ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur la théorie des matrices.* Note de M. **Ed. Weyr**, présentée par M. Hermite.

« On sait que toute matrice de l'ordre n satisfait à une équation de degré n: c'est l'équation fondamentale de M. Cayley. Il y a cependant des matrices qui satisfont à une équation de degré moindre que n: ce sont les matrices que M. Sylvester nomme *dérogatoires*. Je suis parvenu à établir un théorème qui jette du jour sur ce sujet, et que je me permets de communiquer à l'Académie.

» M *étant une matrice d'ordre n aux racines latentes* μ_α, μ_β, ..., μ_λ *et* α, β, ..., λ *étant les degrés de multiplicité de ces racines, soient* α_1, β_1, ..., λ_1 *les degrés de nullité des matrices* $\mathrm{M}-\mu_\alpha$, $\mathrm{M}-\mu_\beta$, ..., $\mathrm{M}-\mu_\lambda$; *alors* M *satisfait à l'équation*

$$(\mathrm{M}-\mu_\alpha)^{\alpha-\alpha_1+1}(\mathrm{M}-\mu_\beta)^{\beta-\beta_1+1}\dots(\mathrm{M}-\mu_\lambda)^{\lambda-\lambda_1+1}=0.$$

» Les nombres α_1, β_1, ..., λ_1, dont chacun est au moins égal à 1, ne peuvent pas surpasser les nombres respectifs α, β, ..., λ. Dans le cas de $\alpha_1=\beta_1=\dots=\lambda_1=1$, on tombe sur l'équation de M. Cayley. Dans tout autre cas, la matrice M est dérogatoire.

» Si l'on a $\alpha=\alpha_1$, $\beta=\beta_1$, ..., $\lambda=\lambda_1$, ce qui arrive, par exemple, quand les racines latentes sont toutes distinctes, on peut mettre M sous la forme

$$\mathrm{M}=\mathrm{A}^{-1}\mathrm{M}_0\mathrm{A},$$

M_0 étant une matrice dont la diagonale principale contient α termes μ_α, β termes μ_β, ..., enfin λ termes μ_λ et dont les autres termes sont nuls, et A désignat une matrice de nullité zéro; et ce n'est que dans le cas de $\alpha=\alpha_1$, $\beta=\beta_1$, ..., $\lambda=\lambda_1$, qu'on peut mettre M sous une telle forme (¹).

» Pour montrer l'utilité de cette décomposition de M, je vais démontrer un théorème que M. Sylvester a bien voulu me communiquer. Représentons M_0 par $(\mu_\alpha,\mu_\beta,\dots,\mu_\lambda)$; nous aurons pour entier positif quelconque ε

$$\mathrm{M}^\varepsilon=\mathrm{A}^{-1}(\mu_\alpha^\varepsilon,\mu_\beta^\varepsilon,\dots,\mu_\lambda^\varepsilon)\mathrm{A},$$

d'où l'on conclut immédiatement qu'un terme quelconque $m_{ik}^{(\varepsilon)}$ de M^ε est mis sous la forme

$$m_{ik}^{(\varepsilon)}=a_{ik}\mu_\alpha^\varepsilon+b_{ik}\mu_\beta^\varepsilon+\dots+l_{ik}\mu_\lambda^\varepsilon.$$

C'est la formule de M. Sylvester, qui ainsi se trouve démontrée dans le cas de $\alpha=\alpha_1$, ..., $\lambda=\lambda_1$. Je ne suis pas parvenu à la démontrer pour les autres cas.

» En étudiant la nullité des matrices, j'ai trouvé que « le degré de nullité d'un produit de matrices est au plus égal à la somme des degrés de nullité des

(¹) Riemann, dans le Mémoire *Zwei allgemeine Sätze über lineäre Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten (OEuvres complètes, p. 359)*, attribue cette manière de décomposer une substitution linéaire à Jacobi. Son assertion cependant, que la possibilité d'une telle décomposition exige l'inégalité des racines μ, doit être rectifiée dans le sens de notre énoncé.

facteurs, et au moins égal au plus petit de ces degrés » . La seconde partie de ce théorème a été mentionnée par M. Sylvester (*Comptes rendus*, t. XCIX, p. 69) comme faisant partie de sa troisième loi de mouvement algébrique. Cette loi en contient probablement aussi la première partie, ce que je ne puis constater, n'ayant jamais eu sous les yeux le *John Hopkins Circular* qui a donné les trois lois de M. Sylvester.

» De là on conclut immédiatement à l'impossibilité de certaines équations en matrices. Donnons-en un exemple. Soit N une matrice qui a la racine α^{uple} zéro, et soit N de nullité $\alpha_1 < \alpha$. Alors il est impossible de déterminer une matrice X telle qu'on ait $X^k = N$, l'entier k étant plus grand que $\alpha - \alpha_1$. En effet, X doit avoir la racine α^{uple} zéro; mais alors je peux démontrer que X^k est de nullité α, et, comme N n'est que de nullité α_1, l'équation proposée n'est pas soluble. Dans cette catégorie d'équations rentre l'exemple donné par M. Sylvester (*Comptes rendus*, t. XCVIII, p. 474); on y a

$$n = 2, \quad \alpha = 2, \quad \alpha_1 = 1.$$

» Les démonstrations rigoureuses de tous ces énoncés feront l'objet d'un Mémoire que je compte publier sous peu. »