Brně **6** (1930), 57–63.
10. JARNÍK, V. — KÖSSLER, M., *O minimálních grafech obsahujících n daných bodů*, Časopis Pěst. Mat. **63**, (1934), 223–235.
11. KŐNIG, D., *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, Akademische Verlagsgesellschaft M. B. H., Leipzig, 1936.
12. KOTZIG, A., *Súvislé podgrafy s minimálnou hodnotou v konečnom súvislom grafe*, Časopis Pěst. Mat. **86** (1961), 1–6.
13. KRUSKAL, J. B., *On the Shortes Spanning Subtree of a Graph and the Travelling Salesman Problem*, Proc. Amer. Math. Soc. **7** (1956), 48–50.
14. ORE, O., *Theory of graphs*, American Mathematical Society, Providence, 1962.
15. PLESNÍK, J., *Grafové algoritmy*, Vydavateľstvo SAV, Bratislava, 1983.
16. SEDLÁČEK, J., *Úvod do teorie grafů*, Academia, Praha, 1981.
17. JUŠKEVIČ, A. P. — WINTER, E., *L. Euler und Ch. Goldbach: Briefwechsel 1729–1766*, Akademie–Verlag, Berlin, 1965.