Vojtěch Jarník

Dodatek: O derivovaných číslech funkcí jedné proměnné

In: Eduard Čech (author); Vojtěch Jarník (author): Bodové množiny. S dodatkem „O derivovaných číslech funkcí jedné proměnné". (Czech). Praha: Jednota Československých matematiků a fysiků, 1936. pp. 245--265.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/400443

$y \in P$, $x < y$ nechť $f_n(y) - f_n(x) \leqq f_{n+1}(y) - f_{n+1}(x)$. Pro každé $x \in P$ nechť existuje $\lim f_n(x) = f(x) \in \mathsf{E}_1$. Nechť M je množina těch $x \in P$, v nichž existují a jsou konečné derivace $f'_n(x)$ a $f'(x)$ a jest $f'_n(x) \to f'(x)$. Pak $P - M \in \mathfrak{N}(\mathsf{E}_1)$.

Dodatek.

O derivovaných číslech funkcí jedné proměnné.

Napsal *Vojtěch Jarník.*

D I. V celém tomto dodatku bude slovo „funkce“ značiti t. zv. konečnou funkci jedné reálné proměnné, to jest funkci, jejíž obor (viz **2·3**) je podmnožinou množiny E_1 (opatřené metrikou $\varrho(x, y) = | x - y |$, viz **6·1**) a jejíž hodnoty jsou vesměs různé od $\pm \infty$. Je-li A obor funkce f a je-li $M \subset A$, budeme říkati, že funkce f je definována v množině M. Je-li $a \in \mathsf{E}_1$, $b \in \mathsf{E}_1$, $a < b$, budeme psáti

$$(a, b) = \mathop{\mathrm{E}}_{x}(a < x < b)^{*}) \text{ (název: otevřený interval)},$$

$$[a, b] = \mathop{\mathrm{E}}_{x}(a \leqq x \leqq b) \text{ (název: uzavřený interval)}.$$

V tomto úvodním odstavci budu se zabývati pojmy „limes superior“ a „limes inferior“. Čtenář, který tyto pojmy ovládá z elementů, může tento odstavec **D I** vynechati.

D I·1. *Nechť f je funkce; nechť $x_0 \in \mathsf{E}_1$ a nechť existuje číslo $\delta > 0$ tak, že funkce f je definována v intervalu $(x_0, x_0 + \delta)$. Potom existuje jedno a jen jedno číslo $a \in \mathsf{R}$,**) jež má tyto dvě vlastnosti:*

1. *Je-li $a' < a$, potom ke každému $\varepsilon > 0$ existuje číslo x tak, že*

$$x_0 < x < x_0 + \varepsilon, \; f(x) > a'.$$

2. *Je-li $a' > a$, potom existuje číslo $\varepsilon > 0$ tak, že*

$$x_0 < x < x_0 + \varepsilon \Rightarrow f(x) < a'.$$

Obdobně existuje jedno a jen jedno číslo $b \in \mathsf{R}$, jež má tyto dvě vlastnosti:

1'. *Je-li $b' > b$, potom ke každému $\varepsilon > 0$ existuje číslo x tak, že*

$$x_0 < x < x_0 + \varepsilon, \; f(x) < b'.$$

---

*) Záměny s označením prvků cartézského součinu (viz **2·1**) není třeba se obávati. Připouštíme tedy zde jen t. zv. „konečné“ (v naší terminologii: omezené) intervaly, ač mnohé z následujících výsledků by platily pro $a = -\infty$ nebo $b = \infty$.

) R je definováno v **2·3. Může tedy býti též $a = \infty$ nebo $a = -\infty$.

2'. *Je-li $b' < b$, potom existuje číslo $\varepsilon > 0$ tak, že*

$$x_0 < x < x_0 + \varepsilon \Rightarrow f(x) > b'.$$

Číslo a (resp. b) nazývá se *limes superior* (resp. *inferior*) funkce f v bodě x_0 zprava a píšeme

$$\limsup_{x=x_0+} f(x) = a, \quad \liminf_{x=x_0+} f(x) = b.$$

Důkaz. Dokažme třeba tvrzení, týkající se čísla a (pro číslo b je důkaz obdobný*). Pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ nechť M_n značí množinu všech hodnot, kterých nabývá funkce $f(x)$, když x probíhá interval $\left(x_0, x_0 + \frac{\delta}{n}\right)$; budiž $c_n = \sup M_n$ (viz **4·10**). Pro $n > m$ je $M_n \subset M_m$, tedy $c_n \leqq c_m$; posloupnost $c_1, c_2, \ldots$ je tedy nerostoucí a má tedy — jak víme z elementů — limitu

$$\lim_{n=\infty} c_n = a.^{**}) \tag{1}$$

Dokažme, že číslo a má vlastnosti 1, 2.

1. Je-li $a' < a$, $\varepsilon > 0$, existuje n tak, že $\frac{\delta}{n} < \varepsilon$; ježto $\sup M_n = c_n \geqq a > a'$, existuje v množině M_n číslo větší než a', t. j. existuje x tak, že

$$x_0 < x < x_0 + \frac{\delta}{n} < x_0 + \varepsilon, \quad f(x) > a'.$$

2. Je-li $a' > a$, existuje podle (1) číslo n tak, že $\sup M_n = c_n < a'$; tedy

$$x_0 < x < x_0 + \frac{\delta}{n} \Rightarrow f(x) < a'.$$

Zbývá dokázati, že existuje *jediné* číslo a, mající vlastnosti 1, 2. Kdyby existovala dvě taková čísla a_1, a_2 ($a_1 < a_2$), existovalo by číslo a' tak, že $a_1 < a' < a_2$. Podle vlastnosti 2 čísla a_1 by existovalo číslo $\varepsilon_0 > 0$ tak, že

$$x_0 < x < x_0 + \varepsilon_0 \Rightarrow f(x) < a';$$

podle vlastnosti 1 čísla a_2 by však existovalo číslo x_1 tak, že

$$x_0 < x_1 < x_0 + \varepsilon_0, \quad f(x) > a',$$

což je spor.

---

*) Ostatně lze tvrzení, týkající se čísla b, odvoditi z tvrzení, týkajícího se čísla a, tím, že místo funkce f vyšetřujeme funkci g, definovanou rovnicí $g(x) = -f(x)$.

**) Tato limita může býti ovšem též ∞ (když $c_n = \infty$ pro každé n) nebo $-\infty$.

D I·2. *Za předpokladů věty* **D I·I** *je*

$$\liminf_{x=x_0+} f(x) \leqq \limsup_{x=x_0+} f(x). \tag{2}$$

Důkaz. Kdyby bylo

$$b = \liminf_{x=x_0+} f(x) > \limsup_{x=x_0+} f(x) = a,$$

existovalo by číslo a' tak, že $b > a' > a$. Podle vlastnosti 2 existovalo by číslo $\varepsilon_1 > 0$ tak, že

$$x_0 < x < x_0 + \varepsilon_1 \Rightarrow f(x) < a';$$

podle vlastnosti 2′ existovalo by však číslo $\varepsilon_2 > 0$ tak, že

$$x_0 < x < x_0 + \varepsilon_2 \Rightarrow f(x) > a';$$

pro $x_0 < x < x_0 + \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ bylo by tedy $f(x) < a' < f(x)$, což je spor.

Obdobně, jako jsme zavedli limes superior a inferior zprava, zavádí se limes superior a inferior zleva; značky:

$$\limsup_{x=x_0-} f(x), \liminf_{x=x_0-} f(x).$$

Pouze je nutno ve větě **D I·I** psáti $(x_0 - \delta, x_0)$ místo $(x_0, x_0 + \delta)$ a $x_0 - \varepsilon < x < x_0$ místo $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$. Platí ovšem opět

$$\liminf_{x=x_0-} f(x) \leqq \limsup_{x=x_0-} f(x). \tag{3}$$

Je-li $\liminf\limits_{x=x_0+} f(x) = \limsup\limits_{x=x_0+} f(x)$, nazýváme jejich společnou hodnotu limitou funkce $f(x)$ v bodě x_0 zprava, značka $\lim\limits_{x=x_0+} f(x)$; obdobně se definuje limita zleva $\lim\limits_{x=x_0-} f(x)$.

Existuje-li $\delta > 0$ tak, že funkce f je definována v množině $(x_0 - \delta, x_0) + (x_0, x_0 + \delta)$, jsou definována všechna čtyři čísla

$$\limsup_{x=x_0+} f(x), \liminf_{x=x_0+} f(x), \limsup_{x=x_0-} f(x), \liminf_{x=x_0-} f(x). \tag{4}$$

V tomto případě definujeme limes superior a inferior funkce $f(x)$ v bodě x_0 rovnicemi

$$\limsup_{x=x_0} f(x) = \max\,(\limsup_{x=x_0+} f(x), \limsup_{x=x_0-} f(x)),$$
$$\liminf_{x=x_0} f(x) = \min\,(\liminf_{x=x_0+} f(x), \liminf_{x=x_0-} f(x)).$$

Čtenář okamžitě zjistí, že číslo $\limsup\limits_{x=x_0} f(x)$ je charakterisováno těmito vlastnostmi:

1. Je-li $a' < \limsup\limits_{x=x_0} f(x)$, potom ke každému $\varepsilon > 0$ existuje x tak, že

$$0 < |x - x_0| < \varepsilon, f(x) > a'.$$

2. Je-li $a' > \limsup_{x=x_0} f(x)$, potom existuje číslo $\varepsilon > 0$ tak, že

$$0 < |x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow f(x) < a'.$$

Obdobně lze charakterisovati číslo $\liminf_{x=x_0} f(x)$. Jest ovšem vždy

$$\liminf_{x=x_0} f(x) \leqq \limsup_{x=x_0} f(x).$$

Platí-li v této nerovnosti znamení $=$, t. j. jsou-li všechna čtyři čísla (4) sobě rovna,*) nazýváme jejich společnou hodnotu limitou funkce $f(x)$ v bodě x_0; značka:

$$\lim_{x=x_0} f(x).^{**})$$

D 2. Nechť f je funkce, definovaná v intervalu (a, b). Je-li $a < < x_0 < b$, je výraz

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \varphi(x_0, h) \tag{1}$$

funkcí proměnné h, definovanou v intervalu $(a - x_0, 0)$ i v intervalu $(0, b - x_0)$; existují tedy čtyři čísla

$$\left.\begin{aligned} f^+(x_0) &= \limsup_{h=0+} \varphi(x_0, h), & f_+(x_0) &= \liminf_{h=0+} \varphi(x_0, h), \\ f^-(x_0) &= \limsup_{h=0-} \varphi(x_0, h), & f_-(x_0) &= \liminf_{h=0-} \varphi(x_0, h), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

kterým po řadě říkáme: horní a dolní derivované číslo funkce $f(x)$ zprava, horní a dolní derivované číslo funkce $f(x)$ zleva (v bodě x_0).†) Jest ovšem (podle **D 1** (2), (3))

$$f^+(x_0) \geqq f_+(x_0), \; f^-(x_0) \geqq f_-(x_0);$$

je-li $f^+(x_0) = f_+(x_0)$ (po případě $f^-(x_0) = f_-(x_0)$), nazýváme společnou hodnotu těchto dvou čísel derivací funkce $f(x)$ zprava (po příp. zleva) v bodě x_0. Jsou-li všechna čtyři čísla (4) sobě rovna (čili: existují-li v bodě x_0 derivace zprava i zleva a jsou si rovny; čili: existuje-li $\lim_{h=0} \varphi(x_0, h)$), nazýváme jejich společnou hodnotu derivací funkce $f(x)$ v bodě x_0 a značíme ji znakem $f'(x_0)$.††)

D 3. V tomto odstavci dokážeme tuto větu:

---

*) Ještě jinými slovy: existují-li limity $\lim_{x=x_0+} f(x)$, $\lim_{x=x_0-} f(x)$ a jsou-li si rovny.

**) To je pojem běžný čtenáři z elementů; ovšem připouštíme pro limitu též hodnoty ∞ a $-\infty$.

†) Čtenáři bude smysl těchto čísel názornější, uvědomí-li si, že číslo (1) je směrnicí přímky, spojující bod o souřadnicích x_0, $f(x_0)$ s bodem o souřadnicích $x_0 + h$, $f(x_0 + h)$.

††) To je definice, běžná čtenáři z elementů; připouštíme ovšem pro derivaci také hodnoty ∞ a $-\infty$.

D 3·1. *Existuje spojitá funkce v oboru* $[0, 1]$, *která nemá derivaci v žádném bodě intervalu* $(0, 1)$.

Tuto větu dokázal Weierstrass tím, že takovou funkci vskutku sestrojil.*) Teorie úplných metrických prostorů, vyložená v kapitole III, dovoluje nám však dokázati tuto větu též jinak (bez explicitní konstrukce takové funkce), při čemž zjistíme ještě jinou důležitou okolnost.

Položme $P = \mathsf{E}_1$, $K = [0, 1]$. Podle **15·1·3** je P úplný prostor; podle **17·2·3** je K kompaktní prostor. Sestrojme metrický prostor $C = P^K$ stejně jako v odst. **17·7**; C je tedy množina všech spojitých zobrazení prostoru $[0, 1]$ do prostoru E_1, t. j. C je množina všech konečných spojitých funkcí v oboru $[0, 1]$. Metrika $\varrho^+(f, g)$ prostoru C je v souhlasu s odst. **17·7** definována takto: je-li $f \in C$, $g \in C$, je

$$\varrho^+(f, g) = \max_{0 \leqq x \leqq 1} | f(x) - g(x) |.$$

Podle věty **17·7·5** je C úplný prostor; ovšem je $C \neq \emptyset$. Dokážeme pak tuto větu:

D 3·2. *Budiž* M *množina oněch* $f \in C$, *jež mají tuto vlastnost: pro každé* $x \in (0, 1)$ *je*

$$\limsup_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \infty, \quad \liminf_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -\infty.$$

Potom množina $N = C - M$ *je množina první kategorie v* C.**)

Z věty **D 3·2** plyne věta **D 3·1**; neboť podle **15·8·2** je $M = C - N \neq \emptyset$; existuje tedy $f_1 \in M$ a podle definice množiny M je jasno, že funkce f_1 nemá derivaci v žádném bodě intervalu $(0, 1)$.

K důkazu věty **D 3·2** budeme potřebovati tuto pomocnou větu:

D 3·3. *Nechť je* $f \in C$, $\delta > 0$. *Potom existuje funkce* $g \in C$ *a číslo* q $(0 \leqq q < \infty)$ *tak, že*

$$\varrho^+(f, g) < \delta, \tag{1}$$

$$0 \leqq x_1 < x_2 \leqq 1 \Rightarrow \left| \frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} \right| \leqq q. \tag{2}$$

Důkaz. Zvolme celé $n > 0$ tak, že

$$0 \leqq x_1 < x_2 \leqq 1, \ x_2 - x_1 \leqq \frac{1}{n} \Rightarrow | f(x_1) - f(x_2) | < \tfrac{1}{2}\delta;$$

to lze učiniti podle **17·4·5**. Definujme pak funkci $g \in C$ takto:

---

*) R. 1861, publikováno poprvé r. 1875; již dříve sestrojil však takovou funkci Bolzano († 1848); viz Spisy B. Bolzana, sv. 1. (Functionenlehre), 1930, str. 66—70 a 98—99. Bolzano však dokazuje méně než Weierstrass (ač jeho funkce má též vlastnost vytčenou ve větě **D 3·1**); mimo to v Bolzanově důkazu je jedna podstatná mezera.

) Definici a základní vlastnosti množin první kategorie viz v odst. **12·3.

$$g\left(\frac{k}{n}\right) = f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ pro } k = 0, 1, 2, \ldots, n;$$

g je lineární v každém intervalu $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Je-li $0 \leqq x \leqq 1$, existuje celé k tak, že

$$0 \leqq k \leqq n - 1, \ \frac{k}{n} \leqq x \leqq \frac{k+1}{n};$$

potom je

$$\left|g(x) - g\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqq \left|g\left(\frac{k+1}{n}\right) - g\left(\frac{k}{n}\right)\right| = \left|f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| < \frac{\delta}{2},$$

$$|f(x) - g(x)| \leqq \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| + \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - g\left(\frac{k}{n}\right)\right| + \left|g\left(\frac{k}{n}\right) - g(x)\right| <$$
$$< \tfrac{1}{2}\delta + 0 + \tfrac{1}{2}\delta = \delta;$$

tedy platí (1). Položíme-li dále

$$q = \max_{k=0,1,\ldots,n-1} \left| \frac{g\left(\frac{k+1}{n}\right) - g\left(\frac{k}{n}\right)}{\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}} \right|,$$

je podle definice funkce g (lineárnost!) zřejmé, že platí též (2).

Důkaz věty **D 3·2**. Budiž N' (resp. N'') množina oněch $f \in C$, jež mají tuto vlastnost: existuje aspoň jeden bod $x \in (0, 1)$ takový, že

$$\limsup_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} < \infty \left(\text{resp.} \liminf_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} > -\infty\right).$$

Zřejmě je $N = N' + N''$, takže stačí dokázati, že množiny N', N'' jsou prvé kategorie. Důkaz provedeme napřed pro množinu N'. Pro $n = 2, 3, \ldots$ označme znakem F_n množinu oněch $f \in C$, jež mají tuto vlastnost: existuje aspoň jedno číslo $x \in \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$ tak, že

$$0 < |h| \leqq \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leqq n.$$

Zřejmě $N' = \sum_{n=2}^{\infty} F_n$, takže stačí dokázati, že množiny F_n jsou řídké v C.

Budiž tedy n celé, $n > 1$, $G \neq \emptyset$, G otevřené v C; máme dokázati, že existuje H otevřené v C tak, že

$$H \neq \emptyset, \ H \subset G, \ HF_n = \emptyset \text{ (viz } \mathbf{12{\cdot}2{\cdot}3}).$$

Ježto $G \neq \emptyset$, G otevřené, existuje $f \in C$ a $\delta > 0$ tak, že

$$f \in G;\ \Omega_C(f;\ \delta) \subset G.$$

(definici $\Omega_C(f;\ \delta)$ viz v **8·6**). Podle **D 3·3** zvolme $g \in C$ a q $(0 \leqq q < \infty)$ tak, že

$$\varrho^+(f, g) < \delta \text{ (tedy } g \in G),$$

$$0 \leqq x_1 < x_2 \leqq 1 \Rightarrow \left| \frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} \right| \leqq q. \tag{3}$$

Ježto G je otevřené, existuje $\varepsilon > 0$ tak, že

$$\Omega_C(g;\ \varepsilon) \subset G. \tag{4}$$

Definujme nyní funkci $w \in C$ takto: zvolme celé číslo s tak, že

$$\tfrac{1}{8}s\varepsilon > n + q,\ s > n; \tag{5}$$

budiž pak

$$\left.\begin{aligned} w\left(\frac{2k}{2s}\right) &= 0 \text{ pro } k = 0, 1, \ldots, s; \\ w\left(\frac{2k-1}{2s}\right) &= \frac{\varepsilon}{2} \text{ pro } k = 1, 2, \ldots, s; \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

w lineární v každém intervalu $\left[\frac{l}{2s}, \frac{l+1}{2s}\right]$ $(l = 0, 1, 2, \ldots, 2s - 1)$. Pro $0 \leqq x \leqq 1$ je $|w(x)| \leqq \frac{1}{2}\varepsilon$, tedy podle (4)

$$\Omega_C\left(g + w;\ \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset G.$$

Položme

$$H = \Omega_C\left(g + w;\ \frac{\varepsilon}{16}\right),$$

takže je H otevřené, $H \neq \emptyset$, $H \subset G$; máme ještě dokázati, že $HF_n = \emptyset$. Budiž tedy $\varphi \in H$, t. j.

$$\varphi = g + w + z,\ z \in C,\ \max_{0 \leqq x \leqq 1} |z(x)| < \tfrac{1}{16}\varepsilon. \tag{7}$$

Budiž dále $x \in \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$; podle (6), (5) existují čísla h_1, h_2 tak, že

$$0 < h_1 \leqq \frac{1}{s} < \frac{1}{n},\ w(x + h_1) = \frac{\varepsilon}{2};\ 0 < -h_2 \leqq \frac{1}{s} < \frac{1}{n},\ w(x + h_2) = 0. \tag{8}$$

Je-li $w(x) \leqq \frac{1}{4}\varepsilon$, je podle (3), (8), (7), (5)

$$\frac{\varphi(x + h_1) - \varphi(x)}{h_1} = \frac{g(x + h_1) - g(x)}{h_1} +$$

$$+\frac{w(x+h_1)-w(x)+z(x+h_1)-z(x)}{h_1}>$$

$$>-q+\left(\frac{\varepsilon}{4}-\frac{2\varepsilon}{16}\right)h_1^{-1}\geqq -q+\frac{\varepsilon s}{8}>n;$$

je-li však $w(x)>\frac{1}{4}\varepsilon$, je podle (3), (8), (7), (5)

$$\frac{\varphi(x+h_2)-\varphi(x)}{h_2}=\frac{g(x+h_2)-g(x)}{h_2}+$$

$$+\frac{w(x+h_2)-w(x)+z(x+h_2)-z(x)}{h_2}\geqq$$

$$\geqq -q+\frac{w(x)-w(x+h_2)+z(x)-z(x+h_2)}{-h_2}>$$

$$>-q+\left(\frac{\varepsilon}{4}-\frac{2\varepsilon}{16}\right)(-h_2)^{-1}\geqq -q+\frac{\varepsilon s}{8}>n.$$

Tedy ke každému $x\in\left[\frac{1}{n},\ 1-\frac{1}{n}\right]$ existuje h tak, že $0<|h|\leqq\frac{1}{n}$, $\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}>n$, takže $\varphi\in C-F_n$. Tedy $\varphi\in H\Rightarrow\varphi\in C-F_n$, t. j. $HF_n=\emptyset$, jak bylo dokázati. Tedy N' je vskutku prvé kategorie.

Pro N'' lze vésti důkaz obdobný; kratší je však tento důkaz: nahradím-li každou funkci $f\in C$ funkcí $-f$, dostanu homeomorfní zobrazení prostoru C na prostor C; při tom obrazem množiny N' je množina N''; ježto N' je prvé kategorie, je i N'' prvé kategorie. Tím je věta **D 3·2** úplně dokázána.

D 4. V tomto a v následujících odstavcích budeme potřebovati některé pojmy a věty z kapitoly IV. Budeme mluviti o Lebesgueově míře podmnožin prostoru $\mathbf{E}_1$, t. j. o λ_1-míře ve smyslu odst. **20·4** a budeme užívati označení tam zavedeného (před větou **20·4·5**) — s jednou úchylkou. Vnější míru množiny $L\subset\mathbf{E}_1$ budeme značiti znakem $\{L\}$ (místo znaku $|L|$, abychom se vyhnuli kolisi se znakem pro absolutní hodnotu reálného čísla). Ostatní označení zachováme: $\mathfrak{L}(\mathbf{E}_1)$ bude značiti systém všech měřitelných množin; $\mathfrak{N}(\mathbf{E}_1)$ bude značiti systém všech nulových množin, t. j. systém všech množin $L\subset\mathbf{E}_1$, pro něž $\{L\}=0$. Víme (viz **20·4·5**), že $\{L\}$ je definováno pro každé $L\subset\mathbf{E}_1$; víme dále, že $\mathfrak{L}(\mathbf{E}_1)$, $\mathfrak{N}(\mathbf{E}_1)$ jsou množinová σ-tělesa, dále že množina prázdná, množiny jednobodové a otevřené intervaly patří do systému $\mathfrak{L}(\mathbf{E}_1)$; konečně víme, že pro $A=\emptyset$ nebo $A=(a)$ je $\{A\}=\lambda_1(A)=0$ a že $\{(a,b)\}=\lambda_1((a,b))=b-a$ (viz počátek odst. **20·4** a větu **20·1·10**). Dále je

$$M'\subset M\subset\mathbf{E}_1\Rightarrow\{M'\}\leqq\{M\}\quad\textbf{(20·1·5)},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n \subset \mathsf{E}_1 \Rightarrow \left\{\sum_{n=1}^{\infty} M_n\right\} \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \{M_n\} \quad (\mathbf{20{\cdot}1{\cdot}6}),$$

$$M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \ldots \subset \mathsf{E}_1 \Rightarrow \left\{\sum_{n=1}^{\infty} M_n\right\} = \lim_{n=\infty} \{M_n\} \quad (\mathbf{20{\cdot}1{\cdot}20}).$$

Připomeňme ještě, že míra $\{L\}$ je σ-aditivní funkce v oboru $\mathfrak{L}(\mathsf{E}_1)$ (**20·1·17**).

Z odstavce **23·4** známe tuto větu (**23·4·2**): Nechť f je spojitá funkce s variací konečnou v intervalu $[a, b]$. Pak existuje nulová množina N taková, že funkce f má konečnou derivaci $f'(x)$ v každém bodě $x \in [a, b] - N$. V tomto odstavci ukážeme (ve větě **D 4·4**), že tato věta zůstává správná i tehdy, vynecháme-li v ní slovo „spojitá". Napřed však dokážeme tři pomocné věty.

D 4·1. *Nechť* $x_1, x_2, x_3, \ldots$ *je posloupnost reálných čísel. Nechť* $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$ *je konvergentní řada,* $A_i > 0$ *pro* $i = 1, 2, \ldots$ *Potom existuje množina* $M \subset \mathsf{E}_1$, *mající tyto dvě vlastnosti:*

1. $\{M\} = 2 \sum_{i=1}^{\infty} A_i.$

2. *Je-li* $x \in \mathsf{E}_1 - M$, $h > 0$, *je*

$$\sum_{x-h \leqq x_i \leqq x+h} A_i \leqq 2h.^{*)}$$

(Indexy v posledním součtu znamenají ovšem: „sčítá se přes ony hodnoty i, pro něž platí $x - h \leqq x_i \leqq x + h$"; další podobná označení pro součty, jež se vyskytnou, není snad již třeba vysvětlovati.)

Důkaz. Dokážeme napřed toto tvrzení: Existuje posloupnost množin $M_1, M_2, \ldots$ ($M_n \subset \mathsf{E}_1$), mající pro každé celé $n > 0$ tyto vlastnosti:

$\mathfrak{A}_n$. Množina M_n je součtem konečného počtu uzavřených intervalů, $\{M_n\} = 2 \sum_{i=1}^{n} A_i$.

$\mathfrak{B}_n$. Je-li $n > 1$, je $M_{n-1} \subset M_n$.

$\mathfrak{C}_n$. Je-li $x \in \mathsf{E}_1 - M_n$, $h > 0$, je

$$\sum_{\substack{x-h \leqq x_i \leqq x+h \\ i \leqq n}} A_i \leqq \{M_n \,.\, [x - h,\ x + h]\}. \tag{1}$$

Důkaz provedeme indukcí. Volme $M_1 = [x_1 - A_1,\ x_1 + A_1]$; potom platí $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$ (neboť požadavek $\mathfrak{B}_1$ nic nepožaduje). Je-li $x \in \mathsf{E}_1 - M_1$, $h > 0$, mohou nastati tyto tři případy:

---

*) Základní myšlenka této věty i jejího důkazu je převzata z článku B. Jurka, Sur la dérivabilité des fonctions à variation bornée, Časopis pro pěst. mat. a fys. **65** (1936), str. 8—27; viz hlavně Lemme 2.

a) Buď je $|x - x_1| > h$; potom je

$$\sum_{\substack{x-h \leqq x_i \leqq x+h \\ i \leqq 1}} A_i = 0 \leqq \{M_1 . [x - h, x + h]\}.$$

b) Nebo je $|x - x_1| \leqq h$, $x < x_1$;
c) nebo je $|x - x_1| \leqq h$, $x > x_1$.

V případě b) je $x < x_1 - A_1$, $x \geqq x_1 - h$, $x + h \geqq x_1$, tedy $h > A_1$, $[x, x + h] \supset [x_1 - A_1, x_1]$, tedy

$$\{M_1 . [x - h, x + h]\} \geqq \{M_1 . [x, x + h]\} \geqq A_1 = \sum_{\substack{x-h \leqq x_i \leqq x+h \\ i \leqq 1}} A_i.$$

V případě c) je obdobně $x > x_1 + A_1$, $x \leqq x_1 + h$, $x - h \leqq x_1$, tedy $h > A_1$, $[x - h, x] \supset [x_1, x_1 + A_1]$, tedy

$$\{M_1 . [x - h, x + h]\} \geqq \{M_1 . [x - h, x]\} \geqq A_1 = \sum_{\substack{x-h \leqq x_i \leqq x+h \\ i \leqq 1}} A_i.$$

Ve všech možných případech platí tedy $\mathfrak{C}_1$.

Budiž nyní n celé, $n > 1$ a předpokládejme, že jsou již definovány množiny $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ tak, že platí $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{B}_i$, $\mathfrak{C}_i$ pro $1 \leqq i \leqq n - 1$. Je zřejmo, že existuje číslo $\delta_1 > 0$ tak, že

$$\{[x_n, x_n + \delta_1] - M_{n-1}\} = A_n{}^*); \tag{2}$$

obdobně existuje $\delta_2 > 0$ tak, že

$$\{[x_n - \delta_2, x_n] - M_{n-1}\} = A_n; \tag{3}$$

zvolme $M_n = M_{n-1} + [x_n - \delta_2, x_n + \delta_1]$, takže platí $\mathfrak{B}_n$; dále je

$$\{M_n\} = \{M_{n-1}\} + \{[x_n - \delta_2, x_n + \delta_1] - M_{n-1}\} = 2\sum_{i=1}^{n-1} A_i + 2A_n,$$

takže platí $\mathfrak{A}_n$. Budiž konečně $x \in \mathsf{E}_1 - M_n$, $h > 0$; tedy $x \in \mathsf{E}_1 - M_{n-1}$ (podle $\mathfrak{B}_n$); podle $\mathfrak{C}_{n-1}$ je pak

$$\sum_{\substack{x-h \leqq x_i \leqq x+h \\ i \leqq n-1}} A_i \leqq \{M_{n-1} . [x - h, x + h]\} \leqq \{M_n . [x - h, x + h]\}. \tag{4}$$

Rozeznávejme nyní tři případy: a) $x_n \in \mathsf{E}_1 - [x - h, x + h]$; b) $x - h \leqq x_n \leqq x + h$, $x < x_n$, tedy $x < x_n - \delta_2$; c) $x - h \leqq x_n \leqq x + h$, $x > x_n$, tedy $x > x_n + \delta_1$. V případě a) se člen A_n v součtu $\sum_{\substack{x-h \leqq x_i \leqq x+h \\ i \leqq n}} A_i$ nevyskytuje, takže podle (4) platí (1). V případě b) je $[x - h, x + h] \supset [x, x + h] \supset [x_n - \delta_2, x_n]$ a tedy podle (3), (4)

---

*) Čtenář nechť si to představí asi takto: zvětšuji δ — od nuly počínaje — tak dlouho, až součet délek oněch částečných intervalů intervalu $[x_n, x_n + \delta]$, jež *nepatří* k M_{n-1}, je právě roven číslu A_n.

$$\{M_n\,.\,[x-h,\,x+h]\} = \{M_{n-1}\,.\,[x-h,\,x+h]\} +$$
$$+ \{M_n\,.\,[x-h,\,x+h] - M_{n-1}\} \geqq \{M_{n-1}\,.\,[x-h,\,x+h]\} +$$
$$+ \{[x_n-\delta_2,\,x_n] - M_{n-1}\} \geqq \sum_{\substack{x-h \leqq x_i \leqq x+h \\ i \leqq n-1}} A_i + A_n,$$

takže platí (1). V případě c) je $[x-h,\ x+h] \supset [x-h,\ x] \supset [x_n,\ x_n+\delta_1]$ a z (2), (4) plyne opět (1) obdobně jako v případě b). Ve všech možných případech platí tedy (1), tedy platí $\mathfrak{C}_n$ a existence posloupnosti $M_1, M_2, \ldots$ je dokázána.

Položme nyní $M = \sum_{n=1}^{\infty} M_n$; ježto $M_1 \subset M_2 \subset \ldots$, je

$$\{M\} = \lim_{n=\infty} \{M_n\} = \lim_{n=\infty} 2\sum_{i=1}^{n} A_i = 2\sum_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Je-li dále $x \in \mathsf{E}_1 - M$, $h > 0$, je $x \in \mathsf{E}_1 - M_n$ pro každé celé $n > 0$, takže

$$\sum_{\substack{x-h \leqq x_i \leqq x+h \\ i \leqq n}} A_i \leqq \{M_n\,.\,[x-h,\,x+h]\} \leqq 2h$$

pro každé celé $n > 0$, takže vskutku

$$\sum_{x-h \leqq x_i \leqq x+h} A_i \leqq 2h.$$

D 4·2. *Nechť* $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ *je konvergentní řada s kladnými členy; potom existuje neklesající posloupnost kladných čísel* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ *taková, že* $\alpha_n \to \infty$ *pro* $n \to \infty$ *a že řada* $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u_i$ *konverguje.*

Důkaz. Existují celá kladná čísla $1 = n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$ tak, že pro $p = 1, 2, \ldots$ platí $\sum_{i=n_p}^{\infty} u_i < 4^{-p}$; zvolme $\alpha_i = 2^p$ pro $n_p \leqq i < n_{p+1}$ $(p = 0, 1, \ldots)$; potom pro $p = 1, 2, \ldots$ platí $\sum_{n_p \leqq i < n_{p+1}} \alpha_i u_i < 2^{-p}$, takže všechny částečné součty řady $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u_i$ jsou menší než $\sum_{i=1}^{n_1-1} u_i + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots$, takže řada $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u_i$ konverguje.

D 4·3. *Budiž* $[a, b]$ *uzavřený interval; budiž* D *nekonečná spočetná množina,* $a \in D$, $b \in D$; *srovnejme body množiny* D *v prostou posloupnost* $x_1, x_2, \ldots$ *Buďte dále dány dvě absolutně konvergentní řady s reálnými členy* $\sum_{i=1}^{\infty} c_i$, $\sum_{i=1}^{\infty} d_i$. *Definujme funkci* ψ *v oboru* $[a, b]$ *vztahem*

$$\psi(x) = \sum_{a \leqq x_i \leqq x} c_i + \sum_{a \leqq x_i < x} d_i;$$

budiž N množina oněch $x \in [a, b]$, pro něž neplatí rovnice $\psi'(x) = 0$. Tvrdím: N je nulová množina.

Důkaz. Budiž $\varepsilon > 0$; položme $u_i = |c_i| + |d_i| + 2^{-i}$, takže $u_i > 0$ a řada $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ konverguje. Podle **D 4·2** zvolme neklesající posloupnost kladných čísel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ tak, že $\alpha_n \to \infty$ a že $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u_i$ konverguje; zvolme celé kladné k tak, že $\sum_{i=k+1}^{\infty} \alpha_i u_i < \frac{1}{2}\varepsilon$; položme $A_i = \alpha_{k+i} u_{k+i}$, $y_i = x_{k+i}$ pro $i = 1, 2, 3, \ldots$ Podle **D 4·1** existuje množina M, mající tyto vlastnosti:

1. $\{M\} = 2 \sum_{i=1}^{\infty} A_i < \varepsilon$.

2. Je-li $x \in \mathsf{E}_1 - M$, $h > 0$, je

$$\sum_{\substack{x-h \leqq x_i \leqq x+h \\ i>k}} \alpha_i u_i = \sum_{x-h \leqq y_i \leqq x+h} A_i \leqq 2h. \tag{5}$$

Položme ještě $P = M + D$, takže $\{P\} \leqq \{M\} + \{D\} = \{M\} < \varepsilon$ (neboť $\{D\} = 0$ podle **20·4·6**). Je-li $a \leqq x < z \leqq b$, je zřejmě

$$|\psi(z) - \psi(x)| = \left| \sum_{x < x_i \leqq x} c_i + \sum_{x \leqq x_i < z} d_i \right| \leqq \sum_{x \leqq x_i \leqq z} u_i. \tag{6}$$

Budiž nyní $x \in [a, b] - P$ (tedy $a < x < b$), $\lambda > 0$. Zvolme celé m tak velké, že $m > k$, $\lambda \alpha_m > 2$. Ježto $x \neq x_i$ pro každé i, existuje číslo $\delta > 0$ tak, že $a < x - \delta < x + \delta < b$ a že $|x - x_i| > \delta$ pro $i = 1, 2, \ldots, m$. Je-li $0 < h < \delta$, je podle (6) (při obojím znamení)

$$|\psi(x \pm h) - \psi(x)| \leqq \sum_{x-h \leqq x_i \leqq x+h} u_i = \sum_{\substack{x-h \leqq x_i \leqq x+h \\ i>k}} u_i = \sum_{\substack{x-h \leqq x_i \leqq x+h \\ i>m}} u_i. \tag{7}$$

Ale podle (5) je

$$2h \geqq \sum_{\substack{x-h \leqq x_i \leqq x+h \\ i>k}} \alpha_i u_i = \sum_{\substack{x-h \leqq x_i \leqq x+h \\ i>m}} \alpha_i u_i \geqq \alpha_m \sum_{\substack{x-h \leqq x_i \leqq x+h \\ i>m}} u_i \geqq \frac{2}{\lambda} \sum_{\substack{x-h \leqq x_i \leqq x+h \\ i>m}} u_i;$$

tedy podle (7) jest

$$\left| \frac{\psi(x \pm h) - \psi(x)}{\pm h} \right| \leqq \lambda$$

pro všechna h, pro něž platí $0 < h < \delta$; ježto λ bylo libovolné číslo kladné, je $\psi'(x) = 0$; t. j. $x \in [a, b] - P \Rightarrow \psi'(x) = 0$, čili $N \subset P$, tedy $\{N\} \leqq \{P\} < \varepsilon$; ježto ε bylo libovolné číslo kladné, je $\{N\} = 0$.

D 4·4. *Nechť f je funkce s variací konečnou v intervalu $[a, b]$. Pak existuje nulová množina N taková, že funkce f má konečnou derivaci $f'(x)$ v každém bodě $x \in [a, b] - N$.*

Důkaz. Podle **23·1·8** tvoří body intervalu $[a, b]$, v nichž f je nespojitá, spočetnou množinu. Lze tedy zvoliti nekonečnou spočetnou množinu D tak, že $a \in D$, $b \in D$ a že f je spojitá v každém bodě $x \in \in [a, b] - D$; srovnejme body množiny D v prostou posloupnost $x_1, x_2, \ldots$

Podle toho, co bylo řečeno na počátku odst. **23·3**, lze psáti $f = = \varphi + \psi$, kde φ je *spojitá* funkce s variací konečnou v intervalu $[a, b]$ a kde ψ je definováno takto: pro $a \leqq x \leqq b$ je $\psi(x) = \sum\limits_{a \leqq x_i < x} (f(x_i + + 0) - f(x_i - 0)) + f(x) - f(x - 0)$. Označme $d_i = f(x_i + 0) - f(x_i)$, $c_i = f(x_i) - f(x_i - 0)$; podle **23·1·7** jsou řady $\sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} d_i$ absolutně konvergentní. Uvážíme-li ještě, že $f(x) - f(x - 0) = c_i$ pro $x = c_i$, $f(x) - f(x - 0) = 0$ pro $x \in [a, b] - D$, je patrno, že

$$\psi(x) = \sum_{a \leqq x_i \leqq x} c_i + \sum_{a \leqq x_i < x} d_i.$$

Podle věty **D 4·4** existuje nulová množina N_1 tak, že $\psi'(x) = 0$ pro každé $x \in [a, b] - N_1$; podle věty **23·4·2** existuje nulová množina N_2 tak, že konečná derivace $\varphi'(x)$ existuje v každém bodě $x \in [a, b] - N_2$. Tím je věta **D 4·4** dokázána; stačí totiž položiti $N = N_1 + N_2$.

Ke konci tohoto odstavce uvedu ještě dvě drobnosti, jež budu potřebovati v odst. **D 6.**

D 4·5. *Nechť f je funkce neklesající v otevřeném intervalu (a, b)*); potom existuje nulová množina N taková, že funkce f má konečnou derivaci $f'(x)$ pro každé $x \in (a, b) - N$.*

Poznámka. Kdybychom ve větě **D 4·5** nahradili otevřený interval (a, b) uzavřeným intervalem $[a, b]$, plynula by věta **D 4·5** z věty **D 4·4**, ježto funkce neklesající v intervalu $[a, b]$ má podle **23·1·3** konečnou variaci v $[a, b]$.

Důkaz. Položme $\delta = b - a$ a pro $n = 3, 4, 5, \ldots$ kladme $J_n = = \left[a + \frac{\delta}{n}, b - \frac{\delta}{n}\right]$. Parciální funkce f_{J_n} je neklesající v uzavřeném intervalu J_n a tedy podle poznámky právě učiněné existuje množina $N_n \in \mathfrak{N}(\mathsf{E}_1)$ tak, že v každém bodě $x \in J_n - N_n$ existuje konečná derivace $f'_{J_n}(x)$. Položme $N = \sum\limits_{n=3}^{\infty} N_n$, takže $\{N\} = 0$. Je-li $x \in (a, b)$ —

*) O funkci f říkáme, že je neklesající v množině M, jestliže

$$x \in M,\ y \in M,\ x < y \Rightarrow f(x) \leqq f(y).$$

$-N$, existuje n tak, že $x \in \left(a + \frac{\delta}{n}, b - \frac{\delta}{n}\right) - N_n$, a tedy existuje konečná derivace $f'_{J_n}(x)$; zřejmě však je $f'(x) = f'_{J_n}(x)$, čímž důkaz proveden.

D 4·6. *Nechť $M \subset \mathsf{E}_1$ je neprázdná omezená množina; nechť f je funkce neklesající v M. Potom existuje interval $(a, b) \supset M$ a funkce g, neklesající v intervalu (a, b) taková, že $x \in M \Rightarrow g(x) = f(x)$.*

Důkaz. Existuje-li $\min M$ (t. j. je-li $\inf M \in M$), položme $a = \min M - 1 = \inf M - 1$; neexistuje-li $\min M$, položme $a = \inf M$. Obdobně: existuje-li $\max M$ (t. j. je-li $\sup M \in M$), položme $b = \max M + 1 = \sup M + 1$; neexistuje-li $\max M$, položme $b = \sup M$. Nechť $A_1 = \emptyset$ pro $a = \inf M$, $A_1 = (a, a + 1)$ pro $a = \inf M - 1$; $A_2 = \emptyset$ pro $b = \sup M$, $A_2 = (b - 1, b)$ pro $b = \sup M + 1$; položme $M_1 = A_1 + M + A_2$ a definujme funkci h v oboru M_1 takto:

$$x \in M \Rightarrow h(x) = f(x),\ x \in A_1 \Rightarrow h(x) = f(a + 1);$$
$$x \in A_2 \Rightarrow h(x) = f(b - 1).\text{*)} \tag{8}$$

Funkce h je zřejmě neklesající v M_1 a je

$$\inf M_1 = a \in \mathsf{E}_1 - M_1,\ \sup M_1 = b \in \mathsf{E}_1 - M_1. \tag{9}$$

Pro $a < x < b$ buď N_x množina všech hodnot $h(y)$ pro všechna y taková, že $y \in M_1$, $a < y \leqq x$; jest $N_x \neq \emptyset$, ježto podle (9) existuje aspoň jedno y tak, že $y \in M_1$, $a < y \leqq x$. Položme tedy $g(x) = \sup N_x$. Ježto podle (9) ke každému $x \in (a, b)$ existuje z tak, že $z \in M_1$, $x < z < b$, je

$$a < y \leqq x,\ y \in M_1 \Rightarrow h(y) \leqq h(z),$$

tedy $g(x) \leqq h(z) < \infty$. Funkce g je tedy konečná v (a, b) a zřejmě neklesající v (a, b), ježto $a < x < y < b \Rightarrow N_x \subset N_y \Rightarrow \sup N_x \leqq \sup N_y$. Konečně pro $x \in M$ je podle (8) $g(x) = h(x) = f(x)$, jak bylo dokázati.

D 5. V prostoru E_1 pojem „čtverec o straně s“ (viz počátek odst. **22·3**) znamená totéž jako „uzavřený interval délky s“ (t. j. interval $[a, a + s]$). Definice bodů metrické horní hustoty, podaná před větou **22·3·9**, dá se tedy v prostoru E_1 vysloviti takto: nechť $M \subset \mathsf{E}_1$, $x \in \mathsf{E}_1$. Pravíme, že bod x je bodem metrické horní hustoty množiny M, když ke každému $\gamma < 1$ existuje kladné δ, mající tuto vlastnost: je-li $a \leqq x \leqq b$, $0 < b - a < \delta$, je

$$\{M \,.\, [a, b]\} > \gamma(b - a).$$

(Specielně je tedy potom

$$\{M \,.\, [x - h, x + h]\} > 2\gamma h \text{ pro } 0 < h < \frac{\delta}{2}.)$$

*) Uvažme: je-li $A_1 \neq \emptyset$, je $a = \inf M - 1$, $\inf M \in M$, tedy $a + 1 \in M$, takže výraz $f(a + 1)$ má smysl; podobně pro A_2, $f(b - 1)$.

D 5·1. *Nechť $M \subset \mathsf{E}_1$; nechť x_0 je bodem metrické horní hustoty množiny M; nechť $0 < \varepsilon < 1$. Potom existuje $\delta > 0$ tak, že ke každému x, hovícímu nerovnostem $0 < | x - x_0 | < \delta$, existuje z takové, že*

$$z \in M,\ z \geqq x,\ \frac{z - x}{| x - x_0 |} \leqq \varepsilon. \tag{1}$$

Důkaz. Ježto x_0 je bod metrické horní hustoty a ježto $\frac{2 + \varepsilon}{1 + \varepsilon} < 2$, existuje $\delta > 0$ tak, že

$$0 < h < 2\delta \Rightarrow \{M \, . \, [x_0 - h, x_0 + h]\} > \frac{2 + \varepsilon}{1 + \varepsilon} h. \tag{2}$$

Nechť existuje x takové, že $0 < | x - x_0 | < \delta$ a že neexistuje žádné z, hovící vztahům (1), takže

$$M \, . \, [x, x + \varepsilon \, | x - x_0 |] = \emptyset; \tag{3}$$

z toho máme odvoditi spor.

Je-li $x > x_0$, položme $h = (x - x_0)(1 + \varepsilon)$; tedy $0 < h < 2\delta$ a podle (3) je

$$\{M \, . \, [x_0 - h, x_0 + h]\} = \{M \, . \, [x_0 - h, x]\} \leqq x - x_0 + h =$$
$$= (x - x_0) \, . \, (2 + \varepsilon) = \frac{2 + \varepsilon}{1 + \varepsilon} h,$$

což dává spor s (2). Je-li však $x < x_0$, položme $h = | x - x_0 | = x_0 - x$; tedy $0 < h < \delta < 2\delta$ a podle (3) je

$$\{M \, . \, [x_0 - h, x_0 + h]\} = \{M \, . \, [x, x_0 + h]\} =$$
$$\{M \, . \, [x + \varepsilon \, | x - x_0 |, x_0 + h]\} \leqq x_0 + h - x - \varepsilon \, | x - x_0 | =$$
$$= (2 - \varepsilon) h = \frac{2 + \varepsilon - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon} h < \frac{2 + \varepsilon}{1 + \varepsilon} h,$$

což dává opět spor s (2).

Poznamenejme, že bod z, hovící vztahům (1), má tyto vlastnosti: je-li $x > x_0$, je $x_0 < z < x_0 + 2 | x - x_0 |$; je-li $x < x_0$, je $x_0 - | x - x_0 | = x \leqq z < x_0$. Z toho okamžitě plyne

D 5·2. *Je-li x_0 bodem metrické horní hustoty množiny $M \subset \mathsf{E}_1$, potom ke každému $\lambda > 0$ existují dva body z_1, z_2 tak, že*

$$x_0 - \lambda < z_1 < x_0 < z_2 < x_0 + \lambda,\ z_1 \in M,\ z_2 \in M.$$

Větu **D 5·2** je ovšem možno dokázati velmi snadno též přímo z definice bodů horní metrické hustoty. Připomeňme ještě větu **22·3·12**, specialisovanou pro $m = 1$: Je-li $M \subset \mathsf{E}_1$ a je-li A množina všech bodů metrické horní hustoty množiny M, je $M - A \in \mathfrak{N}(\mathsf{E}_1)$.

D 6. Z elementů víme, že existují funkce spojité v oboru $[0, 1]$, které mají konečnou derivaci pro *každé* $x \in (0, 1)$; z **D 3·1** víme, že existují také funkce spojité v oboru $[0, 1]$, které nemají derivaci (konečnou ani nekonečnou) pro *žádné* $x \in (0, 1)$. Tato okolnost vzbudí snad v čtenáři pochybnost, zda vůbec existují nějaké jednoduché zákony, kterými se řídí derivovaná čísla *všech* funkcí spojitých. Uvidíme však, že vskutku existují velmi jednoduché a výrazné zákony, jimiž se řídí nejen derivovaná čísla všech funkcí spojitých, nýbrž dokonce derivovaná čísla *všech funkcí konečných*, ať jsou tyto funkce jakkoliv složité. Jeden z těchto zákonů si v tomto odstavci odvodíme, při čemž pro jednoduchost se omezíme na funkce, jejichž oborem je otevřený interval. Zákon, jejž mám na mysli, je dán touto větou:

D 6·1. *Budiž f funkce v oboru (a, b). Potom existuje nulová množina N, mající tuto vlastnost: v každém bodě $x \in (a, b) - N$ nastává jeden z těchto čtyř případů: buďto je*

$$-\infty < f^-(x) = f_-(x) = f^+(x) = f_+(x) < \infty \tag{1}$$

(t. j. existuje konečná derivace $f'(x)$); nebo je

$$f^-(x) = \infty,\ f_-(x) = -\infty,\ f^+(x) = \infty,\ f_+(x) = -\infty; \tag{2}$$

nebo je

$$f^+(x) = \infty,\ f_-(x) = -\infty,\ -\infty < f_+(x) = f^-(x) < \infty; \tag{3}$$

nebo je

$$f^-(x) = \infty,\ f_+(x) = -\infty,\ -\infty < f^+(x) = f_-(x) < \infty.\text{*)} \tag{4}$$

Poznamenejme ještě, že výsledek, uvedený ve větě **D 6·1**, je definitivní v tomto smyslu: jak vztahy (1), tak vztahy (2), tak vztahy (3), tak vztahy (4) mohou býti splněny na množině *kladné* míry, takže není ve větě **D 6·1** dovoleno vynechati žádný z uvedených čtyř případů. O tom nás poučuje tato věta:

D 6·2. *Existují čtyři funkce f_1, f_2, f_3, f_4 v oboru* $(0, 1)$ *a tři nulové množiny N_2, N_3, N_4 s těmito vlastnostmi:*

$$x \in (0, 1) \Rightarrow -\infty < f_1^-(x) = f_{1-}(x) = f_1^+(x) = f_{1+}(x) < \infty;$$

$$x \in (0, 1) - N_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f_2^-(x) = \infty,\ f_{2-}(x) = -\infty,\ f_2^+(x) = \infty,\ f_{2+}(x) = -\infty;$$

$$x \in (0, 1) - N_3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f_3^+(x) = \infty,\ f_{3-}(x) = -\infty,\ -\infty < f_{3+}(x) = f_3^-(x) < \infty;$$

$$x \in (0, 1) - N_4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f_4^-(x) = \infty,\ f_{4+}(x) = -\infty,\ -\infty < f_4^+(x) = f_{4-}(x) < \infty.$$

Důkaz. Budiž N_3 množina všech čísel tvaru $\frac{k}{2^n}$ (k, n celé, $n > 0$,

---

*) Výsledek je velmi názorný; doporučuji čtenáři, aby si naskizoval, jak se v každém ze čtyř uvedených případů chová spojnice bodu o souřadnicích x, $f(x)$ s bodem o souřadnicích $x + h$, $f(x + h)$, když h se blíží nule jednak kladnými, jednak zápornými hodnotami.

$0 < k < 2^n$); budiž N_4 množina všech čísel tvaru $\frac{k}{3^n}$ (k, n celé, $n > 0$, $0 < k < 3^n$); budiž $N_2 = N_3 + N_4$. Množiny N_2, N_3, N_4 jsou husté v (0, 1) a spočetné, tedy nulové; dále je $N_3 N_4 = \emptyset$ (na př. z tohoto důvodu: je-li $x \in N_4$, není žádné číslo $2^n x$ (n celé kladné) číslem celým a tedy nemůže býti $x \in N_3$). Položme:

$f_1(x) = 0$ pro $x \in (0, 1)$;
$f_2(x) = 0$ pro $x \in (0, 1) - (N_3 + N_4)$, $f_2(x) = 1$ pro $x \in N_3$,
$f_2(x) = -1$ pro $x \in N_4$;
$f_3(x) = 0$ pro $x \in (0, 1) - N_3$, $f_3(x) = 1$ pro $x \in N_3$;
$f_4(x) = 0$ pro $x \in (0, 1) - N_4$, $f_4(x) = -1$ pro $x \in N_4$.

Je jasno, že funkce f_1, f_2, f_3, f_4 a množiny N_2, N_3, N_4 mají požadované vlastnosti.*)

Klíčem k důkazu věty **D 6·1** je tato věta:

D 6·3. *Nechť f je funkce konečná v oboru (a, b). Položme*

$$P = \mathop{\mathrm{E}}_x(a < x < b,\ f_-(x) > -\infty).$$

Potom existuje nulová množina N tak, že

$$x \in P - N \Rightarrow -\infty < f_-(x) = f^+(x) < \infty.$$

(Jinými slovy: pro každé $x \in (a, b) - N$ je *buďto* $f_-(x) = -\infty$ *nebo* $-\infty < f_-(x) = f^+(x) < \infty$.)

Důkaz. Je-li $x \in P$, existuje celé kladné n tak, že $f_-(x) > -n$; podle **D I** existuje tedy racionální r takové, že $a \leqq r < x$ a že

$$r < \xi < x \Rightarrow \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \geqq -n.^{**)} \tag{5}$$

Pro každé racionální r ($a \leqq r < b$) a pro každé celé $n > 0$ budiž $P_{r,n}$ množina oněch $x \in (r, b)$, pro něž platí (5). Potom je tedy

$$P = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{r_k,n},$$

kdež posloupnost $r_1, r_2, \ldots$ je tak zvolena, že vyčerpává právě všechna racionální čísla r, pro něž je $a \leqq r < b$.

Zvolme pevně racionální číslo r ($a \leqq r < b$) a celé číslo $n > 0$; definujme ještě funkci g v oboru (a, b) vztahem $g(x) = f(x) + nx$ (g závisí ovšem na n); podle (5) je $P_{r,n}$ množina oněch $x \in (r, b)$, pro něž $r < \xi < x \Rightarrow g(x) \geqq g(\xi)$; tedy specielně $\xi \in P_{r,n}$, $x \in P_{r,n}$, $\xi < x \Rightarrow g(x) \geqq g(\xi)$, takže g je funkce neklesající v $P_{r,n}$. Podle **D 4·6**

---

*) S podstatně větší námahou mohli bychom funkce f_1, f_2, f_3, f_4 konstruovati dokonce tak, aby hověly požadavkům věty **D 6·2** a byly při tom *spojité*.

**) Poslední nerovnost lze též psáti $f(x) + nx \geqq f(\xi) + n\xi$.

existuje tedy interval $(c, d) \supset P_{r,n}$ a funkce φ (závislá ovšem na r, n) neklesající v (c, d) tak, že

$$x \in P_{r,n} \Rightarrow \varphi(x) = g(x).^{*)} \qquad (6)$$

Podle **D 4·5** existuje množina $A_{r,n} \in \mathfrak{N}(\mathsf{E}_1)$ tak, že pro $x \in (c, d) - A_{r,n}$ existuje konečná derivace $\varphi'(x)$; podle věty **22·3·12** (citované na konci odst. **D·5**) existuje množina $B_{r,n} \in \mathfrak{N}(\mathsf{E}_1)$ tak, že každý bod $x \in P_{r,n} - B_{r,n}$ je bodem metrické horní hustoty množiny $P_{r,n}$. Položme $C_{r,n} = A_{r,n} + B_{r,n}$, takže $C_{r,n} \in \mathfrak{N}(\mathsf{E}_1)$.

Budiž $x_0 \in P_{r,n} - C_{r,n}$, takže existuje $\varphi'(x_0) = t$ $(-\infty < t < \infty)$ a bod x_0 je bodem metrické horní hustoty množiny $P_{r,n}$. Dokážeme nyní (to bude hlavní bod důkazu), že

$$-\infty < f_-(x_0) = f^+(x_0) = t - n < \infty.$$

Budiž $\varepsilon > 0$; potom existuje $\delta_1 > 0$ tak, že

$$0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow t - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} < t + \frac{\varepsilon}{2},$$

takže podle (6)

$$x \in P_{r,n},\ 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow t - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} < t + \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (7)$$

Ježto x_0 je bodem metrické horní hustoty množiny $P_{r,n}$, platí podle **D 5·2** tento

Výrok A. Ke každému $\lambda > 0$ existují dvě čísla x_1, x_2 tak, že

$$x_0 < x_1 < x_0 + \lambda,\ \frac{g(x_1) - g(x_0)}{x_1 - x_0} > t - \frac{\varepsilon}{2},$$

$$x_0 - \lambda < x_2 < x_0,\ \frac{g(x_2) - g(x_0)}{x_2 - x_0} < t + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Za druhé: podle **D 5·1** existuje číslo $\delta_2 > 0$ tak, že ke každému x, hovícímu nerovnostem $0 < |x - x_0| < \delta_2$, existuje číslo z tak, že

$$z \in P_{r,n},\quad x \leqq z \leqq x + \frac{\varepsilon}{2(|t| + \varepsilon)}\,|x - x_0|. \qquad (8)$$

Pišme $\delta = \min(\frac{1}{2}\delta_1, \delta_2, x_0 - r)$ a budiž předně

$$x_0 < x < x_0 + \delta.$$

Potom existuje číslo z tak, že platí (8); dále je $x_0 < z < x_0 + 2(x - x_0) < x_0 + \delta_1$, takže podle (7) je

$$t - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{g(z) - g(x_0)}{z - x_0} < t + \frac{\varepsilon}{2}.$$

---

*) Při použití věty **D 4·6** jest ovšem předpokládati $P_{r,n} \neq \emptyset$; ale pro $P_{r,n} = \emptyset$ je vše triviální.

Ježto však $z \in P_{r,n}$, $r < x \leqq z$, je podle definice množiny $P_{r,n}$ splněna nerovnost $g(z) \geqq g(x)$, takže

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \leqq \frac{g(z) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{g(z) - g(x_0)}{z - x_0}\left(1 + \frac{z - x}{x - x_0}\right) <$$

$$< t + \frac{\varepsilon}{2} + \left(|\,t\,| + \frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{\varepsilon}{2\,(\,|\,t\,| + \varepsilon)} \leqq t + \varepsilon.$$

Budiž za druhé

$$x_0 - \delta < x < x_0;$$

potom existuje z tak, že platí (8); dále je $r < x \leqq z < x_0$ a tedy $0 < < |\,z - x_0\,| < \delta_1$; tedy je podle (7)

$$t - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{g(z) - g(x_0)}{z - x_0} < t + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ježto však $z \in P_{r,n}$, $r < x \leqq z$, je opět $g(z) \geqq g(x)$ a tedy (uvažme, že $x - x_0 < 0$)

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \geqq \frac{g(z) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{g(z) - g(x_0)}{z - x_0}\left(1 + \frac{z - x}{x - x_0}\right) >$$

$$> t - \frac{\varepsilon}{2} - \left(|\,t\,| + \frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{\varepsilon}{2\,(\,|\,t\,| + \varepsilon)} \geqq t - \varepsilon.$$

Platí tedy tento

Výrok B. Existuje $\delta > 0$ tak, že

$$x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} < t + \varepsilon,$$

$$x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} > t - \varepsilon.$$

Ježto kladné číslo ε bylo libovolné, plyne z výroků **A**, **B** a z **D I·I**, že

$$t = \limsup_{x = x_0+} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g^+(x_0)$$

a obdobně

$$t = \liminf_{x = x_0-} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g_-(x_0).$$

Zřejmě však $f^+(x_0) = g^+(x_0) - n$, $f_-(x_0) = g_-(x_0) - n$, takže vskutku

$$-\infty < f_-(x_0) = f^+(x_0) = t - n < \infty.$$

Ježto x_0 byl libovolný bod množiny $P_{r,n} - C_{r,n}$, je

$$x \in P_{r,n} - C_{r,n} \Rightarrow -\infty < f_-(x) = f^+(x) < \infty. \tag{9}$$

Položme $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{r_k,n} = N$; je $N \in \mathfrak{N}(\mathsf{E}_1)$ a pro $x \in P - N$, t. j. pro $x \in \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{r_k,n} - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{r_k,n}$ platí při vhodně zvoleném k, n

$$x \in P_{r_k,n} - N \subset P_{r_k,n} - C_{r_k,n},$$

takže podle (9) je $-\infty < f_-(x) = f^+(x) < \infty$, jak bylo dokázati.

Poznámka. Vezmu-li místo funkce $f(x)$ funkci $-f(x)$, vymění se horní derivovaná čísla s dolními a změní svá znamení; vezmu-li místo funkce $f(x)$ funkci $f(-x)$, vymění se horní derivovaná čísla s dolními, mimo to ještě derivovaná čísla zprava s derivovanými čísly zleva a změní svá znamení; vezmu-li místo funkce $f(x)$ funkci $-f(-x)$, vymění se derivovaná čísla zprava s derivovanými čísly zleva. Mohu tedy zřejmě k větě **D 6·3** najíti ještě tři věty obdobné (podrobnosti mohu zajisté přenechati čtenáři); spojením těchto čtyř vět (při čemž se opírám o znění věty **D 6·3**, uvedené v závorce) dostanu okamžitě tuto větu:

D 6·4. *Budiž f funkce v oboru (a, b). Potom existuje množina $N \in \mathfrak{N}(\mathsf{E}_1)$ tak, že pro každé $x \in (a, b) - N$ platí předně*

$$\textit{buďto } f_-(x) = -\infty \textit{ nebo } -\infty < f_-(x) = f^+(x) < \infty; \tag{10}$$

za druhé

$$\textit{buďto } f^-(x) = \infty \textit{ nebo } -\infty < f_+(x) = f^-(x) < \infty; \tag{11}$$

za třetí

$$\textit{buďto } f_+(x) = -\infty \textit{ nebo } -\infty < f_+(x) = f^-(x) < \infty; \tag{12}$$

za čtvrté

$$\textit{buďto } f^+(x) = \infty \textit{ nebo } -\infty < f_-(x) = f^+(x) < \infty. \tag{13}$$

Důkaz věty **D 6·1** plyne již okamžitě z věty **D 6·4.** Budiž totiž $x \in (a, b) - N$ (N je množina z věty **D 6·4**). Rozeznávejme dva případy: α) $f_-(x) = -\infty$, β) $f_-(x) > -\infty$.

V případě α) není $f_-(x) > -\infty$ a tedy podle (13) je $f^+(x) = \infty$; je-li $f^-(x) < \infty$, je podle (11) $-\infty < f_+(x) = f^-(x)$ a tedy celkem

$$f^+(x) = \infty,\ f_-(x) = -\infty,\ -\infty < f_+(x) = f^-(x) < \infty,$$

t. j. platí (3). Je-li však $f^-(x) = \infty$, je podle (12) $f_+(x) = -\infty$ a tedy celkem

$$f^+(x) = \infty,\ f_+(x) = -\infty,\ f^-(x) = \infty,\ f_-(x) = -\infty,$$

t. j. platí (2).

V případě β) není $f_-(x) = -\infty$ a tedy podle (10) je $-\infty < f_-(x) =$

$= f^+(x) < \infty$; je-li $f^-(x) = \infty$, je podle (12) $f_+(x) = -\infty$, tedy celkem

$$f^-(x) = \infty,\ f_+(x) = -\infty,\ -\infty < f_-(x) = f^+(x) < \infty,$$

t. j. platí (4). Je-li však $f^-(x) < \infty$, je podle (11) $-\infty < f_+(x) = f^-(x) < \infty$. Podle **D 2** je však $f^+(x) \geqq f_+(x)$, takže $f_-(x) = f^+(x) \geqq f_+(x) = f^-(x)$; ježto podle **D 2** je také $f_-(x) \leqq f^-(x)$, platí nutně znamení rovnosti, takže

$$-\infty < f_-(x) = f^+(x) = f_+(x) = f^-(x) < \infty,$$

t. j. platí (1). Pro každé $x \in (a, b) - N$ platí tedy jeden z případů (1), (2), (3), (4), čímž věta **D 6·1** dokázána.
