auch die nämlichen Blätter zusammen. Aus diesem Grunde nennt *Riemann* alle rationalen Functionen von w und z ein System gleichverzweigter Functionen.

Vierter Abschnitt.

Integrale mit complexen Variabelen.

---

§ 16.

Man kann das bestimmte Integral von einer Function einer complexen Veränderlichen genau in derselben Weise definiren, wie dies bei reellen Variablen geschieht.

Es seien z_0 und z irgend zwei complexe Werthe der Variablen z. Man denke sich die Puncte, welche diese beiden Werthe repräsentiren, durch eine beliebige ununterbrochene Linie verbunden und nehme auf derselben eine Reihe eingeschalteter Puncte an, welche den Werthen $z_1, z_2, \ldots z_n$ der Variablen entsprechen. Ist ferner $f(z)$ eine Function von z, und bildet man die Summe der Producte

$$f(z_0)(z_1 - z_0) + f(z_1)(z_2 - z_1) + \ldots\ldots + f(z_n)(z - z_n),$$

so ist der Grenzwerth derselben, wenn die Anzahl der zwischen z_0 und z längs der beliebigen Linie eingeschalteten Werthe ins Unendliche zunimmt, die Differenzen $z_1 - z_0$, $z_2 - z_1$, etc. also ins Unendliche abnehmen, das bestimmte Integral zwischen den Grenzen z_0 und z, also

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = \lim \left[f(z_0)(z_1 - z_0) + f(z_1)(z_2 - z_1) + \ldots\ldots + f(z_n)(z - z_n)\right].$$

Man sieht, dass diese Definition von der gewöhnlich bei reellen Variablen gegebenen in nichts Wesentlichem verschieden ist. Ein Unterschied besteht allerdings darin, dass, wie es die Natur einer complexen Veränderlichen erfordert, der Weg, den dieselbe zwischen der unteren und der oberen Grenze durchläuft, d. h. die Reihe der dazwischen liegenden Werthe, nicht vorgeschrieben ist, sondern durch jede ununterbrochene Linie gebildet werden kann.

Von dieser Linie, welche der **Integrationsweg** genannt wird, ist das Integral durchaus abhängig.

Aus der Definition folgen unmittelbar folgende zwei Sätze:

1) Bedeutet z_k irgend einen der von der Variablen durchlaufenen Werthe, so ist

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = \int_{z_0}^{z_k} f(z)\,dz + \int_{z_k}^{z} f(z)\,dz,$$

2) Es ist

$$\int_{z}^{z_0} f(z)\,dz = -\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz,$$

d. h. durchläuft die Variable die Linie, welche die stetige Aufeinanderfolge ihrer Werthe darstellt, in umgekehrter Richtung, so erhält das Integral den entgegengesetzten Werth.

Man kann ferner zeigen, dass, wie auch immer der Integrationsweg beschaffen sein mag, das Integral

$$w = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$$

stets eine Function der oberen Grenze z ist. Denn setzt man

$$z = x + iy \qquad z_0 = x_0 + iy_0$$

und nimmt an, der Integrationsweg sei durch irgend eine Beziehung zwischen x und y

$$\varphi(x, y) = 0,$$

aus welcher

$$y = \psi(x) \qquad \text{und} \quad x = \lambda(y)$$

folge, gegeben, so hat man

$$w = \int_{x_0 + iy_0}^{x + iy} f(x + iy)(dx + idy).$$

Dies Integral zerlegt sich in zwei Theile; drückt man in dem einen alles durch x, in dem andern alles durch y aus, so kann man schreiben

$$w = \int_{x_0}^{x} f(x + i\psi(x))\,dx + i\int_{y_0}^{y} f(\lambda(y) + iy)\,dy.$$

Hierin kann nun auch die Function f auf die Form einer complexen Grösse gebracht werden, dadurch wird man auf lauter reelle Integrale geführt und dann folgt unmittelbar, dass man auf die vorigen Integrale die bei reellen Integralen gültigen Differentiationsregeln anwenden kann. Alsdann erhält man

$$\frac{\partial w}{\partial x} = f(x + i\psi(x)) = f(x + iy)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = if(\lambda(y) + iy) = if(x + iy)$$

Demnach ist
$$\frac{\partial w}{\partial y} = i\,\frac{\partial w}{\partial x},$$

also (nach § 5) w eine Function von z. Aus dem zweiten der oben angeführten Sätze ergiebt sich dann, dass w auch als Function der unteren Grenze betrachtet werden kann. Da ferner (§ 5) $\frac{dw}{dz} = \frac{\partial w}{\partial x}$ ist, so folgt auch

$$\frac{dw}{dz} = f(z).$$

Dagegen darf der bei reellen Integralen gültige Satz, dass, wenn $F(z)$ eine Function bedeutet, deren Derivirte $= f(z)$ ist,

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = F(z) - F(z_0)$$

gesetzt werden kann, nicht ohne Weiteres auf complexe Integrale übertragen werden, denn, wie schon bemerkt, hängt der Werth eines solchen nicht bloss von der oberen und unteren Grenze, sondern auch von der ganzen Reihe der dazwischen liegenden Werthe, d. h. von dem Integrationswege ab.

§ 17.

Um nun den Einfluss zu untersuchen, den der Integrationsweg auf den Werth des Integrales hat, beginnen wir mit folgender Betrachtung. Es sei

$$z = x + iy$$

die Variable, also x und y die rechtwinkligen Coordinaten des darstellenden Punctes. Hat man nun ein auf irgend eine Weise bestimmt begrenztes Flächenstück, welches aus einem oder auch aus mehreren Blättern bestehen kann, und bedeuten P und Q zwei reelle innerhalb des Flächenstückes überall endliche und stetige Functionen von x und y, so soll zunächst bewiesen werden, dass das auf das ganze Flächenstück ausgedehnte Flächenintegral

$$J = \int\!\!\int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

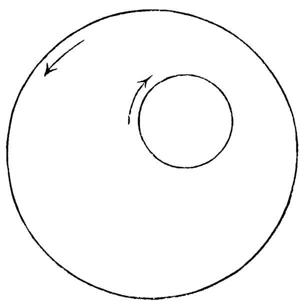
dem über die ganze Begrenzung des Flächenstücks erstreckten Linienintegral

$$\int (Pdx + Qdy)$$

gleich ist.

Wir werden diesen Satz nicht bloss für den einfachsten Fall beweisen, dass das Flächenstück nur aus einem einzigen Blatte besteht und von einer einzigen einfach in sich zurücklaufenden Linie begrenzt wird, sondern wir wollen auch gleich die Fälle mit berücksichtigen, in welchen die Begrenzung aus mehreren abgesonderten geschlossenen Linien besteht, die entweder ganz ausser einander liegen können, oder von denen eine oder mehrere von einer andern ganz umschlossen werden; endlich wollen wir auch den Fall nicht ausschliessen, dass das Flächenstück aus mehreren Blättern besteht, welche über die Verzweigungsschnitte hinüber in einander übergehen. Alsdann werden wir jedoch annehmen, dass das Flächenstück keine Verzweigungspuncte enthält, in denen die Functionen P und Q unendlich oder unstetig werden. Es muss nun aber, um alle diese Fälle zu umfassen, etwas Bestimmtes über den Sinn der Begrenzungsrichtung festgesetzt werden. Wenn wir, wie es üblich ist, annehmen, dass die positiven Richtungen der x- und y-Axe so liegen, dass ein im Nullpuncte stehender und nach der positiven Richtung der x-Axe hinblickender Beobachter die positive y-Axe zu seiner Linken sieht, so wollen wir die positive Begrenzungsrichtung so annehmen, dass jemand, der dieselbe in dieser Richtung durchläuft, das begrenzte Flächenstück stets an der linken Seite hat. Man kann dies auch so ausdrücken: In jedem Puncte der Begrenzung liegt die in das Innere des Flächenstücks gezogene Normale zur positiven Begrenzungsrichtung so, wie die positive y-Axe zur positiven x-Axe. Besteht z. B. die Begrenzung aus einer äusseren geschlossenen Linie und einem ganz innerhalb derselben liegenden Kreise, so dass die innerhalb dieses Kreises liegenden Puncte sich ausserhalb des begrenzten Flächenstücks befinden, so ist bei der äusseren Linie die positive Begrenzungs-

Fig. 21.



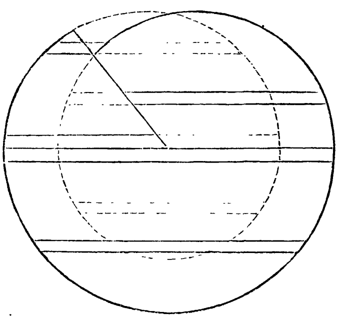
richtung die der wachsenden Winkel, bei dem kleinen Kreise dagegen die entgegengesetzte, wie es die Pfeile in Fig. 21 andeuten. Bei dem Linienintegrale nun, von welchem wir beweisen wollen, dass es dem angegebenen Flächenintegrale gleich ist, muss die Integration über die ganze Begrenzung in der eben erläuterten positiven Richtung erstreckt werden.

Wir schreiben das Integral J in der Form

$$J = \int\int \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx dy - \int\int \frac{\partial P}{\partial y}\, dx dy,$$

und können dann in dem ersten Theile die Integration nach x, im zweiten Theile die nach y ausführen. Zu diesem Zwecke zerlegen wir für das erste Integral das Flächenstück in Elementarstreifen, welche durch einander unendlich naheliegende, der x-Axe parallel laufende Gerade gebildet werden, und im Falle Verzweigungspuncte vorhanden sind, tragen wir Sorge, dass durch jeden derselben eine solche Gerade hindurch gehe. Dadurch zerfällt das ganze Flächenstück in unendlich schmale trapezförmige Streifen. In Fig. 22 sind z. B. bei einer aus 2 Blättern bestehenden Fläche, welche durch eine einen Verzweigungspunct zweimal umgebende geschlossene Linie begrenzt ist, mehrere solcher trapezförmigen Stücke dargestellt, wobei die im zweiten Blatte verlaufenden Linien punctirt sind. Hebt man nun irgend einen, einem beliebigen Werthe von y angehörigen, dieser Elementarstreifen heraus, d. h. wenn die Fläche aus mehreren Blättern besteht, alle diejenigen in den verschiedenen Blättern unmittelbar unter einander liegenden Elementarstreifen, die demselben Werthe von y angehören, und bezeichnet die Werthe, welche die Function Q an denjenigen Stellen besitzt, wo der Elementarstreifen die Begrenzung durchschneidet, von links nach rechts gerechnet (d. h. in der Richtung der positiven x-Axe) an den Eintrittsstellen mit

Fig. 22.



$$Q_1,\ Q_2,\ Q_3 \ldots .$$

und an den Austrittsstellen mit

$$Q',\ Q'',\ Q''',\ldots .$$

so ist (Fig. 23)

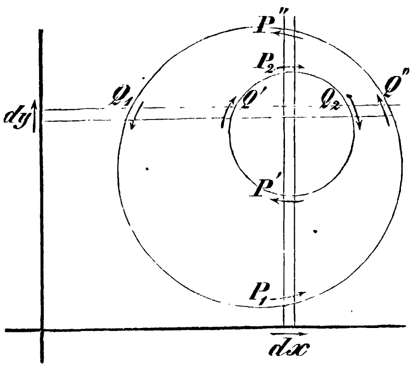
$$\int \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx = -Q_1 + Q' - Q_2 + Q'' - \cdots\cdots,\text{*)}$$

also

$$\int\int \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx dy = \int -Q_1\, dy + \int Q'\, dy + \int -Q_2 dy + \cdots\cdots.$$

In den Integralen rechter Hand durchläuft y alle Werthe vom kleinsten bis zum grössten, dy ist also immer positiv zu nehmen. Bezeichnet man aber die Projectionen der durch die Elementarstreifen aus der Begrenzung herausgeschnittenen Bogenelemente auf die y-Axe, in derselben Reihenfolge wie oben genommen, an den Eintrittsstellen durch

Fig. 23.



$$dy_1,\ dy_2,\ dy_3,\ \ldots.,$$

und an den Austrittsstellen durch

$$dy',\ dy'',\ dy'''.\ \ldots.$$

*) Man bemerke dass diese Gleichung auch dann noch richtig bleibt, wenn $\frac{\partial Q}{\partial x}$ an irgend einer Stelle, über die sich die Integration erstreckt, unendlich oder unstetig wird, wenn nur Q an dieser Stelle keine Unterbrechung der Stetigkeit erleidet. Ist nämlich $f(x)$ eine Function der reellen Variablen x, welche an einer Stelle $x = a$ stetig ist, während ihr Differentialquotient $f'(x)$ an dieser Stelle eine Unterbrechung der Stetigkeit erleidet, so nehme man zu beiden Seiten von a zwei unendlich nahe an a liegende Werthe x_h und x_k an. Liegt dann in dem Integrale

$$\int_{x_0}^{x_1} f'(x)\, dx$$

a zwischen den Grenzen x_0 und x_1, und bleibt $f(x)$ zwischen denselben stetig, während $f'(x)$ nur an der Stelle $x = a$ unstetig ist, so kann man setzen

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx = \lim \left[\int_{x_0}^{x^h} f'(x)\, dx + \int_{x^k}^{x_1} f'(x)\, dx\right],$$

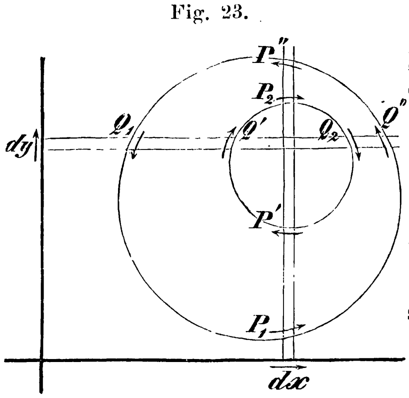
wo der Grenzübergang sich auf das Zusammenfallen von x_h und x_k mit und nimmt auf die positive Begrenzungsrichtung Rücksicht, so ist (Fig. 23)

$$dy = dy_1 = -dy_2 = -dy_3 = \cdots$$
$$= + dy' = + dy'' = + dy''' = \cdots,$$

folglich

$$\int\int \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int Q_1\, dy_1 + \int Q'\, dy' + \int Q_2\, dy_2 + \cdots\cdots.$$

Fig. 23.



In allen diesen Integralen verändert sich y im Sinne der positiven Begrenzungsrichtung, daher vereinigen sich alle zu einem einzigen, und man erhält

$$\int\int \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int Q dy,$$

wenn das letztere Integral auf die ganze Begrenzung in positiver Richtung erstreckt wird.

Ebenso kann man nun auch das zweite Integral

$$\int\int \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$$

behandeln. Hier zerlegt man das Flächenstück in Elementarstreifen durch gerade Linien, welche der y-Axe parallel laufen und lässt durch jeden Verzweigungspunct eine solche Gerade hindurch-

---

a bezieht. Da nun $f'(x)$ von x_0 bis x_h und von x_k bis x_1 stetig ist, so folgt

$$\int_{x_0}^{x_1} f'(x)\, dx = \lim\, [f(x_h) - f(x_0) + f(x_1) - f(x_k)],$$

und da $f(x)$ an der Stelle $x = a$ stetig ist, also beim Uebergang zur Grenze $f(x_h)$ und $f(x_k)$ einander gleich werden, oder

$$\lim\, [f(x_h) - f(x_k)] = 0$$

ist, so hat man trotz der Stetigkeitsunterbrechung von $f'(x)$ zwischen den Grenzen des Integrals doch

$$\int_{x_0}^{x_1} f'(x)\, dx = f(x_1) - f(x_0).$$

Dieser Fall ist hier mit zu berücksichtigen, da sich später zeigen wird, dass die Derivirten stetiger Functionen in den Verzweigungspuncten unendlich gross werden können (§ 39).

geln. Bezeichnet man dann die Werthe, welche die Function P an den Stellen hat, wo ein Elementarstreifen die Begrenzung durchschneidet, diese Werthe der Reihe nach von unten nach oben (nämlich in der Richtung der positiven y-Axe) gerechnet, an den Eintrittsstellen mit

$$P_1, \; P_2, \; P_3, \ldots .$$

und an den Austrittsstellen mit

$$P', \; P'', \; P''', \ldots \ldots ,$$

so ist wieder

$$\iint \frac{\partial P}{\partial y}\, dxdy = -\int P_1\, dx + \int P'\, dx - \int P_2\, dx + \cdots \cdots ,$$

und darin ist dx positiv. Bezeichnen aber

$$dx_1, \; dx_2, \; dx_3, \ldots . \text{ und } dx', \; dx'', \; dx''', \ldots .$$

die Projectionen der herausgeschnittenen Bogenelemente, so ist mit Berücksichtigung der positiven Begrenzungsrichtung

$$dx = +\, dx_1 = +\, dx_2 = +\, dx_3 = \cdots \cdots$$

und daher $\quad = -\, dx' = -\, dx'' = -\, dx''' = \cdots \cdots$

$$\iint \frac{\partial P}{\partial y}\, dxdy = -\int P_1\, dx_1 - \int P'\, dx' - \int P_2\, dx_2 - \cdots \cdot ,$$

$$= -\int Pdx,$$

worin wieder das Integral auf die ganze Begrenzung in positiver Richtung auszudehnen ist. Setzt man nun beide Integrale zusammen, so folgt, was zu beweisen war,

$$\iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int (Pdx + Qdy),$$

das Linienintegral auf die ganze Begrenzung in positiver Richtung erstreckt.

Dieser hierdurch für reelle Functionen P und Q bewiesene Satz kann sofort für den Fall erweitert werden, dass P und Q complexe Functionen der reellen Variablen x und y sind. Nämlich setzt man

$$P = P' + i\, P'' \qquad\qquad Q = Q' + i\, Q'',$$

worin P', P'', Q', Q'' reelle Functionen von x und y bedeuten, so ist

$$\iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint \left(\frac{\partial Q'}{\partial x} - \frac{\partial P'}{\partial y}\right) dxdy$$
$$+\, i \iint \left(\frac{\partial Q''}{\partial x} - \frac{\partial P''}{\partial y}\right) dxdy,$$

und wenn man den Satz auf die reellen Theile der rechten Seite anwendet,

$$= \int (P' \, dx + Q' \, dy) + i \int (P'' \, dx + Q'' \, dy)$$
$$= \int (P dx + Q dy).$$

Wir haben bisher angenommen, dass innerhalb des betrachteten Flächentheils keine Verzweigungspuncte oder andere Puncte liegen, in denen P oder Q unstetig ist. Um nun auch solche Flächentheile mit in die Betrachtung hineinziehen zu können, haben wir nur nöthig, solche Puncte mit beliebig kleinen (wirklich) geschlossenen Linien zu umgeben und dadurch auszuschliessen, wobei dann diese Linien mit zu der Begrenzung des Flächentheils gehören.

§ 18.

I. Aus dem vorigen Satze folgt sogleich der folgende: **Wenn $Pdx + Qdy$ ein vollständiges Differential ist, so ist das Integral $\int (Pdx + Qdy)$ ausgedehnt auf die ganze Begrenzung eines Flächenstücks, innerhalb dessen P und Q endlich und stetig sind, gleich Null.** Denn wenn $Pdx + Qdy$ ein vollständiges Differential ist, so ist

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

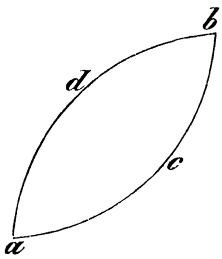
also verschwinden alle Elemente des Flächenintegrals, welches dem Linienintegrale gleich ist, und folglich ist dieses wie jenes gleich Null.

Wenn nun $$w = f(z)$$
eine Function einer complexen Variablen $z = x + iy$ ist, so ist [§ 5. (1)]
$$\frac{\partial w}{\partial y} = i \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial (iw)}{\partial x},$$
folglich
$$wdx + iwdy \quad \text{d. h.} \quad w\,(dx + idy) \quad \text{oder } wdz$$
ein vollständiges Differential, und daher

II. $$\int f(z)\, dz = 0,$$
wenn dieses Integral über die ganze Begrenzung eines Flächenstücks ausgedehnt wird, innerhalb dessen $f(z)$ endlich und stetig ist.

Hieraus folgt weiter: Lässt man die Veränderliche z zwischen zwei Puncten a und b zwei verschiedene Wege acb und adb (Fig. 24) durchlaufen, welche zusammen eine geschlossene Linie

Fig. 24.



bilden, die für sich allein ein Flächenstück vollständig begrenzt, und ist innerhalb des so begrenzten Flächenstücks $f(z)$ endlich und stetig, so ist über die geschlossene Linie erstreckt

$$\int f(z)\,dz = 0.$$

Um ein auf einem bestimmten Wege genommenes Integral kurz zu bezeichnen, wählen wir den Buchstaben J und fügen demselben den Integrationsweg in Klammern hinzu, sodass z. B. das auf dem Wege acb genommene Integral $\int f(z)\,dz$ durch $J(acb)$ angedeutet wird. Dann kann man die letzte Gleichung schreiben

$$J(acbda) = 0.$$

Nun ist aber (§ 16)

$$J(acbda) = J(acb) + J(bda)$$

und

$$J(bda) = -J(adb),$$

also folgt

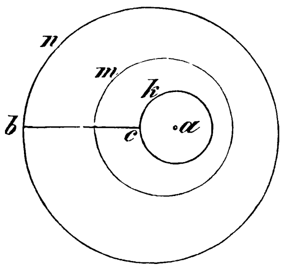
$$J(acb) = J(adb).$$

Das Integral $\int f(z)\,dz$ hat also auf zwei verschiedenen, dieselben Puncte verbindenden Wegen immer denselben Werth, wenn die beiden Wege zusammengenommen ein Flächenstück vollständig begrenzen, in welchem $f(z)$ endlich und stetig ist. III.

Hat man nun ein zusammenhängendes Flächenstück, in welchem $f(z)$ endlich und stetig bleibt, von der Beschaffenheit, dass jede darin gezogene (wirklich) geschlossene Linie für sich allein die vollständige Begrenzung eines Flächentheils bildet, so hat das Integral $\int f(z)\,dz$ auf allen Wegen zwischen denselben zwei Puncten denselben Werth. Lässt man die untere Grenze z_0 constant sein, so ist also innerhalb eines solchen Flächenstückes das Integral eine einwerthige Function der oberen Grenze, und bezeichnet $F(z)$ eine Function, deren Derivirte $= f(z)$, so ist innerhalb jenes Flächenstücks $\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = F(z) - F(z_0)$, da in diesem Falle der Werth des Integrals von dem Integrationswege unabhängig ist.

Es tritt hier die grosse Bedeutung hervor, welche solchen Flächen zukommt, in denen jede geschlossene Linie für sich allein die vollständige Begrenzung eines Flächentheiles bildet. *Riemann* hat die Flächen von dieser Beschaffenheit mit dem Namen einfach zusammenhängende Flächen bezeichnet. Eine solche ist z. B. eine Kreisfläche. Ist in einer solchen $f(z)$ überall stetig, so ist, wie bemerkt, $\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ in derselben eine einwerthige Function der oberen Grenze. Wenn dagegen $f(z)$ in einer Kreisfläche unendlich gross wird, z. B. nur in einem Puncte a, und umgiebt man diesen, um ein Flächenstück zu erhalten, in welchem $f(z)$ stetig bleibt, mit einem kleinen Kreise k, und schliesst den Punct a dadurch aus, so ist die so entstehende ringförmige Fläche (Fig. 25) nicht mehr einfach zusammenhängend; denn eine Linie m, welche den kleinen Kreis k ganz umschliesst, bildet für sich allein noch nicht die vollständige Begrenzung eines Flächentheils, sondern erst m und k zusammen Demnach hat zwar das auf m und k zugleich erstreckte Integral den Werth Null, wenn aber das auf k allein ausgedehnte Integral nicht gleich Null ist, so kann auch das längs m genommene nicht Null sein. Innerhalb einer solchen Fläche, welche *Riemann* mehrfach zusammenhängend nennt, kann daher die Abhängigkeit des Integrals von dem Integrationswege bestehen bleiben und dann das Integral eine vieldeutige Function der oberen Grenze sein.*)

Fig. 25.



§ 19.

Wir lassen jetzt die Voraussetzung, dass die Function $f(z)$ in dem zu betrachtenden Flächenstücke überall stetig sei, fallen und gehen zur Untersuchung von Integralen über, deren Integrationswege Flächentheile begrenzen, in denen die Function nicht mehr überall stetig ist.

Wenn $f(z)$ in irgend einem Puncte eines Flächenstückes unendlich oder unstetig ist, so soll ein solcher Punct ein Unstetigkeitspunct genannt werden. Er kann zugleich ein Verzwei-

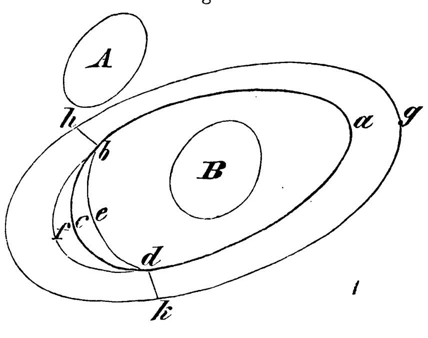
*) Siehe Abschnitt IX und X.

gungspunct sein oder auch nicht. Giebt es nun in einem Flächenstücke Unstetigkeitspuncte, so ist man nicht mehr in allen Fällen berechtigt zu schliessen, dass das über die ganze Begrenzung des Flächenstücks ausgedehnte Integral den Werth Null habe, weil der Beweis dieses Satzes wesentlich auf der Voraussetzung beruht, dass $f(z)$ innerhalb des Flächenstückes nicht unstetig wird. Aber man kann zeigen, dass, welchen Werth das Integral auch haben mag, es seinen Werth nicht ändert, wenn man das Flächenstück um beliebige Stücke vergrössert oder verkleinert, wenn nur $f(z)$ innerhalb der hinzugekommenen oder ausgeschiedenen Flächentheile endlich und stetig ist. IV. Denn wird erstlich ein hinzukommendes oder ausgeschiedenes Flächenstück selbst von einer Linie vollständig begrenzt, wie z. B. A oder B (Fig. 26, wo $abcda$ die ursprüngliche Begrenzung sei), so ist, wenn $f(z)$ innerhalb A und B stetig ist, das auf die Begrenzung von A oder B erstreckte Integral gleich Null; es kann daher die Begrenzung von A oder B beliebig der ursprünglichen Begrenzung hinzugefügt werden, ohne dass der Werth des Integrals sich ändert. Wird aber das hinzugekommene oder ausgeschiedene Flächenstück zum Theil von der ursprünglichen Begrenzung mit begrenzt, wie $bfdcb$ oder $bcdeb$, so ist

$$J(bfd) = J(bcd) = J(bed),$$

wenn $f(z)$ innerhalb jener Flächentheile stetig ist. Daher kann der Begrenzungstheil bcd beliebig durch bfd oder bed ersetzt werden, ohne dass das Integral seinen Werth ändert. Hieraus folgt weiter, dass man auch eine geschlossene Linie, welche entweder allein die Begrenzung eines Flächentheils bildet oder doch

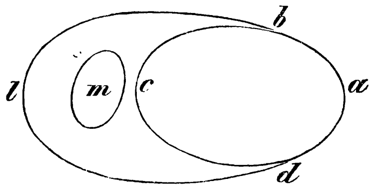
Fig. 26.



zu den Begrenzungsstücken eines solchen gehört, durch eine beliebige weitere oder engere geschlossene Linie ersetzen kann, wenn nur dadurch keine Flächentheile ein- oder austreten, in denen $f(z)$ unendlich oder unstetig wird, denn um z. B. $abcda$

in $ghkg$ zu erweitern, braucht man nur zuerst bcd durch $bhkd$ und dann dab durch $dkghb$ zu ersetzen. Endlich kann man auch ein Flächenstück $abcda$ (Fig. 27) durch ein ringförmiges

Fig. 27.



Stück, das von der Linie $bldcb$ und der Linie m begrenzt wird, vergrössern, wenn nur die Function $f(z)$ in dem Ringe stetig bleibt, mag sie auch innerhalb m unstetig werden. Denn unter dieser Voraussetzung ist

$$J(bldcb) + J(m) = 0.$$

Setzt man also

$$J(dabcd) = S,$$

so ist auch

$$\begin{aligned} S &= J(dabcd) + J(bldcb) + J(m) \\ &= J(dab) + J(bcd) + J(bld) + J(dcb) + J(m) \end{aligned}$$

und da

$$J(bcd) + J(dcb) = 0$$

ist,
$$S = J(dab) + J(bld) + J(m)$$
oder
$$S = J(dabld) + J(m).$$

In ähnlicher Weise lässt sich die Richtigkeit des Satzes in allen Fällen darthun. Ganz allgemein aber, auch für Flächenstücke, die aus mehreren Blättern bestehen, kann er so bewiesen werden. Wird eine beliebige Fläche T so in zwei Theile A und B getheilt, dass $f(z)$ in A stetig ist, und bezeichnet man das über die Begrenzung eines Theiles, z. B. A erstreckte Integral $\int f(z)\,dz$ durch $J(A)$, so ist

$$J(A) = 0.$$

Haben nun die Theile A und B keine gemeinschaftlichen Begrenzungsstücke, so bilden die Begrenzungen von A und B zusammen die Begrenzung von T und daher ist

$$J(T) = J(A) + J(B)$$

und folglich auch

$$J(T) = J(B).$$

Gehören dagegen gewisse Linien C sowohl zur Begrenzung von A, als auch zu der von B, so werden diese Linien, wenn man die Begrenzungen von A und B hinter einander in der positiven Richtung durchläuft, zweimal und zwar in entgegengesetzter Richtung durchlaufen; die längs C genommenen Integrale heben sich daher auf; die übrigen Begrenzungstheile von A und B aber bilden die ganze Begrenzung von T, und daher hat man wieder

$$J(T) = J(A) + J(B)$$

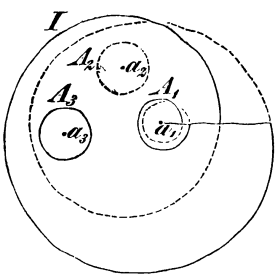
und folglich

$$J(T) = J(B).$$

Da nun hiernach der Theil A aus der Fläche T ausgeschieden werden kann, so kann auch umgekehrt eine Fläche B durch Hinzufügung einer Fläche A, in welcher die Function stetig bleibt, erweitert werden, ohne dass das Begrenzungsintegral sich ändert.

Hierauf stützt sich nun ein anderer wichtiger Satz. Bildet eine geschlossene Linie (I) für sich allein die vollständige Begrenzung eines Flächentheils, und wird die Function $f(z)$ innerhalb desselben in den Puncten $a_1, a_2, a_3, \cdots$ unstetig, so umgebe man jeden einzelnen dieser Puncte mit einer beliebig kleinen geschlossenen Linie, z. B. mit einem kleinen Kreise, der aber, wenn einer dieser Unstetigkeitspuncte zugleich ein Verzweigungspunct ist, so viele Male durchlaufen werden muss, als Blätter in letzterem zusammenhängen. Alsdann bilden alle diese Kreise, die mit $(A_1), (A_2), (A_3), \cdots$ bezeichnet werden mögen, mit der äusseren Linie (I) zusammen die Begrenzung eines Flächenstückes, in welchem $f(z)$ stetig ist. (Fig. 28, wo die punctirten Linien im zweiten Blatte verlaufen). Folglich ist das auf diese ganze Begrenzung in positiver Richtung erstreckte Integral $\int f(z)\,dz$ gleich Null. Wird nun aber die äussere Linie (I) in der Richtung der wachsenden Winkel durchlaufen, so müssen die kleinen Kreise $(A_1), (A_2), (A_3), \cdots$ in der Richtung der abnehmenden Winkel durchlaufen werden.

Fig. 28.



Bezeichnet man daher die auf die Linien $(I), (A_1), (A_2), (A_3), \cdots$ in der Richtung der wachsenden Winkel erstreckten Integrale $\int f(z)\,dz$ resp. mit $I, A_1, A_2, A_3, \cdots$, so ist

$$I - A_1 - A_2 - A_3 \ldots = 0$$

und folglich

$$I = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots.$$

Befindet sich nun die Linie (I) in einem Flächenstücke T, welches keine anderen Unstetigkeitspuncte enthält, als die von ihr umschlossenen $a_1, a_2, a_3, \ldots$, so behält das Integral I nach dem vorigen Satze seinen Werth, wenn es auf die Begrenzung von T ausgedehnt wird, und daher erhalten wir den Satz:

V. Das Integral $\int f(z)\,dz$, ausgedehnt auf die ganze Begrenzung eines Flächenstücks T, ist gleich der Summe der Integrale längs kleiner geschlossener Linien, welche die sämmtlichen innerhalb T befindlichen Unstetigkeitspuncte einzeln umgeben, alle Integrale in derselben Richtung genommen.

§ 20.

Durch die vorige Betrachtung sind wir nun auf die Untersuchung solcher geschlossener Integrationswege geführt worden, welche nur einen einzigen Unstetigkeitspunct umgeben. Dabei müssen wir aber unterscheiden, ob der Unstetigkeitspunct zugleich ein Verzweigungspunct ist, oder nicht. Betrachten wir zuerst einen Punct a, welcher nicht Verzweigungspunct ist, und in welchem $f(z)$ unendlich gross wird. Nimmt man das Integral

$$A = \int f(z)\,dz$$

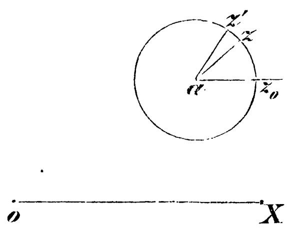
längs einer diesen Unstetigkeitspunct umgebenden Linie, welche weder einen andern Unstetigkeitspunct noch auch einen Verzweigungspunct einschliesst, so kann diese durch einen kleinen Kreis um den Punct a mit dem Radius r ersetzt werden, welchen man auch ins Unendliche abnehmen lassen kann, ohne dass der Werth des Integrals sich ändert. Schreibt man dann

$$A = \int (z - a)\, f(z)\, \frac{dz}{z - a}$$

und setzt

$$z - a = r\,(\cos\varphi + i \sin\varphi),$$

Fig. 29.



so bleibt, wenn z den kleinen Kreis durchläuft, r constant, und φ wächst von 0 bis 2π. Dabei wird angenommen, dass der Punct z seine Bewegung aus dem Puncte z_0 beginne, in welchem eine aus a mit der positiven Hauptaxe parallel gezogene Gerade den Kreis durchschneidet (Fig. 29). Dies ist gestattet, da der Anfangspunct der Bewegung willkürlich gewählt werden kann. Um nun $\frac{dz}{z-a}$ durch r und φ auszudrücken, bemerke man mit *Riemann*, dass dz einen von einem beliebigen Puncte z der Peripherie des Kreises ausgehenden unendlich kleinen Kreisbogen bedeutet, dessen Centriwinkel $= d\varphi$ ist. Bezeichnet man den Endpunct dieses unendlich kleinen Kreisbogens mit z', so ist

$$dz = z' - z \quad , \quad \frac{dz}{z - a} = \frac{z' - z}{z - a}.$$

Nun ist aber § 2. S. 20 gezeigt worden, dass

$$\frac{z' - z}{z - a} = \frac{zz'}{az} (-\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

ist, wo α den Winkel azz' bedeutet. Dieser ist in unserem Falle ein Rechter, also

$$\frac{dz}{z - a} = i\,\frac{zz'}{az}.$$

Die Linie zz' ist ein Kreisbogen mit dem Centriwinkel $d\varphi$, also $= rd\varphi$, az der Radius, also $= r$, folglich erhält man

$$\frac{dz}{z - a} = i\,\frac{rd\varphi}{r} = id\varphi.$$

Setzt man dies ein, so folgt

$$A = \int_0^{2\pi} (z - a)\, f(z)\, i\, d\varphi.$$

Lässt man jetzt den Radius r des Kreises ins Unendliche abnehmen, so nähern sich die Puncte z der Peripherie des Kreises dem Puncte a, $z - a$ also der Null, während $f(z)$ unendlich gross wird. Wenn nun der Fall eintritt, dass $f(z)$ für $z = a$ so unendlich wird, dass das Product $(z - a) f(z)$ sich einem bestimmten endlichen Grenzwerth p nähert, also

$$[\lim (z - a)\, f(z)]_{z=a} = p$$

ist, so folgt

$$A = \int_0^{2\pi} p\, i\, d\varphi = 2\pi i p,$$

und dadurch ist der Werth des Integrales durch den Grenzwerth von $(z - a) f(z)$ ausgedrückt, wenn derselbe ein endlicher und bestimmter ist. Dieser Werth von A ändert sich nach IV nicht, wenn die Integration auf die vollständige Begrenzung eines Flächentheils ausgedehnt wird, innerhalb dessen keine Verzweigungspuncte und keine Unstetigkeitspuncte ausser a sich befinden.

Als Beispiel diene

$$\int \frac{dz}{1 + z^2}.$$

Hier ist

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z-i)(z+i)},$$

welches für $z = i$ unendlich wird, ohne dass dieser Punct ein Verzweigungspunct ist (die Function $\frac{1}{1+z^2}$ hat überhaupt keine Verzweigungspuncte). Ferner ist

$$p = \left[\lim \frac{z-i}{1+z^2}\right]_{z=i} = \left[\lim \frac{1}{z+i}\right]_{z=i} = \frac{1}{2i},$$

also

$$\int \frac{dz}{1+z^2} = \pi,$$

das Integral auf eine den Punct i umgebende geschlossene Linie in der Richtung der wachsenden Winkel ausgedehnt.

Liegen nun in einem Flächenstücke T zwar keine Verzweigungspuncte, wohl aber die Unstetigkeitspuncte a_1, a_2, a_3, etc., und wird $f(z)$ in diesen Puncten so unendlich, dass die Producte $(z-a_1) f(z)$, $(z-a_2) f(z)$, etc. sich bestimmten endlichen Grenzwerthen p_1, p_2, etc. nähern, sodass

$$[\lim (z-a_1) f(z)]_{z=a_1} = p_1$$

$$[\lim (z-a_2) f(z)]_{z=a_2} = p_2$$

etc.

ist, so erhält man für das auf die ganze Begrenzung von T erstreckte Integral $\int f(z)\,dz$ den Werth (V. § 19)

$$\int f(z)\,dz = 2\pi i\,(p_1 + p_2 + p_3 + \cdots\cdots).$$

In dem vorigen Beispiele wird

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

auch für $z = -i$ unendlich gross, und für diesen Punct erhält man

$$p_2 = \left[\lim \frac{z+i}{1+z^2}\right]_{z=-i} = \left[\lim \frac{1}{z-i}\right]_{z=-i} = -\frac{1}{2i},$$

also auf eine den Punct $-i$ umgebende Linie erstreckt

$$\int \frac{dz}{1+z^2} = -\pi.$$

Für eine Linie, welche beide Puncte $+i$ und $-i$ in der Richtung der wachsenden Winkel umgiebt, wird daher dieses Integral $= \pi - \pi = 0$.

Vermittelst solcher geschlossener Linien, die nur einen einzigen Unstetigkeitspunct umgeben, kann man nun innerhalb eines

Flächentheils, der keine Verzweigungspuncte der Function $f(z)$ enthält, die für verschiedene Integrationswege geltenden Werthe der Integrale auf einander beziehen. Wenn zwei Wege bec und bdc (Fig. 10) nur einen Unstetigkeitspunct a und keinen Verzweigungspunct einschliessen, so kann der eine, z. B. bdc dadurch ersetzt werden, dass man dem anderen bec eine den Unstetigkeitspunct umgebende geschlossene Linie $bghb$ vorangehen lässt. Denn nach IV. § 19 ist

$$J\,(bghb) = J\,(bdceb) = J\,(bdc) - J\,(bec)$$

also $$J\,(bdc) = J\,(bghb) + J\,(bec)$$

oder auch $$J\,(bec) = -\,J(bghb) + J\,(bdc)$$
$$= J\,(bhgb) + J\,(bdc).$$

Fig. 10.

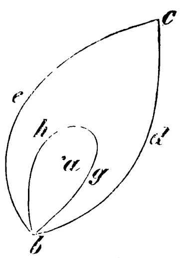
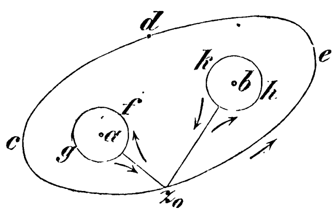


Fig. 11.



Ebenso verhält es sich, wenn zwei Wege mehrere Unstetigkeitspuncte, aber keine Verzweigungspuncte einschliessen. Umgeben z. B. die Wege z_0ed und z_0cd (Fig. 11) zwei Unstetigkeitspuncte a und b, so ziehe man aus z_0 um jeden derselben eine geschlossene Linie z_0fgz_0 und z_0hkz_0. Dann ist

$$J\,(z_0fgz_0) + J\,(z_0hkz_0) = J\,(z_0edcz_0)$$
$$= J\,(z_0ed) - J\,(z_0cd)$$

also $$J\,(z_0ed) = J\,(z_0fgz_0) + J\,(z_0hkz_0) + J\,(z_0cd).$$

Man kann daher den einen Weg dadurch ersetzen, dass man dem andern geschlossene Linien um je einen der Unstetigkeitspuncte vorhergehen lässt.

Wie sich das Integral A um einen Unstetigkeitspunct a verhält, wenn darin $(z - a)\,f(z)$ nicht mehr einen endlichen Grenzwerth hat, kann erst später (Abschnitt VIII.) bestimmt werden.

§ 21.

Wir gehen nun zu dem Falle über, dass der Unstetigkeitspunct zugleich ein Verzweigungspunct ist, in welchem Falle er mit b, und der Integralwerth für eine um ihn gelegte Linie mit B bezeichnet werden soll; wir nehmen an, dass in diesem Puncte m Blätter der Fläche zusammenhängen. Will man hier eine geschlossene Linie haben, die den Punct b umgiebt, so muss dieselbe m Umläufe um b machen, also z. B. die Peripherie eines Kreises m Mal durchlaufen werden. *Riemann* führt für diesen Fall statt z eine neue Variable ζ ein, indem er setzt

$$\zeta^m = z - b,$$

welche also für $z = b$ den Werth 0 erhält, und untersucht, wie sich die Function $f(z)$ als Function von ζ betrachtet, an der Stelle $\zeta = 0$ verhält. Zu diesem Ende sehen wir zuerst zu, welche Linie ζ beschreibt, während z einen geschlossenen Kreis, d. h. also m Umläufe um einen solchen zurücklegt. Setzt man wieder

$$z - b = r\,(\cos\varphi + i \sin\varphi),$$

also

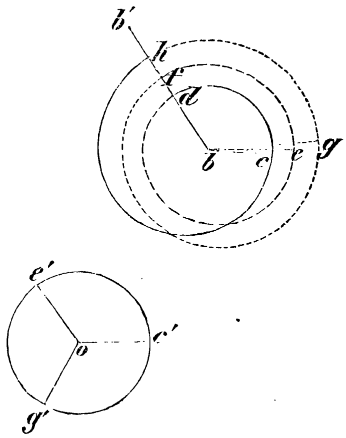
$$\zeta = r^{\frac{1}{m}}\,(\cos\frac{1}{m}\,\varphi + i\,\sin\frac{1}{m}\,\varphi)$$

so bleibt r, also auch $r^{\frac{1}{m}}$ constant, und daher beschreibt ζ ebenfalls einen Kreis und zwar um den Nullpunct. Hat aber z einen Umlauf vollendet, sodass φ von 0 bis 2π gewachsen ist, so ist $\frac{1}{m}\,\varphi$ von 0 bis $\frac{2\pi}{m}$ gewachsen, also hat ζ den $m$ten Theil der Peripherie zurückgelegt. Bei dem zweiten Umlaufe des z beschreibt ζ auf's Neue einen $m$ten Theil der Peripherie, und ebenso bei jedem neuen Umlaufe des z. Hat z daher m Umläufe gemacht und ist auf seinen Ausgangspunct zurückgekommen, so hat ζ die ganze Peripherie des Kreises gerade einmal durchlaufen. Den m Flächentheilen, welche von dem Radius r während jedes Umlaufes überstrichen werden, entsprechen also m Kreissectoren, jeder mit dem Centriwinkel $\frac{2\pi}{m}$. Diese fügen sich an einander und bilden zusammen eine einfache Kreisfläche. In Fig. 30. ist angenommen, dass in dem Puncte b drei Blätter zusammenhängen, welche über den Verzweigungsschnitt bb' hinüber in einander übergehen. Die in den drei Blättern verlaufenden Kreislinien sind der Deutlichkeit wegen neben einander gezeichnet, und die im 1sten, 2ten und 3ten Blatte verlaufenden Linien resp. durch eine ausgezogene Linie, durch Striche und durch Puncte bezeichnet worden. Dann entspricht

der Fläche cde der Kreissector $c'oe'$
„ „ efg „ „ $e'og'$
„ „ ghc „ „ $g'oc'$,

dem ganzen von der geschlossenen Linie $cdefghc$ begrenzten Flächentheile entspricht daher die einfache Kreisfläche $c'e'g'c'$. Es ergiebt sich also, dass, während z, alle m Blätter durchlaufend, erst nach m Umläufen zu seinem Ausgangspuncte zurückkommt, dies bei ζ schon nach dem ersten Umlaufe eintritt. Die Variable ζ tritt daher aus ihrem ersten Blatte nicht heraus, und folglich hat die Function $f(z)$ als Function von ζ betrachtet an der Stelle $\zeta = 0$ keinen Verzweigungspunct. Wenn wir demnach in dem Integrale $\int f(z)\, dz$ ausgedehnt auf eine geschlossene Linie, welche den Verzweigungs- und Unstetigkeitspunct b umgiebt, ζ als Variable einführen, so können wir die Betrachtung des vorigen § anwenden, weil $\zeta = 0$ kein Verzweigungspunct, sondern ein blosser Unstetigkeitspunct ist. Es gehe nun durch die Substitution von $\zeta = (z-b)^{\frac{1}{m}}$ die Function $f(z)$ in $\varphi(\zeta)$ über; dann wird, weil $dz = m\, \zeta^{m-1} d\zeta$, ist,

Fig. 30.



$$B = m \int \zeta^{m-1}\, \varphi(\zeta)\, d\zeta = m \int \zeta^{m}\, \varphi(\zeta)\, \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Setzt man der Kürze wegen $\frac{1}{m}\varphi = \psi$, also $\zeta = r^{\frac{1}{m}}(\cos\psi + i \sin\psi)$, so wächst bei dem ganzen Umlaufe ψ von 0 bis 2π, und da wie oben $\frac{d\zeta}{\zeta} = i d\psi$ ist, so erhält man

$$B = m \int_0^{2\pi} \zeta^m\, \varphi(\zeta)\, i\, d\psi.$$

Nun ist der Annahme nach $\varphi(\zeta)$ für $\zeta = 0$ unendlich gross. Geschieht dies Unendlichwerden aber so, dass eins der Producte

$$\zeta\, \varphi(\zeta),\ \zeta^2 \varphi(\zeta),\ \ldots\ldots,\ \zeta^{m-1} \varphi(\zeta)$$

sich einem endlichen Grenzwerthe nähert, so ist

$$[\lim \zeta^m \varphi(\zeta)]_{\zeta=0} = 0.$$

Lässt man also den Radius r der um den Punct b beschriebenen Kreislinien ins Unendliche abnehmen, so wird dann

$$B = \int f(z)\, dz = 0.$$

Kehren wir nun wieder zur Variablen z zurück, so erhalten wir den Satz: **Wenn das Integral $\int f(z)\, dz$ auf eine geschlossene Linie ausgedehnt wird, die einen Unstetigkeitspunct umgiebt, der zugleich ein Verzweigungspunct ist, in welchem m Blätter der Fläche zusammenhängen, so hat dasselbe immer den Werth Null, wenn eins der Producte**

$$(z-b)^{\frac{1}{m}} f(z),\ (z-b)^{\frac{2}{m}} f(z), \ldots .\ (z-b)^{\frac{m-1}{m}} f(z)$$

sich einem endlichen Grenzwerthe nähert.

Als Beispiel diene

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}}.$$

Hier ist

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}},$$

welches für $z = 1$ unendlich wird. Dieser Punct ist zugleich ein Verzweigungspunct, in welchem zwei Blätter zusammenhängen. Man setze daher

$$\zeta^2 = z - 1$$

und erhält

$$f(z) = \varphi(\zeta) = \frac{1}{i\zeta \sqrt{(2+\zeta^2)(1-k^2(1+\zeta^2)^2)}},$$

sodass in der That $\zeta = 0$ kein Verzweigungspunct für $\varphi(\zeta)$ ist. Nun erhält man

$$\lim \left[(z-1)^{\frac{1}{2}} f(z)\right]_{z=1} = \left[\lim \frac{1}{i\sqrt{(z+1)(1-k^2 z^2)}}\right]_{z=1} = \frac{1}{i\sqrt{2(1-k^2)}},$$

folglich ist

$$[\lim (z-1) f(z)]_{z=1} = 0$$

und daher auch

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}} = 0,$$

wenn das Integral längs einer den Punct $z = 1$ umgebenden geschlossenen Linie genommen wird. Denselben Werth hat das Integral auch, wenn die geschlossene Linie einen der drei anderen Verzweigungspuncte -1, $+\frac{1}{k}$, $-\frac{1}{k}$ umgiebt.

Die Untersuchung, welchen Werth das Integral B hat, wenn die Voraussetzungen des vorigen Satzes nicht erfüllt sind, kann erst später (Abschnitt VIII) vorgenommen werden.

Fünfter Abschnitt.

Der Logarithmus und die Exponentialfunction.

§ 22.

Da wir in der Folge von einigen Eigenschaften des Logarithmus Gebrauch zu machen genöthigt sein werden, so müssen wir für einen Augenblick die allgemeinen Betrachtungen unterbrechen und uns zuerst mit dieser speciellen Function beschäftigen. Dabei erscheint es nicht unzweckmässig, diese Untersuchung etwas vollständiger zu führen, als es für die beabsichtigte Anwendung nothwendig gewesen wäre, und auch gleich daran die Betrachtung der aus dem Logarithmus folgenden Exponentialfunction anzuschliessen. Da wir es hier alsdann mit einem speciellen Falle der in den Abschnitten IX und X anzustellenden allgemeinen Untersuchungen zu thun haben, so kann dies Beispiel auch dazu dienen, für jene späteren Betrachtungen die Vorstellungen zu fixiren.

Wir bezeichnen nach *Riemann* mit dem Namen Logarithmus jede Function $f(z)$, welche die Eigenschaft hat, dass

$$f(z.u) = f(z) + f(u) \tag{5}$$

ist. Dadurch ist die Function bis auf eine Constante vollständig bestimmt, denn wir werden daraus alle ihre Eigenschaften ableiten können. Setzt man zuerst $u = 1$ und lässt z beliebig, so folgt

$$f(z) = f(z) + f(1)$$