WEYROVA TEORIE CHARAKTERISTICKÝCH ČÍSEL

Jindřich Bečvář

Čím déle přednáším lineární algebru, tím více oceňuji výstižnost její stručné charakterizace z úvodu dnes již klasické učebnice *Osnovy linejnoj algebry* od A. I. Malceva (1909–1967):

V lineární algebře se studují objekty tří typů: matice, prostory a algebraické formy. Teorie těchto objektů jsou navzájem těsně spjaty. Většina úloh lineární algebry připouští přirozenou formulaci v kterékoli z těchto tří teorií. Maticová formulace je obyčejně nejvhodnější pro výpočetní stránku věci. V geometrii a mechanice vzniká většina úloh lineární algebry jako úlohy zkoumající algebraické formy. Nejhlubšího pochopení vnitřních souvislostí mezi různými úlohami lineární algebry se dosáhne pouze vyšetřováním odpovídajících lineárních prostorů, které jsou proto hlavním předmětem studia lineární algebry. [1])

V následujících odstavcích vyložíme Weyrovu teorii charakteristických čísel načrtnutou v článcích [W52], [W53] a podrobně vyloženou v pracích [W63], [W64] a to v duchu Malcevova citátu, tj. v řeči prostorů a homomorfismů. Ukážeme, že pomocí Weyrových charakteristických čísel je možno poměrně snadno vyložit celou teorii podobnosti komplexních matic.

Místo Weyrova termínu charakteristický kořen budeme užívat dnes užívanějšího termínu *vlastní číslo*. Weyrův termín charakteristické číslo odpovídá pojmu, který není v současné době běžně užíván; pro srozumitelnost budeme hovořit o *Weyrových charakteristických číslech*. Připomeňme, že *nulitou* čtvercové matice budeme rozumět doplněk její hodnosti do jejího řádu. Tento pojem byl koncem minulého století běžně užíván.

Nechť A je komplexní matice řádu n a f je odpovídající endomorfismus vektorového prostoru $\mathbb{C}^n$ (tj. A je maticí endomorfismu f vzhledem ke kanonické bázi). Pro dané komplexní číslo λ je matice $A - \lambda E$ maticí endomorfismu $\varphi = f - \lambda \cdot \mathrm{id}$ prostoru $\mathbb{C}^n$. Číslo λ je vlastním číslem matice A právě když je matice $A - \lambda E$ singulární; to nastane právě když φ není izomorfismus, tj. $\mathbb{C}^n \supset \operatorname{Im}\varphi$.

Předpokládejme, že λ je vlastním číslem matice A. Existuje tedy přirozené číslo $r \geq 1$ takové, že

$$\mathbb{C}^n \supset \operatorname{Im}\varphi \supset \operatorname{Im}\varphi^2 \supset \cdots \supset \operatorname{Im}\varphi^r = \operatorname{Im}\varphi^{r+1} = \ldots$$

(r je nejmenší přirozené číslo, pro které $\operatorname{Im}\varphi^r \cap \operatorname{Ker}\varphi = 0$). Vzhledem k tomu, že pro každé $i = 1, 2, \ldots$ je podle věty o hodnosti a defektu

$$\dim \operatorname{Ker}\varphi^i + \dim \operatorname{Im}\varphi^i = n \ , \tag{1}$$

[1]) Tento citát není ani v prvním ani v druhém vydání knížky z let 1948 a 1956, je až v třetím vydání z roku 1970 a též ve čtvrtém vydání z roku 1975 (str. 9).

je dále
$$0 \subset \operatorname{Ker}\varphi \subset \operatorname{Ker}\varphi^2 \subset \cdots \subset \operatorname{Ker}\varphi^r = \operatorname{Ker}\varphi^{r+1} = \ldots .$$
Pišme
$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Ker}\varphi &= \alpha_1 , \\ \dim \operatorname{Ker}\varphi^2 &= \alpha_1 + \alpha_2 , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dim \operatorname{Ker}\varphi^r &= \alpha_1 + \cdots + \alpha_r . \end{aligned}$$

Pro $i = 1, \ldots, r$ je tedy

(2) $$\alpha_i = \dim \operatorname{Ker}\varphi^i - \dim \operatorname{Ker}\varphi^{i-1} ,$$

tj. čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ jsou přírůstky dimenzí jader $\operatorname{Ker}\varphi$, $\operatorname{Ker}\varphi^2$, ..., $\operatorname{Ker}\varphi^r$ neboli přírůstky nulit matic $A - \lambda E$, $(A - \lambda E)^2$, ..., $(A - \lambda E)^r$. Jsou to tedy *Weyrova charakteristická čísla* matice A příslušná k vlastnímu číslu λ (viz [W63], str. 34). Vzhledem k rovnostem (1) a (2) je
$$\alpha_i = \dim \operatorname{Im}\varphi^{i-1} - \dim \operatorname{Im}\varphi^i .$$

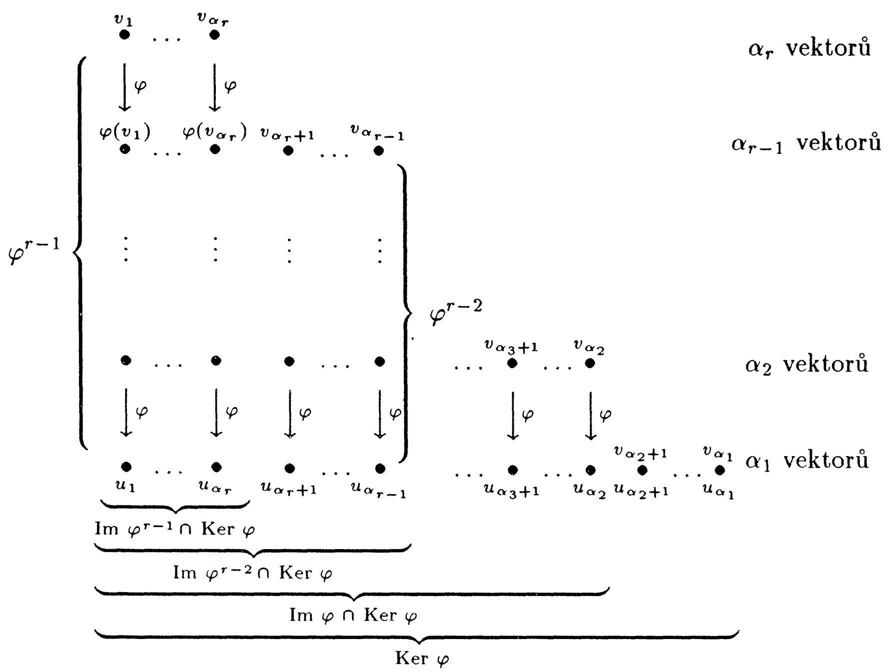
(Weyrova charakteristická čísla jsou tedy rovna rozdílům dimenzí prostorů $\mathbb{C}^n, \operatorname{Im}\varphi, \cdots, \operatorname{Im}\varphi^r$, tj. rozdílům hodností matic $E, A - \lambda E, \cdots, (A - \lambda E)^r$. Tato definice čísel $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ by byla asi dnes přirozenější. Přidrželi jsme se však původního Weyrova pojetí. Viz předchozí příspěvek této publikace.)

Podle věty o hodnosti a defektu užité pro zúžení endomorfismu φ, které zobrazuje $\operatorname{Im}\varphi^{i-1}$ na $\operatorname{Im}\varphi^i$, je
$$\dim(\operatorname{Im}\varphi^{i-1} \cap \operatorname{Ker}\varphi) + \dim \operatorname{Im}\varphi^i = \dim \operatorname{Im}\varphi^{i-1} ,$$
neboť jádro tohoto zúžení je právě $\operatorname{Im}\varphi^{i-1} \cap \operatorname{Ker}\varphi$. Tedy
$$\alpha_i = \dim(\operatorname{Im}\varphi^{i-1} \cap \operatorname{Ker}\varphi) , \quad i = 1, \ldots, r ,$$
tj. Weyrova charakteristická čísla jsou rovna dimenzím jistých podprostorů prostoru $\mathbb{C}^n$. Zřejmě je

(3) $$\operatorname{Ker}\varphi \supset \operatorname{Im}\varphi \cap \operatorname{Ker}\varphi \supset \cdots \supset \operatorname{Im}\varphi^{r-2} \cap \operatorname{Ker}\varphi \supset \operatorname{Im}\varphi^{r-1} \cap \operatorname{Ker}\varphi \supset 0$$

takže
$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_r > 0 .$$

V tomto odstavci sestrojíme uspořádanou bázi B podprostoru $\operatorname{Ker}\varphi^r$. Nejprve zvolíme bázi $\{u_1, \ldots, u_{\alpha_r}\}$ prostoru $\operatorname{Im}\varphi^{r-1} \cap \operatorname{Ker}\varphi$, rozšíříme ji na bázi $\{u_1, \ldots, u_{\alpha_{r-1}}\}$ prostoru $\operatorname{Im}\varphi^{r-2} \cap \operatorname{Ker}\varphi$, tu rozšíříme na bázi $\{u_1, \ldots, u_{\alpha_{r-2}}\}$ prostoru $\operatorname{Im}\varphi^{r-3} \cap \operatorname{Ker}\varphi$ atd., nakonec dostaneme bázi $\{u_1, \ldots, u_{\alpha_1}\}$ prostoru $\operatorname{Ker}\varphi$ (viz inkluze (3) a obrázek na následující straně). K vektorům $\{u_1, \ldots, u_{\alpha_1}\}$ potom přidáme (různě dlouhé) řetízky jejich vzorů při postupném provádění endomorfismu φ (viz obrázek).



Protože vektory $u_1, \dots, u_{\alpha_r}$ leží v $\operatorname{Im} \varphi^{r-1}$, existují vektory $v_1, \dots, v_{\alpha_r}$ takové, že $\varphi^{r-1}(v_1) = u_1$, $\dots$, $\varphi^{r-1}(v_{\alpha_r}) = u_{\alpha_r}$. Podobně existují vektory $v_{\alpha_r+1}, \dots, v_{\alpha_{r-1}}$ takové, že $\varphi^{r-2}(v_{\alpha_r+1}) = u_{\alpha_r+1}$, $\dots$, $\varphi^{r-2}(v_{\alpha_{r-1}}) = u_{\alpha_{r-1}}$ atd. Nakonec existují vektory $v_{\alpha_3+1}, \dots, v_{\alpha_2}$ takové, že $\varphi(v_{\alpha_3+1}) = u_{\alpha_3+1}$, $\dots$, $\varphi(v_{\alpha_2}) = u_{\alpha_2}$. Pro úplnost položme $v_{\alpha_2+1} = u_{\alpha_2+1}$, $\dots$, $v_{\alpha_1} = u_{\alpha_1}$. Množina

$$\begin{aligned}(4)\qquad B = \{&v_1, \varphi(v_1), \varphi^2(v_1), \dots, \varphi^{r-1}(v_1); \dots; v_{\alpha_r}, \dots, \varphi^{r-1}(v_{\alpha_r});\\ &v_{\alpha_r+1}, \dots, \varphi^{r-2}(v_{\alpha_r+1}); \dots; v_{\alpha_2}, \varphi(v_{\alpha_2}); v_{\alpha_2+1}; \dots; v_{\alpha_1}\}\end{aligned}$$

je zřejmě obsažena v $\operatorname{Ker} \varphi^r$ a má $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r$ prvků (viz obrázek — počítáno po vrstvách), tj. tolik, kolik je $\dim \operatorname{Ker} \varphi^r$.

Lineární nezávislost množiny B dokážeme standardním způsobem. Předpokládejme, že

$$(5)\qquad a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_k x_k = 0\,,$$

kde $x_1, \dots, x_k$ jsou navzájem různé prvky množiny B a všechny koeficienty $a_1, \dots, a_k$ jsou nenulové. Nechť m je nejmenší přirozené číslo, pro které $\varphi^m(x_i) = 0$ pro každé $i = 1, \dots, k$ (tedy $m \le r$, neboť $B \subset \operatorname{Ker} \varphi^r$). Provedeme-li endomorfismus φ^{m-1} na rovnost (5), získáme vyjádření nulového vektoru jako netriviální lineární kombinace lineárně nezávislých vektorů $u_1, \dots, u_{\alpha_1}$ a to je spor. Množina B je tedy lineárně nezávislá a je proto bází podprostoru $\operatorname{Ker}\varphi^r$; uspořádání této báze je uvedeno v (4). Báze B je *Weyrova normální soustava* příslušná k vlastnímu číslu λ (viz [W63], str. 37–53).

Rozšiřme bázi B podprostoru $\operatorname{Ker}\varphi^r$ na bázi B' prostoru $\mathbb{C}^n$; bázi B' uspořádejme tak, že nejprve jdou vektory báze B ve výše uvedeném pořadí (4) a teprve potom přidané vektory. Matice endomorfismu φ vzhledem k bázi B' má tvar

$$M = \begin{pmatrix} I & X \\ 0 & Y \end{pmatrix},$$

kde vzhledem ke konstrukci báze B je I Jordanova matice řádu $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r$ s nulami na diagonále, která má

$$\begin{array}{ll} \alpha_r & \text{buněk řádu } r \\ \alpha_{r-1}-\alpha_r & \text{buněk řádu } r-1 \\ \dots\dots\dots\dots & \\ \alpha_1-\alpha_2 & \text{buněk řádu } 1\,, \end{array}$$

tj. celkem α_1 buněk. Každá buňka odpovídá jednomu řetízku vektorů z báze B, který končí některým z vektorů $u_1,\dots,u_{\alpha_1}$. Původní endomorfismus $f = \varphi+\lambda\cdot\mathrm{id}$ má tedy vzhledem k bázi B' matici

$$M+\lambda E = \begin{pmatrix} I+\lambda E & X \\ 0 & Y+\lambda E \end{pmatrix},$$

kde $J = I+\lambda E$ je Jordanova matice stejné struktury jako matice I, ale s číslem λ na diagonále. Násobnost s vlastního čísla λ matice A je tedy alespoň $\alpha_1 + \cdots + \alpha_r$, takže

$$r \le \alpha_1+\cdots+\alpha_r \le s\,. \tag{6}$$

Předchozí úvahy můžeme provést pro každé vlastní číslo matice A. Nechť A je komplexní matice řádu n a

$$(\lambda-\lambda_1)^{s_1}(\lambda-\lambda_2)^{s_2}\dots(\lambda-\lambda_k)^{s_k} \tag{7}$$

její charakteristický polynom (vlastní čísla $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ jsou navzájem různá). Pro každé $i=1,\dots,k$ nechť

$$\alpha_1^i,\dots,\alpha_{r_i}^i$$

jsou Weyrova charakteristická čísla matice A příslušná k vlastnímu číslu λ_i, nechť $\varphi_i = f-\lambda_i\cdot\mathrm{id}$. Podle (6) je pro každé $i=1,\dots,k$

$$r_i \le \alpha_1^i+\cdots+\alpha_{r_i}^i \le s_i\,, \tag{8}$$

a tedy podle předchozího

$$\operatorname{Ker}\varphi_i^{r_i} = \operatorname{Ker}\varphi_i^{s_i}\,. \tag{9}$$

Pro každé $i = 1, \ldots, k$ označme symbolem B_i uspořádanou bázi podprostoru $\operatorname{Ker} \varphi_i^{r_i}$ sestrojenou výše uvedeným způsobem a symbolem J_i Jordanovu matici řádu $\alpha_1^i + \cdots + \alpha_{r_i}^i$ s prvkem λ_i na diagonále, jejíž strukturu určují Weyrova charakteristická čísla $\alpha_1^i, \ldots, \alpha_{r_i}^i$.

Abychom mohli dokázat, že sjednocení bází B_i tvoří bázi prostoru $\mathbb{C}^n$ a že složením Jordanových matic J_i dostaneme Jordanův kanonický tvar matice A, musíme využít následující teoretické lemma.

Lemma. *Nechť p je anulující polynom endomorfismu f prostoru V. Jestliže $p = p_1 p_2 \ldots p_k$ je rozklad polynomu p na navzájem nesoudělné polynomy, potom je*

$$V = \operatorname{Ker} p_1(f) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker} p_k(f) \tag{10}$$

direktní rozklad prostoru V na podprostory invariantní vůči f.

Důkaz. Tvrzení dokážeme pro $k = 2$. Protože jsou polynomy p_1 a p_2 nesoudělné, existují polynomy q_1 a q_2 takové, že

$$q_1 p_1 + q_2 p_2 = 1\,.$$

Dosadíme-li do této rovnosti endomorfismus f, dostaneme rovnost

$$q_1(f) p_1(f) + q_2(f) p_2(f) = \mathrm{id}\,.$$

Pro každý vektor $v \in V$ je tedy

$$[q_1(f) p_1(f)](v) + [q_2(f) p_2(f)](v) = v\,. \tag{11}$$

Protože je $p = p_1 p_2$ anulující polynom endomorfismu f, je

$$[p_2(f) q_1(f) p_1(f)](v) = o\,,$$

takže $[q_1(f) p_1(f)](v) \in \operatorname{Ker} p_2(f)$.
Obdobně zjistíme, že $[q_2(f) p_2(f)](v) \in \operatorname{Ker} p_1(f)$. Tedy

$$V = \operatorname{Ker} p_1(f) + \operatorname{Ker} p_2(f)\,.$$

Jestliže je $v \in \operatorname{Ker} p_1(f) \cap \operatorname{Ker} p_2(f)$, je podle (11) $v = o$ a rovnost (10) je pro $k = 2$ dokázána.

Jestliže $v \in \operatorname{Ker} p_1(f)$, potom

$$[p_1(f)](f(v)) = f[p_1(f)(v)] = f(o) = o\,,$$

takže $f(v) \in \operatorname{Ker} p_1(f)$. Jde tedy o direktní rozklad na podprostory invariantní vůči f.

Indukcí rozšíříme platnost tvrzení pro libovolné přirozené číslo k (provedení indukce umožňuje invariantnost podprostorů). □

Aplikujme nyní předchozí lemma na charakteristický polynom endomorfismu f prostoru $\mathbb{C}^n$ (tj. charakteristický polynom matice A), jehož rozklad na navzájem nesoudělné polynomy je uveden v (7). Vzhledem k definici endomorfismů φ_i a rovnostem (9) má direktní rozklad (10) tvar

$$\mathbb{C}^n = \operatorname{Ker} \varphi_1^{r_1} \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker} \varphi_k^{r_k} . \tag{12}$$

Z předchozích úvah vyplývá řada důležitých výsledků:

(i) *Sjednocení bází B_i podprostorů* $\operatorname{Ker} \varphi_i^{r_i}$ *je báze prostoru* $\mathbb{C}^n$.

Tvrzení (i) je přímým důsledkem rozkladu (12).

Bázi $B = \bigcup B_i$ prostoru $\mathbb{C}^n$ uspořádáme přirozeným způsobem. Nejprve vezmeme vektory báze B_1, potom vektory báze B_2 atd., nakonec vektory báze B_k; přitom zachováme výše konstruované uspořádání jednotlivých bází B_i. Báze B odpovídá Weyrově normální soustavě.

(ii) *Násobnost každého vlastního čísla matice A je rovna součtu všech příslušných Weyrových charakteristických čísel, tj.*

$$s_i = \alpha_1^i + \alpha_2^i + \cdots + \alpha_{r_i}^i .$$

Podle (7), (8) a (12) je totiž

$$n = \sum_{i=1}^{k} s_i \geq \sum_{i=1}^{k} (\alpha_1^i + \alpha_2^i + \cdots + \alpha_{r_i}^i) = \sum_{i=1}^{k} \dim \operatorname{Ker} \varphi_i^{r_i} = n .$$

(iii) *Matice endomorfismu f vzhledem k bázi B je Jordanova.*

První části báze B (vektorům z B_1) odpovídá Jordanova matice J_1 řádu s_1, která má na diagonále vlastní číslo λ_1, ... , poslední části báze B (vektorům z B_k) odpovídá Jordanova matice J_k řádu s_k, která má na diagonále vlastní číslo λ_k. Matice endomorfismu f vzhledem k bázi B je Jordanova matice J sestavená z bloků $J_1, \ldots, J_k$; složení těchto bloků z jednotlivých buněk je určeno příslušnými Weyrovými charakteristickými čísly (viz výše).

Protože je A maticí endomorfismu f vzhledem ke kanonické bázi a J maticí f vzhledem k bázi B, je

$$J = W^{-1} \cdot A \cdot W ,$$

kde W je matice přechodu mezi původní kanonickou bází a novou bází B; ve sloupcích matice W jsou tedy vektory báze B (Weyrovy normální soustavy). Našli jsme tedy nejen Jordanův kanonický tvar J matice A, ale i transformační matici W, pomocí které se realizuje podobnost matic A a J. Určení této matice je často potřebné, např. při řešení soustav lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty. K nalezení Jordanova kanonického tvaru J matice A však nemusíme konstruovat bázi B, neboť matici J umíme napsat ihned, jakmile známe vlastní čísla matice A a k nim příslušná Weyrova charakteristická čísla:

(iv) *Jordanův kanonický tvar matice A je určen jejími vlastními čísly a Weyrovými charakteristickými čísly.*

Vzhledem k direktnímu rozkladu (12) prostoru $\mathbb{C}^n$ a k definici endomorfismů φ_i je minimální polynom matice A (resp. endomorfismu f) určen vlastními čísly matice A a počty k nim příslušných Weyrových charakteristických čísel:

(v) *Minimální polynom matice A je*

$$(\lambda - \lambda_1)^{r_1}(\lambda - \lambda_2)^{r_2} \ldots (\lambda - \lambda_k)^{r_k} .$$

Z Weyrovy teorie také vyplývá, že vlastní čísla a Weyrova charakteristická čísla tvoří úplnou soustavu invariantů podobnosti matic:

(vi) *Dvě matice jsou podobné právě když mají stejná vlastní čísla a stejná Weyrova charakteristická čísla.*

Jestliže jsou matice A_1 a A_2 podobné, mají stejná vlastní čísla a k nim příslušná Weyrova charakteristická čísla. To se velmi snadno odvodí ze vztahu $A_2 = X^{-1}A_1X$. Jestliže mají naopak stejná vlastní čísla a stejná Weyrova charakteristická čísla, jsou podle předešlého podobné téže Jordanově matici a tedy i podobné navzájem.

Weyrovu teorii charakteristických čísel je tedy možno prezentovat v moderní řeči prostorů a homomorfismů. Pomocí této teorie lze jednoduše a efektivně vyložit partie o podobnosti komplexních matic a Jordanově kanonickém tvaru, které jsou důležitou součástí lineární algebry.

Poznamenejme na závěr, že články, které se zabývají jednoduchými způsoby převedení matice na Jordanův kanonický tvar, se objevují i v současné době (viz např. [1]–[6]).

Literatura

[1] Brualdi R. A.: *The Jordan canonical form: an old proof*, Amer. Math. Monthly 94(1987), 257–267

[2] Filippov A. F.: *Kratkoe dokazatel'stvo teoremy o privedenii matricy k žordanovoj forme*, Vestnik Moskov. Univ. 1971, N° 2, 18–19 (*A short proof of the theorem on the reduction of a matrix to Jordan form*, Moscow Univ. Math. Bull. 26(1971), 70–71)

[3] Fletcher R., Sorensen D. C.: *An algorithmic derivation of the Jordan canonical form*, Amer. Math. Monthly 90(1983), 12–16

[4] Galperin A., Waksman Z.: *An elementary approach to Jordan theory*, Amer. Math. Monthly 87(1980), 728–732

[5] Hall J. I.: *Another elementary approach to the Jordan form*, Amer. Math. Monthly 98(1991), 336–340

[6] Väliaho H.: *An elementary approach to the Jordan form of a matrix*, Amer. Math. Monthly 93(1986), 711–714

ROZPRAVY
ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ V PRAZE.

ROČNÍK I. TŘÍDA II. ČÍSLO 6.

O ELLIPTICKÉM INTEGRALU

TŘETÍHO DRUHU.

NAPSAL

EDUARD WEYR.

PŘEDLOŽENO DNE 12. ŘÍJNA 1891.

V PRAZE.
NÁKLADEM ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ.
1891.