Elementarlehre von den Logarithmen auf einem neuen, verständlicheren und umfassenden Begriff dieser Hilfszahlen gegründet, bloß die Kenntniß der gewöhnlichsten Zifferrechnungen voraussetzten, ohne Algebra gemeinfastlich zergliedert

Elementarlehre von den Logarithmen. §1 - §47

In: Wilhelm Matzka (author): Elementarlehre von den Logarithmen auf einem neuen, verständlicheren und umfassenden Begriff dieser Hilfszahlen gegründet, bloß die Kenntniß der gewöhnlichsten Zifferrechnungen voraussetzten, ohne Algebra gemeinfastlich zergliedert. (German). Prag: J. G. Calve, 1850. pp. [9]--82.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/400408

Elementarlehre

von den

Logarithmen.

§. 1.

Anlaß zur Erfindung der Logarithmen
gaben mancherlei Rechnungsschwierigkeiten.

Die Beschwerlichkeiten, mit denen man bekanntlich bei dem Rechnen oberhalb des Addirens und Subtrahirens, nemlich bei dem Multipliciren, Dividiren, Potenziren und Wurzelziehen (Radiciren), besonders bei vielziffrigen Zahlen, zu kämpfen hat, haben die Mathematiker veranlaßt, nachzusinnen, ob und wie diese Rechnungen mit geringerer Mühe ausgeführt werden könnten. In diesem Streben verfiel einer auf den geistreichen Gedanken, nicht mit den in solchen Rechnungsaufgaben vorkommenden, sowohl den gegebenen als den geforderten Zahlen selbst auf jene schwierigen Weisen, sondern mit gewissen anderen zu Hilfe genommenen oder Hilfszahlen einfacher und leichter zu rechnen, welche er die „Logarithmen" der von ihnen vertretenen Zahlen nannte.

§. 2.

Grundvorstellung von den Logarithmen.
Sie sind Stellvertreter der Zahlen in Rechnungen.

Diese Benennung „Logarithmus" wurde aus den griechischen

Wörtern **logos** und **arithmos** zusammengesetzt, von denen ersteres in der Mathematik das Verhältniß, den Verhalt, die Beziehung oder den Bezug von Größen auf oder gegen einander, letzteres aber Zahl bedeutet; weil die erwähnten Hilfszahlen gegen jene ursprünglichen, denen sie zugehören, in einem gewissen wohl bemessenen Verhältniß, Verhalt, Bezug oder Zusammenhang, in einer angemessenen Beziehung stehen. Daher könnte man diesen Namen mit Beziehungszahl oder Bezugszahl verdeutschen.

Die Grundvorstellung von den Logarithmen der Zahlen besteht demnach darin, daß man

1. anstatt der Zahlen, mit denen man eigentlich rechnen sollte, die ihnen angehörigen Logarithmen nehme,

2. aus diesen auf leichtere Weisen den Logarithmus der zu suchenden Zahl berechne, und

3. zu diesem Logarithmus wieder die Zahl bestimme, der er angehört, wonach diese die von der Rechnungsaufgabe eigentlich verlangte Zahl sein wird.

Zu größerer Verdeutlichung und zu besserem Verständniß dieser mit den Logarithmen zu verbindenden Grundvorstellung wird es gut sein, noch Folgendes zu bemerken:

a. Insofern diese mit dem Namen „Logarithmen" belegten Hilfszahlen — eben so wie Abgeordnete oder Bevollmächtigte von Regenten, Landschaften, Städten, Körperschaften, Versammlungen und dgl. die Personen ihrer abwesenden Auftraggeber vertreten oder vorstellen, und anstatt ihrer und in ihrem Namen die ihnen angewiesenen Geschäfte besorgen, — die ursprünglichen Zahlen in den Rechnungen vertreten, können sie als Repräsentanten (Vertreter, Stellvertreter), Geschäftsträger, Bevollmächtigte der Zahlen angesehen werden, denen sie angehören.

b. Insofern die Logarithmen auf die eigentlich in Rechnung zu nehmenden oder durch Rechnung zu suchenden Zahlen zurück- oder hinzeigen oder -weisen, lassen sie sich als Zeiger oder Weiser (Indices) dieser Zahlen betrachten.

§. 3.

Grundforderung an die Logarithmen:
„Zahl und Logarithme bestimmen einander gegenseitig."

Damit aber sowohl bei dem Uebergange von den Zahlen auf ihre Logarithmen (Stellvertreter), als auch bei dem Rückschritte von den Logarithmen (den Zeigern) auf die Zahlen vollkommene Entschiedenheit herrsche, muß zwischen Zahl und Logarithmus der genaueste Zusammenhang, die schärfste gegenseitige Bestimmung obwalten; die Zahl muß den Logarithmus, und der Logarithmus die Zahl völlig bestimmen.

Es muß nemlich

1. jede Zahl einen, aber auch nicht mehr als diesen einzigen Logarithmen (Stellvertreter) besitzen, der sich unzweifelhaft finden läßt, sobald man sie kennt; und

2. umgekehrt muß auch jeder Logarithme (Zeiger) einer, aber auch nur einer einzigen Zahl zugehören, mithin auf sie allein hinweisen, so daß sie aus ihm unzweideutig erkannt werde. —

Z. B. Würden wir uns entschließen, der Zahl 243 den Logarithmen (Zeiger) 20 beizulegen; so stände es uns nicht weiter frei, ihr auch noch andere Logarithmen zuzuschreiben, weil wir, wenn wir veranlaßt wären, in einer vorzunehmenden Rechnung die Zahl 243 durch ihren Logarithmen vertreten zu lassen, in Zweifel gerathen müßten, welchen ihrer Logarithmen wir wählen sollten, ob 20 oder einen anderen. Eben so wenig dürften wir diesen Logarithmen (Zeiger) 20, sobald wir ihn schon der Zahl 243 beigelegt haben, auch noch einer anderen beischreiben; denn würde eine mit Logarithmen bereits durchgeführte Rechnung ausweisen, daß 20 der Logarithme (Weiser) derjenigen Zahl sei, die wir suchen, so würden wir unschlüssig sein, ob wir 243 oder eine jener anderen Zahlen für die gesuchte erklären sollen.

Diese Grundforderung an die Logarithmen läßt sich auch, wie folgt, aussprechen:

1. Zu einerlei Zahl muß einerlei Logarithmus gehören, oder

   Zu gleichen Zahlen müssen gleiche Logarithmen gehören; und umgekehrt:

2. Zu einerlei Logarithmus muß einerlei Zahl gehören, oder

   Zu gleichen Logarithmen müssen gleiche Zahlen gehören.

Wegen dieser wechselseitigen Bestimmung der Zahl und ihres Logarithmen ist man berechtigt, nicht nur den Logarithmen der Zahl, sondern auch die Zahl dem Logarithmen an- oder zugehörig, entsprechend (correspondirend) zu nennen.

§. 4.

Begriff und Erforderniß von **Logarithmentafeln.**

Die bei der Einführung der Logarithmen bezweckte Vereinfachung und Erleichterung der Rechnungen (§. 1), so wie die enge Verknüpfung und gegenseitige Bestimmung der Zahlen und ihrer Logarithmen (§. 3) erheischen, daß die Logarithmen, wenigstens der gewöhnlich in den Rechnungen vorkommenden Zahlen, mögen sie nun entweder nach Gefallen gewählt, oder nach feststehenden Gesetzen (wie immer leicht oder schwer) berechnet werden, — was wir vor der Hand, so lange unsere Einsicht in die Bestimmungsweisen derselben nicht weiter gediehen ist, nicht zu entscheiden vermögen — in eigenthümliche, leicht zu handhabende Verzeichnisse gesammelt und übersichtlich dergestalt geordnet werden, daß man mittels ihrer ohne besondere Mühe zu jeder Zahl ihren Logarithmus und zu jedem Logarithmen seine Zahl finden könne. Solche Verzeichnisse oder Tafeln nennt man logarithmische oder Logarithmentafeln.

§. 5.

Grundbemessung der Logarithmen, und **Grundgesetz des Rechnens mit ihnen.**

Wie die Logarithmen nach den Zahlen, denen sie zugeschrieben werden, eigentlich und genau zu bemessen sind, und welche Rechnungsweisen auszuführen kommen, um aus den Logarithmen der gegebenen Zahlen die Logarithmen der eigentlich geforderten Zahlen zu berechnen; dazu legt folgende Betrachtung den Grund.

Sind mehrere Zahlen mit einander zu multipliciren, so findet man bekanntlich jedesmal dasselbe Product (d. h. die aus der wirklichen Multiplication hervorgehende Zahl), in welcher Ordnung man auch diese Zahlen (genannt die Factoren) mit einander multipliciren mag. Will man nun anstatt der nach einander folgenden Factoren ihre Logarithmen in Rechnung nehmen, und aus ihnen den Logarithmus des zu suchenden Productes in einer gewissen Weise berechnen; so muß man ja (vermöge §. 3) ebenfalls jederzeit denselben Logarithmus für dieses Product finden, mag man auch die Logarithmen der Factoren in was immer für einer Ordnung in diese Rechnungsweise bringen. — Von den Rechnungsweisen aber, welche leichter als die Multiplication sich ausführen lassen, der Addition und Subtraction, gestattet nur die Addition volle Freiheit in der Anordnung der ihr angegebenen Zahlen; nemlich: „die Summe mehrerer Zahlen bleibt dieselbe, in welcher Ordnung man auch diese Zahlen addiren mag." — Mithin läßt sich die Multiplication der Zahlen blos auf die Addition der Logarithmen zurückführen, das heißt:

Der Logarithme des Productes mehrerer mit einander zu multiplicirenden Zahlen muß berechnet werden, indem man die Logarithmen dieser Zahlen (Factoren) **addirt.**

Die Logarithmen aller Zahlen können demnach gegen einander nur so bemessen werden, daß, wenn was immer für Zahlen mit einander multiplicirt werden, ihre Logarithmen zusammengenommen gerade den Logarithmen des Multiplications-Ergebnisses (des Productes) geben, oder so, daß jedem Producte die Summe der Logarithmen seiner Factoren als Logarithme zugeschrieben wird.

Ertheilt man z. B.

der Zahl 4 den Logarithmen 2, und
" " 32 " " 5,

so muß man dem Producte dieser Zahlen 4 und 32, das ist der Zahl 4 mal 32 oder der Zahl 128, die Summe der Logarithmen 2 und 5, nemlich 7, als Logarithmus zuweisen.

§. 6.

Erklärung der Logarithmen.

Aus der so eben erörterten Grundbemessung der Logarithmen ergibt sich nunmehr folgender Begriff derselben:

Logarithmen von Zahlen sind gewisse, nach diesen Zahlen dergestalt bemessene oder gerichtete Hilfszahlen, daß dem Producte aus was immer für Zahlen die Summe ihrer Logarithmen als Logarithme zukommt.

§. 7.

Vorläufige Bezeichnung der Logarithmen.

Vor der Hand, bis wir zu einer Abänderung veranlaßt sein werden, wollen wir den Logarithmen einer Zahl ganz einfach dadurch bezeichnen, daß wir der Zahl die Anfangssylbe „Log." des deutsch geschriebenen Wortes „Logarithmus" vorsetzen.

So z. B. bezeichnen wir den Logarithmus der Zahl 4 oder den Logarithmus von 4 durch Log. 4.

Verbinden wir damit das bekannte Gleichheitszeichen (=, gelesen: gleich, oder so viel als), die einschließenden Klammern ( ), das Additionszeichen (+, gelesen: mehr (plus) oder und, oder vermehrt um), und den Multiplicationspunkt (., gelesen: multiplicirt mit oder mal); so können wir das in §. 5 benützte Beispiel kurz so schreiben:

$$\begin{aligned} \text{Wenn Log. } 4 &= 2 \\ \text{und Log. } 32 &= 5 \text{ ist;} \\ \text{so muß Log. } (4 \,.\, 32) &= 2 + 5, \\ \text{also Log. } 128 &= 7 \text{ sein.} \end{aligned}$$

§. 8.

Hauptlehrsatz: über den Logarithmen eines Productes.

Die so eben festgestellte Grundbemessung und Grundeigenschaft der Logarithmen (§. 5 u. 6), pflegt man durch folgenden **Hauptlehrsatz** auszusprechen.

Der Logarithme jedes Productes gleicht der Summe der Logarithmen seiner Factoren.

Oder: Der Logarithme des Ergebnisses der Multiplication mehrerer Zahlen ist die Summe der Logarithmen dieser Zahlen.

Der Logarithme eines Productes wird daher berechnet, indem man die Logarithmen seiner Factoren zusammen addirt.

§. 9.

Nächste Anwendung dieses Hauptlehrsatzes: Berechnung eines Bruchstückes einer Logarithmentafel.

Dieser Satz setzt uns in den Stand, zu zeigen, wie wir zum wenigsten ein Bruchstück einer Logarithmentafel anfertigen können; nemlich, wie sich wenigstens zu einigen Zahlen die Logarithmen berechnen lassen, sobald wir uns entschieden haben, einer gewissen Zahl einen bestimmten Logarithmen zuzuschreiben.

Der Zweck der Anfertigung einer solchen Tafel soll jedoch hier blos der sein, nachzuweisen, daß und wie wirklich, mit

Hilfe der von derlei Tafeln dargebotenen Logarithmen, das Multipliciren, Dividiren, Potenziren und Radiciren der Zahlen auf einfacheres Rechnen mit Logarithmen zurückgebracht werden kann. Dazu wird also der Umfang dieser Tafel nur sehr beschränkt zu sein brauchen.

Nehmen wir demnach an, daß wir der kleinsten ganzen Zahl, die noch ein Vervielfachen anderer bewirkt, nemlich der Zahl 2, den möglich kleinsten ganzzahligen Logarithmen, d. i. 1, beilegen; so lassen sich leicht die Zahlen finden, denen die Logarithmen 2, 3, 4, 5, ... zuzuweisen kommen.

Denn multiplicirt man 2 mit 2, so erhält man zum Producte 4; der Logarithme von 4 muß also den Logarithmen der Faktoren 2 und 2, nemlich den Zahlen 1 und 1, zusammen genommen gleich, mithin 2 sein. Multiplicirt man eben so 4, deren Logarithme 2 ist, mit 2, deren Logarithme 1 ist, so wird das Product 8, und sein Logarithme 2 und 1, das ist 3. So oft man also mit 2 multiplicirt, vergrößert sich der Logarithme jedesmal um 1. Multiplicirt man daher die Zahlen weiter und immer wieder mit 2, und zählt man zum Logarithmen stets wieder 1; so findet man nach und nach

zur Zahl: 16, 32, 64, 128, ...
den Logar. 4, 5, 6, 7....

Rechnung.

Zahlen. Multiplicir.	Logarithm. Addiren.
2 . 2	1 + 1
4 . 2	2 + 1
8 . 2	3 + 1
16 . 2	4 + 1
32 . 2	5 + 1
64 . 2	6 + 1
128 u. s. f.	7 u. s. f.

Stellt man nunmehr die Ergebnisse dieser Rechnungen zusammen, so erhält man folgendes Bruchstück von Logarithmentafel, welches wenigstens für einige ausgewählte Zahlen die Logarithmen liefert.

Täfelchen.

Zahl	Logarithm.	Zahl	Logarithmus
2	1	2048	11
4	2	4096	12
8	3	8192	13
16	4	16384	14
32	5	32768	15
64	6	65536	16
128	7	131072	17
256	8	262144	18
512	9	524288	19
1024	10	1048576	20

§. 10.

Mittels Logarithmen Zahlen multipliciren.

Wir wollen nun sogleich dieses Täfelchen benützen, um zu zeigen, daß und wie mit Hilfe von Logarithmen Zahlen mit einander multiplicirt werden können.

1. Beispiel. Wenn die Zahlen 32 und 2048 mit einander zu multipliciren sind, so heben wir aus dem Täfelchen ihre Logarithmen heraus: sie sind 5 und 11. Diese zählen wir zusammen, erhalten 16, und dies ist der Logarithme des gesuchten Productes. Da aber, wie das Täfelchen uns lehrt, der Logarithme 16 der Zahl 65536 zugehört; so muß diese 65536 das verlangte Product sein, was sich auch durch wirkliches Multipliciren der zwei vorgelegten Zahlen finden läßt.

Man schreibt diese Rechnungen gewöhnlich in folgender Weise:

Logarithmisches Multipliciren:

$$\begin{array}{rcl} \text{Log. } 32 & = & 5 \\ \text{Log. } 2048 & = & 11 \\ \hline \text{Log. } (32.2048) & = & 16 \\ 32.2048 & = & 65536 \end{array}$$

Wirkliches Multipliciren zur Controle:

$$\begin{array}{r} 2048 \\ 32 \\ \hline 4096 \\ 6144 \\ \hline 65536 \end{array}$$

2. Beispiel. Soll man die drei Zahlen 8, 64, 256 mit einander multipliciren, so nimmt man aus dem Täfelchen ihre Logarithmen 3, 6, 8; und zählt sie zusammen: das gibt 17. Zu diesem Logarithmen sucht man in dem Täfelchen die angehörige Zahl, sie ist 131072; mithin ist diese das gewünschte Product.

Logarithmisches Multipliciren:

$$\begin{array}{rcl} \text{Log. } 8 & = & 3 \\ \text{Log. } 64 & = & 6 \\ \text{Log. } 256 & = & 8 \\ \hline \text{Log. } (8.64.256) & = & 17 \\ 8\,.\,64\,.\,256 & = & 131072 \end{array}$$

Gewöhnliches Multipliciren:

$$\begin{array}{r} 256 \\ 64 \\ \hline 1024 \\ 1536 \\ \hline 16384 \\ 8 \\ \hline 131072 \end{array}$$

Beispiele zur Uebung.

$4 \;.\; 32 \;.\; 512 = 65536$

$16 \;.\; 128 \;.\; 512 = 1048576$

$64 \;.\; 8192 = 524288.$

§. 11.

Logarithme eines Quotienten.

Die in obigem Hauptlehrsatze (§. 8) ausgesprochene Eigenschaft der Logarithmen ist die alleinig zureichende Grundlage nicht nur aller ihrer übrigen Eigenschaften, sondern auch ihrer Berechnung und ihrer Behandlung in sämmtlichen Rechnungen, welche sich mit ihnen vornehmen lassen.

Zuvörderst wollen wir noch die Ausdrücke der Logarithmen der Ergebnisse aus den drei übrigen angeführten Rechnungsweisen, dem Dividiren, Potenziren und Radiciren, kennen lernen.

Bei dem Dividiren (Theilen) einer Zahl — genannt Dividend — durch eine andere — genannt Divisor (Theiler) — muß das Rechnungsergebniß — der Quotient — mit dem Theiler multiplicirt, den Dividend zum Producte geben. —

So z. B., wenn man den Dividend 128 durch den Theiler 4 dividirt, muß der entfallende Quotient 32 mit dem Theiler 4 multiplicirt, zum Producte den Dividend 128 wieder geben; kurz mit Hilfe des Divisionszeichens (:, gelesen: dividirt oder getheilt durch) geschrieben:

wenn $128 : 4 = 32$ sein soll,

muß $32 \;.\; 4 = 128$ sein.

Weil nun der Dividend das Product aus Quotient und Theiler — seinen Factoren — ist, und weil (vermöge §. 8) die Logarithmen der Factoren einander zum Logarithmus des Productes ergänzen; so muß daraus der Lehrsatz folgen:

Der Logarithme des Quotienten ergänzt sich mit dem Logarithmen des Divisors
zum Logarithmen des Dividends.

Oder: Der Logarithme des Quotienten ist
die Ergänzung des Logarithmen des Divisors
zum Logarithmen des Dividends, oder
der Ueberschuß des Logarithmen des Dividends,
über den Logarithmen des Divisors.

Mithin berechnet man den Logarithmen eines Quotienten, indem man
vom Logarithmen des Dividends
den Logarithmen des Divisors abzieht.

Weis't man daher z. B.
dem Dividend 128 den Logarithmen 7, und dem Divisor 4 den Logarithmen 2 an; so muß, weil der 2 zur 7 noch 5 fehlen, oder weil 2 von 7 abgezogen noch 5 übrig lassen, dem Quotienten 32 der Logarithme 5 angehören.

§. 12.

Anwendung dieses Lehrsatzes auf das **Theilen der Zahlen.**

Dieser Satz läßt sich benützen, um zu zeigen, daß und wie man mit Hilfe von Logarithmen eine Zahl durch eine andere theilen könne. Den hiebei einzuhaltenden Vorgang wird man aus folgendem Beispiele ersehen, welches mittels des obigen Logarithmen-Täfelchens (§. 9, S. 15) berechnet werden soll.

Hat man z. Beispiel die Zahl 524288 durch 2048 zu theilen, so entnimmt man aus jenem Täfelchen die Logarithmen dieser Zahlen: sie sind 19 und 11.

Dann zieht man den Logarithmen 11 des Divisors 2048 ab von dem Logarithmen 19 des Dividends 524288; der Rest 8 ist der Logarithme des zu suchenden Quotienten.

Sofort ist nach Ausweis jenes Täfelchens dieser Quotient selbst die dem Logarithmen 8 angehörige Zahl 256, welche man auch durch die übliche Theilung findet.

Man pflegt diese Rechnung in folgender Weise zu schreiben:

Logarithmisches Theilen.

$$\begin{array}{rr} \text{Log. } 524288 = & 19 \\ \text{Log. } 2048 = & 11 \\ \hline \text{Log. } (524288 : 2048) = & 8 \\ 524288 : 2048 = & 256 \end{array}$$

Gewöhnliches Theilen zur Gegenrechnung.

$$\begin{array}{r|r|l} 2048 & 524288 & 256 \\ & 4096 & \\ \hline & 11468 & \\ & 10240 & \\ \hline & 12288 & \\ & 12288 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

2. Beispiel. Soll man die Zahl 131072 durch 256 theilen, so nimmt man aus dem Täfelchen ihre Logarithmen 17 und 8, zieht diesen 8 von jenem 17 ab: das läßt 9. Zu diesem Logarithmen 9 liefert das Täfelchen die Zahl 512, mithin ist der verlangte Quotient 512.

Logarithmisches Theilen.

$$\begin{array}{rl} \text{Log. } 131072 &= 17 \\ \text{Log. } 256 &= 8 \\ \hline \text{Log. } (131072 : 256) &= 9 \\ 131072 : 256 &= 512 \end{array}$$

Gewöhnliches Theilen.

$$\begin{array}{r|l|l} 256 & 131072 & 512 \\ & \underline{1280} & \\ & 307 & \\ & \underline{256} & \\ & 512 & \\ & \underline{512} & \\ & 0 & \end{array}$$

Uebungsbeispiele.

1048576 : 16384 = 64
1048576 : 1024 = 1024
65536 : 128 = 512.

§. 13.

Logarithme eines Bruches.

Jeder Zahlenbruch gilt bekanntlich einem Quotienten gleich, für den des Bruches Zähler der Dividend
und sein Nenner der Divisor ist.

Mithin gibt obiger Ausdruck des Logarithmen eines Quotienten (§. 11) auch sogleich folgenden Ausdruck des Logarithmen eines Bruches.

Lehrsatz: Der Logarithme eines Bruches ist
die Ergänzung des Logarithmen des Nenners
zum Logarithmen des Zählers,
oder der Ueberschuß des Logarithmen des Zählers
über den Logarithmen des Nenners.

Der Logarithme eines Bruches wird daher berechnet, wenn man
vom Logarithmus des Zählers
den Logarithmus des Nenners abzieht.

So findet man z. Beispiel von dem Bruche $\frac{128}{4}$ (ein hundert acht und zwanzig Viertel) den Logarithmus durch folgende Rechnung:

$$\begin{array}{l} \text{Log. } 128 = 7 \\ \underline{\text{Log. } \;\;\; 4 = 2} \\ \text{Log. } \frac{128}{4} = 5. \end{array}$$

§. 14.

Vorkommen und Bedeutung entgegengesetzter Beziehungen von Zahlen überhaupt, und von Logarithmen insbesondere.

Solche allgemeine Gesetze des Abziehens (Subtrahirens) einer überhaupt angewiesenen Größe von einer anderen, wie hier das Gesetz, „vom Logarithmen des Dividends jenen des Divisors abzuziehen," können buchstäblich, so wie sie lauten, nur damals vollzogen werden, wenn das Abzuziehende (der Subtrahend) nicht größer (folglich entweder und gewöhnlich kleiner, oder ausnahmsweise höchstens so groß) als das Vorhandene, zu Vermindernde (der Minuend) ist. Für jene gegentheiligen Fälle also, wo der angewiesene Subtrahend größer ist, als der Minuend, müßte das Subtractionsgesetz, insofern es da eine Ausnahme erleidet, abgeändert werden. Allein derlei Ausnahmen können und müssen auch Abänderungen mancher oder gar aller jener Gesetze nach sich ziehen, welche die mit dem hier gefundenen Subtractionsergebnisse — Unterschiede — selbst wieder weiter vorzunehmenden Rechnungen vorschreiben. Folglich muß ein solches nachmaliges Rechnungsgesetz alle bei ihm denkbaren oder möglichen Fälle einzeln betrachten; welcher Fälle natürlich um so mehr sein müssen, je mehr dergleichen Rechnungsgesetze schon vor ihm angewendet wurden.

Um nun die weitwendige Betrachtung so vieler einzelnen Fälle, oder so vieler Ausnahmen, in den allgemeinen Rechnungsvorschriften zu umgehen, und dadurch die eigentlich wünschenswerthe, alle möglichen Fälle umfassende Allgemeinheit solcher Rechnungsregeln aufrecht zu erhalten, hat man in der Mathematik folgendes Abhilfsmittel angenommen.

Man läßt nemlich jedwedes allgemeine Subtractionsgesetz, welches vorschreibt, „daß von einer gewissen überhaupt angedeuteten Größe eine eben solche abgezogen werden solle," für jeden Fall, d. i. für jegliche zwischen Minuend und Subtrahend bestehende Vergleichung, gelten, und schreibt dieser Subtraction jedenfalls ein Ergebniß, einen Unterschied, zu. Man gestattet demnach nicht blos ein regelrechtes Subtrahiren mit einem regelrechten Subtractionsergebnisse — *Unterschied* —, wo nemlich so, wie es die Grundregel fordert, der Subtrahend *nicht größer* als der Minuend ist; sondern auch ein *regelwidriges Subtrahiren* mit einem *regelwidrigen* Subtractionsergebnisse — *Unterschied* —, wo nemlich gerade gegen oder wider die Regel der Subtrahend *größer* als der Minuend ist.

Der Betrag (die Größe, das Wiegroß) *überhaupt jedes* wie immer gearteten (gleichviel, ob regelrechten oder regelwidrigen) *Unterschiedes wird berechnet*, indem man vom Größeren das Kleinere, oder ausnahmsweise Gleiches von Gleichem abzieht. *Insbesondere* wird demnach

der Betrag eines regelrechten Unterschiedes berechnet, indem man so, wie es gefordert wird, *vom Minuende den Subtrahend* abzieht,

dagegen wird

der Betrag eines regelwidrigen Unterschiedes berechnet, indem man, gegen die eigentliche Forderung, *vom Subtrahende den Minuend* abzieht.

§. 15.

Fortsetzung.

Daraus folgt sonach, daß, während bei einem *regelrechten* Unterschiede der $\left\{\begin{array}{l}\text{Minuend}\\ \text{Subtrahend}\end{array}\right.$ wieder erhalten wird, indem man *den Betrag des Unterschiedes* $\left\{\begin{array}{l}\text{zum Subtrahend } \textit{addirt},\\ \text{v. Minuend } \textit{subtrahirt},\end{array}\right.$ im Gegentheile bei einem *regelwidrigen* Unterschiede der $\left\{\begin{array}{l}\text{Minuend}\\ \text{Subtrahend}\end{array}\right.$ wieder erhalten wird, indem man *den Betrag des Unterschiedes* $\left\{\begin{array}{l}\text{vom Subtrahend } \textit{subtrahirt}\\ \text{zum Minuend } \textit{addirt}\end{array}\right.$; oder kurz, daß, wo von den *zweierlei* Unterschieden, dem regelrechten und regelwidrigen, *der eine zu addiren* ist, *der andere zu subtrahiren* kommt.

Derlei Paare von *Umständen, Beschaffenheiten* oder *Beziehungen* (Relationen), wie man sie gewöhnlich nennt, *unter* oder *in* denen eine gewisse Größe — wie hier der allgemeine Unterschied — vorkommt, und welche so geartet sind, daß diese Größe, wenn sie in der einen Beziehung vorkommt, zu *addiren* ist, dagegen wenn sie in der anderen Beziehung auftritt, *abzuziehen* ist, heißt man einander entgegengesetzt, widerstreitend. — Solche zwei entgegengesetzte Umstände oder Beziehungen sind bei den in Rede stehenden Unterschieden die einander widerstreitenden Vergleichungen des Minuends und Subtrahends, ob nemlich der Subtrahend nicht größer oder wirklich größer sei als der Minuend.

Von solchen gepaarten, entgegengesetzten Beziehungen der betreffenden Größen muß nothwendig die eine für ein gewisses allgemeines Rechnungsgesetz ursprünglich vorausgesetzt oder angenommen (supponirt) werden, darum wird sie die positive genannt; und bei ihr muß also die Frage, ob die eigentlich, in der allgemeinen Rechnungsvorschrift, zu Grunde gelegte Annahme gelte, bejaht (affirmirt) werden, und deswegen wird sie auch die bejahende, oder bejahte (affirmative) Beziehung genannt; mithin muß die andere Beziehung, weil bei ihr dieselbe Frage nothwendig zu verneinen (zu negiren) ist, die verneinende oder verneinte (negative) Beziehung genannt werden. — Bei den zu besprechenden Unterschieden ist die regelrechte Vergleichung, daß nemlich der Subtrahend nicht größer als der Minuend sei, die im allgemeinen Subtractionsgesetze bedungene oder vorausgesetzte, also die positive oder affirmative Beziehung des Unterschiedes; mithin ist die regelwidrige Vergleichung, daß nemlich der Subtrahend größer als der Minuend sei, die negative Beziehung des Unterschiedes.

Einem allgemein herrschenden Gebrauche (oder eigentlich Mißbrauche) gemäß nennt man aber auch

die in entgegengesetzten, positiven oder negativen Beziehungen stehenden,

also die entgegengesetzt-, positiv- oder negativ-beziehlichen Größen, kurzweg entgegengesetzte, positive oder negative Größen. So nennt man regelrechte Unterschiede positiv,

also regelwidrige Unterschiede negativ,

und beide einander entgegengesetzt.

Das Negativsein der Beziehung einer Größe bezeichnet man in Rechnungen dadurch, daß man dem Zeichen der Größe das Subtractionszeichen (—, gelesen: weniger (minus), oder vermindert um) vorsetzt, welches man aber hier in einem ausgebreiteteren Sinne, nemlich als Zeichen der Entgegensetzung ansieht, und darum „negativ" liest. Die positiven Größen bedürfen eigentlich keiner besonderen Bezeichnung; ausnahmsweise deutet man sie jedoch durch Vorsetzung des Additionszeichens (+) an, das man sofort „positiv" liest.

§. 16.

Fortsetzung.

Bei einem regelrechten Abziehen zieht man daher, so wie gefordert wird, vom Minuend den (kleineren oder höchstens eben so großen) Subtrahend ab, und bemerkt am Unterschiede nicht erst noch besonders, daß er positiv ist, weil sich dies schon ohnehin von selbst versteht.

Bei einem regelwidrigen Abziehen dagegen zieht man entgegen der Forderung, vom (größeren) Subtrahend den (kleineren) Minuend ab, und bemerkt am Unterschiede noch eigens, daß er negativ ist, indem man seinem Betrage das Negativzeichen (—) vorschreibt.

Soll z. B. von 7 die kleinere 2 abgezogen werden, so ist der Unterschied positiv 5, geschrieben: $7 - 2 = 5$ oder $= + 5$. Soll dagegen von der 2 die größere 7 abgezogen werden, so ist der Unterschied negativ und zwar, weil 2 von 7 abgezogen 5 läßt, negativ 5, geschrieben: $2 - 7 = - 5$.

§. 17.

Anwendung dieser Lehre auf negative Logarithmen.

Ist also bei der Berechnung des Logarithmen eines $\left\{\begin{matrix}\text{Quotienten}\\ \text{Bruches}\end{matrix}\right.$ der Logarithme des $\left\{\begin{matrix}\text{Dividends}\\ \text{Zählers}\end{matrix}\right.$ kleiner als der von ihm abzuziehende Logarithme des $\left\{\begin{matrix}\text{Divisors}\\ \text{Nenners}\end{matrix}\right.$; so erhält man einen negativen Unterschied, oder der Logarithme des $\left\{\begin{matrix}\text{Quotienten}\\ \text{Bruches}\end{matrix}\right.$ wird negativ.

3. Beispiel. Für obiges Logarithmentäfelchen berechnet man den Logarithmen des Quotienten 4 : 128 (gelesen: 4 getheilt durch 128) oder des echten Bruches $\frac{4}{128}$ (gelesen: vier 128stel) wie folgt:

Es ist Log. $4 = 2$
und Log. $128 = 7$

daher Log. $(4 : 128)$
oder Log. $\frac{4}{128} = 2 - 7 = - 5.$

Auf diese Weise erhellet, daß die Zeiger oder Logarithmen gar vieler Zahlen auch negativ ausfallen müssen; für unser Täfelchen (§. 9. S. 15.) sind es namentlich die Logarithmen aller Quotienten, deren Divisor größer als der Dividend ist, und deren Werth also kleiner als 1 ist, so wie auch die Logarithmen aller echten Brüche, deren Nenner größer als der Zähler ist.

§. 18.

Das Rechnen mit negativen Zahlen, insbesondere mit negativen Logarithmen.

Was nun das weitere Rechnen mit solchen negativ befundenen Unterschieden, oder überhaupt mit negativen Zahlen — also auch insbesondere mit negativen Logarithmen — anbelangt, so merken wir für unsere nächsten Zwecke blos Folgendes:

Ist eine negative Zahl zu $\left\{\begin{array}{l}\text{addiren,}\\ \text{subtrahiren,}\end{array}\right.$

so wird ihr Betrag entgegengesetzt behandelt,

nemlich nicht $\left\{\begin{array}{l}\text{addirt,}\\ \text{subtrahirt,}\end{array}\right.$ sondern $\left\{\begin{array}{l}\text{subtrahirt.}\\ \text{addirt.}\end{array}\right.$

Denn gemäß §. 15 stellt eine negative Zahl einen regelwidrigen Unterschied vor, mithin, wenn sie zu $\left\{\begin{array}{l}\text{addiren}\\ \text{subtrahiren}\end{array}\right.$ ist, muß ihr Betrag $\left\{\begin{array}{l}\text{subtrahirt}\\ \text{addirt}\end{array}\right.$ werden.

Anwendung.

1. Addition negativer Logarithmen.

Zu addiren kommen negative Logarithmen, wenn sich unter den Factoren eines Productes (unter mehreren mit einander zu multiplicirenden Zahlen) solche finden, deren Logarithmen negativ sind; weil vermöge §. 8. die Logarithmen von Factoren immer mit einander zu vereinen, oder zusammen zu addiren kommen.

Z. E. Ist die ganze Zahl 65536 mit dem Bruche $\frac{32}{8192}$ zu multipliciren, so sind die Logarithmen beider zu addiren. Nun findet man nach unserem Logarithmentäfelchen (§. 9. S. 15)

$$\begin{array}{rl} \text{Log. } 32 & = 5 \\ \text{und Log. } 8192 & = 13 \\ \hline \text{daher Log. } \frac{32}{8192} & = 5 - 13 \\ & = -8; \end{array}$$

addirt man diesen

$$\text{zum Log. } 65536 = 16 \text{ des anderen Factors,}$$

$$\text{so findet man Log.} \left(65536 . \frac{32}{8192}\right) = 16 - 8 \\ = 8,$$

nemlich den Logarithmen des Productes, indem man den negativen Logarithmen (— 8) zu 16 dadurch addirt, daß man seinen Betrag 8 von 16 abzieht, wonach man zum Reste 8 erhält.

Hiezu gehört aber nach dem Täfelchen die Zahl 256, also ist diese das geforderte Product, nemlich

$$65536 . \frac{32}{8192} = 256,$$

von dessen Richtigkeit man sich auch durch gewöhnliches Rechnen überzeugen kann.

2. Subtraction negativer Logarithmen.

Zu subtrahiren kommt ein negativer Logarithme, wenn er einem Divisor angehört; weil vermöge §. 11 der Logarithme des Divisors von jenem des Dividendes abzuziehen ist.

Z. E. Soll die ganze Zahl 1024 durch den Bruch $\frac{64}{8192}$ getheilt werden, so wird von dem Logarithmen der ersteren jener des letzteren subtrahirt. Nun findet man nach unserem Logarithmentäfelchen

$$\begin{array}{rl} \text{Log. } 64 & = 6 \\ \text{und Log. } 8192 & = 13 \\ \hline \text{daher Log. } \frac{64}{8192} & = -7; \end{array}$$

subtrahirt man diesen

$$\text{von dem Log. } 1024 = 10 \text{ des Dividends,}$$

$$\text{so findet man Log.} \left(1024 : \frac{64}{8192}\right) = 10 + 7 \\ = 17,$$

nemlich den Logarithmen des Quotienten, indem man den negativen

Logarithmen (— 7) von **10** dadurch abzieht, daß man seinen Betrag 7 zu **10** addirt, wonach man **17** zur Summe erhält.

Hiezu gehört aber nach dem Täfelchen die Zahl **131072**, also ist diese der geforderte Quotient, nemlich

$$1024 : \frac{64}{8192} = 131072,$$

von dessen Richtigkeit man sich auch durch gewöhnliches Rechnen überzeugen kann.

Bemerkung. Nach dieser Abschweifung verfolgen wir wieder die begonnene Ableitung der Ausdrücke der Logarithmen von Rechnungsergebnissen, und zwar von den Potenzen und Wurzeln.

§. 19.

Logarithme einer Potenz.

Vorbegriffe. Eine Potenz entsteht, wenn mehrere unter sich durchgängig gleiche Zahlen mit einander zu multipliciren sind; und sie heißt die so vielte Potenz der wiederkehrenden Zahl, als wie vielmal diese sich wiederholt. Sind z. E. vier Siebener mit einander zu multipliciren, 7. 7. 7. 7, so entsteht die vierte Potenz von 7.

Die so und so vielte Potenz einer Zahl ist demnach das Product so vieler, dieser Zahl, gleicher Factoren, als die wie vielte Potenz sie ist; z. B. die 4te Potenz von 7 ist das Product 7. 7. 7. 7, was **2401** ausmacht.

Eine Zahl zur so und so vielten Potenz erheben heißt daher, das Product so vieler, mit jener Zahl, gleichen Factoren aufstellen, als zur wie vielten Potenz erhoben werden soll.

Die Zahl, welche man zu einer Potenz erhebt oder die man potenzirt, wird die potenzirte oder erhobene Zahl oder der Potentiand genannt. Die Zahl, nach (oder gemäß) welcher man eine andere (den Potentiand) potenzirt, oder von der die Nummer (Ordnungszahl) der Potenz abstammt, wird der Exponent, und endlich das Ergebniß des Potenzirens, wie bereits gesagt, die Potenz genannt. Ist 7 zur 4ten Potenz zu erheben, so ist 7 der Potentiand, 4 der Exponent, und die herauskommende Zahl **2401** die Potenz.

Eine Potenz bezeichnet man einfach, indem man zur Rechten ihres Potentiands oben den Exponenten schreibt; z. B. eben diese 4te Potenz von 7 durch 7^4, gelesen: 7 zur 4ten (Potenz erhoben) oder 4te Potenz von 7.

Untersuchung des Logarithmen einer Potenz. Da eine Potenz das Product aus so vielen, dem Potentiand, gleichen Factoren ist, als die wie vielte Potenz sie ist, oder als der Exponent angibt; und da der Logarithme jedes Productes der Summe der Logarithmen seiner Factoren gleicht: so muß der Logarithme einer Potenz sich ergeben, wenn man den Logarithmen des Potentiands so vielmal nimmt, als die wie vielte Potenz sie ist, oder wenn man ihn mit dem Exponenten vervielfacht (multiplicirt).

Zum Beispiel: Weil $8^4 = 8 . 8 . 8 . 8$ ist,

so ist $\text{Log.}(8^4) = \text{Log.}8 + \text{Log.}8 + \text{Log.}8 + \text{Log.}8$,

d. i. 4mal Log. 8 oder $4 . \text{Log.}8$,

also $\text{Log.}(8^4) = 4 . \text{Log.}8$.

Darum gilt folgender

Lehrsatz. Der Logarithme einer Potenz ist das Product aus dem Logarithmen des Potentiands und dem Exponenten,

oder ist gleich dem Logarithmen des Potentiands multiplicirt mit dem Exponenten;

oder: Der Logarithme einer Potenz wird berechnet, wenn man den Logarithmen des Potentiands (der potenzirten Zahl) mit dem Exponenten multiplicirt.

§. 20.

Anwendung dieses Lehrsatzes auf das **Potenziren der Zahlen.**

Man kann diesen Satz vortheilhaft verwenden, um Zahlen mit Hilfe von Logarithmen zu potenziren, wie folgendes Beispiel erläutern soll.

Sei 8 zur 4ten Potenz zu erheben, so gibt das Logarithmentäfelchen zu der zu potenzirenden Zahl oder zum Potentiand 8 den Logarithmen 3; multiplicirt man nun diesen mit dem Exponenten 4, sagend: 4mal 3 ist 12, so ist das Product 12 der Logarithme der begehrten Potenz, und diese muß sogleich nach Ausweis des Täfelchens 4096 sein, weil dieser Zahl der Logarithme 12 angehört.

Man pflegt diese Rechnung kurz wie folgt zu schreiben:

Logarithmisches		Gewöhnliches
Potenziren:		
Log. 8 = 3		8
.4		8
Log. (8^4) = 12		64
8^4 = 4096		8
		512
		8
		4096

§. 21.

Logarithme einer Wurzel.

Vorbegriffe. Kann man eine Zahl in lauter gleiche Factoren auflösen, folglich als so vielte Potenz des wiederkehrenden Factors darstellen, als wie oft er sich wiederholt; so nennt man diesen Factor eine Wurzel (latein. radix) jener ersteren Zahl und zwar die so vielte, als wie vielmal der durchaus gleiche Factor vorkommt. So läßt sich z. B. gemäß §. 19. S. 26 die Zahl 2401 in 4 gleiche Factoren, deren jeder 7 ist, auflösen, nemlich als das Product 7. 7. 7. 7 aus 4 Siebnern, also auch als die 4te Potenz von 7, d. i. $2401=7^4$, darstellen; daher nennt man umgekehrt 7 die 4te Wurzel von 2401.

Die so und so vielte Wurzel aus einer Zahl ist demnach diejenige Zahl, deren eben so vielte Potenz jene erstere Zahl ist; z. B. die 4te Wurzel aus 2401 ist 7, weil $7^4=2401$ ist.

Aus einer Zahl die so und so vielte Wurzel ziehen (nehmen, bestimmen) heißt also, diejenige Zahl suchen, deren eben so vielte Potenz jene erstere Zahl ist.

Die Zahl, aus der eine Wurzel zu ziehen oder (wie man auch noch sagt), welche zu radiciren ist, wird der Radicand; die Nummer oder Ordnungszahl der Wurzel ihr Exponent oder der Wurzelexponent; und endlich das Ergebniß des Wurzelziehens (Radicirens), wie schon gesagt, die Wurzel genannt. Ist aus 2401 die 4te Wurzel zu ziehen, so heißt 2401 der Radicand, 4 der Wurzelexponent, und die herauskommende Zahl 7 die Wurzel.

Eine Wurzel bezeichnet man einfach, indem man vor den Radicand das so genannte Wurzelzeichen ($\sqrt{\ }$) und in dessen

Oeffnung den Wurzelexponenten schreibt; z. B. eben diese 4te Wurzel aus 2401 bezeichnet man durch $\sqrt[4]{2701}$.

Zweite Wurzeln schreibt man gewöhnlich, weil sie am häufigsten in den Rechnungen vorkommen, ohne Wurzelexponenten, z. E. $\sqrt{9}$ gelesen: „zweite Wurzel“ (oder auch nur schlechthin „Wurzel“) aus 9.

Haupteigenschaft der Wurzeln. Jede Wurzel muß daher — vermöge ihres Begriffs — so beschaffen sein, daß sie nach ihrem Exponenten potenzirt, ihren Radicand wieder herstellt. So ist wirklich $\sqrt[4]{2401} = 7$, weil $7^4 = 2401$.

Untersuchung des Logarithmen einer Wurzel. Weil jede Wurzel nach ihrem Exponenten potenzirt ihren Radicand gibt, und weil der Logarithme einer Potenz berechnet wird, wenn man den Logarithmen des Potentiands mit dem Exponenten multiplicirt: so muß der Logarithme der Wurzel mit dem Wurzelexponenten multiplicirt den Logarithmen des Radicands zum Producte geben. — Aus einem Producte und einem seiner Factoren den anderen Factor wieder herstellen, heißt aber das Product durch jenen bekannten Factor dividiren (theilen); mithin erhält man den Logarithmen der Wurzel zurück, wenn man den Logarithmen des Radicands durch den Wurzelexponenten dividirt.

So z. Beispiel muß die $\sqrt[4]{2401}$ zur 4ten Potenz erhoben den Radicand 2401 zurückstellen, also muß der Logarithme dieser Wurzel 4mal genommen, den Logarithmen des Radicands 2401 geben, und somit muß er der 4te Theil dieses Logarithmen des Radicands 2401 sein; nemlich

$$\text{Log.}\ \sqrt[4]{2401} = \left(\text{Log.}\ 2401\right) : 4 = \frac{\text{Log.}\ 2401}{4} = \frac{1}{4}\ \text{Log.}\ 2401,$$

beide letzteren Darstellungen gelesen: „ein Viertel des Log. von 2401“.

Hieraus folgt nun nachstehender

Lehrsatz. Der Logarithme jeder Wurzel ist der Quotient des Logarithmen ihres Radicands durch ihren Wurzelexponenten,

oder ist gleich dem Logarithmen des Radicands getheilt durch den Wurzelexponenten;

oder: der Logarithme einer Wurzel wird berechnet, wenn man den Logarithmen des Radicands durch den Wurzelexponenten theilt.

§. 22.

Anwendung dieses Lehrsatzes auf das

Wurzelziehen aus Zahlen.

Dieser Satz läßt sich benützen, um mittels Logarithmen Wurzeln aus Zahlen zu ziehen, wie nachfolgendes Beispiel verdeutlichen wird.

Soll aus der Zahl **1048576** die 5te Wurzel gezogen werden, so heben wir aus unserem Logarithmentäfelchen den Logarithmen dieser Zahl aus: er ist **20**; ihn nun theilen wir durch den Wurzelexponenten **5**, erhalten zum Quotienten **4**, welcher sofort der Logarithme der verlangten Wurzel ist und in jenem Täfelchen neben der Zahl **16** steht. Mithin ist diese selbst die geforderte Wurzel; wovon man sich durch Erhebung der Zahl **16** zur 5ten Potenz überzeugen kann, da das gewöhnliche Ausziehen der 5ten Wurzel sehr schwer ausführbar ist.

Logarithmische Rechnung:

$$\text{Log. } 1048576 = 20 \quad :5$$

$$\text{Log. } \sqrt[5]{1048576} = 4$$

$$\sqrt[5]{1048576} = 16$$

Rechnungsprobe:

$$\begin{array}{rl}
 & 16 \cdot 16 \\
 & 96 \\
\hline
2) & 256 \cdot 16 \\
 & 1536 \\
\hline
3) & 4096 \cdot 16 \\
 & 24576 \\
\hline
4) & 65536 \cdot 16 \\
 & 393216 \\
\hline
5) & 1048576
\end{array}$$

§. 23.

Gedrängte Wiederholung der Hauptpunkte. Schlußfolge daraus, und Vorbereitung des Nachfolgenden.

Zum Ueberblick der bisher abgeleiteten Ausdrücke der Logarithmen von Rechnungsergebnissen wird es gut sein, die dafür gefundenen

vier logarithmischen Fundamentalsätze

hier kurz zusammenzustellen.

Man berechnet:

I. Den Logarithmen eines Productes,
wenn man die Logarithmen seiner Faktoren addirt;

II. den Logarithmen eines $\left\{\begin{array}{l}\text{Quotienten}\\ \text{Bruches}\end{array}\right.$,

wenn man vom Logarithmen des $\left\{\begin{array}{l}\text{Dividends}\\ \text{Zählers}\end{array}\right.$

den Logarithmen des $\left\{\begin{array}{l}\text{Divisors}\\ \text{Nenners}\end{array}\right.$

subtrahirt;

III. den Logarithmen einer Potenz,

wenn man den Logarithmen des Potentiands mit dem Exponenten multiplicirt;

IV. den Logarithmen einer Wurzel,

wenn man den Logarithmen des Radicands durch den Exponenten dividirt.

Hieraus folgt:

Mit Hilfe von Logarithmen vollbringt man.

1. das Multipliciren der Zahlen durch das Addiren ihrer Logarithmen,

2. das Dividiren der Zahlen durch das Subtrahiren ihrer Logarithmen,

3. das Potenziren der Zahlen durch das Multipliciren ihrer Logarithmen,

4. das Wurzelziehen aus Zahlen durch das Dividiren ihrer Logarithmen.

Mithin dienen die Logarithmen in der That, so wie wir wünschen (§. 1.), zur Beseitigung der Schwierigkeiten bei Multiplicationen, Divisionen, Potenzirungen und Wurzelziehungen. Dazu wird jedoch als unumgänglich nothwendig bedungen, daß sich wirklich zu jeder Zahl ein ihr ausschließlich eigener Logarithme oder Zeiger angeben lasse. Darum ist die Frage höchst wichtig, ob man zu sämmtlichen Zahlen solche Logarithmen finden könne, daß der Logarithme des Productes jeder zwei Zahlen die Summe der Logarithmen dieser Zahlen sei. Ihre Beantwortung soll uns gegenwärtig beschäftigen.

§. 24.

Einleitende Lehrsätze zur Berechnung der Logarithmen.

Diese Untersuchung, ob und wie man zu den gesammten Zahlen Logarithmen von der geforderten allseitigen Uebereinstimmung derselben berechnen könne, wird durch folgende Sätze, welche einfache

Folgerungen aus den so eben (in §. 23) wiederholten vier Fundamentalsätzen sind, geleitet.

1. Weil Brüche oder gebrochene Zahlen aus ganzen Zahlen zusammengestellt werden und eben dadurch alles Rechnen mit was immer für Zahlen auf ein Rechnen mit ganzen Zahlen hinausgeschoben wird; so *ist jedes ursprüngliche Berechnen von Logarithmen lediglich auf jenes für* **ganze** *Zahlen zu beschränken, und jede Logarithmentafel braucht nur die Logarithmen* **ganzer** *Zahlen zu liefern.*

2. *Der Logarithme der Zahl 1 ist jedenfalls Null,*

oder: der Zahl 1 kann blos 0 als Logarithme beigelegt werden.

Denn die Zahl 1 multiplicirt und dividirt, (vervielfacht und theilt) nicht, d. h. jede Zahl durch 1 multiplicirt oder dividirt, gibt sich selbst zum Resultate. Nun muß aber der Logarithme jeder Zahl, mit der man $\left\{\begin{array}{l}\text{multiplicirt, addirt}\\ \text{dividirt, subtrahirt}\end{array}\right.$ werden. Folglich muß der Logarithme jeder Zahl um den Logarithmen von 1 vermehrt oder vermindert sich selbst wieder geben; daher tritt eigentlich dort *keine* Vermehrung und hier *keine* Verminderung ein, oder der Logarithme von 1 beträgt gar nichts, ist Null.

Oder: Jede von Null verschiedene Zahl gibt durch sich selbst getheilt, 1 zum Quotienten. Der Logarithme dieses Quotienten 1 wird daher gefunden, indem man von dem Logarithmen jenes Dividends ihn selbst abzieht, wobei nichts — Null — übrig bleibt. Mithin ist 0 der Logarithme von 1.

*3. *Der Logarithme von Null (0) ist jedenfalls unangebbar.*

Denn Null gibt durch jede Zahl multiplicirt oder dividirt sich selbst wieder; mithin, weil der Logarithme jedes $\left\{\begin{array}{l}\text{Multiplicators zu addiren}\\ \text{Divisors zu subtrahiren}\end{array}\right.$ ist, muß der Logarithme von Null um den Logarithmen was immer für einer Zahl, also überhaupt um was immer, vermehrt oder vermindert, sich selbst wieder geben, also ungeändert bleiben. Dies vermag aber schlechterdings *keine* Zahl, mithin läßt sich der Null keine Zahl als Logarithme beilegen, oder der Logarithme von Null ist durchaus unangebbar.

4. Kennt man bereits den Logarithmen *irgend einer* Zahl, *so findet man mit Leichtigkeit den Logarithmen jeder*

Potenz dieser Zahl, indem man ihren Logarithmen mit dem betreffenden Potenzexponenten multiplicirt. (§. 19.)

5. Kennt man bereits die Logarithmen mehrerer (durchweg von 1 verschiedenen) Zahlen, so findet man leicht den Logarithmen ihres Productes, indem man die Logarithmen derselben zusammen addirt. (§. 8.)

§. 25.

Grundzahl der Logarithmen.

Um den Zahlen ihre mit dem Namen „Logarithmen" belegten Zeiger, der schon öfter wiederholten Anforderung (§. 5.) gemäß, anzupassen, muß man mit irgend einer ausgewählten Zahl einen gewissen Logarithmen verknüpfen; weil dann — wenn anders diese Verknüpfung nicht an sich unpassend ist — mit jeder anderweitigen Zahl gleichfalls ein, aber auch nur ein paßlicher — entschiedener oder bestimmter — Logarithme sich verbinden läßt; was sich im Kommenden deutlich herausstellen wird.

Am zusagendsten findet man, sich für eine Zahl zu entscheiden, der man den Logarithmen 1 beilegt.

Diese Zahl nun, deren Logarithme 1 ist, wird die Grundzahl (basis) der danach bemessenen Logarithmen aller andern Zahlen genannt. So ist in unserem Logarithmentäfelchen 2 die Grundzahl.

Gewöhnlich ertheilt man dieser Erklärung die Form des folgenden Lehrsatzes:

Der Logarithme der Grundzahl ist 1.

Die Grundzahl darf daher weder 1 noch 0 sein, das heißt, man kann weder der 1 noch der 0 die 1 als Logarithme zuweisen; weil der Log. 1 nur 0 sein kann, und der Log. 0 ganz und gar unangebbar ist.

*§. 26.

Logarithmen von Potenzen und Wurzeln der Grundzahl, von einfachen und zusammengesetzten Zahlen.

Aus eben diesem Lehrsatze nun, verbunden mit den §§. 19 und 21, ergeben sich leicht folgende Sätze:

1. Der Logarithme jeder Potenz der Grundzahl ist der Exponent dieser Potenz. (§. 19.)

2. Der Logarithme jeder Wurzel aus der Grundzahl ist der Quotient der durch den Wurzelexponenten getheilten

Zahl **1**, oder ein Bruch, dessen Nenner der Wurzelexponent und der Zähler **1** ist (§. **21**), oder kurz: das Umgekehrte des Wurzelexponenten, der umgekehrte Wurzelexponent.*)

3. Der Logarithme jeder Wurzel aus jeglicher Potenz der Grundzahl oder, was dasselbe ist, der Logarithme jeder Potenz von jeglicher Wurzel aus der Grundzahl ist demnach der Quotient des Potenzexponenten durch den Wurzelexponenten.

Z. B. Wo 2 Grundzahl ist, ist Log. $(2^5) = 5$,

$$\text{Log. } \sqrt[7]{2} = \frac{1}{7}, \text{ und Log. } \sqrt[7]{2^5} \text{ oder Log. } \left(\sqrt[7]{2}\right)^5 = \frac{5}{7}.$$

4. Ursprünglich und eigens zu berechnen braucht man also nicht die Logarithmen der zusammengesetzten (ganzen) Zahlen, d. h. derjenigen, die als das Product anderer kleinerer Zahlen sich darstellen, in (kleinere) Factoren sich auflösen lassen, sondern nur die Logarithmen der **einfachen** (ganzen) **Zahlen** oder der **Primzahlen**, d. h. derjenigen, die nicht als das Product anderer Zahlen (außer von 1 und sich selbst) darstellbar oder nicht weiter in kleinere Factoren auflösbar sind. Denn jede zusammengesetzte Zahl muß, wenn man ihre Auflösung in Factoren hinreichend weit fortsetzt, endlich in lauter einfache oder Primzahlen — in Primfactoren — sich auflösen lassen; mithin ist der Logarithme jeder zusammengesetzten Zahl die Summe der Logarithmen aller ihrer Primfactoren. (§. 8 und §. 24, 5.)

5. Kennt man daher die Logarithmen mehrerer natürlich ohne Unterbrechung aufsteigend nach einander folgenden oder gereihten Primzahlen, als: **2, 3, 5, 7; 11, 13, 17, 19; 23, 29; 31, 37; 41 43, 47;** u. s. f.; so findet man auch durch blose Addition dieser Logarithmen die aller jener zusammengesetzten Zahlen, welche keinen größeren Primfactor als die größte dieser Primzahlen besitzen.

---

*) Man nennt nemlich überhaupt den Quotienten der durch irgend eine Zahl getheilten Eins (1) oder, wenn diese Zahl eine ganze ist, den Bruch, dessen Nenner dieselbe Zahl und der Zähler **1** ist, wegen des häufigen Vorkommens solcher Quotienten oder Brüche, das Umgekehrte (Reciprocum) dieser Zahl oder die umgekehrte (reciproke) Zahl.

So sind die Umgekehrten der ganzen Zahlen **2, 3, 4, 5, 6, ...**
die (echten) Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ . . . .
und das Umgekehrte jedes Bruches, wie $\frac{3}{11}$, ist der durch Verwechselung des Nenners und Zählers umgekehrte Bruch, $\frac{11}{3}$.

6. Sobald man also den Logarithmen der kleinsten Primzahl 2 berechnet hat, wird man einerseits mit ihr sie selbst wiederholentlich multipliciren, so weit als nicht das entfallende Product schon die größte Zahl übersteigt, deren Logarithmen man noch zu berechnen beabsichtigt, und andererseits den Logarithmen zu sich selbst wiederholt addiren; folglich sämmtliche Potenzen von 2 mit ihren Logarithmen erhalten. — Kennt man dann den Logarithmen der nächst größeren Primzahl 3, so wird man einerseits mit dieser nicht nur sie selbst, sondern auch alle früher gefundenen Producte wiederholt bis an die festgesetzte unüberschreitbare Grenzzahl multipliciren, und andererseits den Logarithmen zu jenem einer jeden multiplicirten Zahl wiederholentlich addiren; folglich nicht nur gesammte Potenzen von 3, sondern auch alle jene zusammengesetzten Zahlen, die keine anderen Primfactoren als 2 und 3 enthalten, mit Logarithmen versehen. — In derselben Weise wird man mit jeder der Reihe nach folgenden Primzahl verfahren, sobald man ihren Logarithmen kennt. Man multiplicirt nemlich einerseits mit ihr wiederholt, nicht nur sie selbst, sondern auch jede bereits mit ihrem Logarithmen versehene Zahl, so weit als das entfallende Product noch unter der unüberschreitbaren Grenzzahl bleibt, und addirt andererseits wiederholentlich den Logarithmen zu jenem einer jeden multiplicirten Zahl; wonach die jedesmalige Summe dem betreffenden Producte als Logarithme zukommen muß.

*§. 27.

Logarithmen der umgekehrten Grundzahl, ihrer Potenzen und Wurzeln.

Weil das Umgekehrte der Grundzahl der Quotient der 1 durch sie ist, so müssen folgende Sätze gelten:

1. Der Logarithme der umgekehrten Grundzahl ist — 1 (negativ Eins). (Vergl. §§. 26, 11 u. 18.)

2. Der Logarithme jeder Potenz der umgekehrten Grundzahl ist ihr negativ genommener Exponent. (§. 19.)

3. Der Logarithme jeder Wurzel der umgekehrten Grundzahl ist ihr negativ genommener und umgekehrter Wurzelexponent. (§. 21.)

4. Der Logarithme jeder Wurzel aus jedweder Potenz der umgekehrten Grundzahl oder der Logarithme jeder Potenz einer jeden Wurzel aus der umgekehrten Grundzahl ist der negativ genommene Quotient des Potenzexponenten durch den Wurzelexponenten. (§§. 19 u. 21.)

Z. B. Wo 2 Grundzahl ist, hat man

$$\text{Log.}\,\frac{1}{2} = -1,\ \text{Log.}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 3\ \text{Log.}\,\frac{1}{2} = 3\,(-1) = -3,$$

$$\text{Log.}\sqrt[11]{\frac{1}{2}} = \frac{1}{11}\text{Log.}\,\frac{1}{2} = \frac{-1}{11} = -\frac{1}{11},$$

$$\text{Log.}\sqrt[11]{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{11}\text{Log.}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{-3}{11} = -\frac{3}{11}.$$

*§. 28.

Bestimmung der Zahlen zu vorgelegten Logarithmen.

Aus dem Gesagten folgt nun umgekehrt leicht überschaulich, wie man, sobald die Grundzahl festgesetzt ist, zu jedem angegebenen Logarithmen diejenige Zahl berechnen könne, der er angehört.

Wir müssen jedoch dabei zunächst die beiden Hauptfälle unterscheiden, ob der Logarithme positiv oder negativ ist, und dann erst noch bei jedem die untergeordneten zwei Fälle, ob die Zahl ganz oder gebrochen ist. Darum stellen wir folgende zwei Paar Lehrsätze auf.

I. Der Logarithme sei positiv,

1. eine ganze Zahl:

Jeder ganze positive Logarithme gehört zur so vielten Potenz der Grundzahl, als er selbst zählt;

oder: um die, einem ganzen positiven Logarithmen, zugehörige Zahl zu finden, hat man nach ihm (als Exponenten) die Grundzahl zu potenziren;

2. eine gebrochene Zahl:

Jeder gebrochene positive Logarithme gehört zur so vielten Wurzel, als sein Nenner angibt, entweder aus der Grundzahl, wenn sein Zähler 1 ist, oder aus der so vielten Potenz der Grundzahl, als sein Zähler angibt, wenn dieser größer als 1 ist;

oder: um die einem gebrochenen positiven Logarithmen zugehörige Zahl zu berechnen, muß man entweder, wenn der Zähler 1 ist, aus der Grundzahl, oder wenn sein Zähler größer als 1 ist, aus der so vielten Potenz der Grundzahl als der Zähler angibt, die so vielte Wurzel ziehen, als der Nenner vorzählt.

Z. B. Wo 2 Grundzahl ist,

gehört zum Logarithmen 7 die 2^7, d. i. 128,

zum Logarithmen $\frac{1}{3}$ die $\sqrt[3]{2}$, d. i.

zum Logarithmen $\frac{7}{3}$ die $\sqrt[3]{2^7}$ d. i. $\sqrt[3]{128}$.

II. Der Logarithme sei negativ,

1. eine ganze Zahl:

Jeder ganze negative Logarithme gehört zur so vielten Potenz der umgekehrten Grundzahl, als er selbst zählt;

oder: um die, einem ganzen negativen Logarithmen zugehörige, Zahl zu finden, hat man nach dessen Betrage (als Exponenten) die umgekehrte Grundzahl zu potenziren;

2. eine gebrochene Zahl:

Jeder gebrochene negative Logarithme gehört zur so vielten Wurzel, als seines Betrages Nenner angibt, entweder aus der umgekehrten Grundzahl, wenn sein Zähler 1 ist, oder aus der so vielten Potenz der umgekehrten Grundzahl, als seines Betrages Zähler angibt, wenn dieser größer als 1 ist;

oder: um die einem gebrochenen negativen Logarithmen zugehörige Zahl zu berechnen, muß man entweder, wenn der Zähler seines Betrages 1 ist, aus der umgekehrten Grundzahl, oder wenn seines Betrages Zähler größer als 1 ist, aus der so vielten Potenz der umgekehrten Grundzahl, als der Zähler angibt, die so vielte Wurzel ziehen, als der Nenner vorzählt.

Z. B. Wenn 2 Grundzahl ist,

gehört zum Logarithmen -7 die $\left(\frac{1}{2}\right)^7$ d. i. $\frac{1}{128}$,

zum Logarithmen $-\frac{1}{3}$ die $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ d. i. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

zum Logarithmen $-\frac{7}{3}$ die $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^7}$ d. i. $\frac{1}{\sqrt[3]{128}}$.

Anmerkung. In allen diesen Fällen ist der Betrag des Exponenten überhaupt ein streng angebbarer Bruch oder eine so genannte rationale Zahl. Sollte aber der positive oder negative Logarithme eine irrationale Zahl, d. h. durch keinerlei regelmäßigen Bruch streng oder genau angebbar sein; so lassen sich jederzeit zu jedem angenommenen Nenner zwei nächst benachbarte, d. i. nur um 1 von einander verschiedene, Zähler finden, so daß zwischen diesen zwei Brüchen jener Logarithme enthalten ist, also daß der eine Bruch kleiner, der andere größer als der vorgelegte Logarithme ist. Sucht man nun zu diesen zwei angenäherten Brüchen die Zahlen, denen sie als Logarithmen zukommen, so muß in Absicht auf Größe zwischen diese Zahlen auch die eigentlich gesuchte Zahl hinein fallen. — Je größer nun der

Nenner dieser zwei den Logarithmen eingrenzenden Brüche ist, desto weniger sind sie von einander, also auch von dem zwischen ihnen liegenden Logarithmen, verschieden; folglich müssen auch um so weniger die Zahlen, denen die Brüche als Logarithmen zukommen, von einander und also auch von der Zahl, welcher der angegebene Logarithme zugehört, unterschieden sein. Mithin läßt sich diese Zahl mit jeder beliebigen Schärfe genau berechnen, wenn man nur jenen Nenner hinlänglich groß annimmt.

*§. 29.

Gegenseitige Vergleichungen der Zahlen und ihrer Logarithmen.

Man wird von den Potenzen und Wurzeln der Zahlen leicht die Richtigkeit folgender Sätze erkennen:

1. Jede Potenz, also auch jede Wurzel $\left\{\begin{matrix}\text{von 1 ist wieder 1,}\\\text{von 0 ist wieder 0.}\end{matrix}\right.$

2. Von jeder Zahl, die $\left\{\begin{matrix}\text{größer}\\\text{kleiner}\end{matrix}\right.$ als 1 ist, wird auch jede Potenz und jede Wurzel, mithin auch jede Wurzel aus jeglicher Potenz derselben $\left\{\begin{matrix}\text{größer}\\\text{kleiner}\end{matrix}\right.$ als 1, und zwar desto $\left\{\begin{matrix}\text{größer,}\\\text{kleiner,}\end{matrix}\right.$ je größer der Potenzexponent und je kleiner der Wurzelexponent ist.

Denn eine Potenz ist ein Product von lauter gleichen Factoren, und zwar desto größer, je größer jeder seiner Factoren und je größer die Anzahl dieser Factoren (der Exponent) ist; und dieses Product wird, wenn jeder Factor 1 ist, selbst auch 1.

Hieraus und aus dem vorhergehenden §. 28 fließen daher über den allgemeinen Zusammenhang zwischen den Zahlen und ihren Logarithmen, für jede geeignete, von 1 und 0 verschiedene Grundzahl, folgende Sätze:

I. Für jede Grundzahl, welche $\left\{\begin{matrix}\text{größer}\\\text{kleiner}\end{matrix}\right.$ als 1 ist, und deren Umgekehrtes also $\left\{\begin{matrix}\text{kleiner}\\\text{größer}\end{matrix}\right.$ als 1 ist,*) gehört

a) zu jedem positiven Logarithmen eine Zahl, die $\left\{\begin{matrix}\text{größer}\\\text{kleiner}\end{matrix}\right.$ als 1 ist, und zwar desto $\left\{\begin{matrix}\text{größer,}\\\text{kleiner,}\end{matrix}\right.$ je größer er ist; dagegen

b) zu jedem negativen Logarithmen eine Zahl, die $\left\{\begin{matrix}\text{kleiner}\\\text{größer}\end{matrix}\right.$ als 1 ist, und zwar desto $\left\{\begin{matrix}\text{kleiner,}\\\text{größer,}\end{matrix}\right.$ je größer er ist.

---

*) Je größer nemlich der Divisor — die Zahl — bei gleichbleibendem Dividend — Eins, 1 — ist, desto kleiner ist der Quotient — das Umgekehrte der Zahl.

Denn je größer der Logarithme ist, desto größer ist bei der im §. 28 gelehrten Bestimmung der ihm angehörigen Zahl der Potenzexponent, nach dem man potenzirt, und desto kleiner der Wurzelexponent, nach welchem man die Wurzel zieht.

II. Für jede Grundzahl, welche $\left\{\begin{array}{l}\text{größer}\\ \text{kleiner}\end{array}\right.$ als 1 ist, und deren Umgekehrtes also $\left\{\begin{array}{l}\text{kleiner}\\ \text{größer}\end{array}\right.$ als 1 ist, gehört demnach umgekehrt

a) zu jeder Zahl, die größer als 1 ist, ein $\left\{\begin{array}{l}\text{positiver}\\ \text{negativer}\end{array}\right.$ Logarithme, und zwar ein desto größerer, je größer die Zahl ist, dagegen

b) zu jeder Zahl, die kleiner als 1 ist, ein $\left\{\begin{array}{l}\text{negativer}\\ \text{positiver}\end{array}\right.$ Logarithme, und zwar ein desto größerer, je kleiner die Zahl ist.

*§. 30.

Berechnung der Logarithmen.

Um einzusehen, daß und wie für eine festgesetzte Grundzahl der Logarithme einer jeden Zahl berechnet werden kann, dient folgendes Verfahren, das auch noch über die Beschaffenheiten der Logarithmen einige Aufschlüsse gibt.

1. Man bilde von der Grundzahl sowohl, als von ihrem Umgekehrten alle in natürlicher Folge aufsteigenden Potenzen, die 2te, 3te, 4te, 5te, u. s. f.

Von diesen Potenzen sind die einen größer, die anderen kleiner als 1, je nachdem der Potentiand (die Grundzahl oder ihr Umgekehrtes) größer oder kleiner als 1 ist. Insbesondere, wenn die Grundzahl $\left\{\begin{array}{l}\text{größer}\\ \text{kleiner}\end{array}\right.$ als 1 ist, sind die Potenzen derselben auch $\left\{\begin{array}{l}\text{größer}\\ \text{kleiner}\end{array}\right.$, jene der umgekehrten Grundzahl $\left\{\begin{array}{l}\text{kleiner}\\ \text{größer}\end{array}\right.$ als 1.

Z. B. Wenn 16 die Grundzahl ist, so bilde man folgende Potenzenreihe:

Exponent	Potenz der Grundzahl
0	1
1	16
2	256
3	4096
4	65536
5	1048576
6	16777216

2. Mit diesen Potenzen vergleiche man die Zahl, deren Logarithmen man sucht; und zwar mit den Potenzen, welche $\left\{\begin{matrix}\text{größer}\\ \text{kleiner}\end{matrix}\right.$ als 1 sind, wenn die Zahl $\left\{\begin{matrix}\text{größer}\\ \text{kleiner}\end{matrix}\right.$ als 1 ist; ob nemlich die Zahl einer solchen Potenz gleich ist oder nicht.

a) Ist die Zahl einer Potenz der $\left\{\begin{matrix}\text{Grundzahl selbst}\\ \text{umgekehrt. Grundz.}\end{matrix}\right.$ gleich, so ist der Exponent dieser Potenz, $\left\{\begin{matrix}\text{so wie er ist (positiv)}\\ \text{negativ genommen,}\end{matrix}\right.$ der verlangte Logarithme der Zahl. (§. 28; I. 1 und II. 1.)

Z. B. Sucht man den Logarithmen von 65536, so findet man, daß diese Zahl die 4te Potenz der Grundzahl 16 ist; folglich ist 4 der Logarithme derselben.

b) Ist aber die Zahl keiner solchen Potenz gleich, so lassen sich jedesmal leicht zwei benachbarte (unmittelbar nach einander folgende) derlei Potenzen finden, zwischen welchen die Zahl liegt, von denen nemlich eine kleiner, die andere aber größer als diese Zahl ist. Dann liegt auch ihr Logarithme zwischen den beiden benachbarten, nur um 1 von einander verschiedenen Exponenten, d. h. er ist größer als der kleinere, und kleiner als der größere dieser beiden Exponenten, und ist $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right.$, wenn die Potenzen von der $\left\{\begin{matrix}\text{Grundzahl selbst}\\ \text{umgekehrten Grundzahl}\end{matrix}\right.$ herstammen. (§. 29.)

Z. B. Verlangt man den Logarithmen von 10000, so muß, weil diese Zahl zwischen 4096 und 65536, nemlich zwischen die 4te und 5te Potenz der Grundzahl 16 fällt, der gesuchte Logarithme zwischen 4 und 5 fallen.

3. Im letzteren Falle erhebe man die Zahl, deren Logarithmen man sucht, zu den nach einander folgenden Potenzen, und vergleiche jede solche Potenz mit den Potenzen der Grundzahl oder ihres Umgekehrten, je nachdem jene oder diese, so wie sie selbst, größer oder kleiner als 1 ist, ob sie nemlich einer solchen Potenz gleich sei, oder nicht.

a) Ist eine Potenz der Zahl, zu der man den Logarithmen sucht, einer Potenz der $\left\{\begin{matrix}\text{Grundzahl selbst}\\ \text{umgekehrten Grundzahl}\end{matrix}\right.$ gleich; so ist der Exponent dieser letztern Potenz $\left\{\begin{matrix}\text{so wie er ist (positiv)}\\ \text{negativ genommen}\end{matrix}\right.$ der Logarithme jener Potenz der Zahl, folglich das Sovielfache des verlangten Logarithmen, als der Exponent jener Potenz der Zahl angibt. (§. 19.)

Mithin berechnet man den geforderten Logarithmen, indem man den $\left\{\begin{array}{l}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{array}\right.$ genommenen Exponenten der Potenz der $\left\{\begin{array}{l}\text{Grundzahl}\\ \text{umgek. Grundzahl}\end{array}\right.$ durch den Exponenten der Potenz der Zahl dividirt.

Z. B. Sucht man den Logarithmen von 32, so ist $32^1 = 32$, $32^2 = 1024$, $32^3 = 32768$, $32^4 = 1048576$, und diese Zahl ist zugleich die 5te Potenz der Grundzahl 16, also ist 4. Log. 32 = 5, und wenn man beiderseits des Gleichheitszeichens durch 4 theilt:

$$\text{Log. } 32 = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4} = 1{\cdot}25.$$

b) Ist aber eine Potenz der Zahl, deren Logarithmen man sucht, keiner Potenz der $\left\{\begin{array}{l}\text{Grundzahl}\\ \text{umgek. Grundz.}\end{array}\right.$ gleich; so lassen sich jedesmal leicht zwei benachbarte solche Potenzen finden, zwischen denen jene Potenz der Zahl liegt. Dann liegt (nach §. 29) auch der Logarithme dieser Potenz der Zahl, d. i. das Sovielfache des verlangten Logarithmen, als der Exponent derselben Potenz angibt, zwischen den zwei $\left\{\begin{array}{l}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{array}\right.$ genommenen benachbarten (nur um 1 von einander verschiedenen) Exponenten der $\left\{\begin{array}{l}\text{Grundzahl selbst.}\\ \text{umgekehrten Grundzahl.}\end{array}\right.$ Der geforderte Logarithme liegt also zwischen den beiden Quotienten dieser zwei $\left\{\begin{array}{l}\text{positiven}\\ \text{negativen}\end{array}\right.$ Exponenten getheilt durch jenen Exponenten der Potenz der Zahl, oder zwischen den beiden Brüchen, deren Nenner der Exponent dieser Potenz der Zahl ist, deren Zähler aber jene zwei nur um 1 von einander verschiedenen $\left\{\begin{array}{l}\text{positiven}\\ \text{negativen}\end{array}\right.$ Exponenten der $\left\{\begin{array}{l}\text{Grundzahl}\\ \text{umgek. Grundzahl}\end{array}\right.$ sind.

Da diese zwei Brüche nur um den so vielten Theil der Einheit, als ihr gemeinschaftlicher Nenner anzeigt, von einander unterschieden sind; so wird man, wenn man den $\left\{\begin{array}{l}\text{kleineren}\\ \text{größeren}\end{array}\right.$ Bruch für den Logarithmen der vorgelegten Zahl annimmt, diesen zwar um etwas zu $\left\{\begin{array}{l}\text{klein}\\ \text{groß}\end{array}\right.$ erhalten, allein der Fehler, das $\left\{\begin{array}{l}\text{Zu wenig}\\ \text{Zu viel}\end{array}\right.$ wird immer weniger ausmachen, als ein solcher vielter Theil der Einheit, wie der gemeinschaftliche Nenner, jener Exponent der Potenz derjenigen Zahl angibt, deren Logarithmen man sucht. Man vermag daher den verlangten Logarithmen mit jeder beliebigen Schärfe zu berechnen, wenn man nur die zu vergleichende Potenz der gegebenen Zahl genügend hoch wählt.

Z. B. Verlangt man den Logarithmen von 3 für die Grundzahl 16, so liegt

$3^1 =$	3	zwischen	1 u. 16	also	1 Log. 3	zwischen	0 u. 1	und Log. 3	zwischen	0 u. 1
$3^2 =$	9	〃	〃 〃 〃	〃	2 Log. 3	〃	0 u. 1	〃 〃	〃	0 u. $\frac{1}{2}$
$3^3 =$	27	〃	16 u. 256	〃	3 Log. 3	〃	1 u. 2	〃 〃	〃	$\frac{1}{3}$ u. $\frac{2}{3}$
$3^4 =$	81	〃	〃 〃 〃	〃	4 Log. 3	〃	1 u. 2	〃 〃	〃	$\frac{1}{4}$ u. $\frac{2}{4}$
$3^5 =$	243	〃	〃 〃 〃	〃	5 Log. 3	〃	1 u. 2	〃 〃	〃	$\frac{1}{5}$ u. $\frac{2}{5}$
$3^6 =$	729	〃	256 u. 4096	〃	6 Log. 3	〃	2 u. 3	〃 〃	〃	$\frac{2}{6}$ u. $\frac{3}{6}$
$3^7 =$	2187	〃	〃 〃 〃	〃	7 Log. 3	〃	〃 u. 〃	〃 〃	〃	$\frac{2}{7}$ u. $\frac{3}{7}$
$3^8 =$	6561	〃	4096 u. 65536	〃	8 Log. 3	〃	3 u. 4	〃 〃	〃	$\frac{3}{8}$ u. $\frac{4}{8}$
$3^9 =$	19683	〃	〃 〃 〃	〃	9 Log. 3	〃	〃 u. 〃	〃 〃	〃	$\frac{3}{9}$ u. $\frac{4}{9}$
$3^{10} =$	59049	〃	〃 〃 〃	〃	10 Log. 3	〃	〃 u. 〃	〃 〃	〃	$\frac{3}{10}$ u. $\frac{4}{10}$

Von allen diesen Brüchen, die kleiner als Log. 3 sind, ist $\frac{1}{3}$ der größte, und
〃 〃 〃 〃 〃 größer 〃 〃 〃 〃 $\frac{4}{10}$ 〃 kleinste;

mithin sind die engsten (am wenigsten von einander und dem Einzuschränkenden verschiedenen) bisher gefundenen Grenzen des Log. 3 die Brüche $\frac{1}{3}$ u. $\frac{4}{10}$ oder 0·33 und 0·40; nemlich dieser Logarithme hat sicher 3 zur ersten Decimalziffer und seine zweite Decimalziffer liegt zwischen 3 u. 9; oder für die Grundzahl 16 ist Log. 3 = 0·3....

Betrachtung. Aus diesen Vorschriften und Beispielen erhellt zur Genüge, daß die hier gelehrte Berechnungsweise der Logarithmen keineswegs zu den bequemen gehört. Allein auf eine solche kam es uns hier auch nicht an, sondern diese Darstellung sollte nur nachweisen, daß es immer möglich ist, für eine bestimmte Grundzahl zu jeder Zahl den angehörigen Logarithmen zu finden. Zugleich wurde gerade sie gewählt, weil sie mehr als irgend eine andere erkennen läßt, daß für jede Grundzahl nur höchst wenig ganze Zahlen wieder ganze Zahlen oder regelmäßige Brüche, kurz rationale Zahlen zu Logarithmen haben können, und daß die Logarithmen fast aller ganzen Zahlen irrational, also zwar nie völlig genau, aber doch mit jeder beliebigen Schärfe bestimmbar sind. — Denn damit der Logarithme einer Zahl rational ausfalle, muß irgend eine Potenz der Zahl einer Potenz der Grundzahl oder ihres Umgekehrten gleich sein. Allein Potenzen ganzer Zahlen können nur dazumal gleich ausfallen, wenn sie ganz dieselben Primfactoren enthalten und die Exponenten von einerlei Primfactoren durchaus das nemliche Verhältniß zu einander haben, d. h. in derselben Ordnung getheilt einerlei Quotienten geben; und hieraus läßt sich leicht erachten, unter welchen noch größeren Einschränkungen Potenzen eigentlicher Brüche gleich sein können.

*§. 31.

Mannigfaltigkeit von Logarithmensystemen.

Hat man für sämmtliche Zahlen angemessene, nemlich solche Logarithmen gefunden, daß der Logarithme jedes Productes den Logarithmen seiner Factoren zusammen genommen gleich ist; so kann man aus diesen Logarithmen andere, dieser Grundforderung gleichfalls genügende, erhalten, indem man die der Gesammtschaft der Zahlen angewiesene Gesammtheit der Logarithmen, oder — wie man letztere zu nennen pflegt — das aufgestellte Logarithmensystem, durch einerlei Zahl multiplicirt oder dividirt.

Denn ist eine Zahl so groß als mehrere andere zusammen genommen, so ist auch jedes Vielfache, das 2fache, 3fache, 4fache, ..., von jener einen so groß als die Ebensovielfachen, die 2fachen, 3fachen, 4fachen, ..., dieser mehreren zusammen genommen. Z. B.

Weil $14 = 3 + 7 + 4$ ist,

muß auch $2.\ 14 = 2.\,3 + 2.\,7 + 2.\,4$

d. i. $28 = 6 + 14 + 8$ sein;

und eben so wird, wenn man durchweg mit 3 multiplicirt,

$42 = 9 + 21 + 12$ sein; u. s. f.

Sonach ist auch jeder vielte Theil, der 3te, 5te, 10te Theil u. dgl. von jener einen so groß als die eben so vielten Theile, die 3ten, 5ten, 10ten Theile ..., zusammengefaßt. Mithin muß auch der mehrmals größere oder kleinere Logarithme jedes Productes so groß sein, als die eben so vielmal größeren oder kleineren Logarithmen seiner Factoren zusammen genommen.

Kennt man demnach ein Logarithmensystem, so erhält man ein anderes System, indem man jenes durchgängig durch einerlei Zahl multiplicirt oder dividirt.

Z. B. Multiplicirt oder theilt man alle Logarithmen des obigen Logarithmentäfelchens (S. 15) durch 2 und 4, so fangen die neuen Logarithmentäfelchen wie folgt an.

Zahlen	Logarithmensysteme				
	A	B	C	D	E
2	1	2	0·5	4	0·25
4	2	4	1	8	0·5
8	3	6	1·5	12	0·75
16	4	8	2	16	1
32	5	10	2·5	20	1·25
64	6	12	3	24	1·5

Man kann daher zur Gesammtheit aller Zahlen beliebig viele paßliche Logarithmensysteme bestimmen.

*§. 32.

Abänderung der logarithmischen Grundzahl.

Auch der Übergang von jedem bereits berechneten Logarithmensysteme auf ein neues von angewiesener Grundzahl läßt sich leicht einsehen. Denn hiebei muß wieder, wie bei der Feststellung jedes Logarithmensystemes, Alles auf die gewählte Grundzahl ankommen. Hat man daher für das neu zu berechnende Logarithmensystem eine gewisse Grundzahl, d. h. diejenige Zahl ausgewählt, deren Logarithme im neuen Systeme 1 sein soll; so wird man, damit diese Zahl zum neuen Logarithmen 1 erhalte, weil jede Zahl durch sich selbst getheilt 1 zum Quotienten gibt, ihren früheren Logarithmen durch sich selbst theilen müssen, folglich durch diesen Logarithmen auch das ganze System.

Um daher von einem bereits berechneten Logarithmensysteme auf ein neues zu übergehen, dessen Grundzahl man kennt, theilt man das ganze vorhandene Logarithmensystem durch den in ihm vorkommenden Logarithmen dieser Grundzahl des neuen Systems.

Z. B. Will man, wie im Systeme C, die Zahl 4 zur Grund-

zahl machen, so muß man das System A durch 2,
" " B " 4
" " D " 8
" " E " 0·5,
als durch den jedesmaligen Logarithmen der Grundzahl 4, dividiren.

§. 33.

Gewöhnliche Darstellung der Logarithmen.

Die Logarithmen erscheinen, mag man sie nun entweder völlig genau oder nur bis auf einen hinreichend kleinen Fehler genähert angeben, ursprünglich in der Form regelmäßiger Brüche, deren Nenner und Zähler ganze Zahlen sind, und können daher leicht überhaupt als gemischte Zahlen, d. h. als aus einer ganzen Zahl (die Null mit einbegriffen) und aus einem echten Bruche zusammengesetzt, dargestellt werden; wobei die vorkommenden echten Brüche am besten decimal, zehntheilig, als Decimal- oder zehntheilige Brüche, folglich die Logarithmen selbst als Decimalzahlen, d. i. als ganze Zahlen mit angehängten Decimalen, vorgestellt werden, weil man mit Decimalbrüchen weit bequemer als mit jeder anderen Art von Brüchen rechnet.

Den ganzzahligen Bestandtheil eines Logarithmen nennt man, weil man aus ihm leicht ersehen kann, zwischen welche zwei natürlich auf einander folgende Potenzen der Grundzahl oder ihres Umgekehrten die ihm angehörige Zahl hineinfällt, seine Charakteristik oder Kennziffer, und den echt gebrochenen Bestandtheil seine Mantisse (Zugabe, Anhängsel, Schleppe).

So ist z. B. für die Grundzahl 64, wenn man in unserem Logarithmentäfelchen (S. 15) gesammte Logarithmen durch den Log.64, welcher 6 ist, dividirt (§. 32), der Log.$256 = \frac{8}{6}$, also auch $= 1\frac{1}{3}$ oder auch noch $=$ 1·333333....; folglich 1 die Kennziffer und $\frac{1}{3}$ oder 0·333333.... die Mantisse dieses Logarithmen.

Die Mantissen der Logarithmen stellt man, je nachdem man sie mehr oder weniger genau oder scharf braucht, in mehr oder weniger Decimalstellen dar. Am zweckmäßigsten sind für die meisten genauen Rechnungen 7stellige Mantissen, doch genügen für minder genau geforderte Rechnungsergebnisse auch 6- und 5stellige Mantissen.

§. 34.

Darstellung negativer Logarithmen als Unterschiede.

In allen Fällen, wo nicht durch einen negativen Logarithmen zu dividiren ist, bleibt es vortheilhaft, jeden negativen Logarithmen als regelwidrigen Unterschied mit ganzzahligem Subtrahend darzustellen.

Zu diesem Zwecke nimmt man als Subtrahend irgend eine ganze Zahl, welche größer ist als der Betrag des zu verwandelnden negativen Logarithmen, zieht diesen Betrag von jenem Subtrahend ab, und setzt den Rest als Minuend an. Zu solchem ganzzahligen Subtrahend kann man mit Vortheil entweder die nächst größere ganze Zahl oder noch besser das nächst größere Vielfache von Zehn, nemlich die nächst größere der Zahlen **10, 20, 30, 40, ...** wählen.

Z. Beispiel kann man den Logarithmen

$$-2 \cdot 3578954 \overset{\text{in}}{=} (6 - 2 \cdot 3578954) - 6 = 3 \cdot 6421046 - 6$$

oder in

$$= (3 - 2 \cdot 3578954) - 3 = 0 \cdot 6421046 - 3$$

oder in

$$= (10 - 2 \cdot 3578954) - 10 = 7 \cdot 6421046 - 10$$

umstalten.

Anmerkung. Nimmt man **10** zum Subtrahend, so ist der Minuend die Ergänzung des umzustaltenden (negativen) Logarithmen auf **10** (griech. deka) und heißt darum die dekadische Ergänzung dieses Logarithmen. Man berechnet diese leicht, indem man von der Kennziffer angefangen jede Ziffer des Logarithmen von **9** und die letzte bedeutende Ziffer (rechts) von **10** abzieht.

§. 35.

Vortheilhafteste und darum gewöhnlich gebrauchte Logarithmen.

Wir pflegen bekanntlich alle Zahlen nach demjenigen Ziffersysteme zu schreiben, dessen Grundzahl zehn (griech. deka, lat. decem), ist, und welches deswegen das dekadische oder Decimal-Ziffersystem genannt wird. Hierwegen muß unter allen ganzen Zahlen die Zahl **zehn** am geeignetsten zur Grundzahl eines logarithmischen Systems sein.

Der Erste, der dies erkannte und danach (im J. 1617) solche Logarithmen berechnete, war Heinrich Briggs, und alsbald kamen selbe in so allgemeine und wohl verdiente Aufnahme, daß man seither zum wirklichen logarithmischen Rechnen nur diese Art von Logarithmen verwendet. Deswegen nennt man da, wo die Grundzahl zehn ist, die Logarithmen so wie das ganze Logarithmensystem bald dekadisch, bald briggisch, bald gewöhnlich, oder wohl auch ohne allen Beinamen, und bezeichnet solche Logarithmen ganz einfach durch die mit kleinen lateinischen Buchstaben geschriebene Silbe log.

§. 36.

Eigenheiten dekadischer Logarithmen.

Der früher von uns aufgestellten Lehre zufolge, erkennen wir leicht nachbenannte besondere Eigenschaften der dekadischen Logarithmen.

1. Die dekadischen Logarithmen ganzer und gemischter und überhaupt aller die Einheit übersteigenden Zahlen sind positiv und wachsen mit den Zahlen. (§. 29; II., a.)

2. Die dekadischen Logarithmen echter Brüche und überhaupt aller von der Einheit übertroffenen Zahlen sind negativ, und wachsen bei abnehmenden Zahlen. (§. 29; II., b.)

3. Jeder **positive** ganzzahlige Logarithme gehört der von ihm gezählten Potenz der Grundzahl 10, oder der eben so vielten dekadischen Einheit oder der kleinsten dekadischen Zahl von eben so vieltem Range.*) (§. 26.)

Die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, ... sind nemlich die dekadischen Logarithmen der 1sten, 2ten, 3ten, 4ten, 5ten,... Potenz der Grundzahl 10, oder der 1sten, 2ten, 3ten, 4ten, 5ten, ... dekadischen Einheit, d. i. der Zahlen 10, 100, 1000, 10000, 100000,... also auch der kleinsten dekadischen Zahlen vom 1sten, 2ten, 3ten, 4ten, 5ten,... Range.

---

*) Eine dekadisch geschriebene oder dekadische Zahl heißt vom so vielten Range, als von welchem Range ihre höchste oder oberste dekadische Stelle ist, folglich als die wie vielte diese oberste Stelle vor (zur Linken) der Einerstelle ist. Z. B. Die Zahlen 1000, 5791, 5791·326 sind vom 3ten Range, weil ihre oberste dekadische Stelle die der Tausende, also vom 3ten Range, oder die 3te vor der der Einer ist.

4. Jeder **negative** ganzzahlige Logarithme gehört der von seinem Betrage gezählten Potenz von $\frac{1}{10}$, der umgekehrten Grundzahl, oder der eben so vielten Decimaleinheit oder dem kleinsten Decimalbruche vom eben so vielten Range*). (§. 27.)

Die Zahlen -1, -2, -3, -4, -5,.... sind nemlich die dekadischen

Logarithmen der 1sten, 2ten, 3ten, 4ten, 5ten, ... Potenz v. $\frac{1}{10}$,

oder der 1sten, 2ten, 3ten, 4ten, 5ten,... Decimaleinheit, d. i. der Decimalbrüche $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$, $\frac{1}{100000}$...

oder 0·1 0·01 0·001 0·0001 0·00001,..., also auch der kleinsten Decimalbrüche vom 1sten, 2ten, 3ten, 4ten, 5ten,... Range.

Umgekehrt:

5. Der dekadische Logarithme einer Potenz der Grundzahl 10, also der kleinsten dekadischen Zahl eines gewissen Ranges, oder einer dekadischen Einheit, ist die Nummer, Rangs- oder Ordnungszahl derselben (der Exponent jener Potenz).

Von den Zahlen 10, 100, 1000, 10000, 100000,...

also von der 1sten, 2ten, 3ten, 4ten, 5ten, ... Potenz v. 10,

oder von der 1sten, 2ten, 3ten, 4ten, 5ten, ... dekadischen Einheit oder von der kleinsten erst-, zweit-, dritt-, viert-, fünft-,.... -rangigen dekadischen Zahl sind die Rangszahlen 1, 2, 3, 4, 5,..... die dekadischen Logarithmen.

6. Der dekadische Logarithme einer Potenz von $\frac{1}{10}$, der umgekehrten Grundzahl, oder des kleinsten Decimalbruches eines gewissen Ranges oder einer Decimaleinheit ist negativ und sein Betrag ist die Nummer, Rangs- oder Ordnungszahl derselben (der Exponent jener Potenz).

---

*) Ein (echter, keine Ganzen enthaltender) Decimalbruch heißt vom so vielten Range, als von welchem Range seine höchste oder oberste Decimalstelle ist, folglich als die wie vielte diese oberste Decimalstelle hinter (zur Rechten) der Einerstelle ist. Z. B. Die Decimalbrüche 0·001, 0·005791 sind vom 3ten Range, weil ihre oberste Decimalstelle die der Tausendtel also vom 3ten Range, oder die 3te hinter der Stelle der Einer ist.

Von den

Decimalbrüchen $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \frac{1}{100000}, \ldots$

oder 0·1, 0·01, 0·001, 0·0001, 0·00001, ...

also von der 1sten, 2ten, 3ten, 4ten, 5ten, ... Potenz von $\frac{1}{10}$,

oder von der 1sten, 2ten, 3ten, 4ten, 5ten, ... Decimaleinheit oder von dem kleinsten Decimalbruche

des 1sten, 2ten, 3ten, 4ten, 5ten, ... Ranges

sind die negativen Rangszahlen, nemlich

—1, —2, —3, —4, —5, ...

die dekadischen Logarithmen.

§. 37.

Fortsetzung.

7. *Die Mantissen der dekadischen Logarithmen aller mit einerlei Ziffern geschriebenen Decimalzahlen* (welche also durch Weglassung des Decimalzeichens und der Anfangs- oder Schlußnullen — der links oder rechts stehenden Nullen — in eine und dieselbe ganze Zahl übergehen) *sind ganz dieselben.*

Solche Zahlen sind z. B.

470369
47036900
47036900000
4703·69
4·70369
0·470369
0·0470369
0·000470369.

Denn, was auch für zwei solche gleichziffrige Zahlen mit einander verglichen werden mögen, so muß doch immer die größere aus der kleineren hervorgehen, indem man das Decimalzeichen oder auch die Einerstelle um eine oder etliche Ziffern oder Stellen mehr nach rechts rückt, und nöthigen Falls zu diesem Zwecke noch die erforderlichen Nullen rechts beisetzt, folglich indem man jegliche Ziffer auf eine, um eben so viel Stellen, höhere dekadische Stelle bringt. Dadurch wird aber, gemäß dem Grundgesetze des dekadischen Ziffersystems, der Werth jeder einzelnen Ziffer, also auch der Werth der gesammten kleineren Zahl, eben so vielmal verzehnfacht, eben so oft mit 10 nach einander (oder wiederholt) oder mit der eben so vielten Potenz von 10 multiplicirt. *Mithin wird die größere von zwei* gleichziffrigen Decimalzahlen aus der kleineren erhalten, indem man sie mit der so vielten Potenz von **10** multiplicirt, als um wie viel Ziffern das Decimalzeichen in der größeren Zahl mehr rechts steht, als in der kleineren.

Mit welcher Zahl man aber multiplicirt, deren Logarithme ist zu addiren; und der dekadische Logarithme jeder Potenz der Grundzahl **10** ist ihr eigener Potenzexponent. Mithin erhält man den dekadischen Logarithmen der größern von solchen zwei gleichziffrigen Zahlen, indem man zum dekadischen Logarithmen der kleineren Zahl die Anzahl der Ziffern, um welche das Decimalzeichen in der größeren Zahl mehr rechts steht, als in der kleineren, also eine ganze Zahl, addirt.

Zu einer gemischten Zahl, als welche jeder Logarithme durch seine Kennziffer und Mantisse dargestellt ist, wird aber eine ganze Zahl addirt, indem man sie blos zum ganzzahligen Antheile derselben addirt. Mithin bleibt bei diesem Addiren der unganze Theil, die Mantisse, ungeändert, und blos zum ganzzahligen Antheile, zur Kennziffer, wird die ganze Anzahl — von Stellen oder Ziffern, welche zwischen den Decimalzeichen beider gleichziffrigen (mit den identischen Ziffern) unter einander stehend gedachten Decimalzahlen sich befinden — addirt.

So ist $47036900000 = 470369 \cdot 10^5 \quad = 4703{\cdot}69 \cdot 10^7$
$\qquad 470369 = 4{\cdot}70369 \cdot 10^5 \quad = 0{\cdot}0470369 \cdot 10^7$
also $\log. 47036900000 = \log. 470369 + 5 = \log. 4703{\cdot}69 + 7$
$\qquad \log. 470369 = \log. 4{\cdot}70369 + 5 = \log. 0{\cdot}0470369 + 7.$

8. Die Kennziffer des dekadischen Logarithmen jeder dekadischen Zahl — sei diese entweder eine ganze allein oder eine ganze mit angehängten Decimalen — gleicht der Rangsnummer dieser Zahl, oder der Rangsnummer der obersten Stelle dieser Zahl, oder der Anzahl (Menge) ihrer Stellen oder Ziffern vor (zur Linken) der Einerstelle der Zahl.

So hat jede der Zahlen

5791, 5791·326, 3500, 3500·15, 1000

drei Stellen oder Ziffern vor ihren Einern, also ist ihre oberste Stelle und daher auch sie selbst vom dritten Range, daher ist 3 die Kennziffer ihres dekadischen Logarithmen.

Denn eine dekadische Zahl ist desto größer, je höher ihre oberste Stelle ist, und von einer je höheren Ziffer diese oberste Stelle besetzt ist. Mithin ist jede bestimmt angewiesene dekadische Zahl — wie jede der oben genannten — wenigstens so groß, wenn nicht größer, als die kleinste von ihrem — dem dritten — Range, aber sicher kleiner als die kleinste vom nächst höheren — dem vierten — Range. Folglich ist (§. 29, II, a) der dekadische Logarithme dieser Zahl, wenigstens so groß, wenn nicht größer als der Logarithme der kleinsten Zahl von ihrem — dem dritten — Range, aber gewiß kleiner als der Logarithme der kleinsten Zahl vom nächst höheren — dem vierten — Range. Der dekadische Logarithme einer solchen möglich kleinsten dekadischen Zahl von gewissem Range ist aber eben die Rangsnummer dieser Zahl. (§. 36, 5.) Daher muß der dekadische Logarithme jeder bestimmten dekadischen Zahl wenigstens so groß, wenn nicht größer, als ihre Rangsnummer — hier 3 — jedoch sicher kleiner als die nächst höhere um Eins (1) größere Rangsnummer — hier 4 — sein; folglich wird er erhalten, wenn man zur Rangsnummer (3) der Zahl entweder nichts mehr oder noch etwas, das weniger als 1 beträgt, hinzugibt. — Jener ganzzahlige Antheil des Logarithmen heißt aber seine *Kennziffer*, und dieser ihm zuzugebende Antheil, der entweder nichts (0) oder weniger als 1 ist, seine *Mantisse*. (§. 33.) *Mithin ist die Kennziffer des dekadischen Logarithmen jeder dekadischen — nicht von 1 übertroffenen Zahl — die Rangsnummer* (hier 3) *dieser Zahl.*

Man findet demnach bei jeder dekadischen — ganzen oder gemischten — *Zahl die Kennziffer ihres dekadischen Logarithmen* ganz leicht, indem man nur ihre Ziffern oder Stellen *vor* den Einern abzählt; denn die Zahl, bei der man bei diesem Abzählen inne hält, ist eben die verlangte Kennziffer.

Beispiele. So ist

$$\text{charact. log. } \underset{21}{74}8 = 2, \quad \text{charact. log. } 7\underset{12}{48}\cdot76 = 2.$$

$$\text{charact. log. } \underset{123}{137}6 = 3, \quad \text{charact. log. } \underset{321}{137}6\cdot51 = 3$$

$$\text{charact. log. } \underset{54321}{79854}3 = 5, \quad \text{charact. log. } \underset{12345}{79854}3\cdot80 = 5.$$

9. *Die Kennziffer des dekadischen Logarithmen* jedes (echten) *Decimalbruches* ist die negative Nummer oder Rangsnummer seiner obersten Decimalstelle oder Decimalziffer, oder die negative Anzahl seiner Anfangsnullen.

So ist in jedem der Decimalbrüche

$$0\cdot00732, \quad 0\cdot009148, \quad 0\cdot001, \quad 0\cdot00102$$

die oberste Decimalstelle oder Decimalziffer die 3te, daher ist —3 die Kennziffer seines dekadischen Logarithmen.

Denn ein Decimalbruch ist desto größer, je höher (d. h. je näher an den Einern) seine oberste (Decimal-) Stelle ist, und von einer je höheren Ziffer diese oberste (Decimal-) Stelle besetzt ist. Mithin ist jeder bestimmte Decimalbruch — wie jeder der oben angeführten — größer oder ausnahmsweise wenigstens so groß als der kleinste Decimalbruch von seinem — hier dem dritten — Range, aber sicher kleiner als der kleinste Decimalbruch vom nächst höheren Range, oder von der nächst niedrigeren Rangsnummer — hier 2 —, dessen oberste Decimalstelle um eine Stelle näher an den Einern steht. Folglich ist der Betrag des (vermöge §. 29, II, b) negativen dekadischen Logarithmen dieses Decimalbruches kleiner oder höchstens ausnahmsweise so groß, als der Logarithme des kleinsten Decimalbruches von seinem — dem 3ten — Range, aber gewiß größer, als der Logarithme des kleinsten Decimalbruches vom nächst niedrigeren — hier dem zweiten — Range. Der dekadische Logarithme eines solchen möglich kleinsten Decimalbruches von gewissem Range ist aber eben dieselbe, jedoch negativ genommene Rangsnummer dieses Decimalbruches (§. 36, 6,). Daher muß der negative dekadische Logarithme jedes bestimmten Decimalbruches höchstens so groß, wenn nicht kleiner als seine Rangsnummer — hier 3 — jedoch sicher größer als die nächst niedrigere — um 1 kleinere — Rangsnummer — hier 2 sein; folglich muß er erhalten werden, wenn man zur negativen Rangsnummer (— 3) des Decimalbruches entweder nichts mehr oder noch etwas, das jedoch weniger als 1 beträgt, hinzugibt (addirt). Dieser hinzuzugebende, die 1 niemal erreichende, Zusatz heißt aber die Mantisse, und jene negative ganze Zahl, die Kennziffer des Logarithmen. Mithin ist die Kennziffer des dekadischen Logarithmen jedes echten Decimalbruches die negative Rangsnummer (hier negativ 3) der obersten (ersten nicht mit Null) besetzten Decimalstelle, oder der ersten bedeutenden Decimalziffer, oder auch die negative Anzahl (— 3) der am Anfang des Decimalbruches stehenden Nullen, indem man nicht nach den Decimalnullen die erste bedeutende Decimalziffer, sondern vor ihnen die Einernulle mitzählt. Die Mantisse bleibt immer noch wie vordem hinzuzugebend, also positiv.

Diese negative Kennziffer kann man auch mit vielem Vortheil als regelwidrigen Unterschied darstellen, indem man zum Subtrahend das kleinste, die Anzahl der Anfangsnullen oder die Nummer der höchsten Decimalziffer übertreffende, Vielfache von 10, d. i. die nächst größere der Zahlen 10, 20, 30, . . . , folglich zum Minnend die Ergänzung dieser Anzahl der Anfangsnullen oder der Nummer der obersten Decimalziffer auf den gewählten Subtrahend macht.

Man findet demnach bei jedem echten — weniger als 1 betragenden — Decimalbruche die Kennziffer seines dekadischen Logarithmen, indem man entweder die Anzahl seiner Anfangsnullen abzählt, oder nachsieht, die wie vielte (Decimalziffer) die oberste (erste bedeutsame) Decimalziffer ist; da dann die so gefundene Anzahl entweder negativ genommen die verlangte Kennziffer ist, oder zum nächst größeren Vielfachen von 10 ergänzt den positiven, der Mantisse vorzusetzenden, Antheil, dieses Vielfache selbst aber den negativen also abzuziehenden Antheil der Kennziffer gibt.

Beispiele. So ist

$$\text{charact. log. } 0{\cdot}\overset{1}{\underset{1}{9}}847 \quad = -1 = 9 - 10,$$

$$\text{charact. log. } 0{\cdot}\overset{1}{\underset{1}{0}}\overset{2}{\underset{2}{4}}56 \quad = -2 = 8 - 10,$$

$$\text{charact. log. } 0{\cdot}\overset{1}{\underset{1}{0}}\overset{2}{\underset{2}{0}}\overset{3}{\underset{3}{0}}\overset{4}{\underset{4}{0}}\overset{5}{\underset{5}{4}}56 = -5 = 5 - 10.$$

10. Anderer Beweis der beiden letzten Sätze. Steht bei einer (ganzen oder gemischten) Decimalzahl, die wenigstens eine Einheit zählt, das Decimalzeichen unmittelbar nach der obersten Ziffer, oder enthält sie blos Eine Ziffer der Ganzen; so ist sie nicht kleiner als 1, aber sicher kleiner als die Grundzahl 10, daher ihr dekadischer Logarithme kleiner als 1, folglich seine Kennziffer 0.

So z. B. ist char. log. 1·487 $= 0$
char. log. 9·0648 $= 0$
char. log. 9·9999 $= 0$.

Ist aber die Decimalzahl was immer für eine ganze oder gemischte oder echt gebrochene, so kann man sich zu ihr dadurch, daß man ihr Decimalzeichen hinter die oberste Ziffer stellt, folglich diese oberste Ziffer Einer zählen macht, leicht eine neue, gewisser Maßen eine Stamm- oder Vergleichungszahl, der eben beschriebenen Art bilden, welche nur eine einzige Ziffer in den Ganzen enthält, folglich keine höheren dekadischen Einheiten als blose Einer zählt.

Wenn nun die Decimalzahl $\left\{\begin{matrix}\text{nicht kleiner}\\ \text{kleiner}\end{matrix}\right\}$ als 1, folglich $\left\{\begin{matrix}\text{ganz oder gemischt}\\ \text{echt gebrochen}\end{matrix}\right\}$ ist, so steht in ihr das Decimalzeichen oder die Einerstelle um so viel Ziffern mehr $\left\{\begin{matrix}\text{rechts}\\ \text{links}\end{matrix}\right\}$, als in der aus ihr auf die eben beschriebene Weise ableitbaren Vergleichungszahl, als die wie vielte ihre oberste Ziffer oder Stelle $\begin{matrix}\text{vor}\\ \text{hinter}\end{matrix}$ $\left\{\begin{matrix}\text{links}\\ \text{rechts}\end{matrix}\right\}$ der Einerziffer ist; mithin erhält man diese Zahl, wenn man ihre Vergleichungszahl durch die so vielte Potenz von 10 $\left\{\begin{matrix}\text{multiplicirt,}\\ \text{dividirt,}\end{matrix}\right.$ als die wie vielte ihre oberste Ziffer oder Stelle $\left\{\begin{matrix}\text{vor}\\ \text{hinter}\end{matrix}\right.$ den Einern ist. Der dekadische Logarithme dieser Decimalzahl ergibt sich demnach, wenn man — den Exponenten dieser Potenz — die Nummer ihrer obersten Stelle $\left\{\begin{array}{l}\text{vor}\\\text{hinter}\end{array}\right.$ den Einern $\left\{\begin{array}{l}\text{zum}\\\text{vom}\end{array}\right.$ Logarithmen ihrer Vergleichungszahl $\left\{\begin{array}{l}\text{addirt}\\\text{abzieht}\end{array}\right.$. Dieser Logarithme ist aber echt gebrochen (kleiner als 1) und folglich (gemäß §. 33) die Mantisse des verlangten Logarithmen; daher ist die Kennziffer des geforderten Logarithmen der Decimalzahl zu $\left\{\begin{array}{l}\text{addiren}\\\text{subtrahiren}\end{array}\right.$ oder $\left\{\begin{array}{l}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{array}\right.$, und gleich der Nummer oder Rangszahl der obersten Ziffer $\left\{\begin{array}{l}\text{vor}\\\text{hinter}\end{array}\right.$ den Einern.

Z. B. So ist

$$\begin{array}{lll}
\underset{4321}{9064}8 = 9{\cdot}0648 \times 10^4, & \text{log. } 90648 & = \text{log. } 9{\cdot}0648 + 4\\
\underset{7654321}{9064800}0 = 9{\cdot}0648 \times 10^7, & \text{log. } 90648000 & = \text{log. } 9{\cdot}0648 + 7\\
\underset{21}{90}6{\cdot}48 = 9{\cdot}0648 \times 10^2, & \text{log. } 906{\cdot}48 & = \text{log. } 9{\cdot}0648 + 2\\
0.\underset{1}{9}0648 = 9{\cdot}0648 : 10\;, & \text{log. } 0{\cdot}90648 & = \text{log. } 9{\cdot}0648 - 1\\
0{\cdot}\underset{123}{009}0648 = 9{\cdot}0648 : 10^3, & \text{log. } 0{\cdot}0090648 & = \text{log. } 9{\cdot}0648 - 3\\
0{\cdot}\underset{12345}{00009}0648 = 9{\cdot}0648 : 10^5, & \text{log. } 0{\cdot}000090648 & = \text{log. } 9{\cdot}0648 - 5.
\end{array}$$

Ist insonderheit die Decimalzahl nicht kleiner als 1, also ganz oder gemischt, so kann man zur Kennziffer ihres dekadischen Logarithmen anstatt der Nummer ihrer obersten Stelle oder Ziffer vor (links) den Einern auch die Anzahl ihrer Stellen oder Ziffern vor den Einern oder die um 1 verminderte Anzahl ihrer Ziffern oder Stellen in den Ganzen nehmen. Ist dagegen die Decimalzahl kleiner als 1, also echt gebrochen, so kann man zur abzuziehenden (negativen) Kennziffer ihres dekadischen Logarithmen anstatt der Nummer ihrer obersten (Decimal-) Stelle oder Ziffer auch die Anzahl ihrer Anfangsnullen (die der Einer mitgezählt) nehmen; auch kann man anstatt jener Nummer oder dieser Anzahl mit mehr Vortheil das nächst größere Vielfache von 10 abziehen und dafür den Ueberschuß dieses Vielfachen über jene Nummer oder Anzahl, als zu viel Abgezogenes, wieder hinzu addiren.

§. 38.

Uebersicht der Tafeln der dekadischen oder gewöhnlichen Zahlen-Logarithmen.

Die Tafeln der dekadischen oder gewöhnlichen Logarithmen von dekadisch geschriebenen Zahlen brauchen gemäß dem so eben Gelehrten nicht die Kennziffern — weil sie so leicht (nach §. 37, 8 u. 9) zu bestimmen sind — sondern nur die Mantissen dieser Logarithmen, und zwar, wie bereits früher (in §. 24) angeführt wurde, blos von den ganzen Zahlen zu enthalten.

Rücksichtlich ihrer Ausdehnung unterscheiden sich die Logarithmentafeln theils in den höchsten noch aufgenommenen Zahlen, theils in der Anzahl der Mantissenstellen; indem einerseits manche Tafeln bis etwas über 100 000, andere nur bis 10 000 oder etwas darüber reichen, andererseits manche Tafeln 10, 8, 7, manche nur 6, 5, die wenigsten aber blos 4 Decimalziffern in den Mantissen angeben. Wir können sie danach größere, mittlere, kleinere und kleinste Logarithmentafeln nennen.

I. Die größeren Logarithmentafeln geben geradezu noch die Mantissen der fünfziffrigen und der ersten 800 bis 1000 sechsziffrigen Zahlen in 10, 8 oder 7 Stellen. Solche Tafeln sind:

10stellige (selten gebraucht): Vega, thesaurus logarithmorum, 1794;

7stellige (am häufigsten verwendet): Vega logarithmisch-trigonometrisches Handbuch, seit 1783 bis 1849 bereits 31mal aufgelegt, seit 1826 stereotypirt, 1840 überarbeitet von Hülße, sehr deutlich lesbar, correct, bequem und wohlfeil, darum am meisten verbreitet; die Tafeln von Gardiner (1742, 1783, seit 1793 von Callet herausgegeben), von Hutton (1785), von Babbage (1827), von Salomon (1827), von Köhler (1847, 48, stereotypirt, sehr correct, aber leider schwer lesbar), u. a.

II. Die mittleren Logarithmentafeln geben noch von den 4ziffrigen Zahlen die logarithmischen Mantissen 6stellig an. Hieher gehören: die Tables de logarithmes, Paris 1768, die Tafeln von Lindner (1812), von Kulik (1824), von Stampfer (1825), von Ursinus (1826), von Hantschl (1827), von Rühlmann (1837), von Jahn (1844), von Schulz v. Straßnitzki (1848) u. a.

III. Die kleineren Logarithmentafeln geben gleichfalls noch von den 4ziffrigen Zahlen die logarithmischen Mantissen aber nur 5stellig an. Solche sind: die Tafeln von Lalande (1805, deutsch erklärt 1824 und von Köhler 1827, auf 7 Stellen erweitert von Marie 1829), von Prasse (1813), von Westphal (1821), von Winkler (1839), von Böhm (1845), von August (1846), u. a.

IV. Die kleinsten Logarithmentafeln geben auch noch von den 4ziffrigen Zahlen die logarithmischen Mantissen in 4 Stellen an. Solche sind: die Tafeln von J. H. T. Müller (1844).

§. 39.

Beschreibung der Einrichtung der **siebenstelligen** Logarithmen-Tafeln.

Unter den siebenstelligen Logarithmentafeln sind die Vega'schen die brauchbarsten und üblichsten. Deswegen und um durch Betrachtung eines bestimmten Gegenstandes Klarheit in unsere Darstellung zu bringen, nehmen wir bei unserer Beschreibung der Einrichtung und Handhabung der größeren und namentlich der siebenstelligen Logarithmentafeln besonders auf diese Bedacht, bemerken jedoch, daß andere siebenstellige im Wesentlichen ganz eben so eingerichtet sind, und nach dieser Beschreibung vollkommen verstanden werden können. In allen solchen Tafeln haben wir es aber nur mit ihrer ersten Abtheilung zu thun, die überschrieben ist: „Tafel der gemeinen oder briggischen Logarithmen".

In Vega's Logarithmentafel sind:

1. Die Mantissen anfangs bis zur Zahl 100 000 in sieben, und am Ende bis zur Zahl 108 000 in acht Decimalziffern angegeben,

von denen jedesmal die letzte, wenn die erste weggelassene Ziffer mehr als 4 beträgt, um 1 erhöht ist, so daß jede Mantisse nur um weniger als eine halbe Decimaleinheit der niedersten beibehaltenen Decimale gefehlt sein kann.

2. Auf den vier ersten Seiten (2 bis 5) sind in den mit N. (Numerus, Zahl) überschriebenen herablaufenden Spalten die ganzen Zahlen von 1 bis 999 zu je 50, und daneben rechts, in den mit Log. überschriebenen Columnen, ihre vollständigen Logarithmen (Kennziffer*) und Mantisse) nach einander aufgeführt.

3. Auf den übrigen Seiten (von 6 bis 201) hat man zur Raumersparniß die, schon durch den blosen Anblick einer solchen Tafel bestätigte, Bemerkung benützt, daß bei den Mantissen der natürlich nach einander aufsteigenden Zahlen desto mehr Anfangsziffern und um so länger sich gleich bleiben, je größer die Zahlen sind. Darum hat man

a) von allen noch aufgenommenen Zahlen von 10 000 an bis zu 108 000 die periodisch wiederkehrenden Einer- oder Schlußziffern

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

von den vorausgehenden Ziffern abgetrennt in die oberste und unterste Zeile neben einander gestellt;

b) dagegen ließ man die aus den 4 oder 5 Anfangsziffern bestehenden Zahlen in der ersten herablaufenden mit N. über- und unterschriebenen Spalte zu je 50, nach ihrer natürlichen Ordnung unter einander fortlaufen;

c) endlich hat man unter jeder Einerziffer in einer herablaufenden Spalte auf der von jeder einzelnen Gruppe von Anfangsziffern der Zahlen auslaufenden Zeile die vier zumeist sich ändernden End- oder Schlußziffern, und in der ersten mit 0 überschriebenen Columne auch noch die meistens sich gleich bleibenden drei oder vier Anfangs- oder Eingangsziffern der logarithmischen Mantisse eingetragen; jedoch

d) mit der Bemerkung, daß, wenn nicht die neben der Zahl oder etwas höher stehenden, sondern die auf der folgenden Zeile darunter stehenden, drei Anfangsziffern der Mantisse zu ihr gehören, dies durch ein den vier Schlußziffern vorgesetztes Sternchen (*) angedeutet ist.

---

*) Die jedoch nicht nur überflüssig ist, sondern auch dann, wenn eine solche Zahl Decimalen zählt, sehr leicht Anfänger zu Fehlern verführt, und deswegen Vorsichts halber von jedem klugen Rechner ganz unbeachtet gelassen wird.

Man denkt sich nemlich bei jeder einzutragenden Zahl, wie bei 56748, gleichsam zwischen die Einer und Zehner einen Abtheilungsstrich gestellt, 5674|8, und liest diese Zahl-Abtheilungen getrennt, als: 5 tausend 6 hundert 4 und 7zig Zehner und 8 Einer, oder 56 tausend 7 hundert 4zig und 8. Indem man dann die erste Zahl-Abtheilung oder die Ziffergruppe vor den Einern in die erste herablaufende Spalte und die zweite Zahl-Abtheilung oder die Einerziffer in die oberste Zeile stellt, verschafft man der Mantissentafel zwei Eingänge, einen in eine wagrechte Zeile und einen zweiten in eine herablaufende Spalte, durch deren Kreuzung ein Fach entsteht, welches den einzutragenden veränderlichen vierziffrigen Schlußtheil der Mantissen aufzunehmen hat.

Auf diese Weise hat man auf jedes Paar zugleich aufliegender Seiten der Tafel 1000 Zahlen, und zwar auf der linken Seite jene unter 500 und auf der rechten Seite die von 500 an, mit ihren Mantissen eingetragen.

Zur Förderung des Aufsuchens ist noch auf jeder Seite von der 6ten an, als Überschrift nach N die erste auf ihr stehende Zahl, und nach L der Anfang der ersten auf ihr vorkommenden Mantisse verzeichnet.

Anmerkung. Die Abfolge oder Anordnung der Zahlen, deren Logarithmen in den logarithmischen Tafeln aufgenommen sind, ist demnach zweierlei, nemlich theils

a) die in 2) beschriebene natürliche, welche zuerst von Heinrich Briggs *) verwendet wurde und deswegen auch die Briggische genannt werden kann, theils

b) die in 3) erörterte künstliche, welche zuerst von Nathaniel Roe **) angewendet ward und darum auch die Roe'sche genannt werden kann.

§. 40.

Gebrauch der siebenstelligen Logarithmentafeln.

A. Beim Aufsuchen der Logarithmen zu Decimalzahlen.

Ist nun zu einer angegebenen Decimalzahl***) der (dekadische) Logarithme mit Hilfe unserer Tafel zu suchen, so bestimmt man zu-

---

*) In seiner Logarithmorum chilias prima, Londini, 1618.

**) In seinen Tabulae logarithmicae, 8. London, 1633.

***) Die keine dekadische oder Decimaleinheit ist, weil zu einer solchen der Logarithme ohnehin schon nach §. 36 ganz leicht sich angeben läßt.

erst aus der Stellung des Decimalzeichens oder aus dem Range der obersten Ziffer der Zahl die Kennziffer, und dann aus der Zifferreihe der Zahl die Mantisse.

I. Die Kennziffer des Logarithmen bestimmt man ohne Tafel, aus der Stellung des Decimalzeichens in der Zifferreihe der Zahl, nach den (in §. 37, 8 u. 9) aufgestellten Sätzen, nemlich:

a) Enthält die Decimalzahl Ganze, so zählt man die Ziffern vor den Einern ab; ihre Anzahl selbst ist die verlangte Kennziffer;

b) enthält aber die Decimalzahl keine Ganzen, so zählt man die an ihrem Anfang stehenden Nullen ab; ihre Anzahl negativ genommen, ist die verlangte Kennziffer, oder da der Nullen fast immer weniger als 10 sind, schreibt man die Ergänzung der Anzahl dieser Anfangsnullen auf 10 als positiven, und 10 selbst als negativen Antheil der geforderten Kennziffer an.

II. Die Mantisse des Logarithmen sucht man in der Tafel aus der Zifferreihe der Zahl; nemlich, nachdem man das etwa in der vorgelegten Decimalzahl vorkommende Decimalzeichen ausgestoßen und die Anfangs- und Schlußnullen weggelassen, folglich die mit der Decimalzahl gleichziffrige möglich kleinste ganze Zahl hergestellt hat, nur zu einer solchen ganzen Zahl, nach folgenden einzelnen Vorschriften.

a) Hat die Zahl weniger als vier Stellen, so sucht man sie auf den vier ersten Seiten (2 bis 5) in den die Aufschrift N führenden Spalten, und schreibt (ohne Beachtung der daselbst unnütz verzeichneten Kennziffer) die daneben rechts, in der die Aufschrift Log. führenden Spalte, befindliche Mantisse ab.

Beispiele.	Mantisse gesucht
log. 368 = 2·5658478	zu 368
log. 6·61 = 0·8202015	„ 661
log. 137000 = 5·1367206	„ 137
log. 5900000 = 6·7708520	„ 59
log. 0·63 = 9·7993405 — 10	„ 63
log. 0·000485 = 6·6857417 — 10	„ 485.

b) Hat die (ganze) Zahl vier Stellen, so sucht man sie auf Seite 6—185 in der ersten mit N überschriebenen Spalte (links); ihre Mantisse steht dann unmittelbar neben ihr in der mit 0 überschriebenen Spalte, jedoch meistens so, daß an den leeren Platz der drei ersten Decimalziffern die nächst darüber ausgeschriebenen zu denken sind.

Beispiele.

log. 5748 = 3·7595168
log. 77·81 = 1·8910351
log. 427300 = 5·6307329
log. 0·06835 = 8·8347385 — 10
log. 0·0009672 = 6·9855163 — 10.

Anmerkung. Die Mantissen zu 1-, 2- und 3stelligen Zahlen kann man gleichfalls auf Seite 6—185 finden, wenn man nur diese Zahlen durch Anhängung von Nullen 4stellig macht; weil diese Nullen die Mantisse nicht abändern. (§. 37, 7.) So z. B. kann man anstatt der Mantisse von 35 auf Seite 2, jene von 350 auf Seite 3, oder die von 3500 auf Seite 56 nehmen; denn jedesmal findet man sie gleich 5440680.

c) Hat die Zahl fünf Stellen, so suche man die Gruppe ihrer vier ersten oder obersten Ziffern — wie so eben in b) gesagt — auf S. 6 bis 185 in der ersten mit N überschriebenen Spalte, und fahre auf der zugehörigen Zeile bis in die mit der Einer- oder Schlußziffer der Zahl überschriebene Spalte. Hier findet man die 4 Schlußziffern der Mantisse; die 3 Anfangsziffern derselben aber stehen in der mit 0 überschriebenen Spalte entweder auf der nemlichen Zeile oder meistens eine oder etliche Zeilen höher, oder aber wenn den 4 Schlußziffern ein Sternchen (*) vorgezeichnet ist, eine Zeile tiefer.

Beispiele.

log. 35826 = 4·5541983
log. 44367000 = 7·6470601
log. 78·709 = 1·8960246
log. 0·0019897 = 7·2987874 — 10.

Anmerkung.

Fünfziffrige Zahlen, welche zwischen 10000 und 10800 liegen, kann man auch von Seite 186—201 in der ersten mit N überschriebenen Spalte aufsuchen, wonach man ihre 8stellige Mantisse in der Columne unter 0 findet.

Beispiele.

log. 10·223	= 1·0095784	oder	=	1·00957836
log. 1·0546	= 0·0230878	„	=	0·02308777
log. 0·010781	= 8·0326590—10	„	=	8·03265905—10.

§. 41.

Fortsetzung.

d) Hat die Zahl mehr als fünf, jedoch höchstens acht Stellen, so daß sie nicht mehr in der Logarithmentafel enthalten ist; so läßt sich ihre Mantisse durch eine eigenthümliche Einschaltung (Interpolation) oder Ergänzung berechnen, deren Verfahren und Gründe man aus folgenden Betrachtungen und Beispielen kennen lernen wird.

α) Weil gleichziffrigen Decimalzahlen einerlei Mantisse zukommt (§. 37, 7), so kann man anstatt von der ganzen Zahl, deren Mantisse man sucht, von was immer für einer mit ihr gleichziffrigen gemischten (Ganze und Decimalen enthaltenden) Decimalzahl die Mantisse bestimmen, folglich in der gegebenen ganzen Zahl, welche hier beispielsweise **19613587** sein soll, von der Linken zur Rechten so viel oberste Ziffern, mittels eines Decimalzeichens, das jedoch von dem gebräuchlichen verschieden ist und also etwa in einem oberen geraden Striche bestehen mag, für die Ganzen abschneiden, daß die so abgeschnittene ganze Zahl noch in der Logarithmentafel enthalten sei. Folglich wird man für unsere Logarithmentafel fünf oberste Ziffern abschneiden; wie in unserem Beispiele **19613'587**. Auf diese Weise bedeuten die rückständigen untersten oder niedersten Ziffern durchweg Decimalen, namentlich von oben herab gezählt die 1te unterste Ziffer 5 Zehntel
" 2te " " 8 Hundertel u.
" 3te " " 7 Tausendtel.

Anstatt also von der vorgelegten ganzen Zahl **19613587** die Mantisse zu suchen, wird man sie von der so geschaffenen gemischten Decimalzahl **19613'587** suchen, welche aus einer 5ziffrigen ganzen Zahl und einem höchstens 3ziffrigen Decimalbruche zusammengesetzt ist.

β) So wie nun diese gemischte (zum Theil ganze, zum Theil gebrochene) Decimalzahl **19613'587**, wenn man ihren Decimalbruch einmal wegläßt (für **0** erachtet) und ein ander Mal für ein Ganzes ansieht, größer als ihre ganze Zahl **19613**, aber kleiner als die nächst höhere ganze Zahl **19614** ist; eben so muß, weil zur größeren Zahl ein größerer dekadischer Logarithme, folglich da hier die Kennziffer dieselbe ist, auch eine größere Mantisse gehört, die Mantisse der Decimalzahl **19613'587** größer als die Mantisse ihrer ganzen Zahl und kleiner als jene der nächst größeren ganzen Zahl **19614** sein; nemlich weil

$$\text{mant. log. } 19613 = 0{\cdot}2925440$$
$$\text{mant. log. } 19614 = 0{\cdot}2925662$$

ist, muß mant. log. **19613'587** größer als **0·2925440**
und kleiner als **0·2925662** sein.

Weil ferner die Mantissen der beiden der Decimalzahl **19613'587** nächst liegenden ganzen Zahlen **19613** und **19614** in ihren drei ersten Decimalziffern oder in ihrer Anfangszahl von Tausendteln, **292** Tausendteln, übereinstimmen und nur in ihren vier letzten Decimalziffern oder in ihren Schlußzahlen von Zehnmilliontelu, **5440** Zehnmilliontel und **5662** Zehnmilliontel, sich unterscheiden; so muß auch die Mantisse der Decimalzahl dieselbe Anfangszahl, **292** von Tausendteln haben, dagegen muß ihre Schlußzahl von Zehnmillionteln zwischen die beiden ihr am nächsten kommenden Schlußzahlen fallen, also mehr als **5440**, aber weniger als **5662** betragen.

Da nun die größere Schlußzahl **5662**
die kleinere " **5440**
wie man durch's Abziehen erfährt, um **222** übersteigt;
so muß die allein noch zu suchende Schlußzahl der Mantisse der Decimalzahl erhalten werden, wenn man der kleineren Schlußzahl von Zehnmillionteln, **5440**, noch eine gewisse Menge von Zehnmillionteln, einen angemessenen Zuschuß, Zusatz, eine passende Zugabe oder die richtige Ergänzung hinzufügt, die jedoch weniger als der Unterschied **222** der Schlußzahlen der Mantissen der jener Decimalzahl nächst gelegenen (ganzen) Zahlen der Tafel beträgt.

γ) Zur Bestimmung dieser angemessenen Zugabe benützt man nun folgende Beobachtung an den Mantissen der natürlich gereihten ganzen Zahlen der Logarithmentafel. So wie diese Zahlen der Tafel in ihrer natürlichen Aufeinanderfolge ununterbrochen gleichförmig um **1** wachsen; eben so wachsen, sobald diese Zahlen 5ziffrig geworden sind, ihre Mantissen, oder da wo ihre dreiziffrigen Anfangszahlen von Tausendteln dieselben bleiben, ihre vierziffrigen Schlußzahlen von Zehnmillionteln wenigstens in kurzen Strecken oder Partien nahe gleichförmig um einerlei Zahl. So z. B. wachsen in der Gegend der, unserer Decimalzahl nahe gelegenen, ganzen Zahlen der Logarithmentafel, von **19560** bis **19650**, die Schlußzahlen ihrer Mantissen meistens um **222**, seltner um **221**, und die in der Gegend der beiden, unserer Decimalzahl am nächsten liegenden, ganzen Zahlen, **19613** und **19614**, herrschende Differenz oder bestimmter genannt Zunahme der Mantissen ist **222** Zehnmilliontel.

Diese Differenzen sind auf jeder Seite unserer Logarithmentafel am Rande verzeichnet, und da sie sich meistens nur in ihrer untersten oder letzten Ziffer von einander unterscheiden, so braucht man, um die in einer gewissen Gegend der Tafel (da wo eine gewisse Mantissen-Schlußzahl steht) herrschende Differenz zu finden, nur die unterste Ziffer dieser Schlußzahl von jener der nächst folgenden (größeren) abzuziehen; z. B. hier nur **0** von **2**, weil die übrig bleibende Ziffer **2** auf dieser Seite nur in der Differenz **222** zu unterst steht.

Sobald aber, bei gleichförmigem Wachsen der Zahlen um **1**, auch die Mantissen höchst nahe gleichförmig um einerlei Zahl — herrschende Differenz oder Zunahme — wachsen; so muß wenigstens, wenn die Zahl um weniger als eine Einheit, also entweder um einen vielten (aliquoten) Theil oder um einen echten Bruch, d. i. um etliche vielte Theile, der Einheit wächst, auch die Mantisse der Zahl um den eben so vielten Theil, oder um den gleichen echten Bruch, d. i. um eben so viel gleichvielte Theile, der herrschenden Zunahme der Mantisse, **222** wachsen. Die Zunahmen der Mantissen sind daher den höchstens **1** betragenden Zunahmen der Zahlen verhältnißmäßig, proportional, und heißen deswegen gewöhnlich Proportionaltheile der herrschenden Differenz (Zunahme) *) der Mantissen — partes proportionales differentiae.

δ) Uebergeht man nun einerseits von der kleineren der beiden jener geschaffenen Decimalzahl, **19613′587**, am nächsten kommenden ganzen Zahlen auf die größere, von **19613** auf **19614**; so beträgt die Zunahme der Zahl **1** (eine volle Einheit), die Mantisse aber, oder vielmehr ihre vierziffrige Schlußzahl von Zehnmilliontelu wächst von **5440** auf **5662** um **222**, die herrschende Zunahme genannt. Uebergeht man dagegen von der nächst kleineren (in der Decimalzahl enthaltenen) ganzen Zahl, **19613**, auf die Decimalzahl **19613′587** selbst, so beträgt die Zunahme der Zahl den angehängten (echten) Decimalbruch, **0′587** oder $\frac{587}{1000}$, d. i. **587** Tausendtel oder tausendste Theile der Einheit. Mithin muß auch die Zunahme der Mantisse denselben (echten) Bruch, also auch **0′587** oder $\frac{587}{1000}$ d. h. **587** Tausendtel oder tausendste Theile, der herrschenden Zunahme der Mantisse, **222**, ausmachen.

Von einer Zahl, **222**, einem Ganzen, berechnet man aber einen angewiesenen Bruch, $\frac{587}{1000}$, (**587** Tausendtel) derselben, indem man jenes Ganze mit diesem Bruche multiplicirt. Mithin wird man die, zur Mantisse der in der geschaffenen Decimalzahl ent-

---

*) Welche der, eine volle Einheit betragenden Zunahme der Zahl entspricht.

haltenen ganzen Zahl oder auch nur zu ihrer vierziffrigen Schlußzahl hinzuzurechnende, Zugabe oder Ergänzung, der dem angehängten Decimalbruche in der Decimalzahl entsprechenden Proportionaltheil berechnen, indem man die (in dieser Gegend der Logarithmentafel) herrschende Differenz oder Zunahme der Mantissen mit dem Decimalbruche der Decimalzahl multiplicirt, und das Product möglichst genähert in Ganzen bestimmt.

Am füglichsten wird man hier Multiplication und Addition auf einmal ausführen, indem man die herrschende Differenz erst mit den Zehnteln, dann mit den Hunderteln, endlich mit den Tausendteln der geschaffenen Decimalzahl, das ist mit der 1sten, 2ten und 3ten rückstelligen (rückständigen) Ziffer der vorgelegten Zahl multiplicirt und die Theilproducte, immer um eine Stelle rechts herausrückend, unter die Schlußzahl der nächst kleineren Mantisse schreibt, und bei dem Addiren nur die Ganzen der gesuchten Schlußzahl der Mantisse möglichst genähert bestimmt, indem man die Decimalen ganz wegläßt, wenn die erste Decimalziffer kleiner als 5 ist, dagegen durch eine volle Einheit ersetzt, wenn die erste Decimalziffer nicht kleiner als 5 ist.

Für unser Beispiel ist

Schlußzahl der Mantisse von 19613			. . . .	5440
Herrschende Mantissendifferenz		. . 222		
Proportionaltheil zur	1. Decimalziffer	5	. .	111·0
"	2. "	8	. .	17·76
"	3. "	7	. .	1·554
daher Schlußzahl der Mantisse von 19613′587			. .	5570

und sonach mant. log. 19613′587 = 0·2925570.

§. 42.

Fortsetzung.

ε) Die hier vorzunehmenden Multiplicationen der herrschenden Mantissenzunahme mit den einzelnen rückständigen Decimalziffern hat man bereits am Rande unserer Logarithmentafel ausgeführt. Auf jeder Seite derselben hat man nemlich von jeglicher daselbst herrschenden Mantissenzunahme alle ihre möglichen Zehntel, nemlich 1, 2, 3,...9 Zehntel in blosen Ganzen möglichst genähert, berechnet und in kleinen Täfelchen am Rande zusammengestellt. So gehört zur Differenz 222 folgendes Täfelchen:

222		d. h. von der Mantissendifferenz 222 beträgt			
1	22	1 Zehntel eigentlich	22·2	oder in ganzer Zahl	22
2	44	2 ″ ″	44·4	″ ″ ″ ″	44
3	67	3 ″ ″	66·6	″ ″ ″ ″	67
4	89	4 ″ ″	88·8	″ ″ ″ ″	89
5	111	5 ″ ″	111·0	″ ″ ″ ″	111
6	133	6 ″ ″	133·2	″ ″ ″ ″	133
7	155	7 ″ ″	155·4	″ ″ ″ ″	155
8	178	8 ″ ″	177·6	″ ″ ″ ″	178
9	200	9 ″ ″	199·8	″ ″ ″ ″	200.

Jedes solche Täfelchen gibt daher für die erste Ziffer, welche die Tafel nicht mehr enthält, in unserer Tafel also für die sechste Ziffer der Zahl, die verhältnißmäßige Ergänzung der Mantisse, oder den dieser ersten Ziffer entsprechenden Proportionaltheil; weswegen es auch das, der betreffenden herrschenden Differenz, angehörige Proportionaltheil-Täfelchen genannt wird.

Hat demnach die gegebene Zahl, zu der man die Mantisse sucht, blos 6 Ziffern, also die aus ihr geschaffene Decimalzahl nur Eine Decimalziffer; so gibt dieses Täfelchen unmittelbar die volle Ergänzung der Mantisse, die man also ganz einfach zu der Schlußzahl der Mantisse zu addiren hat.

Z. B. Sucht man mant. log. 19613·5, so hat man Anfangszahl der mant. = 292, Schlußzahl der mant. log. 19613..... 5440, herrschende Differenz 5662 — 5440 = 222

Ergänzung für die Ziffer 5 111

also Schlußzahl von mant. log. 19613·5 . . . 5551

und mant. log. 19613·5 = 0·2925551.

Besteht die Zahl, zu der man die Mantisse sucht, aus 7 oder höchstens aus 8 Ziffern, enthält also die aus ihr abgeleitete Decimalzahl 2 oder 3 Decimalziffern; so muß man, nachdem man unter die Schlußzahl der nächst kleineren Mantisse für die 6te Ziffer oder für die erste Decimalziffer den Proportionaltheil aus dem Randtäfelchen abgeschrieben hat,

für die 7te Ziffer oder 2te Decimalziffer so viel Zehntel,
″ ″ 8te ″ ″ 3te ″ ″ ″ Hundertel,

als dieser Ziffer angemessenen Proportionaltheil darunter schreiben, als wie viel Ganze der nemlichen Ziffer entsprächen, wenn sie die 6te Ziffer oder die erste Decimalziffer wäre.

Denn wenn alle Decimalstellen mit gleichen Ziffern besetzt sind, so gilt die 2te Decimalziffer das Zehntel
und ″ 3te ″ ″ Hundertel
der 1sten;

mithin muß auch
der Proportionaltheil für die 2te Decimalziffer das 10tel
„ „ „ „ 3te „ „ 100tel
des Proportionaltheils „ „ 1ste „ betragen.

Darum wird man
den Proportionaltheil zur 2ten Decimalziffer als 10tel
„ „ „ 3ten „ „ 100tel lesen und dort eine, hier 2 Decimalziffern rechts abschneiden, oder aber auch nur jene um 1 und diese um 2 Stellen rechts herausrücken. Bei der Addition dieser Proportionaltheile endlich werden wieder die Decimalen höchstens mit der etwa nöthigen Verbesserung der Einer, weggelassen.

Z. B. Für die obige mant. log. 19613′587 findet man die Anfangszahl 292,
die Schlußzahl der mant. log. 19613 5440
die herrschende Differenz 222,
davon den Proportionaltheil für die 5 Zehntel . . 111
„ „ „ „ 8 Hundertel*) 17·8
„ „ „ „ 7 Tausendtel**) 1·55
daher Schlußzahl der mant. log. 19613′587 . . 5560,
und endlich mant. log 19613′587 = ·2925560.

ζ) Im Zusammenhange beobachte man also bei dem Aufsuchen der logarithmischen Mantisse einer 6-, 7- oder 8ziffrigen Zahl folgendes Verfahren:

1) Man schreibe aus der Tafel die Mantisse der obersten 5 Ziffern der vorgelegten Zahl ab, und zwar die sich gleich bleibenden 3 Anfangsziffern sogleich hinter die Kennziffer, die sich ändernden 4 Schlußziffern aber abseits.

2) Man ziehe die unterste oder letzte Ziffer dieser Mantisse in der Tafel von der untersten Ziffer der nächst folgenden (größeren) Mantisse ab; die übrig bleibende Ziffer weist am Rande der aufgeschlagenen Seite auf die mit dieser Ziffer schließende, also in dieser Gegend herrschende, Mantissendifferenz, folglich auch auf das ihr angehörige Täfelchen von Proportionaltheilen.

3) Zu der 4ziffrigen Schlußzahl der Mantisse addire man nun aus diesem Täfelchen als Verbesserung oder Zuschuß

---

*) Weil 8 Hundertel das 10tel von 8 Zehnteln ist, nicht wie für 8 Zehntel 178 Ganze, sondern 178 Zehntel, d. i. 17·8

**) Weil 7 Tausendtel das 100stel von 7 Zehnteln ist, nicht wie für 7 Zehntel 155 Ganze, sondern 155 Hundertel d. i. 1·55.

a) für die 6te Ziffer den unmittelbar neben ihr stehenden Proportionaltheil selbst,

b) für die 7te Ziffer das Zehntel des ihr entsprechenden Proportionaltheils, indem man entweder in diesem die unterste Ziffer als Decimale abschneidet oder ihn um eine Stelle rechts hinausrückt,

c) für die 8te Ziffer das Hundertstel des ihr entsprechenden Proportionaltheils, indem man entweder in diesem die zwei untersten Ziffern als Decimalen abschneidet, oder ihn noch weiter um eine Stelle rechts hinausrückt.

4) Von der Summe behalte man aber nur die, nöthigen Falls corrigirten (berichtigten) Ganzen bei und schreibe sie als die noch gesuchte 4ziffrige Schlußzahl der verlangten Mantisse an.

§. 43.

Fortsetzung.

Beispiele.

1. Zu suchen log. 32·704867.

Kennziffer = 1. Abgeleitete Decimalzahl = 32704′867.

Für die mant. log. 32704, Anfangszahl 514

	Schlußzahl . . .	6009
hiezu Proportionaltheil der herrschenden Differenz 133	für $^8/_{10}$	106
	„ $^6/_{100}$	8·0
	„ $^7/_{1000}$	·93.
	berichtigte Schlußzahl . .	6124

also log. 32·704867 = 1·5146124.

Oder: Wäre die Zahl 32704,

so wäre der Anfang ihrer Mantisse 514 Tausendtel,

und der Schluß . . . . 6009 Zehnmilliontel.

Nun ist aber die Zahl	mithin ist der Mantisse noch zuzusetzen	
größer erstlich um $^8/_{10}$	. . . .	106 ganze solche Z. M.
dann um $^6/_{100}$	. . . .	80 Zehntel
endlich noch um $^7/_{1000}$	. . . .	93 Hundertel

folglich gehört zur Zahl 32704′867 die Mantissen-Schlußzahl 6124.

2) log. 5035·6839 = 3·7020584		0512	2 v. 8 bl. 6
	8)	69	Diff. = 86
	3)	2·6	
	9)	·77	
		0584	

3) log. 0·6020975 = 9·7796668 — 10   6614,   6 — 4 = 2
7) 50   Diff. = 72
5) 3·6
6668

Anmerkung. 1. Auf den Seiten 6—14 sind mehrere Differenzen, vorgeblich wegen Mangels an Raum nicht aufgenommen worden. Wie bei Verbesserung der Vega'ischen Logarithmentafeln diesem Uebelstande hätte begegnet werden können, wäre in den Tafeln von Hutton und Gardiner zu lernen gewesen. Bei nicht ganz genauen Rechnungen kann man nach Gefallen die nächst kleinere oder nächst größere Differenz wählen; bei völlig genauen Rechnungen aber muß man sich zur zifferweisen Multiplication der richtigen Differenz selbst bequemen.

Z. B. log. 1017579 = 6·0075681

		nächst kleinere	nächst größere Diff.
	5344 (Diff. = 427)	5344 (426)	5344 (428)
7)	2989	298	300
9)	3843	38·3	38·5
	5681	5680	5682

Anmerkung. 2. Haben die der Dezimalzahl, deren Mantisse gesucht wird, nächst gelegenen ganzen Zahlen in ihren Mantissen weniger als drei Anfangsziffern gleich — wo demnach den Schlußziffern der größeren Mantisse allein ein Sternchen (*) vorgezeichnet ist —, so wird man in diesen äußerst seltenen Fällen entweder nur die zwei gleichen Anfangsziffern oder nur die eine oder gar keine gleiche Anfangsziffer unmittelbar nach der Kennziffer ansetzen, alle übrigen 5, 6 oder 7 verschiedenen Ziffern aber als weiter zu verbessernde Schlußziffern abseiten anschreiben und in der vorbeschriebenen Weise berichtigen.

Beispiele.

1) log. 1·188539 = 0·0750135

Nebenrechnung.
49992
110
33
50135

2) log. 144·5476 = 2·1600109

599881
210
18
600109

3) log. 50·118876 = 1·7000014

Nebenrechnung.

6999937
70
6·1
·52

7000014

Anmerkung. 3. Zu 6stelligen Zahlen, die zwischen 100 000 und 108 000 liegen, gibt unsere Tafel von Seite 186 — 201 die 8stellige Mantisse schon vollständig ohne weiter erforderliche Ergänzung; z. B. log. 106·753 = 2·02838009.

Anmerkung. 4. Zu 7-, 8- oder 9stelligen Zahlen, deren oberste 6ziffrige Anfangszahlen zwischen 100 000 und 108 000 liegen, kann man in derselben Abtheilung unserer Tafel von Seite 186 — 201 die 8stelligen Mantissen, auf eine der oben beschriebenen ähnliche und leicht zu findende Weise, mittels Zusatz von Proportionaltheilen suchen.

Z. B. log. 106·753854 = 2·02838357

Nebenrechnung.

8009
326
20·3
1·63

8357

§. 44.

B. Beim Aufsuchen der Decimalzahlen zu den Logarithmen.

Ist umgekehrt zu einem gegebenen dekadischen Logarithmen *) die Decimalzahl mit Hilfe unserer Logarithmentafel zu suchen, so bestimmt man zuerst aus der Mantisse des Logarithmen die Ziffernreihe der Zahl, und dann aus der Kennziffer desselben die Stellung des Decimalzeichens in der Zahl.

I. Die Ziffernreihe der Zahl, oder vielmehr eine mit der zu suchenden Decimalzahl gleichziffrige ganze oder gemischte Decimalzahl, findet man in der Tafel aus der Mantisse des Logarithmen nach folgender, aus den vorigen sich leicht ergebenden Vorschrift.

Man suche auf Seite 6—185, in der Reihe der 7stelligen Mantissen aller 5ziffrigen ganzen Zahlen, in der mit 0 bezeichneten Spalte, die drei Anfangsziffern der Mantisse des gegebenen Loga-

*) Der unganz ist und bereits die decimale Form erhalten hat; Ersteres, weil zu jedem ganzen Logarithmen ohnedies gemäß §. 36 die entsprechende dekadische Einheit leicht angebbar ist, und Letzteres, weil alle Mantissen der Logarithmentafeln in Form von Decimalbrüchen dargestellt sind.

rithmus, dann in eben dieser Spalte auch die vierziffrige Schlußzahl derselben oder die nächst niedrigere, und fahre auf dieser Zeile oder, falls sogar die der ausgeschriebenen drei Anfangsziffern angehängte Schlußzahl noch zu groß sein sollte, auf der nächst höheren Zeile, wo den Schlußziffern Sternchen (*) vorgesetzt sind, so weit rechts, bis man auf eine Spalte trifft, in welcher entweder die genaue Schlußzahl der Mantisse oder die nächst kleinere steht, der unmittelbar die nächst größere folgt.

a) Im ersten freilich sehr seltenen Falle nun, wo die Mantisse des vorgelegten Logarithmen ganz genau in der Tafel sich vorfindet, (ihre 3 Anfangsziffern entweder, jedoch selten, in einerlei Zeile mit den 4 Schlußziffern oder, und zwar meistens, um eine oder etliche Zeilen höher oder, wenn vor diesen ein * oder Punkt steht, eine Zeile tiefer) entnimmt man die 4 obersten Ziffern der gesuchten Zahl aus der mit N überschriebenen Eingangsspalte auf jener Zeile, auf welcher die 4 Endziffern der Mantisse sich befinden, und zur Schluß- oder Einerziffer nimmt man diejenige, mit der die Spalte der 4 Schlußziffern überschrieben ist. Auf diese Weise erhält man die mit der gesuchten Decimalzahl gleichziffrige ganze Zahl.

Z. B. Zur Mantisse ·468 5689 findet man auf Seite 44 die Zifferfolge oder die 5ziffrige ganze Zahl 29415.

b) Im zweiten und häufigsten Falle dagegen, wo die Mantisse des gegebenen Logarithmen, z. B. ·468 5785 nicht in der Tafel befindlich ist, schreibt man, nachdem man auf die oben erklärte Weise die beiden ihr am nächsten kommenden Mantissen ·468 5689 und ·468 5836 in der Tafel gefunden hat,

α) zur nächst kleineren Mantisse ·468 5689 die angehörige 5stellige ganze Zahl 29415 ab; dann ist diese die 5ziffrige ganze Zahl derjenigen Decimalzahl, die mit der nemlichen Zifferfolge wie die eigentlich zu suchende geschrieben wird;

β) zugleich schreibt man abseits die 4ziffrige Schlußzahl 5785 der gegebenen Mantisse und darunter die nächst kleinere 5689, und zieht diese von jener ab, damit man den Überschuß 96 der gegebenen Mantisse über die nächst kleinere, in der Tafel befindliche, erfahre.

γ) Nebstbei sucht man den Unterschied der beiden der Schlußzahl, 5785 von Zehnmillionteln, der gegebenen Mantisse am nächsten kommenden Mantissen-Schlußzahlen 5689 und 5836, oder die in der betreffenden Gegend der Tafel herrschende Differenz der Mantissen, 147.

δ) Dividirt man nun jenen Überschuß, 96, der gegebenen Mantisse über die nächst kleinere durch die herrschende Differenz, 147, so ist, (vermöge §. 41, δ,) der als Quotient sich ergebende echte regelmäßige Bruch $\frac{'96}{147}$ oder zweckmäßiger der höchstens in 3 Stellen zu entwickelnde Decimalbruch 0·653 der, obiger ganzen Zahl 29415 anzuhängende echte Bruch; mithin die gemischte Decimalzahl, welche mit der eigentlich gesuchten einerlei Zifferfolge hat, 29415'653, oder die gesuchte Zifferfolge 29415653.

Denn, vermöge §. 41, δ, ist die Ergänzung, 96, der nächst kleineren Mantissen-Schlußzahl, 5689, zur gegebenen, 5785, das Product aus der herrschenden Differenz, 147, in den echt gebrochenen Bestandtheil der gesuchten Zahl; und indem man das Product durch den einen Factor theilt, erhält man den anderen; mithin ist jene Ergänzung, 96, durch die herrschende Differenz 147 zu theilen, um diesen echt gebrochenen Bestandtheil zu finden, der somit $\frac{96}{147} =$ 0·653 ist.

Oder: Während die Mantisse von der nächst kleineren in der Tafel befindlichen Schlußzahl, 5689, bis zur nächst größeren, 5836, um die herrschende Differenz 147 wächst, nimmt die Zahl von der nächst kleineren 29415 auf die nächst höhere 29416 um 1 Einheit zu.

Nun wächst aber die Mantisse von eben jener nächst kleineren, 5·689, bis zur gegebenen, 5785, um die proportionale Ergänzung 96; und diese Ergänzung 96 ergibt sich aus der herrschenden Differenz, 147, indem man ihren 147sten Theil 96mal nimmt, oder sie ist 96 der 147sten Theile, der Bruch $\frac{96}{147}$, der herschenden Differenz 147. Mithin muß auch die Zahl von jener nächst kleineren ganzen, 29415, bis zur gesuchten gemischten um den nemlichen Bruch, $\frac{96}{147}$, der Einheit, d. i. um den Zahlbruch $\frac{96}{147}$, oder um den ihm gleichen Decimalbruch 0·653 wachsen.

Auf diese Weise hat man im Zusammenhange folgende Rechnung:

Gegebene Mantisse	·468 5785	
nächst kleinere	5689,	zugehörige Zahl 29415
Ergänzung	96	
Herrschende Differenz	147	Zusatz zur Zahl = 96 : 147 = 0·653
		gesuchte Decimalzahl 29415'653.

Nebenrechnung.

```
147| 96 |0·653
    882
    ---
     780
     735
     ---
      450
      441
      ---
        9
```

ε) Will man, was vortheilhaft ist, die Täfelchen der Proportionaltheile der Mantissendifferenzen benützen, so wird man die so eben gelehrte Bestimmung der Decimalen der zu suchenden gemischten Decimalzahl in folgender Weise abändern.

1) Den Überschuß, 96, der gegebenen Mantissen-Schlußzahl, 5785, über die als nächst kleinere gefundene, 5689, suche man unter den Proportionaltheilen jenes Täfelchens, welches die herrschende Differenz, 147, zur Überschrift hat, oder wenn er sich unter ihnen nicht genau vorfindet, den nächst kleineren, 88; die vor diesem Proportionaltheile stehende Ziffer, 6, ist dann die verlangte erste Decimalziffer.

2) Den Überschuß der Differenz 96 über den nächst kleineren Proportionaltheil 88, nemlich 8, verwandle man in 10tel, schreibend 8·0, gelesen 80 Zehntel; und suche diese Anzahl 80 von Zehnteln abermals unter den Proportionaltheilen desselben Täfelchens; die vor dem gleichen oder nächst kleineren, 74, befindliche Ziffer, 5, ist sofort die gesuchte zweite Decimalziffer.

3) Endlich verwandle man noch den Überschuß der 80 Zehntel oder 8·0 über den nächst kleineren Proportionaltheil, 74 Zehntel oder 7·4, nemlich 6 Zehntel, oder 0·6 in 100tel, schreibend 0·60, gelesen 60 Hundertel; und suche diese Anzahl 60 von Hunderteln auch noch unter den Proportionaltheilen desselben Täfelchens; die vor dem gleichen oder nächst zustimmigen (am wenigsten davon verschiedenen, bald nächst größeren, bald nächst kleineren) Proportionaltheil, hier 59, befindliche Ziffer, 4, ist sonach die äußerstens noch aufzusuchende dritte Decimalziffer.

Kurz und übersichtlich zusammengestellt hat man eigentlich folgende Rechnung:

Man hat nemlich hier gegeben die Mantisse	468 5785
dazu gefunden die nächst kleinere	5689, und die angehörige Zahl 29415.
Jene übersteigt diese um	96.
Wäre sie nur größer um	88, so müßte man der Zahl zusetzen 0·6;
sie ist aber noch größer um 8 Ganze oder um $^{80}/_{10}$	8·0;
betrüge dieses Mehr blos $^{74}/_{10}$	7·4, so müßte man der Zahl zusetzen 0·05,
sie ist aber noch größer um $^{6}/_{10}$ oder um $^{60}/_{100}$	0·60
und dieses ist höchst nahe $^{59}/_{100}$	0·59, also setzt man der Zahl zu 0·004
	folglich ist die gesuchte Decimalzahl 29415·654.

num. (mant. = ·4685785) *) = 29415'654
5689
96
88
80
74
60
59

Man schreibt nemlich nach und nach an:
wegen 5689 die Zahl 29415
" 88 " Ziffer 6
" 74 " " 5
" 59 " " 4.

Anmerkung. Hier finden wir, mittels der Proportionaltheile, 4 als dritte Decimalziffer oder rücksichtsweise als 8te Ziffer der zu suchenden Decimalzahl, während wir mittels der Division dafür 3 fanden. Daraus leuchtet ein, daß man mittels der Proportionaltheile mit Sicherheit nicht mehr als 2 Ziffern und überhaupt aus 7stelligen Mantissen höchstens 7ziffrige Zahlen bestimmen könne. Im ernsten Rechnen reicht übrigens diese Ausdehnung der Zahlen fast immer aus; weswegen wir im Folgenden auch nur bis zur 7ten Ziffer rechnen wollen.

§. 45.

Fortsetzung.

II. Die Stellung des Decimalzeichens in der Zifferfolge der zu suchenden Decimalzahl bestimmt man ohne Tafel, aus der Kennziffer des gegebenen Logarithmen, durch Umkehrung der in §. 37 vorkommenden Sätze.

a) Ist die Kennziffer positiv, so schneidet man nebst der obersten Ziffer oder Stelle der Zahl noch so viel nachfolgende Ziffern oder Stellen, als diese Kennziffer zählt, oder aber so viel obere Ziffern, als die um 1 vermehrte Kennziffer angibt, mittels des Decimalzeichens, für die Ganzen der verlangten Decimalzahl ab; indem man hierbei mangelnde Stellen mit 0 (Nullen) besetzt und überschüssige Schlußnullen ganz wegläßt.

b) Ist dagegen die Kennziffer negativ, oder als regel-

*) Gelesen „Zahl, deren Mantisse = ·468 5785 ist".

widriger Unterschied dargestellt und dieser auf eine negative Zahl zusammengezogen (während die Mantisse wie immer positiv ist); so schreibt man vor die oberste Ziffer der Zifferfolge so viel Nullen, als die Kennziffer zählt, und schneidet mittels des Decimalzeichens die vorderste oder oberste Null für die Ganzen ab.

Beispiele.

num. (log. = 7·4685689) = 29415000
num. (log. = 4·4685689) = 29415
num. (log. = 2·4685689) = 294·15
num. (log. = 0·4685689) = 2·9415
num. (log. = 9·4685689 — 10
= 0·4685689 — 1) = 0·29415
num. (log. = 6·4685689 — 10
= 0·4685689 — 4) = 0·00029415
num. (log. = 8·4685785) = 294156530
num. (log. = 7·4685785) = 29415653
num. (log. = 3·4685785) = 2941·5653
num. (log. = 0·4685785) = 2·9415653
num. (log. = 9·4685785 — 10
= 0·4685785 — 1) = 0·29415653
num. (log. = 6·4685785 — 10
= 0·4685785 — 4) = 0·00029415653.

Vollständige Beispiele.

1) num. (log. = 2·1080695) = 128·25′36

*0695	*0695 (Diff. 339	*0695 (Diff. 337
0574	0574	0574
121 : 338 = 0·36	121	121
1014	102 (3	101 (3
1960	190	200
2028	203 (6	202 (6

2) num. (log. = 7·3297068 — 10) = 0·0021365′19

7068
7029
39
20 (1
190
184 (9

3) num. (log. = 8·8794956) = 75769′7000

4956 4973
4916 4916
49 Diff. 57
40 7)

Anmerkung. 1. Ist selbst die kleinste der, zu einer gewissen Anfangszahl von Mantissen gehörigen, Schlußzahlen noch größer als die Schlußzahl der gegebenen Mantisse, so muß man die nächst vorhergehende Mantisse der Tafel, nemlich die nächst niedrigere 3ziffrige Anfangszahl mit der größten ihr zukommenden 4ziffrigen Schlußzahl als die zur gegebenen Mantisse nächst kleinere anerkennen.

Z. B. Gegebener Logarithmus = 2·9140017
(auf S. 150) nächst kleinere Mantisse . . 39992 dazu Zahl 82035
(Diff. 53) 25
21 4
40
42 8
also num (log. = 2·9140017) = 820·3548·

Anmerkung. 2. Ist eine unter den Proportionaltheilen aufzusuchende Differenz kleiner als der kleinste daselbst vorkommende Proportionaltheil, so ist in der gesuchten Zahl die Ziffer 0 anzusetzen.

Z. B. Wenn der Logarithme 3·3385178 gegeben ist, so ist auf Seite 29
für 5178
nächst geringer 5163 21803
Ueberschuß . 15, dafür (bei 199) . 0
verändert 150 „ 8
folglich num. (log. = 3·3385178) = 2180·308.

Anmerkung. 3. Ist die 4ziffrige Anfangszahl der Mantisse nicht größer als 0334 (Zehntausendtel), so läßt sich die Zahl auf Seite 186 — 201 auf eine, der vorher erklärten, ähnliche Weise bis auf 8 Stellen genau finden.

Z. B. num. (log. = 0·0226739) = 1·05359|55
(S. 196) 7390 7576 (S. 7) 6739 6758
7164 7164 105359 6345 6345 10535
226 412 394 : 413 = 0·954
206 5) 3717
200 2230
206 (5 2065
1650
1652

Anmerkung. 4. Ist der ganze Logarithme negativ (nicht blos die Kennziffer), so kann man ihn entweder (nach §. 34) als regelwidrigen Unterschied mit ganzzahligem Subtrahend darstellen und hiezu die Zahl auf die vorher erörtete Weise suchen, oder man kann ihn (gemäß §. 11) als Logarithmen des Umgekehrten einer

Zahl ansehen, folglich zu ihm, ohne Rücksicht auf seine Negativität, in der gewöhnlichen Weise die angehörige Zahl suchen, deren Umgekehrtes sofort die verlangte ihm entsprechende Zahl selbst ist.

Z. B. Wenn zum Logarithmen — 3·6763491 die Zahl zu suchen ist, so kann man ihn als Unterschied 0·3236509 — 4 oder 6·3236509 — 10 darstellen, und findet dazu auf S. 28 die Zahl 0·0002106934; oder man sucht zu seinem beziehungslosen Betrage 3·6763491 die Zahl, und findet auf S. 80 dafür 4746·233, daher zu ihm (dem negativen) selbst ihr Umgekehrtes $\frac{1}{4746{\cdot}233}$.

Es ist nemlich

$$\text{num. }(\log. = -\ 3{\cdot}6763491) = \text{num. }(\log. = 6{\cdot}3236509 - 10)$$
$$= \frac{1}{4746{\cdot}233} = 0{\cdot}0002106934.$$

6509	3491
6439	3460
70	31
62	28
80	30
82	28

§. 46.

Das Wesentlichste von der Einrichtung und dem Gebrauch der 6- und 5stelligen Logarithmentafeln.

In diesen Tafeln ist die Anordnung der aufgenommenen Zahlen entweder durchgängig die natürliche, (§. 39, Anmerk.) wie z. B. in allen französischen und in jenen von Rühlmann; oder blos vom Anfange bis 100, und dann ist die weitere Anordnung von 1000 bis 10000 die künstliche mit abgetrennten Einerziffern, (§. 39, Anmerk.), oder man benützt lediglich nur diese künstliche, indem die weggelassenen kleineren Zahlen von 1 bis 100, nachdem man ihnen rechts eine, zwei oder drei Nullen angehängt hat, sich unter den aufgenommenen Zahlen von 1000 bis 10000 vorfinden und dieselben logarithmischen Mantissen wie diese haben.

Die Mantissendifferenzen sind bei der natürlichen Zahlen-Anordnung von da an, wo sie schon nahe sich gleich bleiben, wie von 900 oder 1000 an, neben dem Mantissenpaare, bei der künstlichen Zahlen-Anordnung dagegen zur Rechten jeder Zeile angesetzt. Wo sie mangelt, läßt sich eine solche Differenz leicht berechnen, indem man bei jedem Paar nach einander folgender Mantissen die vorausgehende von der nachkommenden abzieht.

Die Täfelchen der Proportionaltheile sind blos in den 6stelligen Logarithmentafeln, und da erst von **4000** an, wo die Mantissendifferenzen auf jeder Seite nicht gar zu weit aus einander liegen, angebracht.

Das Aufsuchen der Mantisse des Logarithmen zu einer in der Tafel vollständig enthaltenen Zahl ist demnach in derselben Weise und eben so leicht wie in 7stelligen Logarithmentafeln ausführbar.

Zu Beispielen kann man die oben in §. **40** aufgelösten verwenden, von denen nur die entbehrlichen Schlußziffern, durch die für sie entfallende Verbesserung der beibehaltenen Endziffer ersetzt zu werden brauchen.

Die Berechnung der Mantisse des Logarithmus einer um Eine Ziffer oder um zwei Ziffern mehr als die noch in die Tafel aufgenommenen meistziffrigen Zahlen, also einer fünf- oder sechsziffrigen Zahl, geschieht wie in den siebenstelligen Logarithmentafeln nach §. **42**, ζ, auf folgende Weise:

1) Man schreibe, nachdem man die obersten **4** Ziffern der Zahl mittels eines besonderen (etwa geraden) Decimalstriches abgeschnitten, folglich die weiteren Ziffern als Zehntel und Hundertel dargestellt hat, aus der Tafel die Mantisse jener obersten **4** Ziffern der vorgelegten Zahl ab, und zwar die sich gleich bleibenden **2** oder **3** Anfangsziffern sogleich hinter die Kennziffer, die sich ändernden **3** oder **4** Schlußziffern aber abseits.

2) Man ziehe diese Mantisse in der Tafel von der nächst größeren ab, um entweder die daselbst herrschende Mantissendifferenz zu finden, wenn sie in der Tafel fehlt, oder um selbe zu prüfen, wenn sie in der Tafel angesetzt ist.

3) Zu der Schlußzahl der Mantisse addire man nun als Verbesserung oder Zuschuß

a) für die erste abgeschnittene und gleichsam Zehntel zählende Ziffer den ihr entsprechenden Proportionaltheil, den man entweder unmittelbar aus dem der herrschenden Mantissendifferenz zugehörigen Täfelchen der Proportionaltheile entnimmt oder dadurch findet, daß man mit dieser Ziffer die Mantissendifferenz multiplicirt und das Product als Zehntel zählend ansieht, mithin um eine Stelle rechts hinaus rückend, unter jene Schlußzahl stellt; dann

b) für die zweite abgeschnittene und gleichsam Hundertel zählende Ziffer den ihr entsprechenden Proportionaltheil, den man entweder unmittelbar aus dem der herrschenden Mantissendifferenz zugehörigen Täfelchen der Proportionaltheile entnimmt, jedoch nicht als Ganze, sondern als Zehntel zählt und somit um eine Stelle rechts hinaus gerückt unter die Schlußzahl der Mantisse stellt, oder aber dadurch berechnet, daß man mit dieser Ziffer die Mantissendifferenz multiplicirt und das Product als Hundertel zählend ansieht, mithin um zwei Stellen rechts hinaus rückend unter jene Schlußzahl schreibt.

Beispiele für 6stellige Logarithmentafeln.

1) Zu suchen mant. log. 1961'36.

Anfang der Mantisse für 1961 . . . 0.292
ihr Schluß . . . . 478.
In der Tafel an dieser Stelle herrschende
Mantissendifferenz = 699 — 478 = 221;
davon für die abgeschnittenen 3 Zehntel Prop. Theil. . . 66'3
" " " " 6 Hundertel " 13'26
diese Verbesserungen addirt, geben die Schlußzahl = 558
daher die gesuchte Mantisse = 0'292558.

2) Gesucht log. 5035'68.

Anfang des Logarithmus für 5035 . . 3'702
sein Schluß 000
In der Tafel an diesem Orte herrschende
Mantissendifferenz = 086 — 000 = 86
davon für die abgeschnittenen 6 Zehntel Prop. Theil . . 51'6
" " " 8 Hundertel " " . . 6'88
diese Verbesserungen addirt, geben die Schlußzahl = 058
daher der gesuchte Logarithme = 3'702058.

Vergleiche damit §. 42 Beisp. und §. 43 Beisp. 2.

Die Bestimmung der Zifferreihe der zur Mantisse eines gegebenen Logarithmen gehörigen Zahl geschieht ebenfalls so, wie bei den 7stelligen Logarithmen in folgender Weise:

1. Wenn die gegebene Mantisse genau in der Tafel enthalten ist, so liefert in der natürlichen Zahlen-Anordnung die vor ihr stehende ganze Zahl, und in der künstlichen Zahlen-Anordnung die in der ersten Spalte vorn befindliche Zahl mit der über ihren Schlußziffern stehenden Einerziffer, die geforderte Zifferreihe. Z. B.

Zur Mantisse '486495 gehört die Zifferreihe 2941.

2. Fällt aber die Mantisse zwischen zwei unmittelbar nach einander folgende Mantissen der Tafel, so suche man

a) die daselbst herrschende Mantissendifferenz dadurch, daß man bei diesen zwei (einschränkenden) Grenz-Mantissen die kleinere von der größeren abzieht;

b) die nächst kleinere Mantisse setze man unter die gegebene, oder auch nur die von einander verschiedenen Schlußziffern derselben unter einander, und ziehe sie von derselben ab;

c) die dieser nächst kleineren Tafelmantisse entsprechende Zifferreihe schreibe man, als Anfang der gesuchten Zifferreihe und wie eine ganze Zahl, aus der Tafel heraus;

d) und verwandle nun, indem man die letztere Differenz durch die herrschende Mantissendifferenz gebrochen denkt, den entstehenden echten Bruch in einen höchstens 2stelligen Decimalbruch, und hänge diesen an jene ganze Zahl an; wodurch die verlangte Zifferreihe geschlossen ist und in ihr die Stellung des Decimalzeichens, gemäß der Kennziffer des vorgelegten Logarithmen, wie sonst (§. 45) ausgemittelt und damit die verlangte Zahl vollständig hergestellt wird.

3. Beispiel: Gegeben die Mantisse . . .	·468569
dazu gefunden die nächst kleinere Tafelmantisse	495
daher Differenz beider	74;
ferner findet man die nächst größere Tafelmantisse . . .	643
subtrahirt man die nächst kleinere Tafelmantisse . . .	495
so erfolgt die herrschende Mantissenzunahme	148;

zugleich gibt die Tafel die der gegebenen Mantisse entsprechende Zifferreihe 2941′

Theilt man endlich noch $74 : 148 = 0'5$ = dem Zifferanhange,

$$\begin{array}{l} 740 \\ \hline 0 \end{array}$$

so ist die vollständige Zifferreihe 2941′5.

§. 47.

Berechnung der Logarithmen gewöhnlich gebrochener Zahlen.

I. Der Logarithme eines regelmäßigen Bruches (mit ganzzahligem Nenner und Zähler) überhaupt wird berechnet (vermöge §. 13), wenn man von dem Logarithmen des Zählers jenen des Nenners abzieht.

II. Ist insbesondere

a) Der Bruch unecht, d. h. sein Zähler größer als sein Nenner, folglich auch der Logarithme des Zählers größer als der Logarithme des Nenners; so unterliegt ein solches Abziehen keinem Anstande, der Unterschied ist daher regelrecht und somit er und der Logarithme des unechten Bruches positiv.

Z. B. So findet man den log. $\frac{57687}{3965}$

indem man vom log. 57687 = 4·7610780
abzieht den . . log. 3965 = 3·5982432

daher ist . . log. $\frac{57687}{3965}$ = 1.1628348.

b) Ist dagegen der Bruch echt, d. h. sein Zähler kleiner als sein Nenner, folglich auch der Logarithme des Zählers — der Minuend — kleiner als jener des Nenners — der Subtrahend; so ist der zu berechnende Unterschied regelwidrig, und also er und der Logarithme des echten Bruches eigentlich negativ. Man stellt ihn jedoch fast nie*) wirklich ganz (seine Kennziffer und Mantisse) negativ dar, dadurch, daß man vom Subtrahend den Minuend abzieht und den Rest negativ nimmt; sondern gewöhnlich stellt man ihn als regelwidrigen Unterschied mit ganzzahligem Subtrahend dar, so daß die Mantisse positiv ausfällt, indem man nemlich zum Minuend eine, das geforderte Subtrahiren ausführbar machende, ganze Zahl — und zwar entweder die kleinste schon genügende, oder der Gleichförmigkeit wegen besser jedesmal 10 — addirt und hinterher dem Reste eben dieselbe ganze Zahl als ferner abzuziehend (subtractiv) beisetzt.

Z. B. So erhält man den log. $\frac{3475936}{9897654}$,

indem man den	log. 3475936 = 6·5410718	0673	5299
abzieht vom	log. 9897654 = 6·9955323	38	22
		7	2
und den Rest negativ nimmt,		0718	5323

danach ist der log. $\frac{3475936}{9897654}$ = — 0·4544605;

1 od. 10

oder indem man zu dem log. 3475936 = 6·5410718,
bevor man von ihm den log. 9897654 = 6·9955323
abzieht, entweder 1 oder 10 (zur Kennziffer 6)

addirt; dann ist der log. $\frac{3475936}{9897654}$ = 0·5455395 — 1

oder = 9·5455395 — 10.

Eben so findet man log. $\frac{487}{930645}$

durch eine der folgenden 3 Rechnungsweisen:

7817
24
7841

		4	10
log. 487 =	2·6875290	= 2·6875290	= 2·6875290
log. 930645 =	5.9687841	= 5·9687841	= 5·9687841
log. $\frac{487}{930645}$ =	—3·2812551	= 0·7187449 — 4	= 6·7187449 — 10

*) Außer da, wo Logarithmen durch einander zu theilen kommen.

c) Bedarf man den Logarithmen einer gemischten — aus einer ganzen Zahl und einem echten (nicht decimalen) Bruche zusammengesetzten — Zahl, so verwandelt man diese vorerst auf die bekannte Weise in einen unechten Bruch, und sucht zu diesem nach dem Obigen (in a.) den Logarithmen.

Z. B. Bevor man zur gemischten Zahl $478\frac{23}{97}$ den log. sucht, verwandelt man sie zuerst mittels der nebenan stehenden Rechnung in den unechten Bruch $\frac{46389}{97}$;

$$\begin{array}{r} 478 \\ 97 \\ \hline 3346 \\ 4302 \\ 23 \\ \hline 46389 \end{array}$$

$$\begin{array}{rll} \text{dann ist log. } 46389 & = & 4{\cdot}6664150 \\ \text{log. } 97 & = & 1{\cdot}9867717 \\ \hline \text{also log. } 478\frac{23}{97} & = & 2{\cdot}6796433. \end{array}$$

Oder man verwandelt den gegebenen echten Bruch in einen Decimalbruch, folglich die vorgelegte gemischte Zahl in eine gemischte Decimalzahl oder in einen unechten Decimalbruch von höchstens 8 Stellen der Ganzen und Decimalen zusammen genommen; und sucht dann zu dieser Decimalzahl den Logarithmus nach dem Früheren in §. 40—43.

Im vorigen Beispiele wird der Bruch

$$\frac{23}{97} = 23 : 97 = 0{\cdot}23711$$

$$\begin{array}{r} 194 \\ \hline 360 \\ 291 \\ \hline 690 \\ 679 \\ \hline 110 \\ 97 \\ \hline 130 \end{array}$$

daher $478\frac{23}{97} = 478{\cdot}23711$,

folglich ist $\log. 478\frac{23}{97} = \log. 478{\cdot}23711 = 2{\cdot}6796434.$

$$\begin{array}{r} 6368\ (91) \\ 64 \\ 1{\cdot}8 \\ {\cdot}18 \\ \hline 6434 \end{array}$$