§. 1.

Es ist für das Folgende nöthig, den Unterschied zwischen *Begriff* und *Anschauung* zu kennen. *Anschauung, reine* Anschauung nenne ich also nur eine solche Vorstellung, welche bloss einen *einzigen Gegenstand* vorstellt, und dabei *einfach* ist; z. B. die Vorstellung: »*Diess*« (was ich jetzt eben empfinde). Jede Vorstellung dagegen, die nicht nur keine Anschauung ist, sondern auf keine Anschauung als Bestandtheil enthält, heisst mir ein *reiner Begriff*, z. B. die Vorstellungen: Gott, Weltall, Zahl, Kraft, u. dgl. Auch die Vorstellungen: Augenblick, Zeitlänge u. s. w., ingleichen die Vorstellungen: Punkt, Entfernung zweier Punkte, Linie, Fläche u. s. w. sind meiner Ueberzeugung nach reine Begriffe; allein die Vorstellungen: *dieser* Augenblick (in dem ich so eben *diese* Empfindung habe), *dieser* Punkt (in welchem sich jetzt eben der Mittelpunkt *jener* Kugel befindet) u. dgl. enthalten Anschauungen, und sind somit *gemischte* Vorstellungen.

§. 2.

Sätze, in deren Bestandtheilen nicht eine einzige Anschauung vorkommt, die also aus blossen Begriffen zusammengesetzt sind, nenne ich *Begriffssätze*, und wenn sie überdiess Wahrheiten sind, *Begriffswahrheiten*. Dergleichen sind alle Sätze der reinen Mathematik.

§. 3.

Wir sagen, dass ein Satz M, gleichviel ob wahr oder falsch, *ableitbar* sey oder *geschlossen* werden könne, aus einem oder mehreren andern $A, B, C \ldots$, sofern wir uns vorstellen, dass es in diesen Sätzen gewisse *veränderliche Bestandtheile* gibt, und dass so oft durch eine willkürliche Annahme dieser veränderlichen Theile die Sätze $A, B, C, \ldots$ *wahr* werden, auch der Satz M *wahr* wird. Die Sätze $A, B, C \ldots$ nennen wir dann auch wohl die *Vordersätze* oder *Prämissen*, und M den sich aus ihnen ergebenden *Schlusssatz*. So stehet der Satz, dass in dem Dreiecke $\alpha\gamma\beta$ die Winkel $\alpha = \beta$ sind, zu dem Satze, dass in dem Dreiecke $\alpha\gamma\beta$ die Seiten $\alpha\gamma = \beta\gamma$ sind, in dem Verhältnisse der *Ableitbarkeit* und diess zwar hinsichtlich auf die Vorstellungen α, β, γ, weil so oft wir diese dergestalt annehmen, dass der letzte Satz eine Wahrheit ausspricht, auch der erste Satz eine Wahrheit ausspricht.

§. 4.

Wenn es irgend eine reine *Begriffswahrheit* gibt, vermittelst deren ein Satz von der Form: W hat die Beschaffenheit w, *ableitbar* ist aus einem Satze von der Form: X hat die

Beschaffenheit x; so sagt man, der Gegenstand W werde *bestimmt* durch den Gegenstand X; *theilweise* oder *vollständig* bestimmt, je nachdem nur einige oder alle Beschaffenheiten des W auf solche Weise ableitbar sind aus X. In dem letzten Falle, wenn W durch X vollständig bestimmt wird, so zwar, dass es bei einerlei X nur ein *einziges* W gibt, nenne ich X schlechtweg ein den Gegenstand *W bestimmendes Ding*. Wiefern man sich X als einen Inbegriff *mehrerer* Gegenstände denkt, pflegt man sie *bestimmende Stücke* von W zu nennen. So nennt man Mittelpunkt, Lage und Grösse der beiden Achsen einer Ellipse bestimmende Stücke derselben.

§. 5.

Wenn es irgend eine durch einen *reinen Begriff* vorstellbare Beschaffenheit w an einem Gegenstande W gibt, welcher durch einen anderen *X vollständig bestimmt* wird: so muss es auch an X irgend eine durch einen *reinen Begriff* vorstellbare Beschaffenheit x geben, in Betreff deren die allgemeine *reine Begriffswahrheit* gilt, dass jeder Gegenstand, dessen bestimmendes Ding die Beschaffenheit x hat, die Beschaffenheit w besitze. Denn gäbe es eine solche reine Begriffswahrheit nicht; so liesse sich nicht behaupten, dass alle Beschaffenheiten des W, namentlich auch die w, vermittelst einer reinen Begriffswahrheit aus den Beschaffenheiten des X ableitbar sind.

§. 6.

Dinge, deren sämmtliche *innere* und durch blosse *Begriffe* darstellbare Beschaffenheiten dieselben sind, nennen die Mathematiker einander *ähnlich*. So sagen sie, dass alle Kreise einander ähnlich sind, weil alle innern Beschaffenheiten, die sich durch blosse Begriffe vorstellen lassen, an dem einen völlig die nämlichen wie an dem andern sind.

§. 7.

Dinge, deren bestimmende Stücke einander ähnlich sind, sind selbst ähnlich. Sind nämlich W und W' ein paar Dinge, deren bestimmende Stücke X und X' einander ähnlich sind: so muss jede durch einen reinen Begriff vorstellbare Beschaffenheit w, die W hat, auch an W' sich finden; denn weil sich die Beschaffenheit w durch einen reinen Begriff vorstellen lässt, so muss es (§. 5) auch eine durch einen reinen Begriff vorstellbare Beschaffenheit x an X geben, in Betreff deren allgemein gilt, dass jeder Gegenstand, dessen bestimmendes Ding x hat, die Beschaffenheit w hat. Weil aber X und X' einander ähnlich seyn sollen, so muss auch X' die Beschaffenheit x haben; folglich W' auch die Beschaffenheit w.

§. 8.

Ein paar Begriffe, die sich bei einem jeden Menschen, so wie er zum Gebrauche seiner Vernunft kommt, zu einem mehr oder weniger deutlichen Bewusstseyn erheben, die aber auch so einfach sind, dass sie kaum eine Zerlegung in noch einfachere Theile gestatten, sind die Begriffe, welche wir in der deutschen Sprache mit den Worten: *Grund* und *Folge*, bezeichnen, wenn wir sie nicht eben als gleichgeltend mit *Ursache* und *Wirkung* gebrauchen, somit nicht anwenden auf existirende Dinge, sondern nur auf ein Verhältniss, das zwischen *Wahrheiten an sich* bestehet, gleichviel ob sie von irgend Jemand gedacht oder nicht gedacht werden. Wahrheiten an sich stehen, ganz abgesehen davon, ob Jemand da ist, der sie und diess Verhältniss unter ihnen erkennt, in einem höchsteigenthümlichen Zusammenhange, vermöge dessen einige derselben der *(objective) Grund* anderer, diese die *(objective) Folge* jener heissen. So wird z. B. kein Mathematiker läugnen, der objective Grund der Wahrheit, dass die Gleichung

$$x^2 - (a + b)\,x + a\,b = 0$$

die beiden Wurzeln a und b hat, liege nebst andern in den Wahrheiten, dass Factoren in veränderter Ordnung dasselbe, und zwei negative ein positives Product geben. Der Inbegriff der sämmtlichen Wahrheiten, zu welchen eine andere sich als ihre *Folge* verhält, nenne ich den *vollständigen* Grund derselben, während ich eine oder etliche allein einen blossen *Theilgrund* von ihr nenne. Dieses Verhältniss der *Abfolge*, welches nur zwischen Wahrheiten an sich bestehet, dürfen wir nicht verwechseln mit jenem der *Ableitbarkeit* (§. 3), das zwischen Sätzen, gleichviel ob sie wahr oder nicht wahr sind, statt findet. Eine Wahrheit, die in dem Verhältnisse der *Abfolge* zu gewissen anderen stehet, mag immerhin auch *ableitbar* seyn von ihnen: so gilt es doch — welches ein fernerer Unterschied beider Verhältnisse ist — gewiss nicht umgekehrt, d. h. nicht eine jede Wahrheit, welche aus einer oder mehreren andern *erschlossen* werden kann, stehet auch im Verhältnisse der *Abfolge* von denselben. So lässt sich der Satz, dass es zu je zwei Puncten a, b einen dritten c gibt, bei welchem die Entfernungen $ac = ab = bc$ sind, ohne Zweifel *erschliessen* oder ableiten aus dem Satze, dass zwei Kreislinien, die um die Puncte a, b mit einem Halbmesser $= ab$ in einerlei Ebene beschrieben werden, einander irgendwo schneiden; wie denn bekanntlich *Euklides* (El. I, 1) sich des letzteren Satzes zu einem *Beweise* (einer blossen Gewissmachung, wenn sie ja nöthig wäre) für den erstern bediente; dennoch dürfte es für Jeden, der den Begriff der Abfolge sich recht verdeutlichet hat, ohne Widerspruch seyn, dass nicht der erste Satz auf den zweiten, sondern vielmehr der zweite auf den ersten sich objectiv gründe; denn nicht darum gibt es jenen dritten Punct zu je zweien, weil die besagten Kreislinien sich schneiden, sondern umgekehrt sie schneiden sich nur, weil ein solcher dritter Punct da ist.

§. 9.

Wenn in der Wahrheit: *U ist*, d. h. in einer Wahrheit, welche das *Daseyn* eines Gegenstandes U aussagt, ein *(objectiver) Grund*, der *vollständige*, oder doch irgend ein *Theilgrund* der Wahrheit: *W ist*, lieget: so nennen wir U die *Ursache*, die *vollständige*, oder doch irgend eine *Theilursache* von W, und W dagegen die *Wirkung* von U. Ist U Ursache von W und W von Z, so nennt man uneigentlicher Weise U auch die Ursache, nämlich die *mittelbare* von Z. Im Gegensatze mit einer solchen mittelbaren heisst dann die eigentliche Ursache auch eine *unmittelbare*.

§. 10.

Die Beschaffenheiten der Wirkung müssen aus jenen ihrer Ursache, aus der vollständigen *alle* ableitbar seyn, vermittelst einer allgemeinen reinen Begriffswahrheit; oder mit andern Worten: die Ursache muss ihre Wirkung, die vollständige vollständig *bestimmen* in der §. 4 erklärten Bedeutung.

§. 11.

Wenn also die Ursachen *ähnlich* sind, so müssen es nach §. 7 auch die Wirkungen seyn.

§. 12.

Wenn die Wirkung nicht etwas zu aller, sondern nur etwas zu einer *bestimmten Zeit* Bestehendes, also eine blosse *Veränderung* ist — (welchen Fall wir in der Folge ausschliesslich zu betrachten haben) — so muss aus der Ursache auch objectiv gefolgert werden können, warum sie eben zu dieser und keiner andern Zeit bestehe; d. h. die Ursache muss gleichfalls nur zu derselben Zeit als wahre vollständige Ursache bestehen oder wirken; die vollständige Ursache und ihre eigentliche und unmittelbare Wirkung müssen also immer *gleichzeitig* seyn. Sobald die vollständige Ursache anfängt zu *seyn*, fängt sie auch an, zu *wirken:* denn ihr Seyn ist Wirken. Fängt sie aber an, zu wirken, so fängt auch an, eine *Wirkung* zu seyn; und wie im Gegentheil jene aufhört, muss auch diese aufhören. Was etwa noch fortdauert, ist höchstens eine *mittelbare* Wirkung, nämlich eine Wirkung dessen, was bis zum letzten Augenblicke ihres Daseyns und Wirkens von der Ursache hervorgebracht worden ist und nun als neue (Theil- oder vollständige) Ursache gewisse neue Wirkungen erzeuget. — Wenn man diesen Behauptungen oft widerspricht und sagt, die Ursache gehe ihrer Wirkung insgemein vorher und diese dauere noch fort, wenn jene schon längst zu wirken aufgehört: so kommt diess lediglich daher, weil man entweder einen blossen *Theil* der vollständigen Ursache als Ursache schlechtweg betrachtet, oder dasjenige, was erst eine mittelbare Wirkung, eine Wirkung der Wirkung selbst, und vielleicht erst eine Wirkung derselben in Verbindung mit noch andern Dingen ist, wie eine unmittelbare Wirkung der Ursache ansieht; denn dass die einzelnen Theile eines Ganzen insgemein früher da sind als dieses selbst, und dass die mittelbare Wirkung erst zum Vorschein kömmt, nachdem die unmittelbare da ist, begreift sich ganz von selbst.

§. 13.

Wenn die Veränderung eines Dinges durch eine Zeit *fortdauert*, d. h. wenn es während dieser Zeit keinen auch noch so kurzen Zeitraum gibt, innerhalb dessen alle Beschaffenheiten des Dinges die nämlichen verbleiben: so muss auch die Ursache dieser Veränderung durch jene ganze Zeit fortgewirkt haben. Ist aber diese Ursache selbst während der ganzen Zeit ohne Veränderung geblieben, d. h. hat sie fortwährend einerlei Beschaffenheiten behalten: so muss aus diesen und der Zeitdauer ihres Wirkens die Beschaffenheit ihrer Wirkung objectiv abfolgen. Weil nun die Zeitdauer eine *Grösse* hat, so muss auch an jeder in einer gewissen Zeitlänge zu Stande gekommenen Wirkung eine *Grösse* sich vorfinden, welche wir aus der Grösse der Zeit, die ihre Ursache zu ihrer Hervorbringung brauchte, objectiv erklären.

§. 14.

Da alle *Zeitlängen* einander ähnlich sind, so müssen auch Wirkungen, die von derselben oder auch bloss ähnlichen, nur in verschiedenen Zeitlängen wirkenden Ursachen hervorgebracht worden sind, einander ähnlich seyn (§. 10, 7).

§. 15.

Die *Grösse*, die wir nach §. 13 an einer jeden durch eine gewisse Zeit hervorgebrachten Wirkung antreffen, muss von der Art derjenigen seyn, die, oder (was dasselbe ist) deren Einheit sich durch keine Begriffe bestimmen lässt. Denn auch an ihrer Ursache befindet sich, wenn sonst in keiner andern Beziehung, mindestens hinsichtlich der *Zeitlänge*, die sie gebraucht hatte, eine Grösse, die sich durch keine Begriffe bestimmen lässt, die Zeitlänge nämlich. So oft aber an der Ursache etwas durch blosse Begriffe nicht Bestimmbares sich findet, muss sich ein solches auch an der Wirkung befinden, weil jenes sonst ohne Erfolg geblieben wäre.

§. 16.

Wenn der Begriff, den wir von einer gewissen Ursache haben, kein anderer ist, als eben nur der, dass sie Ursache sey; wenn wir somit von ihr nichts Anderes kennen, als dass sie ein Wirkliches sey, das uns auf eine objective Art erklärt, warum eine Wirkung von bestimmter Grösse in bestimmter Zeit zum Vorschein gekommen: so müssen wir auch dieser Ursache selbst noch eine Grösse beilegen, und zwar eine solche, die oder deren Einheit durch keine Begriffe bestimmbar ist. Diess muss geschehen, damit, wenn wir der Wirkungen von einerlei Art *mehrere* wahrnehmen sollten, welche in gleicher Zeit entstanden, doch eine ungleiche Grösse haben, diese Erscheinung aus der verschiedenen Grösse der sie bewirkenden Ursachen erklärt werden könne.

§. 17.

Ein Wirkliches, das nicht als eine blosse *Beschaffenheit* an einem andern Wirklichen bestehet, nennen wir eine *Substanz*, oder mit einem deutschen Worte allenfalls ein *Wesen*. Solche Beschaffenheiten einer Substanz, welche die Ursache sind, dass sie gewisse Wirkungen hervorbringt, nennen wir ihre *Kräfte*; *innere* oder *äussere*, je nach dem sie innere oder äussere Beschaffenheiten sind; *immanente* oder *transiente*, je nachdem die Wirkung, welche sie hervorbringen, in der Substanz selbst, oder ausserhalb ihrer sich befindet.

§. 18:

Sämmtliche Kräfte einer *veränderlichen Substanz* sind selbst nur *Veränderungskräfte*, d. h. Kräfte, vermittelst deren sie Veränderungen entweder in sich selbst, oder in andern veränderlichen Substanzen hervorbringt. Die Kraft *zu schaffen*, d. h. eine Substanz nicht bloss zu verändern, sondern die Ursache ihres *Daseyns selbst* zu seyn, wohnt nur der einen unveränderlichen und unvollkommenen Substanz der Gottheit bei.

§. 19.

Veränderliche Substanzen, dergleichen ausser Gott alle übrigen, d. i. alle *geschaffenen* sind, — können und müssen Veränderungen auch in ihren eigenen *Kräften* erfahren; und sofern diese eine *Grösse* besitzen, ist es eine von der Naturwissenschaft gebotene *Regel*, zur Erklärung jeder in der Welt wahrgenommenen Erscheinung vorauszusetzen, *dass jede Veränderung in der Grösse* (Zu- oder Abnahme) *einer Kraft nur innerhalb einer bestimmten Zeitdauer erfolge, so zwar, dass eine Zeitlänge, welche so klein werden kann, als man nur will, auch einer Zu- oder Abnahme so klein, als man nur will, entspreche.* Diese unter dem Namen *des Gesetzes der Stetigkeit* bekannte Voraussetzung stützet sich meines Erachtens keineswegs darauf, als wäre es etwas an sich selbst Unmögliches, dass sie verletzet würde; denn warum sollte es der Gottheit selbst unmöglich seyn, durch ihr unmittelbares Einwirken eine gewisse Kraft plötzlich zu steigern, und z. B. einem Atome, der bis zu dem Augenblicke T noch ruhete, eine Bewegkraft zu ertheilen, die nicht erst allmählig wächst, sondern in jedem auf T folgenden Augenblicke, so nahe er auch an T liegen mag, schon die bestimmte Grösse c hat? — Nur abgesehen von Gott, dem unendlichen Wesen, dürfte kein anderes endliches Wesen etwas der Art vermögen. Was ich jedoch hier mit Bestimmtheit zu behaupten wage, ist nur so viel: Was uns auch immer erscheine, nie können wir aus dem Erschienenen genöthiget werden, auf eine stattgefundene Verletzung des Gesetzesa der Stetigkeit zu schliessen. Denn offenbar können wir doch auf den geänderten Grad der Kraft eines Wesens (auch unseres eigenen Wesens) nur schliessen aus mindestens *zwei* zu einer verschiedenen Zeit gemachten Beobachtungen, aus deren einer wir den Grad dieser Kraft $= a$, und aus deren anderen wir ihn $= b \gtrless a$ zu schätzen berechtiget wurden. Da aber zwischen zwei dergleichen Beobachtungen, deren jede schon für sich selbst eine gewisse Zeitdauer erfordert, jedesmal irgend eine *Zwischenzeit* verfliesset: was könnte uns berechtigen zu der Behauptung, dass der Übergang von dem einen zu dem andern Grade durch einen sogenannten *Sprung* geschehen sey, d. h. dass die in Rede stehende Kraft in jedem Augenblicke, der einem gewissen T voranging, noch $= a$, in jedem aber, der auf ihn folgte, schon $= b$ gewesen wäre? Kann aber die Voraussetzung eines Sprunges nie als nothwendig sich erweisen: so folgt schon, dass wir die Erklärung durch ein allmähliges, wenn auch noch so schnelles Zu- oder Abnehmen einer Kraft immer als etwas unendlich Wahrscheinlicheres vorziehen müssen; da eine Kraft, die gross genug wäre, um durch ihr Einwirken auf eine gegebene Substanz eine urplötzliche Zu- oder Abnahme in ihren Kräften hervorzubringen, von einer ganz anderen Art (unendliche Male grösser) seyn muss als alle übrigen Kräfte, welche dergleichen Veränderungen nur erst allmählig zu Stande bringen. Wir verstossen also durch die Annahme einer solchen Kraft offenbar gegen den Grundsatz: *Entia*, oder auch *genera, non sine neccesitate sunt multiplicanda.* Hiezu kommt noch, dass wir bei der Voraussetzung, in einer gegebenen Substanz sey eine ihrer Kräfte durch einen Sprung verändert worden, uns selbst des Kennzeichens berauben, an welchem wir sonst erkennen, dass wir die *nämliche*, nur veränderte, nicht aber eine *andere*, an ihre Stelle bloss getretene Substanz vor uns haben. Denn dieses Kennzeichen ist kein anderes, als dass die Kräfte und sämmtlichen Beschaffenheiten der Substanz, welche wir in dem Augenblicke U vor uns haben, den Kräften und Beschaffenheiten, welche wir der in dem Augenbliche T auf uns einwirkenden Substanz beilegen, um so näher kommen, je näher wir die beiden Augenblicke U und T selbst an einander rücken. Es ist also eine Art Inconsequenz, wenn wir eine Substanz für dieselbe mit derjenigen, die früher auf uns eingewirkt hatte, erklären, und dabei doch nicht zugeben wollen, dass die Kräfte, die wir an ihr verschieden von dem ersten Zustande gewahren, in diesen geänderten Zustand allmählig übergangen seyen.

§. 20.

Denken wir uns nunmehr eine einfache und ihrer beschränkten Kräfte wegen im Raume befindliche *) Substanz, einen Atom, der seinen Ort (einen Punct) verändert, d. h. *sich bewegt;* also in einem gewissen Augenblicke T in dem Puncte a, in einem spätern U in dem von a verschiedenen Puncte b sich befindet. In welchen Orten derselbe zu jedem innerhalb T und U gelegenen Augenblicke gewesen, sey uns noch unbekannt; jedenfalls wird uns aber erlaubt seyn, das Raumding, welches alle diese Puncte sammt a und b, sonst aber keinen andern enthält, die in dieser Zeit beschriebene *Bahn* des Atoms zu nennen, wenn wir nur nicht sogleich voraussetzen, dass diese Bahn eine Linie sey. Das eigenthümliche Verhalten des Atoms selbst, welches wir als die nächste Ursache davon, dass jene Bahn von ihm in der bestimmten Zeit beschrieben wird, d. h. dass er gerade diese und keine anderen Orte in den verschiedenen Augenblicken dieser Zeit einnimmt, nennen wir die von ihm beobachtete *Geschwindigkeit.* Nehmen wir nun, weil dieses das Einfachste ist, zuvörderst an, dass diese Geschwindigkeit während der ganzen Zeit seiner Bewegung keine Veränderung erleide, so lässt sich alsbald darthun, dass und warum die beschriebene Bahn eine *Linie* und zwar eine *gerade* Linie seyn müsse. Denken wir uns nämlich zwei innerhalb T und U gelegene Augenblicke t und u; so ist offenbar die zwischen t und u beschriebene Bahn ein Theil der zwischen T und U beschriebenen; beide aber sind Wirkungen, die gleichen, nur durch verschiedene Zeitlängen wirkenden Ursachen zugehören; woraus nach §. 14 folgt, dass sie einander ähnlich seyn müssen. Die durch eine sich immer gleichbleibende Geschwindigkeit beschriebene Bahn ist somit ein Raumding, welches (weil t und u wie immer angenommen werden können) sich theilen lässt in eine unendliche Menge von Theilen, welche dem Ganzen ähnlich sind. Es bedarf nicht erwiesen zu werden, dass dieses eine Eigenschaft sey, welche nur der *begrenzten geraden Linie* zukömmt **).

*) Wie das Eine aus dem Andern folge, kann ich hier nicht umständlicher auseinander setzen. Es ergibt sich aber aus den Begriffen von *Zeit* und *Raum*, wie ich sie anderwärts erkläre.

**) Ich habe diesen Beweis schon einmal an einem Orte, wo man ihn nicht suchen dürfte, nämlich in der Schrift: *Die drei Probleme der Rectification, Complanation und Kubirung*, Leipzig, 1817, in der Anmerkung §. 12 vorgetragen. Eben daselbst habe ich auch §. 10 als ein Beispiel von der vielfältigen Anwendbarkeit einer dort aufgestellten Methode, deren ich mich zur Lösung der auf dem Titel genannten drei Probleme

§. 21.

Damit ein Grund sey, warum die gerade Linie, welche ein Atom beschreibt, der eine unveränderte Geschwindigkeit behält, nur eben in dieser und keiner anderen von den unendlich vielen aus einem Puncte möglichen *Richtungen* liege, muss die Geschwindigkeit desselben eine eigene Bestimmung besitzen, die wir von dem, was sie verursachet, füglich ihre eigene *Richtung* nennen dürfen; und damit ferner auch ein Grund da sey, warum jene Linie in einer gegebenen Zeit gerade diese und keine andere *Länge* erreicht, muss die Geschwindigkeit eine Bestimmung besitzen, die, weil sie den Grund einer Grösse enthält, selbst eine Grösse seyn muss, und somit füglich die *Grösse* der Geschwindigkeit genannt werden kann. Somit hat jede Geschwindigkeit Beides, Richtung sowohl als Grösse; die sich gleichbleibende eine sich gleichbleibende Richtung und Grösse; die sich verändernde aber kann sich entweder nur in ihrer Richtung, oder nur in ihrer Grösse, oder in beiden zugleich verändern; doch wird jedenfalls anzunehmen seyn, dass diese Veränderungen nur nach dem Gesetze der Stetigkeit erfolgen.

§. 22.

Da alle Richtungen einander ähnlich sind, also nie eine durch blosse Begriffe bestimmt werden kann; da eben diess auch von allen Zeit- und Raumlängen gilt: so muss, weil in der Ursache immer eben so viele Stücke wie in ihrer Wirkung unbestimmt bleiben müssen (§. 15), auch bei einer Geschwindigkeit Beides, sowohl ihre Richtung als ihre Grösse, nie durch blosse Begriffe bestimmbar seyn, sondern durch angemessene Anschauungen allein: und zwar kann ihre *Richtung* uns gegeben werden lediglich durch gewisse Anschauungen, die eine im Raume befindliche Richtung, nämlich die der Geraden, welche der Atom beschreiben würde, wenn er diese Geschwindigkeit eine Zeitlang beibehielte, bestimmen; ihre *Grösse* aber kann uns gegeben werden lediglich durch gewisse Anschauungen, die Beides, eine Zeitlänge sowohl als eine Raumlänge bestimmen. Denn diese Grösse soll uns erklären, welche Grösse die gerade Linie hätte, die der Atom in einer gewissen Zeit beschriebe, wenn er seine Geschwindigkeit durch diese Zeitlänge unverändert behielte; sie bedarf also offenbar zu ihrer Bestimmung einer Raumlänge sowohl als einer Zeitlänge.

bediene, die beiden wichtigen Lehrsätze der Mechanik dargethan, dass wenn die von einem Atome beschriebene Bahn durch eine Function der Zeit $= Ft$ ausgedrückt wird, die *Geschwindigkeit* dieses Atoms für jeden Augenblick durch die erste, die ihn beschleunigende *Kraft* aber durch die zweite abgeleitete Function von Ft dargestellt wird. Den ferneren Satz aber, dass jeder von was immer für nur dem Gesetze der Stetigkeit gehorchenden Kräften getriebene Atom *eine einzige continuirliche*, wie auch sonst immer gekrümmte oder gebrochene Linie beschreibe, konnte ich weder dort, noch kann ich ihn hier beweisen, da er zum Theile auf der hier eben zu beweisenden Lehre von der Zusammensetzung der Kräfte beruhet. Indessen wird der gelehrte Leser, wenn er sich mit der a. a. O. §. 10 beschriebenen Methode bekannt gemacht hat, den ungefähren Gang dieses Beweises wohl von selbst errathen. Wer sich mit der blossen Gewissheit, *dass* etwas ist, begnügt, und nach dem objectiven Grunde, *warum* es ist, nicht frägt, für den ist freilich das wissenschaftliche Bedürfniss für dergleichen Beweise noch gar nicht erwacht.

§. 23.

Aendert sich eine Geschwindigkeit, es sey bloss in der Richtung oder Grösse oder in Beidem: so bedarf es dazu, wie zu jeder Veränderung in etwas Wirklichem, einer Ursache. Ich nenne nun die nächste Ursache, die eine Veränderung in der Geschwindigkeit, d. h. in dem Verhalten eines Atoms gegen den Raum, hervorzubringen vermag und, wenn sie allein wirkt, auch hervorbringen muss, eine *Bewegkraft* oder, wo es keinen Missverstand veranlassen kann, nur schlechtweg eine *Kraft*.

§. 24.

Wenn eine sich immer *gleichbleibende Kraft* durch eine bestimmte Zeitdauer auf einen Atom einwirkt: so folgt aus §. 14 und 20, dass die Veränderungen, welche das Verhalten des Atoms gegen den Raum, d. h. seine Geschwindigkeit, erfährt, ein Ganzes darstellen müssen, das sich in eine unendliche Menge demselben ähnlicher Theile zerlegen lässt. In den *Richtungen* dieser Geschwindigkeit also kann gar keine Änderung erfolgen; da ein System verschiedener Richtungen, davon ein Theil dem Ganzen ähnlich wäre, eine Unmöglichkeit ist. Die Änderung aber, die diese Geschwindigkeit in ihrer *Grösse* erfährt, muss in gleich grossen Zeitlängen gleich gross seyn, also *mit der Zeit gleichförmig wachsen*. Nehmen wir an, dass der Atom früher in Ruhe gewesen, so muss im ersten Augenblicke der Bewegung die Geschwindigkeit *Null* seyn, und in den folgenden von Null aus stetig wachsen.

§. 25.

Um zu begreifen, und aus seinem objectiven Grunde zu begreifen, warum die Geschwindigkeit eines aus der Ruhe zur Bewegung gelangenden Atoms, auf welchen eine durch eine gegebene Zeit sich immer gleichbleibende Kraft einwirkt, gerade diese und keine andere *Richtung* erhalte, muss auch der Kraft eine eigenthümliche Bestimmung beigelegt werden, die als der nächste Grund, warum diese Richtung in der Geschwindigkeit zum Vorschein kommt, angesehen werden könne. Wir nennen diese Bestimmung die der Kraft beiwohnende *Richtung*. Um zu begreifen, warum diese von Null aus wachsende Geschwindigkeit in einer gewissen Zeit eine gewisse *Grösse* erreicht, muss der Kraft abermal eine eigenthümliche Bestimmung beigelegt werden, die, weil sie das Entstehen einer *Grösse* erklären soll, selbst eine *Grösse*, die *Grösse der Kraft* seyn muss.

§. 26.

Aus ähnlichen Gründen, wie Richtung und Grösse einer Geschwindigkeit sich nie durch blosse Begriffe bestimmen lassen (§. 22), muss auch die Richtung und die Grösse einer Kraft etwas Solches seyn, das sich durch keine blossen Begriffe bestimmen lässt. Wohl aber wird die *Richtung* einer Kraft bestimmt seyn, wenn wir die Richtung der Geschwindigkeit, die sie durch irgend eine Zeit ihres Einwirkens auf einen Atom, sich immer gleich bleibend, in demselben hervorbringt, bestimmen. Denn wir denken uns ja unter der Richtung einer Kraft eben nichts Anderes, als dasjenige Etwas, so macht, dass die von ihr bewirkte Geschwindigkeit diese und nicht eine andere Richtung habe. Namentlich also kann die Richtung einer Kraft durch die blosse Angabe einer im Raume befindlichen Richtung, nämlich derjenigen, in welcher die gerade Linie, welche der ihr überlassene Atom beschreiben würde, liegt, auf das vollkommenste bestimmt werden. Ein anderes Bewandtniss hat es mit der *Grösse* einer Kraft, welche wir durch die blosse Angabe der *Grösse* der Geschwindigkeit, welche sie innerhalb einer gegebenen Zeit hervorrufen würde, noch keineswegs als ganz bestimmt ansehen dürfen. Um nämlich eine Geschwindigkeit hervorzurufen, ist nicht nur eine Kraft erforderlich, sondern auch er, der Atom selbst, der diese Geschwindigkeit annehmen soll, muss da seyn; so dass die *vollständige* Ursache von den eintretenden Veränderungen in dem Verhalten des Atoms gegen den Raum, d. h. in der Geschwindigkeit desselben, eigentlich in dem Zusammenseyn der Zweien, der Kraft und des Atomes, liegt (wobei es einerlei ist, ob die Kraft einmal dem Atome inwohnt, ein andermal von aussen hinzukömmt). Da aber nicht alle Atome einander als ganz gleich vorausgesetzt werden dürfen; da es vielmehr gewiss ist, dass auch nicht zwei Substanzen einander in allen ihren Beschaffenheiten gleichen: so lässt sich gar wohl denken, dass verschiedene Atome unter der Einwirkung gleichgrosser Kräfte in gleichen Zeiten eine ungleich grosse Geschwindigkeit erreichen; bloss weil sie in einer gewissen innern Beschaffenheit, vermöge deren sie einer Veränderung ihres Verhaltens gegen den Raum in einem ungleichen Masse widerstehen oder förderlich sind, einander ungleich sind. Wir mögen diese innere Beschaffenheit eines Atoms, die macht, dass eine gegebene Kraft in gegebener Zeit gerade nur diese, und keine grössere oder kleinere Geschwindigkeit in ihm hervorruft, die *Trägheit*, *Masse* oder *Dichtigkeit* desselben, oder, wie man sonst will, nennen: so bleibt es immer dabei, dass wir, um die *Grösse* einer Bewegkraft zu bestimmen, nebst der Grösse der Geschwindigkeit, die sie in einer gegebenen Zeit in einem Atome bewirkt, auch die hier in Rede stehende Eigenthümlichkeit des Atoms, an welchem diess geschah, berücksichtigen müssen. Bei der *Richtung* ist dieses nur desshalb unnöthig, weil die gerade Linie, welche der Atom beschreibt, wenn er der Einwirkung einer sich gleichbleibenden Kraft durch eine bestimmte Zeitlänge ausgesetzt wird, immer die nämliche Richtung behält, wie gross oder klein die einwirkende Kraft, und wie auch immer seine Eigenthümlichkeit seyn möge. Diese Richtung der Bahn also gibt uns hier Beides, die Richtung der in ihm hervorgerufenen Geschwindigkeit sowohl als auch die Richtung der ihn treibenden Kraft zu erkennen.

§. 27.

Da die *Trägheit* eines Atoms eine solche Beschaffenheit desselben seyn soll, darin der objective Grund liegt, warum eine Kraft von gegebener Grösse in gegebener Zeit eine Geschwindigkeit von gegebener Grösse in ihm hervorruft, so muss sie selbst eine *Grösse* seyn (§. 13); und es erhellet auf ähnliche Art, wie §. 22, 25, dass die Einheit oder das Mass dieser Grösse durch keine Begriffe bestimmbar seyn dürfe. So lange wir übrigens den Begriff dieser Grössenbeschaffenheit nicht noch etwas genauer bestimmen, als es im vorigen §.

geschah, bleibt sogar unentschieden, ob die Geschwindigkeit, die eine gegebene Kraft in einem Atome hervorruft, mit seiner Trägheit wachse oder im Gegentheil abnehme. Der bisherige Sprachgebrauch fordert jedoch bei den Worten, die ich in Vorschlag brachte, das Letztere, nämlich, dass man die Trägheit für um so grösser erkläre, je kleiner die Geschwindigkeit ist, die eine gleichgrosse Kraft in gleicher Zeit erzeugt. Und so wollen denn auch wir, da es übrigens gleichgültig ist, festsetzen, unter der Trägheit eines Atoms diejenige Grössenbeschaffenheit desselben zu verstehen, die im verkehrten Verhältnisse steht mit der Grösse der Geschwindigkeit, die eine Kraft von gegebener Grösse in gegebener Zeit in ihm hervorrufen würde.

§. 28.

Als eine leichte Folgerung aus dem Bisherigen ergibt sich, dass es möglich sey, nicht nur die *Geschwindigkeit*, welche ein zu einem bestimmten Augenblicke in dem gegebenen Orte a befindlicher Atom besitzt, sondern auch die auf ihn (es sey von Innen, d. h. durch ihn selbst, oder durch eine äussere Ursache) in diesem Augenblicke einwirkende *Kraft* durch eine aus dem Punkt a ausgehende Gerade in der Art anzuzeigen, dass die *Richtung* jener Geschwindigkeit oder Kraft durch die Richtung, in der diese Gerade liegt, vollkommen, ihre *Grösse* aber nur im *Verhältnisse* zur Grösse einer anderen Geschwindigkeit oder Kraft vermittelst des Verhältnisses der Länge dieser Geraden zu einer anderen bestimmt wird.

§. 29.

Sicherlich liegt nichts Widersprechendes in dem Gedanken, dass ein und der nämliche Atom zu ein und derselben Zeit sich der Einwirkung nicht bloss einer einzigen, sondern *mehrerer* Kräfte ausgesetzt finde; vielmehr lässt sich voraussehen, dass auf einen jeden Atom fortwährend mehrere, ja selbst unendlich viele Kräfte, d. h. Ursachen einwirken, deren eine jede, wenn sie für sich allein da wäre, innerhalb einer gegebenen Zeit eine gewisse Veränderung in seinem Verhalten zum Raume hervorbringen müsste. Denn da die stärksten (hier freilich nicht weiter auseinander zu setzenden) Gründe dafür sprechen, dass je zwei Atome in gewissen Entfernungen einander *anziehen*, d. h. eine Kraft besitzen, die für sich allein wirkend eine annähernde Bewegung zwischen denselben hervorbringen würde; in andern Entfernungen aber einander *abstossen:* so ergibt sich schon hieraus und aus der Wahrheit, dass die Menge der Atome in der Welt eine unendliche ist, der Schluss, dass jeder Atom zu jeder Zeit der Einwirkung einer unendlichen Menge von Bewegkräften nach den verschiedensten Richtungen und von den verschiedensten Grössen ausgesetzt sey.

§. 30.

Es ist aber eben die uns hier vorliegende Aufgabe zu bestimmen, was für ein Verhalten in Absicht auf den Raum, d. h. welche Geschwindigkeit ein Atom annehmen müsse, wenn der Bewegkräfte *mehrere*, ja selbst *unendlich* viele zugleich auf ihn einwirken? Hier könnte nun Jemand zunächst auf den Einfall gerathen, ob es nicht mindestens in dem Falle, wenn diese Kräfte einander alle *gleich* sind (die nämliche Richtung sowohl als Grösse haben), wenn somit jede für sich das nämliche Verhalten fordert, erlaubt sey, zu schliessen, dass diese Kräfte auch bei ihrem *Zusammenseyn* nur eben dieses und kein anderes Verhalten veranlassen werden; ungefähr eben so, wie mehrere *Beweise*, die jeder für sich zu demselben Schlussatze führen, auch in Verbindung nur eben diesen und nicht einen anders lautenden Schlusssatz geben? So ist es aber in der That nicht, aus dem einfachen Grunde, weil Kräfte als Ursachen ja etwas *Wirkliches* sind (§. 9), daher denn zwei oder mehrere derselben, die jede für sich eine gewisse Wirkung erzeugen würden, in ihrem Zusammenseyn nothwendig etwas Anderes als diese einfache Wirkung erzeugen müssen, da sonst die übrigen bis auf Eine ganz ohne Wirkung wären. Doch wenn man erwäget, dass mehrere einander gleiche Ursachen nicht blos eine einzige der einzelnen Ursache gemässe Wirkung hervorbringen können, sondern auch *eben so viele* einander *gleiche* Wirkungen hervorrufen müssen: so wird man vielleicht verlangen, dass zwei oder mehrere einander gleiche Kräfte, welche auf einen Atom wirken, auch zwei oder mehrere einander gleiche Geschwindigkeiten in ihm erzeugen sollten; was sich doch abermals nicht, ohne eine Ungereimtheit zu begehen, erwarten lässt; denn ein und derselbe Atom kann doch zu Einer Zeit nur Einen Zustand haben, somit auch nur Eine und nicht mehrerlei Verhaltungsweisen gegen den Raum, d. h. Geschwindigkeiten äussern. Es ist nämlich, wie wir schon §. 26 erinnert, die auf einen Atom einwirkende Kraft nicht die vollständige Ursache von den Veränderungen in seinem Verhalten gegen den Raum, sondern zu dieser gehört auch noch sein eigenes Daseyn. Nur also wenn zwei gleiche Kräfte auf nicht einen, sondern zwei (einander überdiess noch gleiche) Atome einwirkten, liesse sich erst mit vollem Rechte behaupten, dass die vollständige Ursache zu einer Veränderung in der Geschwindigkeit doppelt vorhanden sey, und eben desshalb auch verlangen, dass eine doppelte Wirkung, d. h. hier eine doppelte Veränderung in der Geschwindigkeit erfolge. Ist aber, wie diess in unserer Aufgabe der Fall ist, nur ein einziger Atom zugegen, auf den zwei gleiche Kräfte wirken: dann dürfen wir weder verlangen, dass die Geschwindigkeit desselben die nämliche werde, die nur eine einzige der beiden Kräfte für sich erzeugt hätte, weil sonst die andere Kraft gar keine Wirksamkeit bewiese; noch dürfen wir begehren, dass zwei *gleiche* Geschwindigkeiten erscheinen, als wozu das Vorhandenseyn zweier Atome erforderlich wäre. Was also eintreten müsse, wird erst die fernere Betrachtung lehren.

§. 31.

Wie gross auch die Menge und wie verschieden die Beschaffenheit der auf einen Atom zugleich einwirkenden Kräfte sein mögte: so ergibt sich schon aus §. 10 die erste Bestimmung für das Verhalten des Atoms, dass alles dasjenige, was sich durch blosse Begriffe (ohne Anschauungen) daran auffassen lässt, nach einer allgemeinen aus blossen Begriffen zusammengesetzten Regel ableitbar seyn müsse bloss aus demjenigen, was sich an den gegebenen Kräften und ihrem Verhältnisse untereinander abermal nur durch Begriffe darstellen lässt; weil immer Alles, was an der *Wirkung* — auch einer entfernteren — durch blosse Begriffe vorstellbar ist, bestimmbar seyn muss durch das, was an der Ursache durch blosse Begriffe vorstellbar ist. Wenn also z. B. bloss der *Ort*, in welchem der Atom sich aufhält, oder wenn bloss der *Zeitpunct*, in welchem die Einwirkung der Kräfte auf ihn beginnt, oder wenn selbst die *Richtungen* und *Grössen* dieser Kräfte, oder die Grösse seiner Trägheit (Masse) sich ändert, jedoch diess Alles nur in der Weise, dass alle durch Begriffe vorstellbaren Verhältnisse dieselben verbleiben: so darf auch in dem Verhalten des Atoms (in seiner Geschwindigkeit) sich nichts, so durch Begriffe vorstellbar ist, verändern.

§. 32.

Nicht minder einleuchtend ist folgende *zweite* Wahrheit, die uns behülflich seyn wird, das Verhalten des Atoms zu bestimmen. Die mehreren Kräfte, welche auf ihn gleichzeitig einwirken, nehmen einen Einfluss auf die Bestimmung seines Verhaltens lediglich nach ihrer eigenen Beschaffenheit, Richtung und Grösse, keineswegs aber nach irgend einer *Ordnung*, in welcher wir sie uns etwa denken mögen, so dass z. B. Eine, die wir uns als die *erste* vorstellen, auch bei gleicher Beschaffenheit auf die Bestimmung jenes Verhaltens anders einfliessen würde, als eine andere, die wir als *zweite* betrachten u. dgl. So folgt unmittelbar aus der Voraussetzung, dass diese Kräfte alle *gleichzeitig* einwirken; da in dem Begriffe einer blossen *Bewegkraft*, wie wir ihn §. 23 bestimmten, durchaus nichts liegt, was uns berechtigen könnte, noch einen andern Unterschied in ihrem Wirken anzunehmen, der sich nicht entweder aus ihrer *Richtung*, oder aus ihrer *Grösse*, oder aus der *Zeit* und *Zeitdauer* ihres Wirkens ergäbe.

§. 33.

Was sich an einem Systeme von Kräften, welche auf einen Atom gleichzeitig einwirken, durch blosse Begriffe auffassen lässt (die Verhältnisse unter ihren Richtungen und Grössen), das Alles lässt sich offenbar auch an dem *Systeme der Geraden*, durch welche diese Kräfte nach §. 26 dargestellt werden können, durch blosse Begriffe auffassen (durch die Angabe des Verhältnisses zwischen ihren Richtungen und Grössen); sofern wir nur in dem Falle, wo etwa zwei oder mehrere jener Kräfte *dieselbe* Richtung und Grösse besitzen, bemerken, dass die sie vorstellende Linie als eine *doppelt oder mehrfach vorhandene* anzusehen sey. Hieraus ergibt sich sofort folgende *dritte* Wahrheit, welche für die Bestimmung des Verhaltens des Atoms von grösster Wichtigkeit ist: Alles dasjenige, was sich an diesem Verhalten durch blosse Begriffe ausdrücken lässt, muss sich auch *aus jenem blossen Liniensysteme* beurtheilen lassen.

§. 34.

Durch Hülfe dieser drei gewiss sehr einfachen und leicht einzusehenden Wahrheiten sind wir bereits im Stande, das Verhalten, welches ein der Einwirkung mehrerer gleichzeitigen Kräfte ausgesetzter Atom annehmen muss, in einer unzähligen Menge von Fällen auf eine *objective* Art, d. h. wie die Folge aus ihrem Grunde zu bestimmen. Es gibt, behaupte ich nämlich zuvörderst, Systeme von Kräften in jeder beliebigen, ja selbst unendlich grossen Menge, die so geartet sind, dass der Erfolg, welchen sie durch ihre Gesammtwirkung bei einem früher in *Ruhe* befindlichen Atome erzeugen, kein anderer ist als dass die Ruhe, welche schon ohne sie da war, noch ferner *fortdauert*. So namentlich wird, um den einfachsten Fall, in welchem das Gesagte statt findet, gleich zuerst anzuführen, ein Atom, der schon in Ruhe war, in dieser Ruhe sicherlich verbleiben, wenn wir zu gleicher Zeit zwei Kräfte anbringen, welche einander an Grösse *gleich*, in ihren Richtungen aber *entgegengesetzt* sind. Sollte hier nämlich Bewegung eintreten, so müsste (weil dieses ein Erfolg ist, der sich durch einen blossen Begriff auffassen lässt) irgend ein Punct als Ort, welchen der Atom nach einer gewissen Zeit einnimmt, oder auch nur eine Linie oder Richtung, in welcher er sich befinden muss, durch blosse Begriffe ableitbar seyn aus dem Systeme jener zwei gleich langen und entgegengesetzt liegenden Geraden, durch welche das hier in Rede stehende Kräftensystem vorgestellt werden kann, und zwar nach einer aus blossen Begriffen bestehenden Regel, in welcher jene Linien, da sie einander gleich sind, auf eine ganz gleiche Weise erscheinen (§. 31 — 33). Dieses ist aber, wie Jeder sieht, aus rein geometrischen Gründen unmöglich; denn ausserhalb des Punctes, darin sich der Atom zu Anfang befindet, d. h. aus welchem die beiden einander gleich langen und entgegengesetzten Geraden ausgehen, lässt sich durchaus kein anderer Punct, auch keine Richtung oder Linie erdenken, zu der es nicht eine andere, oder wohl gar noch eine unendliche Menge anderer gäbe, die völlig eben dasselbe durch Begriffe darstellbare Verhältniss zu dem vorliegenden Systeme haben.

§. 35.

Statt diesem Einen Beispiele andere folgen zu lassen, die Jeder sich von selbst auszudenken vermag, wollen wir noch Eines beifügen, welches erweisen soll, wie selbst eine *unendliche Menge von Kräften* so beschaffen seyn könne, dass sie die Ruhe eines Atoms, an dem sie angebracht ist, nicht störe. Denkt man sich den Umfang eines Kreises zuerst in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, z. B. drei, getheilt; dann aber jeden dieser Theile und *jeden* durch die Theilung erhaltenen neuen Theil immer wieder halbirt: so denkt man sich offenbar eine unendliche Menge von Theilungspuncten. Denkt man sich also in den Mittelpunct dieses Kreises einen Atom verlegt, und *in jeder* aus diesem Mittelpuncte nach einem Theilungspuncte des Umfangs gehenden Richtung eine Kraft angebracht: so denkt man sich eine unendliche Menge von Kräften an Einem Atome. Nimmt man diese Kräfte alle gleich gross, so dass sie alle durch gleichlange Linien, etwa durch Radien des Kreises vorgestellt werden können: so ist offenbar das System von Linien, das jenes Kräftensystem vorstellet, abermal von der Art, dass sich kein ausserhalb dem Mittelpuncte desselben gelegener andere Punct, auch keine aus demselben ausgehende Richtung oder Gerade durch blosse Begriffe bestimmen lässt nach einer Regel, in welcher jene Geraden, da sie von gleicher Länge sind und unter gleichen Verhältnissen untereinander stehen, auf eine gleiche Weise erscheinen. Der Atom muss also in seiner Ruhe verbleiben.

§. 36.

Von Kräften, welche das §. 34 und 35 beschriebene Verhältniss zu einander haben, dass sie nämlich angebracht an einem in Ruhe befindlichen Atome diese Ruhe desselben nicht stören, sage ich, dass sie *einander das Gleichgewicht halten*, oder sich *aufheben.*

§. 37.

Wenn Kräfte einander das Gleichgewicht halten, also angebracht an einem in *Ruhe* befindlichen Atome diese Ruhe nicht stören: so werden sie auch, angebracht an einem in *Bewegung* befindlichen Atome, diese Bewegung oder seine *Geschwindigkeit* nicht ändern. Denn da wir uns unter den Kräften, von denen hier die Rede ist, durchaus nichts Anderes denken, als mögliche Ursachen zu Veränderungen in dem Verhalten eines Atoms hinsichtlich auf den Ort; also von Allem, was ihre Einwirkung etwa im Innern des Atoms selbst noch hervorbringen könnte, oder wodurch sie selbst in seinem Innern erwecket worden seyn dürften, ganz und gar absehen: so ist kein Grund vorhanden, den Fall des Gleichgewichts zwischen solchen Kräften für einen anderen zu halten, als für den der gänzlichen Abwesenheit derselben. Ohne den Zustand eines Atoms hinsichtlich seines Verhaltens zum Raume abzuändern, können wir also dergleichen einander das Gleichgewicht haltende Kräfte anbringen oder auch wegnehmen; jenes Verhalten sey Ruhe, oder es bringe Bewegung hervor, d. h. es sey eine Geschwindigkeit.

§. 38.

Dass der §. 34 nachgewiesene Fall, wo das Zusammenwirken mehrerer Kräfte eine schon früher vorhandene Ruhe noch ferner unterhält, nicht etwa bei einem *jeden* Zusammentreffen mehrerer Kräfte an Einem Atome statt finde, brauchen wir wohl nicht eigens darzuthun. Denn wenn wir zu einer (endlichen oder unendlichen) Menge solcher Kräfte, die für sich selbst einander aufheben, noch eine *einzige* hinzuthun: so erhalten wir ein System von Kräften, bei welchem nach §. 37 gewiss Bewegung erfolgt; weil das Verhalten des Atoms ein solches seyn muss, wie es auch ohne die einander aufhebenden Kräfte seyn würde, d. h. wie wenn die letzterwähnte Kraft *einzeln* da wäre, in welchem Falle sie nothwendig eine Wirkung, also eine gewisse Bewegung hervorrufen müsste.

§. 39.

Wenn ein Atom bis zu einem gewissen Augenblicke in Ruhe gewesen, von diesem anzufangen aber sich der gleichzeitigen Einwirkung einer endlichen oder unendlichen Menge sich immer gleichbleibender Kräfte ausgesetzt findet; so wird — nach Umständen — nur Eines von Beidem erfolgen: entweder der vorhin vorhandene Zustand der Ruhe verbleibt; oder es tritt eine *geradlinige Bewegung* ein, deren nächste Ursache eine in gleichen Zeiten um gleichviel wachsende *Geschwindigkeit* ist. Die Möglichkeit des ersten Falles ist durch das Vorhergehende erwiesen; so wie auch, dass dieser Fall nicht immer statt finde. Wenn er nun nicht statt findet, wenn also der früher vorhandene Zustand der Ruhe aufgehoben wird:

so bleibt nichts Anderes übrig, als dass der Atom seinen Ort ändere, also in einer gewissen Zeitlänge t aus seinem ursprünglichen Orte a in einen anderen b gelange. Da aber alle Zeitlängen einander ähnlich sind, so folgt, dass auch nach einer jeden kleineren oder grösseren Zeitlänge schon eine gewisse Ortsveränderung vor sich gegangen seyn müsse, und nach der Schlussart der §§. 14, 20 und 24 folgt, dass die Bahn des Atoms eine aus a ausgehende Gerade, seine Geschwindigkeit aber eine in gleichen Zeiten um gleichviel wachsende seyn müsse, weil auch in der Ursache, deren nächste Wirkung dieser Wachsthum der Geschwindigkeit ist, nämlich in dem Beisammenseyn der gegebenen Kräfte sich nichts mehr ändert.

§. 40.

Jede gegebene endliche oder unendliche Menge von Kräften, welche durch eine bestimmte Zeit hindurch sich immer gleichverbleibend auf einen früher in Ruhe befindlichen Atom wirken, lassen denselben entweder auch jetzt noch in dieser *Ruhe*, oder sie bringen eine *Bewegung* hervor, die auch durch eine *einzelne* sich immer gleichverbleibende Kraft in derselben Zeit hätte erzeugt werden können. Denn eine Bewegung wie sie §. 39 beschreibt, kann nach §. 24 jederzeit auch durch blosse Einwirkung einer *einzelnen* Kraft von angemessener Richtung und Grösse hervorgebracht werden.

§. 41.

Eine solche *einzelne* Kraft, ingleichen auch ein solches System *mehrerer* Kräfte, welche die nämliche Wirkung mit einer andern einzelnen Kraft oder mit einem ganzen Systeme mehrerer Kräfte hervorbringen, wenn sie dieselbe Zeit hindurch sich immer gleichbleibend an demselben Atome wirken, nenne ich den letztern *gleichgeltend*.

§. 42.

Zu jeder beliebigen Menge von Kräften, die so beschaffen sind, dass sie einander nicht das Gleichgewicht halten, gibt es nach §. 40 eine einzelne, die ihnen allen gleichgilt; dagegen kann eine einzelne Kraft niemal gleichgeltend seyn einer *einzigen* andern, nämlich die in der That eine von ihr verschiedene ist, also entweder eine andere Richtung oder eine andere Grösse besitzt. Denn nach §. 25 und 26 können wir ja eben nur dann sagen, dass eine Kraft eine *andere* Richtung oder eine andere Grösse habe, wenn sie angebracht an demselben Atome für sich allein in derselben Zeit eine Geschwindigkeit erzeugt, die eine andere Richtung oder eine andere Grösse besitzt.

§. 43.

Zwei Kräfte, welche einander das *Gleichgewicht* halten sollen, müssen in ihren *Richtungen* einander *entgegengesetzt*, in ihren Grössen aber einander *gleich* seyn. Denn halten ab und ac einander das Gleichgewicht; so muss, wenn eine dritte Kraft $a\beta$ angebracht wird, nach §. 58 eine Veränderung in dem Verhalten des Atoms gegen den Raum erfolgen, völlig so, wie wenn diese Kraft $\alpha\beta$ allein vorhanden wäre. Nehmen wir aber $\alpha\beta$ gleich und entgegengesetzt mit ab an, so folgt aus §. 31, dass diese beiden Kräfte einander das Gleichgewicht halten, und somit, abermal nach §. 38, weggelassen werden können, ohne das Verhalten des Atoms zu stören. Dann aber bleibt nur die einzige Kraft ac zurück. Also ist das Verhalten des Atoms dasselbe, ob die Kraft $\alpha\beta$ allein oder die Kraft ac allein angebracht sey. Also müssen, nach §. 42, $\alpha\beta$ und ac einerlei Richtung und Grösse, ab und ac folglich entgegengesetzte Richtungen und gleiche Grössen haben.

§. 44.

Zwei Kräfte also, welche nicht Beides zugleich, in ihren Richtungen entgegengesetzt, und in ihren Grössen gleich sind, erzeugen immer eine Veränderung in der Geschwindigkeit des Atoms, an dem sie gleichzeitig angebracht werden.

§. 45.

Wenn daher eine endliche oder unendliche Menge sich immer gleichbleibender Kräfte an einem Atome gleichzeitig angebracht sind: so gibt es, wenn sie einander nicht schon von selbst das Gleichgewicht halten, jedesmal eine *einzelne*, aber auch nur eine *einzige* solche einzeln dastehende Kraft, *die ihnen allen das Gleichgewicht* hält; eben so gibt es auch jedesmal eine *einzelne*, aber auch nur eine *einzige* solche einzelne Kraft, *die ihnen allen gleichgilt*; und diese zwei Kräfte, nämlich die eine, die allen das Gleichgewicht hält, und die andere, die allen gleichgilt, sind unter einander gleich und entgegengesetzt. Durch die Bedingung also, dass eine Kraft einer gegebenen (endlichen oder unendlichen) Menge von Kräften das Gleichgewicht halten; oder auch durch die Bedingung, dass sie ihnen gleichgelten soll, ist diese Kraft nach Richtung und Grösse, d. h. vollständig *bestimmt;* und wenn die Findung einer solchen Kraft zu einer Aufgabe gemacht ist, so ist, wenn man die Eine gefunden, auch schon die andere, als ihr gleich und entgegengesetzt, gefunden.

§. 46.

Wenn eine endliche oder unendliche Menge von Kräften einer gewissen *einzelnen* gleichgilt: so wird, wenn wir die erstern als veränderlich betrachten, sie aber nur (in ihren Richtungen sowohl als Grössen) nach dem Gesetze der *Stetigkeit* sich verändern lassen (§. 19), auch jene einzelne nur eine dem Gesetze der Stetigkeit gehorchende Veränderung (in ihrer Richtung oder Grösse) erfahren. Richten wir nämlich die Veränderung bei jenen ersteren Kräften so ein, dass das Gesetz der Stetigkeit durch sie nicht verletzt wird: so nehmen wir sie in einer Weise an, wie wir sie in der Wirklichkeit antreffen können; mithin muss auch die Kraft, die ihnen allen gleichgelten soll, in einer Weise sich verändern, die in der Wirklichkeit vorkommen kann; denn weil sie ihnen gleichgilt, so kann sie statt ihrer erscheinen. Also müssen auch ihre Veränderungen nach dem Gesetze der Stetigkeit vor sich gehen. Dasselbe gilt auch von der Kraft, die den gegebenen das *Gleichgewicht* halten soll; denn sie ist eben so gross, wie die gleichgeltende, nur ihr entgegengesetzt.

§. 47.

Wenn also Kräfte in einer endlichen oder unendlichen Menge *einander das Gleichgewicht* halten: so gelten folgende vier Stücke:

1. Es gibt eine allgemein lautende und *aus blossen Begriffen* zusammengesetzte *Regel*, nach welcher jede derselben aus der Gesammtheit der übrigen vollständig bestimmt werden kann.

2. Diese Regel ist von jeder *Ordnung*, in welcher wir uns diese Kräfte etwa vorstellen mögen, so völlig unabhängig, dass immer die nämliche Kraft zum Vorscheine kömmt, welche in der Gesammtheit der übrigen wir als die erste, die zweite u. s. w betrachten.

3. Wenn wir die gegebenen Kräfte bis auf eine als veränderlich betrachten, sie aber nur nach dem Gesetze der Stetigkeit ändern: so wird auch die Eine, die durch den Umstand, dass sie den übrigen das Gleichgewicht hält, bestimmt ist, nur nach dem Gesetze der Stetigkeit sich ändern.

4. Wenn endlich eine andere Menge von Kräften gleichfalls die Eigenschaft hat, dass sie einander das Gleichgewicht halten: so können wir sie zu der gegebenen Menge hinzuthun, oder — falls sie in dieser letztern schon als ein Theil vorkommen sollte, sie von ihr wegnehmen, ohne das vorhin statt gefundene Verhältniss des Gleichgewichts zu stören.

Das Erste folgt unmittelbar aus §. 45; denn weil die Kraft, welche einer gegebenen Menge anderer Kräfte das Gleichgewicht halten soll, durch den Begriff dieses Verhältnisses zu denselben bestimmt und vollständig bestimmt wird: so wuss es nach §. 5 allerdings irgend eine reine Begriffswahrheit oder Regel geben, nach welcher sich jene aus diesen ableiten lässt in einer Weise, dass es keine zweite Kraft gibt, welche ein gleiches Verhältniss, wie das in der Regel beschriebene, zu jenen andern Kräften hätte. Das Zweite folgt aus §. 32, das Dritte aus §. 46, das Vierte endlich aus §. 37.

§. 48.

Nach §. 33 wird also auch das blosse *Liniensystem*, durch welches eine endliche oder unendliche Menge einander das Gleichgewicht haltender Kräfte in der dort näher angegebenen Weise dargestellt werden kann, folgende vier Beschaffenheiten haben:

1. Jede von diesen Geraden wird sich aus der Gesammtheit der übrigen nach einer allgemein lautenden und aus blossen Begriffen zusammengesetzten Regel bestimmen, und zwar vollständig bestimmen lassen.

2. Und diese Regel wird von jeder *Ordnung*, in welcher wir uns diese Geraden etwa vorstellen mögen, so völlig unabhängig seyn, dass allemal die nämliche Gerade zum Vorschein kommt, welche der übrigen Geraden wir als die erste, die zweite u. s. w. ansetzen mögen.

3. Wenn wir die gegebenen Geraden bis auf Eine als veränderlich betrachten, sie aber nur nach dem Gesetze der Stetigkeit in ihren Richtungen sowohl als Grössen abändern: so wird sich auch die Eine, die durch den Umstand bestimmt wird, dass sie mit jenen ein

System von der hier eben beschriebenen Beschaffenheit bilden soll, nur nach dem Gesetze der Stetigkeit verändern.

4. Wenn endlich irgend ein anderes Liniensystem die hier so eben zu beschreibende Beschaffenheit schon für sich selbst besitzt, so wird es, hinzugefügt zu dem gegebenen, oder falls es ein Theil desselben wäre, davon hinweggenommen, durch diese Hinzufügung oder Wegnahme ein neues Liniensystem erzeugen, welchem die hier in Rede stehende Beschaffenheit abermals zukömmt.

§. 49.

Durch dieses aus so einfachen und gewiss sehr einleuchtenden Vordersätzen gewonnene Ergebniss sehen wir die *mechanische Aufgabe*, das Gesetz des Gleichgewichts zwischen einer jeden endlichen oder unendlichen Menge an einem Atome gleichzeitig angebrachter Kräfte zu finden, zurückgeführt auf eine *rein geometrische Aufgabe*. Es gibt nämlich in der That nur eine einzige Gerade, die aus gegebenen andern durch blosse Begriffe bestimmbar ist in einer Weise, dass dabei alle vier §. 48 angegebenen Bedingungen erfüllet werden. Wird also diese rein geometrische Wahrheit erwiesen, und wird zugleich eine Art, wie die besagte Gerade aus der gegebenen Menge der andern zu bestimmen sey, aufgestellt und ihre Richtigkeit gehörig dargethan: so ist hiemit auch unsere mechanische Aufgabe in ihrer grössten Allgemeinheit gelöst und das *mechanische Gesetz des Gleichgewichts* zwischen jeder beliebigen an einem einzigen Atome angebrachten Menge von Kräften in einer Art erwiesen, die wohl den Namen einer *objectiven Begründung* desselben ansprechen dürfte. Denn es ist nicht zu bezweifeln: wenn gewisse Kräfte einander das Gleichgewicht halten, so liegt der allgemeinste und darum auch der wahre und objective Grund davon nur eben darin, weil sie in einem solchen Verhältnisse zu einander stehen, das den vier oben angegebenen Bedingungen entspricht; und dieses Letztere geschieht wieder nur darum, weil ihre Richtungen und Grössen von einer solchen Art sind, dass die sie vorstellenden Geraden in dem besagten Verhältnisse unter einander stehen. Da aber die geometrische Wahrheit, von der ich hier rede, bisher (so viel ich wüsste) noch nirgends aufgestellt, um so viel weniger erwiesen worden ist: so geziemt es sich wohl, hier auch noch einen Beweis derselben zu versuchen. Auch wenn man diesen nicht ganz befriedigend finden sollte, wird man doch schwerlich die Richtigkeit sowohl als auch die Wichtigkeit des Satzes selbst bezweifeln, und sohin auch ihm das Recht einer Aufnahme in das System der Geometrie füglich nicht abstreiten können. Dann aber wird das Bedürfniss entstehen, für dieses eigenthümliche Verhältniss zwischen Linien auch eine eigene Benennung einzuführen. Sollte ich nun ein Kunstwort vorschlagen: so würde ich, da das Wort *Gleichgewicht* doch allzu unpassend für die Bezeichnung eines rein geometrischen Verhältnisses erscheinen dürfte, den Ausdruck: *Verhältniss des Gegensatzes*, empfehlen; indem ich auf dasjenige verweisen würde, was ich über die Bestandtheile dieses Begriffes und die Nothwendigkeit einer Erweiterung desselben schon an einem andern Orte (in der Wissenschaftslehre §. 107) gesagt.

§. 50.

Den Anfang müssen wir auch hier mit dem einfachsten Falle machen. Es ist derjenige, wo die gegebenen Kräfte, wie gross auch ihre Menge sey, alle in einerlei *gerader Linie* liegen, also nur Eines von Beidem, entweder einerlei oder entgegengesetzte Richtungen haben. Da ein solches Kräftensystem sich nach allen seinen durch reine Begriffe erfassbaren Beschaffenheiten darstellen lässt durch ein System gerader Linien, die alle ausgehend aus demselben Puncte theils in derselben, theils in entgegengesetzten Richtungen liegen; diese aber und deren sämmtliche durch reine Begriffe erfassbare Verhältnisse sich wieder darstellen lassen durch ihre blossen bald als positiv, bald als negativ angenommenen *Grössen* von einer willkürlichen Einheit: so sieht man, dass die geometrische Aufgabe, auf welche wir die uns ursprünglich vorliegende mechanische Aufgabe zurückgeführt haben, in diesem besonderen Falle gleichsam von selbst wieder auf eine blosse *Aufgabe aus der reinen Grössenlehre* führe. Es frägt sich nämlich, was für ein Verhältniss zwischen einer jeden (endlichen oder unendlichen) Menge des Gegensatzes fähiger Grössen obwalten müsse, wenn dabei folgende vier Bedingungen statt finden sollen:

1. wenn jede derselben aus der Gesammtheit der übrigen nach einer allgemeinen und aus blossen Begriffen zusammengesetzten Regel bestimmt werden soll, so zwar, dass die zu Grunde gelegte Einheit dabei ganz willkürlich bleibt;

2. wenn ferner diese Regel von jeder *Ordnung*, in welcher wir uns die Grössen denken, so völlig unabhängig seyn soll, dass immer die nämliche Grösse zum Vorscheine kommt, welche der übrigen Grössen wir als die erste, die zweite u. s. w. betrachten wollen;

3. wenn überdiess, so oft wir die gegebenen Grössen bis auf eine als veränderlich betrachten, jedoch nur nach dem Gesetze der Stetigkeit ändern, auch die Eine, die durch diese übrigen bestimmt wird, sich nur stetig verändere;

4. wenn endlich, so oft irgend ein anderes Grössensystem dieselben hier so eben aufgezählten Beschaffenheiten hat, dieses zu dem gegebenen hinzugefügt, oder falls es ein Theil desselben wäre, davon hinweggenommen werden kann, immer mit dem Erfolge, dass das neue so entstandene Grössensystem die hier beschriebenen Beschaffenheiten abermals an sich hat?

Gibt es ein solches Verhältniss und gibt es nur ein einziges solches Verhältniss: so ist entschieden, dass Kräfte, welche in einerlei oder entgegengesetzten Richtungen liegend, einander das Gleichgewicht halten, nur eben in diesem und sonst keinem anderen Verhältnisse zu einander stehen müssen.

§. 51.

Vor Allem ist also nachzuweisen, dass es ein solches Verhältniss zwischen Grössen, wie §. 50 gefordert wurde, in der That, und zwar bei jeder beliebigen endlichen oder unendlichen Menge derselben gebe. Diess könnten wir nun freilich schon daraus schliessen, weil uns die früheren Betrachtungen (§. 45) gelehrt, dass Kräfte in jeder beliebigen Menge, wenn sie einander noch nicht das Gleichgewicht halten, durch die Hinzufügung nur einer einzigen sehr leicht in ein System von Kräften, die sich das Gleichgewicht halten, verwandelt werden können: allein es ziemt sich nicht, eine Wahrheit der reinen Grössenlehre aus Betrachtungen herleiten zu wollen, die der Mechanik angehören; denn in Verhältnissen, die bloss zwischen *Kräften* statt finden, kann doch der Grund, warum gewisse Verhältnisse zwischen *Grössen überhaupt* obwalten, sicherlich nicht liegen. Wir müssen also beweisen, dass es ein solches Verhältniss, wie das §. 50 beschriebene, gebe, bloss dadurch, dass wir eines, das allen dort geforderten Bestimmungen entspricht, aufführen. Und dazu brauchen wir nicht weit zu suchen; die erste und einfachste Verbindungsart der Grössen, diejenige, deren schon in dem *Begriffe* der Grösse gedacht wird, weil ihre eigenen Theile auf diese Art nur zusammenhangen, die Verbindung zu einer *Summe* bietet uns das Verhältniss, welches wir suchen, dar. Wenn wir nämlich die *Summe* (die algebraische) dieser gegebenen Grössen nehmen, und um ein Verhältniss der Bestimmbarkeit einer jeden durch die übrigen zu erhalten, welches von jeder zu Grunde gelegten Einheit ganz unabhängig wäre, diese Summe der *Null* gleich setzen: so erhalten wir ein Verhältniss zwischen diesen Grössen, das allen vier oben angegebenen Bedingungen auf das Einleuchtendste entspricht. Bezeichnen wir nämlich die gegebenen Grössen von endlicher oder unendlicher Menge durch a, b, c, d, u. s. w., so ist offenbar durch die Bestimmungsgleichung

$$a + b + c + d + \ldots\ldots = 0$$

jede derselben nach einer allgemein lautenden und aus blossen Begriffen zusammengesetzten Regel durch die Gesammtheit der übrigen bestimmt und vollständig bestimmt, so zwar, dass die zu Grunde gelegte Einheit ganz willkürlich bleibt. Denn wenn die Grössen b, c, d u. s. w. alle nur Einen Werth haben, so zeigt die aus der obigen Gleichung sich ergebende

$$a = -(b + c + d + \ldots\ldots)$$

dass auch a nur einen einzigen Werth habe. Und da aus der obigen Gleichung sich auch die folgende

$$\frac{a}{\alpha} = -\left(\frac{b}{\alpha} + \frac{c}{\alpha} + \frac{d}{\alpha} + \ldots\right)$$

für jeden Werth von α, der nur nicht Null ist, ergibt; so zeigt sich, dass die Bestimmung von a aus der Gesammtheit der übrigen Grössen b, c, d,... auch völlig unabhängig ist von der gewählten Einheit.

Eben so offenbar ist, dass die *Ordnung*, in welcher die gegebenen Grössen gedacht werden, auf die Bestimmung einer jeden aus allen übrigen gar keinen Einfluss übe, und dass sich jede nur *stetig* ändere, wenn sich die übrigen alle nur stetig ändern.

Wenn endlich das System der Grössen μ, ν, π . . gleicherweise in diesem Verhältnisse stehet, d. h. wenn

$$\mu + \nu + \pi + \ldots = 0$$

so hat man auch durch Hinzufügung derselben an dem Systeme der Grössen, a, b, c, d,... μ, ν, π... ein System, das in demselben Verhältnisse stehet, weil ja auch

$$a + b + c + d + \ldots\ldots + \mu + \nu + \pi + \ldots\ldots = 0$$

ist; und wenn ein Theil der Grössen $a, b, c, d, \ldots$ z. B. $m, n, p, \ldots$ für sich in diesem Verhältnisse stehet, d. h. wenn

$$m + n + p + \ldots = 0,$$

so hat man auch nach Weglassung dieses Theiles an den übrigen Grössen $a, b, c, d, \ldots l$ $q, r, \ldots$ ein System von demselben Verhältnisse, weil unter dieser Bedingung ja auch

$$a + b + c + d + \ldots + l + q + r + \ldots = 0$$

seyn muss.

§. 52.

Es erübriget somit nur noch zu erweisen, dass dieses Verhältniss einer *Summe gleich Null* das einzige sey, welches den vier Bedingungen entspricht. Diess zu erörtern nehmen wir

1. dieser Grössen zuvörderst nur drei x, y, z an: so muss wegen der *ersten* Bedingung jede dieser Grössen z. B. z durch die beiden andern bestimmt seyn, so dass, wenn x, y nur einen einzigen Werth haben, auch z nur einen einzigen Werth habe; und, wenn das Verhältniss $\frac{y}{x}$ dasselbe verbleibt, darf sich auch das Verhältniss $\frac{z}{x}$ nicht ändern, weil die dem Masse der Grössen x, y, z zu Grunde gelegte Einheit ganz willkürlich bleiben soll. Wir dürfen also

$$\frac{z}{x} = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

schreiben, wo $f\left(\frac{y}{x}\right)$ für jeden Werth der Veränderlichen $\frac{y}{x}$ eine *reale* und *einförmige* Function bezeichnet, um deren nähere Bestimmung es sich noch handelt.

2. Aus der *zweiten* Bedingung folgt durch den Umtausch der x, y

$$\frac{z}{y} = f\left(\frac{x}{y}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (B)$$

Also durch Verbindung von (A) und (B)

$$\frac{y}{x} = \frac{f\left(\frac{y}{x}\right)}{f\left(\frac{x}{y}\right)}$$

oder, wenn wir zur Abkürzung $\frac{y}{x} = u$ schreiben,

$$f u = u \,.\, f\left(\frac{1}{u}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (C)$$

3. Hieraus ergibt sich für $u = -1$,

$$f(-1) = -f(-1),$$

also

$$f(-1) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (D)$$

Da aber für den bestimmten Werth $\frac{y}{x} = -1$ die Gleichung (A) in

$$\frac{z}{x} = f(-1) = 0$$

übergehet, also $z = 0$ wird: so gibt es hier der Grössen eigentlich nicht drei, sondern nur zwei x, y, und es zeigt sich somit, dass das Verhältniss, welches wir verlangen, zwischen zwei Grössen x und y nur statt finden könne, wenn $\frac{y}{x} = -1$, d. h. $x + y = 0$ ist. Für den Fall also, dass der Grössen nur zwei sind, ist das §. 51 angeführte Verhältniss zwischen ihnen in der That das einzig mögliche.

4. Setzen wir $y = 0$, so sind von den drei Grössen x, y, z abermal nur zwei x und z vorhanden, und es muss also nach dem so eben Erwiesenen $\frac{z}{x} = -1$ seyn; also ist, durch Substituirung dieser Werthe in (A)

$$f(0) = -1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (E)$$

5. Vertauschen wir in der Gleichung (A) nicht, wie vorhin, z und y, sondern y und z, weil nach der zweiten Bedingung auch diess erlaubt seyn muss, so wird

$$\frac{y}{x} = f\left(\frac{z}{x}\right) = f\left(f\left(\frac{y}{x}\right)\right)$$

d. i.

$$u = f(f\,u) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (F)$$

6. Da diese Gleichung für jeden Werth von u statt finden, und nach der *dritten* Bedingung stetig seyn muss: so erhalten wir durch Differentiation derselben, wenn wir die erste abgeleitete einer Function f durch f' bezeichnen:

$$1 = f'(f\,u) \,.\, f'\,u$$

Also für $u = -1$, vermöge (D)

$$1 = f'(0) \,.\, f'(-1) \quad \ldots\ldots \quad (G)$$

7. Nehmen wir jetzt der Grösse *vier:* x, y, z, w, welche in dem geforderten Verhältnisse unter einander stehen: so können wir eine derselben, z. B. w, durch Benützung der *vierten* (von uns bisher noch nicht beachteten Bedingung) auf eine doppelte Weise bestimmen. Fügen wir nämlich zu dem Systeme dieser vier Grössen, x, y, z, w noch die zwei einander gleichen und entgegengesetzten r und $-r$ hinzu: so muss, weil diese zwei für sich allein schon in dem verlangten Verhältnisse stehen (nach 3), auch das System der *sechs* Grössen

$$r,\ -r,\ x,\ y,\ z,\ w$$

in dem verlangten Verhältnisse sich befinden. Setzen wir aber, die Grösse r sey gerade so beschaffen, dass sie mit den zweien x, y ein System *dreier* Grössen von dem in Rede stehenden Verhältnisse bildet; d. h. setzen wir

$$\frac{r}{x} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

so können wir x, y, r weglassen, und auch die drei noch übrig bleibenden Grössen $-r$, z, w

oder $-x f\left(\frac{y}{x}\right)$, z, w . . . . (II)

bilden für sich ein System von dem geforderten Verhältnisse. Nehmen wir dagegen die Grösse r so an, dass sie nicht mehr mit x und y, sondern mit x und z ein System dreier Grössen von dem besprochenen Verhältnisse bildet; d. h. nehmen wir

$$\frac{r}{x} = f\left(\frac{z}{x}\right)$$

so können wir x, z, r weglassen, und auch die drei noch übrig bleibenden Grössen $-r$ y, w oder $-x f\left(\frac{z}{x}\right)$, y, w . . . . (I)

bilden für sich ein System von der erwähnten Art. Nach der allgemeinen Formel (A) ergibt sich also aus (II) folgende Gleichung für w

$$w = -x \, . \, f\left(\frac{y}{x}\right) \, . \, f\left(\frac{-z}{x \, . \, f\left(\frac{y}{x}\right)}\right)$$

und aus (I) eben so die Gleichung

$$w = -x \, . \, f\left(\frac{z}{x}\right) \, . \, f\left(\frac{-y}{x \, . \, f\left(\frac{z}{x}\right)}\right)$$

woraus durch Gleichsetzung, wenn wir $\frac{y}{x} = u$ und $\frac{z}{x} = v$ schreiben,

$$f\,u \, . \, f\left(\frac{-v}{f\,u}\right) = f\,v \, . \, f\left(\frac{-u}{f\,v}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (K)$$

oder

$$\frac{f\,u}{f\,v} \, . \, f\left(\frac{-v}{f\,u}\right) = f\left(\frac{-u}{f\,v}\right)$$

8. Die letzte Gleichung gibt durch Differentiation nach v, da u und v ganz unabhängig von einander sind:

$$-\frac{f u}{(f v)^2} f'\,v \, . \, f\left(\frac{-v}{f u}\right) - \frac{f\,u}{f\,v} \, . \, f'\left(\frac{-v}{f u}\right) . \frac{1}{f\,u} = f'\left(\frac{-u}{f v}\right) . \; u \; . \; \frac{f' v}{(f\,v)^2}$$

oder $f'\left(\frac{-u}{f\,v}\right) = \frac{1}{u}\left[-f\,u \, . \, f\left(\frac{-v}{f\,u}\right) - \frac{f\,v}{f'\,v} . f'\left(\frac{-v}{f u}\right)\right]$ . . . . . (L)

9. Aus (C) ist, wenn wir statt des dortigen u schreiben $\frac{-u}{f\,v}$,

$$f\left(\frac{-u}{f v}\right) = -\frac{u}{f\,v} \, . \, f\left(\frac{-f v}{u}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (M)$$

Dieses nach u differenzirt, und mit $-f v$ multiplicirt, gibt:

$$f'\left(\frac{-u}{f v}\right) = f\left(\frac{-f v}{u}\right) + \frac{f\,v}{u} . f'\left(\frac{-f\,v}{u}\right) \quad . \; . \quad (N)$$

Also durch Gleichsetzung von (L) und (N), wenn man mit u multiplicirt:

$$-fu \cdot f\left(\frac{-v}{fu}\right) - \frac{fv}{f'v} \cdot f'\left(\frac{-v}{fu}\right) = u \cdot f\left(\frac{-fv}{u}\right) + fv \cdot f'\left(\frac{-fv}{u}\right) \quad . \qquad \text{(O)}$$

10. Allein aus (M) ist durch Multiplication mit fv

$$fv \cdot f\left(\frac{-u}{fv}\right) = -u \cdot f\left(\frac{-fv}{u}\right)$$

welches verglichen mit (K) gibt:

$$fu \cdot f\left(\frac{-v}{fu}\right) = -u \cdot f\left(\frac{-fv}{u}\right)$$

Also durch Addition zu (O)

$$-\frac{fv}{f'v} \cdot f'\left(\frac{-v}{fu}\right) = fv \cdot f'\left(\frac{-fv}{u}\right)$$

oder

$$-f'\left(\frac{-v}{fu}\right) = f'v \cdot f'\left(\frac{-fv}{u}\right).$$

Setzen wir nun $v = -1$, also nach (D), $fv = 0$, so wird

$$-f'\left(\frac{1}{fu}\right) = f'(-1) \cdot f'(0)$$

Also nach (G)

$$f'\left(\frac{1}{fu}\right) = -1.$$

11. Da diese Gleichung für jeden Werth von u gilt, so können wir statt $\frac{1}{fu}$ auch u selbst schreiben, und erhalten somit

$$f'u = -1,$$

woraus durch Integrirung

$$fu = C - u$$

12. Die Constante C zu bestimmen, bedarf es nur der Erinnerung, dass für $u = 0$, $fu = -1$ werde. Also ist

$$fu = -1 - u$$

d. h. wenn es der Grössen, welche in dem hier zu bestimmenden Verhältnisse zu einander stehen, *drei* x, y, z gibt: so besteht unter ihnen kein anderes Verhältniss als

$$\frac{z}{x} = -1 - \frac{y}{x}$$

oder

$$x + y + z = 0.$$

13. Somit bestätiget sich das *Gesetz, dass die Summe unserer Grössen immer* $= 0$ *seyn müsse,* für die zwei Fälle, wo ihre Anzahl zwei oder drei ist. Gilt aber diess Gesetz für eine bestimmte Zahl n: so gilt es auch noch für die nächstgrössere $n+1$. Denn sind $a, b, c, \ldots x, y, z$ eine Anzahl von $(n+1)$ Grössen, und es gibt eine Grösse r, welche mit den $(n-1)$ Grössen

$a, b, c, \ldots x$ ein System von n Grössen bildet, die in dem hier besprochenen Verhältnisse unter einander stehen: so muss, weil für n Grössen unser Gesetz noch gelten soll,

$$a + b + c + \ldots + x + r = 0$$

seyn. Wenn aber die $(n + 1)$ Grössen

$$a, b, c, \ldots x, y, z$$

ein System von der verlangten Beschaffenheit bilden: so müssen auch die $(n + 3)$ Grössen

$$a, b, c, \ldots x, y, z, r, -r$$

ein System dieser Beschaffenheit bilden; weil die hinzugefügten zwei r und $-r$ für sich gleichfalls ein solches System bilden. Da jedoch, wie schon gesagt, auch die n Grössen $a, b, c, \ldots x, r$ ein System dieser Art darstellen, so können wir sie weglassen, und die noch übrig bleibenden drei Grössen

$$y, z, -r$$

müssen abermal ein solches System liefern. Daher muss

$$y + z - r = 0$$

seyn. Diess zu der obigen Gleichung addirt, gibt

$$a + b + c + \ldots + x + y + z = 0$$

d. h. das angegebene Gesetz gilt auch für $(n + 1)$ Grössen.

14. Somit gilt unser Gesetz, da es für $n = 2$ und $n = 3$ gilt, nach einer bekannten Schlussweise, für jede beliebige Anzahl von Grössen. Dass es aber auch für jede *unendliche* Menge gelte, glaube ich so darthun zu können.

Es bezeichne uns

$$a, b, c, \ldots l, m, n, \ldots z$$

jetzt eine unendliche Menge von Grössen, welche ein solches Verhältniss zu einander haben, dass sie den bekannten vier Bedingungen entsprechen. Somit muss jede derselben z. B. a bestimmbar seyn durch die Gesammtheit der übrigen, so dass man die Gleichung ansetzen darf:

$$a = F(b, c, \ldots l, m, n, \ldots z)$$

worin F eine einförmige Function bezeichnet, in welcher die sämmtlichen gegebenen Grössen mit Ausnahme der einzigen a erscheinen. Vermöge der *vierten* Bedingung aber muss das besagte Verhältniss, sofern es zwischen den Grössen

$$a, b, c, \ldots l, m, n, \ldots z$$

bestehet, auch zwischen demjenigen Inbegriffe von Grössen, welcher zum Vorscheine kommt, wenn wir zu jenen noch die drei Grössen

$$(a + m), -a, -m$$

hinzuthun, also zwischen den Grössen

$$(a + m), a, -a, b, c, \ldots l, m, -m, n, \ldots . z$$

bestehen; weil jene drei hinzugekommenen nach dem bereits Erwiesenen selbst mit einander in dem besagten Verhältnisse stehen. Da aber eben diess auch von den zwei Grössen a und $-a$, und von den zweien $m, -m$ gilt: so können wir vermöge derselben Bedingung diese auch weglassen, und das in Rede stehende Verhältniss muss auch bestehen zwischen den Grössen

$$(a + m), b, c, \ldots l, n, \ldots z$$

so dass wir also auch die Gleichung

$$a + m = F(b, c, \ldots l, n, \ldots z)$$

haben müssen, wo die Grösse m, welche zu a addirt ist, in der Function F herausgefallen ist. Was wir so eben von der Grösse m bewiesen, dass sie nämlich aus dem Inbegriffe der Grössen, welche die Function F enthält, weggelassen werden könne, wenn wir statt dessen sie mit der Grösse a durch (algebraische) Addition vereinen, das gilt von *allen* in F erscheinenden Grössen, und gilt von *allen zugleich,* ihre Menge sey, welche sie wolle, eine endliche oder unendliche, weil keine derselben die andere wie das nachfolgende Glied einer Reihe die vorhergehenden voraussetzt, da sie nicht etwa zu einer Reihe, sondern zu einer *Summe* mit a verbunden werden sollen; der Begriff einer Summe aber gerade der ist, dass deren Theile in keiner Rangordnung auftreten. Versetzen wir aber die sämmtlichen in der Function

$$F(b, c, \ldots l, m, n, \ldots z)$$

befindlichen Grössen in das Glied linker Hand der Gleichung: so übergehet der Werth dieser Function in Null, weil der Fall, wo gar keine Grössen vorhanden sind, gleichgeltend ist mit dem, wo diese Grössen in dem gesuchten Verhältnisse stehen: somit erhalten wir durch Übertragung der sämmtlichen gegebenen Grössen auf die Eine Seite die Gleichung

$$a + b + c + \ldots + l + m + n + \ldots + z = 0$$

wodurch sich die Gültigkeit unsers Gesetzes auch für den Fall einer unendlichen Menge von Grössen darthut.

§. 53.

Es käme mir vor, als ob ich mich mit fremden Federn schmücken wollte, würde ich nicht erwähnen, dass ich die Reihe von Schlüssen, durch welche die Natur der Function fu im vorigen §. in den Nummern 7 — 12 bestimmt wird, nicht meinem eigenen Nachdenken, sondern der Hülfe eines meiner ehemaligen Schüler, des Herrn *Anton Ritter von Slivitz* verdanke. Ich kann diess um so weniger verschweigen, je mehr ich es für meine Pflicht erachte, diese Gelegenheit zu benützen, um auf einen vaterländischen Gelehrten von so seltenen Talenten und so vielseitiger Ausbildung aufmerksam zu machen, und die Hoffnung auszusprechen, dass derselbe bei den ihm zu Gebote stehenden Mitteln vielleicht nur einiger Aufmunterung von Seite unserer Gesellschaft bedürfte, um zu einer fruchtbringenden Thätigkeit in mehr als einem wissenschaftlichen Fache angereget zu werden. In dem vorliegenden Falle genügte es meinem scharfsinnigen Freunde noch nicht, erwiesen zu haben, dass die im vorigen §. angewandten Bedingungsgleichungen die Function fu bestimmen, sondern er setzte sich auch noch die fernere Aufgabe, zu zeigen, dass keine derselben *entbehret* werden könne. Zu diesem Zwecke bewies er, dass selbst die letzte (K), welche man als die zusammengesetzteste am ehesten noch für zulänglich zur völligen Bestimmung der fu erachten möchte, in der That eine *allgemeinere Form* gebe. Es sey mir erlaubt, seine Rechnung, da sie zur Vervollständigung des wissenschaftlichen Beweises der hier in Rede stehenden analytischen Wahrheit wesentlich gehöret, mitzutheilen.

Die Bedingungsgleichung

$$fu \cdot f\left(\frac{-v}{fu}\right) = fv \cdot f\left(\frac{-u}{fv}\right) \quad \ldots \ldots \quad (K)$$

gibt
$$f\left(\frac{-u}{fv}\right)=\frac{fu}{fv}\cdot f\left(\frac{-v}{fu}\right),$$
welches durch Differenzirung nach u und v, wenn wir hinterher noch beziehungsweise mit fv und $-\frac{(fv)^2}{f'v}$ multipliciren,
$$-f'\left(\frac{-u}{fv}\right)=f'u\left[f\left(\frac{-v}{fu}\right)+\frac{v}{fu}\cdot f'\left(\frac{-v}{fu}\right)\right]\quad .\quad .\quad .\quad (a)$$
$$-u\cdot f'\left(\frac{-u}{fv}\right)=fu\cdot f\left(\frac{-v}{fu}\right)+\frac{fv}{f'v}\cdot f'\left(\frac{-v}{fu}\right)\quad .\quad .\quad .\quad (b)$$
$$\text{oder } fu\cdot f\left(\frac{-v}{fu}\right)=-u\cdot f'\left(\frac{-u}{fv}\right)-\frac{fv}{f'v}\cdot f'\left(\frac{-v}{fu}\right)$$
und durch Vertauschung von u und v
$$fv\cdot f\left(\frac{-u}{fv}\right)=-v\cdot f'\left(\frac{-v}{fu}\right)-\frac{fu}{f'u}\cdot f'\left(\frac{-u}{fv}\right)$$
gibt. Diese zwei letzten Gleichungen geben, verglichen mit (K),
$$u\cdot f'\left(\frac{-u}{fv}\right)+\frac{fv}{f'v}\cdot f'\left(\frac{-v}{fu}\right)=v\cdot f'\left(\frac{-v}{fu}\right)+\frac{fu}{f'u}\cdot f'\left(\frac{-u}{fv}\right)$$
$$\text{oder } f'\left(\frac{-u}{fv}\right)\cdot f'v\cdot[fu-uf'u]=f'\left(\frac{-v}{fu}\right)\cdot f'u\cdot[fv-vf'v]\quad .\quad .\quad (c)$$
Aus (a) und (b) erhalten wir für den besondern Fall $v=fu$,
$$-f'\left(\frac{-u}{f(fu)}\right)=f'u\cdot[f(-1)+f'(-1)]\quad .\quad .\quad .\quad .\quad (d)$$
$$-u\cdot f'\left(\frac{-u}{f(fu)}\right)=fu\cdot f(-1)+\frac{f(fu)}{f'(fu)}\cdot f'(-1)\quad .\quad .\quad .\quad (e)$$
Also, wenn wir den Werth von $-f'\left(\frac{-u}{f(fu)}\right)$ aus (d) in (e) substituiren:
$$uf'u=\frac{fu\cdot f(-1)+\frac{f(fu)}{f'(fu)}\cdot f'(-1)}{f(-1)+f'(-1)}\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad (f)$$
Aus (c) ist
$$fu-uf'u=\frac{f'\left(\frac{-v}{fu}\right)\cdot f'u\cdot[fv-vf'v]}{f'\left(\frac{-u}{fv}\right)\cdot f'v}$$
und wenn wir für $\frac{f'u}{f'\left(\frac{-u}{fv}\right)}$ den Werth aus (a) substituiren:
$$fu-uf'u=-\frac{f'\left(\frac{-v}{fu}\right)\cdot[fv-vf'v]}{f'v\left[f\left(\frac{-v}{fu}\right)+\frac{v}{fu}\cdot f'\left(\frac{-v}{fu}\right)\right]},$$

und wenn wir im linken Gliede den Werth für $uf'u$ aus (f) substituiren:

$$fu - \frac{fu.f(-1)+\frac{f(fu)}{f'(fu)}.f'(-1)}{f(-1)+f'(-1)} = -\frac{f'\left(\frac{-v}{fu}\right)[fv-v.f'v]}{f'v\left[f\left(\frac{-v}{fu}\right)+\frac{v}{fu}.f'\left(\frac{-v}{fu}\right)\right]}$$

oder, wenn wir zur Abkürzung $fu = \vartheta$, und $v = \vartheta\chi$ schreiben, nach einigen Reductionen:

$$\frac{[f\vartheta - \vartheta f'\vartheta]}{f'\vartheta}\,\frac{[f(-\chi)+\chi.f'(-\chi)]}{f'(-\chi)} = \frac{[f(\vartheta\chi)-\vartheta\chi.f'(\vartheta\chi)}{f'(\vartheta\chi)}\cdot\frac{f(-1)+f'(-1)}{f'(-1)}$$

und wenn wir die Function

$$\frac{f\vartheta-\vartheta.f'\vartheta}{f'\vartheta}=\varphi\vartheta$$

setzen, somit $\frac{f(\vartheta\chi)-\vartheta\chi f'(\vartheta\chi)}{f'(\vartheta\chi)}=\varphi(\vartheta\chi)$,

$$\frac{f(-\chi)+\chi.f'(-\chi)}{f(-\chi)}=\varphi(-\chi),$$

und endlich

$$\frac{f(-1)+f'(-1)}{f'(-1)} = \varphi(-1)$$

schreiben :

$$\varphi\vartheta.\varphi(-\chi)=\varphi(-1).\varphi(\vartheta\chi)$$

Diese Gleichung nach ϑ und χ differenzirt, gibt beziehungsweise:

$$\varphi'\vartheta.\varphi(-\chi)=\varphi(-1).\ \chi.\varphi'(\vartheta\chi)$$

$$-\varphi\vartheta.\varphi'(-\chi)=(\varphi-1).\vartheta.\varphi'(\vartheta\chi)$$

daher durch Division:

$$\frac{\varphi'\vartheta}{\varphi\vartheta}=-\frac{\chi}{\vartheta}\cdot\frac{\varphi'(-\chi)}{\varphi(-\chi)}$$

welches nach ϑ integrirt, während wir χ als unverändert betrachten:

$$\log.\varphi\vartheta=C-\frac{\chi\varphi'(-\chi)}{\varphi(-\chi)}.\log.\vartheta$$

gibt. Für $\vartheta=1$ findet sich die Constante

$$C=\log.\ \varphi(1)$$

also, wenn wir die von ϑ unabhängige Grösse $\frac{-\chi.\varphi'(-\chi)}{\varphi(-\chi}$ zur Abkürzung durch m, und $\varphi\ (1)$ durch a bezeichnen; und von den Logarithmen zu den Zahlen übergehen:

$$\varphi\vartheta=a.\vartheta^{m}$$

Aber aus (a) ist für $v=u$

$$-f'\left(\frac{-u}{fu}\right)=f'u\left[f\left(\frac{-u}{fu}\right)+\frac{u}{fu}.f'\left(\frac{-u}{fu}\right)\right]$$

also $$\frac{f\left(\frac{-u}{fu}\right)+\frac{u}{fu}.f'\left(\frac{-u}{fu}\right)}{f'\left(\frac{-u}{fu}\right)}=-\frac{1}{f'u}=\varphi\left(\frac{-u}{fu}\right)=a\left(\frac{-u}{fu}\right)^{m}$$

und $$f'u=-\frac{1}{a}.\left(\frac{fu}{-u}\right)^{m}$$

$$\text{Da nun } \frac{fu - uf'u}{f'u} = \varphi u = a.u^m$$

$$\text{somit } \quad fu = [u + a.u^m] f'u$$

so ist durch Substitution des vorigen Werthes von $f'u$ in diese Gleichung:

$$fu = -[u + a u^m] . \frac{1}{a} . \frac{(fu)^m}{(-u)^m}$$

woraus sich endlich

$$fu = \sqrt[1-m]{\frac{-a - u^{1-m}}{(-1)^m . a}}$$

findet. Diess also ist die allgemeine Form der Function fu, sofern sie aus der einzigen Bedingungsgleichung (K) bestimmt werden soll; und man kann sich leicht auch auf directem Wege davon überzeugen, dass diese Form der Gleichung genug thue.

§. 54.

Wir hätten somit den allgemeinen, zur reinen Grössenlehre gehörigen, und auch in mancher andern Beziehung ausser der gegenwärtigen nicht unwichtigen Lehrsatz erwiesen, dass es nur ein einziges Verhältniss des *Gegensatzes* in der §. 49 erwähnten weiteren Bedeutung, d. h. nur ein einziges Verhältniss unter Grössen gebe, das den vier angedeuteten Bedingungen entspricht, nämlich dasjenige, *wobei die* (algebraische) *Summe derselben* = 0 ist. Wenn somit eine endliche oder auch unendliche Menge von Kräften, welche in einerlei gerader *Linie liegend* an Einem Atome angebracht sind, einander das Gleichgewicht halten sollen: so muss ihre algebraische Summe = 0 seyn, und umgekehrt, so oft dieses ist, halten diese Kräfte einander das Gleichgewicht. Um nun den allgemeinen Fall, wenn die auf den Atom wirkenden Kräfte unter was immer für Winkeln mit einander verbunden sind, zu erledigen, haben wir nur die §. 49 bereits ausgesprochene *rein geometrische Aufgabe* zu lösen, d. h. darzuthun, dass zu jeder endlichen oder unendlichen Menge aus einem Puncte ausgehender Geraden, die nicht schon selbst in dem Verhältnisse des Gegensatzes stehen, eine und nur einzige andere Gerade hinzugefügt werden könne, um ein System zu bilden, welches in diesem Verhältnisse stehet. Hiezu ist wieder nöthig, zuerst zu zeigen, dass es mindestens *Eine* Regel gebe, nach welcher sich aus gegebenen Geraden eine andere ableiten lässt in einer solchen Weise, dass die vier Bedingungen eintreten. Diess ist nun gar nicht schwer; denn jeder Geometer wird, ohne dass wir es ihm erst zu beweisen brauchen, einsehen, dass den in Rede stehenden vier Bedingungen entsprochen werde durch ein jedes System von Geraden, welches die Eigenschaft hat, dass wenn wir aus dem Puncte, aus welchem diese Geraden ausgehen, eine Richtung ganz willkürlich annehmen, und auf dieselbe (als eine Achse betrachtet) Lothe (oder Ordinaten) aus den Endpuncten der gegebenen Geraden fällen, die algebraische Summe der ihnen zugehörigen Abscissen oder *Projectionen* immer = 0 sey. Ein Geometer wird wissen, dass ein System von Geraden die besagte Eigenschaft hat, sobald nur *drei* nicht in Einer Ebene liegende Achsen angeblich sind, bei denen die Summe der sämmtlichen den gegebenen Geraden zugehörigen Projectionen = 0 ist. Da die Beweise, wodurch diess Beides dargethan werden kann, etwas weitläufig sind, und gleichwohl auf sehr bekannte Art (durch Hilfe der so genannten sphärischen Trigonometrie) geführt werden können, so darf ich mich ihres Vortrags hier wohl füglich überheben. Für den besonderen Fall, wenn das System nur aus *drei* Geraden bestehet, wie zur Begründung des Lehrsatzes vom *Kräftenparallelogramme* hinreicht, ist der Beweis vollends so elementarisch, dass ihn ein jeder Anfänger trifft.

§. 55.

Haben wir aber erst dargethan, dass es wenigstens *Eine* Regel gebe, nach welcher sich aus jeder gegebenen Menge von Geraden, wenn sie nicht selbst schon ein System, welches den vier Bedingungen genugthut, bilden, durch blosse Hinzufügung noch einer neuen Geraden, ein solches System erzeugen lasse: dann erübriget noch zu beweisen, dass es nicht mehrere, sondern bloss eine *einzige* solche Gerade gebe. Und diess erweiset sich einfach durch folgende Betrachtung:

1. Wenn eine endliche oder unendliche Menge aus einerlei Puncte o hervorgehender Geraden

$$A, B, C, \ldots\ldots Z$$

ein System bildet, welches die vier bewussten Bedingungen erfüllt; und wir wählen ganz beliebig drei nicht in derselben Ebene liegende, aus o hervorgehende Achsen I, II, III, auf welche wir aus dem Endpuncte jeder Geraden Lothe herabfällen: so sind die Einfallspuncte dieser Lothe, und somit auch die auf diesen Achsen liegenden Abscissen (die *Projectionen* dieser Geraden) durch die gegebenen Geraden und durch die willkürlich angenommene Lage der Achsen bestimmt; und umgekehrt sind, wenn diese drei Achsen uns gegeben werden, durch die auf sie bezogenen Projectionen der Geraden diese Geraden selbst bestimmt. Legen wir nämlich durch den Endpunct einer solchen Projection eine Ebene senkrecht auf ihre Achse: so ist offenbar, dass der Endpunct der Geraden, der diese Projection zugehört, in dieser Ebene liege. Thun wir dasselbe mit der Projection, die diesem Puncte auf der zweiten Achse gehört; so muss dieser Punct in der Durchschnittslinie der beiden Ebenen liegen. Verfahren wir eben so auch bei der dritten Achse, so ist der Punct, in welchem die erwähnte Durchschnittslinie die dritte Ebene schneidet (d. h. der Punct, der allen drei Ebenen gemein ist) der gesuchte Endpunct der zu bestimmenden Geraden. Bezeichnen wir also die zu der Geraden A gehörigen Projectionen auf die erste, zweite und dritte Achse beziehungsweise durch a^1, a^2, a^3; und eben so die zu der Geraden B gehörigen durch b^1, b^2, b^3; u. s. w.: so wird es, weil jede der Geraden

$$A, B, C, \ldots\ldots\ldots\ldots Z$$

z. B. A nach einer allgemeinen, aus blossen Begriffen zusammengesetzten Regel bestimmbar ist aus der Gesammtheit der übrigen

$$B, C \ldots Z$$

auch möglich seyn, die drei zu dieser Geraden gehörigen Abscissen a^1, a^2, a^3 nach einer allgemeinen aus blossen Begriffen zusammengesetzten Regel zu bestimmen, aus der Gesammtheit der den übrigen Geraden zugehörigen Projectionen

$$b^1, b^2, b^3;\ c^1, c^2, c^3;\ \ldots\ z^1, z^2, z^3$$

sofern nur die Lage der drei Achsen I, II, III auch noch gegeben wird. Weil aber die Achse I jede beliebige Lage erhalten kann, so können auch die auf sie bezogenen Projectionen der gegebenen Geraden

$$A, B, C, \ldots\ldots Z$$

d. h. die Grössen

$$a^1, b^1, c^1, \ldots\ldots z^1$$

alle beliebige, nur innerhalb gewisser Grenzen gelegene Werthe annehmen. Weil ferner bei einer schon festgesetzten Lage der Achse I auch die Achse II noch jede beliebige, nur eben nicht die der I entgegengesetzte Lage annehmen kann: so können bei einerlei

$$a^1, b^1, c^1, \ldots\ldots z^1$$

noch die Grössen $a^2, b^2, c^2, \ldots\ldots z^2$

alle beliebige, nur gewisse Grenzen nicht überschreitende Werthe bekommen. Und weil endlich auch, wenn I und II schon festgesetzt sind, noch der Achse III jede beliebige Lage ertheilt werden kann, es sey denn nur nicht in der Ebene der I und II: so folgt, dass auch bei einerlei $a^1, b^1, c^1, \ldots\ldots z^1$

und $a^2, b^2, c^2, \ldots\ldots z^2$

noch die Grössen

$$a^3, b^3, c^3 \ldots\ldots z^3$$

alle beliebige innerhalb gewisser Grenzen eingeschlossene Werthe annehmen können. Hieraus ergibt sich nun, dass die Grösse a^1 abhängig sey nur von der endlichen oder unendlichen Menge der Grössen

$$b^1, c^1, \ldots z^1$$

keineswegs aber von den Grössen

$$b^2, c^2, \ldots z^2$$

noch von den Grössen $b^3, c^3, \ldots z^3$

und dass eben so die Grösse a^2 nur aus den Grössen:

$$b^2, c^2, \ldots z^2$$

und die Grösse a^3 nur aus den Grössen

$$b^3, c^3, \ldots z^3$$

bestimmbar seyn müsse, und diess Alles immer mittelst einer allgemeinen aus blossen Begriffen zusammengesetzten Regel, sofern nur nebst den Geraden

$$B, C, \ldots Z$$

noch die drei Achsen I, II, III gegeben sind. Da nun, was von den Grössen a^1, a^2, a^3 so eben gesagt worden ist, auch von den Grössen b^1, b^2, b^3; c^1, c^2, c^3 u. s. w. gilt: so stellen die drei Inbegriffe von Grössen

$$a^1, b^1, c^1, \ldots\ldots z^1;$$
$$a^2, b^2, c^2, \ldots\ldots z^2;$$
$$a^3, b^3, c^3, \ldots\ldots z^3;$$

Systeme vor, denen die erste der drei Bedingungen, die zum Verhältnisse des Gegensatzes gehören, ohne Zweifel zukömmt.

2. Weil ferner das Gesetz, nach welchem eine jede der Geraden

$$A, B, C, \ldots Z$$

aus der Gesammtheit der übrigen ableitbar ist, eine solche Beschaffenheit hat, dass die Ordnung, in der wir uns die letzteren denken, auf die Bestimmung der ersteren gar keinen Einfluss ausübt: so muss eben diess auch von der Bestimmung der Grösse a^1 durch die Grössen $b^1, c^1, \ldots z^1$, und der Grösse a^2 durch die Grössen: $b^2, c^2, \ldots z^2$, und endlich der Grösse a^3 durch die Grössen: $b^3, c^3, \ldots z^3$ gelten.

3. Weil überdiess, wenn wir die Grössen

$$B, C, \ldots Z$$

nur nach dem Gesetze der Stetigkeit ändern, auch A sich nur nach dem Gesetze der Stetigkeit ändert; so darf auch, wenn sich die Grössen

$$b^1, c^1, \ldots z^1$$

nur nach dem Gesetze der Stetigkeit ändern, die a^1 sich nur nach dem Gesetze der Stetigkeit ändern; und eben dasselbe gilt von dem Verhältnisse der

$$b^2, c^2, \ldots z^2$$

zu a^2, und der $b^3, c^3, \ldots z^3$ zu a^3.

4. Also bilden die Grössen: $a^1, b^1, c^1, \ldots z$
und eben so auch die Grössen: $a^2, b^2, c^2, \ldots z^2$
und endlich die Grössen: $a^3, b^3, c^3, \ldots z^3$
Systeme von Grössen, welche die ersten drei Bedingungen eines Systems von Dingen, die zu einander in dem Verhältnisse des Gegensatzes stehen, erfüllen. Ist aber dieses, so folgt, dass denselben auch die vierte Eigenschaft eines solchen Systemes nicht mangelt. Denn weil die Geraden $A, B, C, \ldots Z$
ein solches System sind, so können wir jede beliebige andere Menge von Geraden

$$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$$

welche ein solches System untereinander bilden, zu ihnen hinzuthun, oder (falls sie unter ihnen enthalten sind) sie daraus weglassen, immer mit dem Erfolge, dass das neue so zum Vorschein kommende System abermals ein System des Gegensatzes seyn wird. Bezeichnen wir also durch

$$\mathfrak{a}^1, \mathfrak{b}^1, \mathfrak{c}^1, \ldots$$
$$\mathfrak{a}^2, \mathfrak{b}^2, \mathfrak{c}^2, \ldots$$
$$\mathfrak{a}^3, \mathfrak{b}^3, \mathfrak{c}^3, \ldots$$

die den Geraden $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$
entsprechenden Abscissengrössen bei den nämlichen Achsen I, II, III, welche bei dem Systeme der Geraden $A, B, C, \ldots Z$
zu Grunde gelegt wurden; so entsprechen auch jene drei Systeme von Grössen den ersten drei Bedingungen eines Verhältnisses des Gegensatzes, und somit gilt diess auch von den Gruppen, welche zum Vorscheine kommen, wenn wir dieselben zu den Gruppen:

$$a^1, b^1, c^1, \ldots z^1$$
$$a^2, b^2, c^2, \ldots z^2$$
$$a^3, b^3, c^3, \ldots z^3$$

beziehungsweise hinzuthun, oder nach Umständen davon wegnehmen. Sonach erfüllt sich bei diesen Systemen auch die vierte zu einem Verhältnisse des echten Gegensatzes erforderliche Bedingung, und es bestehen somit die Gleichungen

$$a^1 + b^1 + c^1 + \ldots + z^1 = 0$$
$$a^2 + b^2 + c^2 + \ldots + z^2 = 0$$
$$a^3 + b^3 + c^3 + \ldots + z^3 = 0$$

d. h. das Gesetz, welches wir oben angegeben haben, ist in der That ein solches, das zwischen den Geraden $A, B, C, \ldots Z$ folglich auch zwischen allen Kräften, welche einander das Gleichgewicht halten sollen, jedesmal statt finden muss. Wir haben somit die uns gesetzte Aufgabe, zu einer jeden gegebenen endlichen oder unendlichen Menge an einerlei Atome angebrachter Kräfte eine einzelne, die ihnen allen gleichgilt, zu finden, so ferne sie einander nicht für sich selbst schon das Gleichgewicht halten (als in welchem Falle die *resultirende* $= 0$ ist) gelöst. Man wähle beliebig drei aus dem gegebenen Atome ausgehende, nicht in derselben Ebene gelegene, also z. B. drei auf einander senkrechte Richtungen, oder (wenn man diess vorzieht) drei nicht in einerlei Ebene liegende Richtungen der gegebenen Kräfte selbst zu Achsen, auf welche man Lothe aus den Endpuncten aller derjenigen Geraden fällt, die uns die Richtungen und die verhältnissmässigen Grössen der gegebenen Kräfte vorstellen. Ist die (algebraische) Summe der durch diese Lothe gebildeten Abscissen auf der einen oder der anderen dieser Achsen $= 0$, so betrachte man diess als ein Zeichen, dass der Endpunct der Geraden, welche uns die gesuchte *Resultirende* darstellen soll, in einer durch den gegebenen Atom selbst auf diese Achse senkrecht gesetzten Ebene liege, und dass diese Resultirende somit $= 0$ sey, wenn dieser Fall bei allen drei Achsen eintritt. Ist diese Summe nicht Null, so setze man die senkrechte Ebene auf die Achse durch den Endpunct der Abscisse, die dieser Summe gleich ist. Die drei nach solcher Vorschrift gesetzten Ebenen werden sich jedesmal in einem und nur einem einzigen Puncte schneiden, und dieser ist der Endpunct der Geraden, durch welche die verlangte mittlere Kraft dargestellt wird. In dem besondern Falle, wenn die gegebenen Kräfte alle in einerlei Ebene liegen, ist es, wie sich von selbst begreift, nicht nöthig, drei in verschiedener Ebene liegende Achsen zu wählen, sondern zwei in der Ebene der Kräfte selbst gelegene genügen, und statt der auf diese Achsen senkrecht gesetzten Ebenen genügen blosse Lothe, die in derselben Ebene auf ihr errichtet werden. Wenn also — um mit diesem einfachsten Beispiele des *Kräfteparallelogramms* zu schliessen, — bloss *zwei* Kräfte oa, ob gegeben sind: so wird die aus ihnen entspringende mittlere gefunden, wenn wir aus b ein Loth $b\beta$ auf die Richtung der oa, und aus a ein Loth $a\alpha$ auf die Richtung der ob fällen; auf der Achse oa eine Abscisse op, gleich der algebraischen Summe der beiden oa und $o\beta$, auf der Achse ob aber eben so eine Abscisse oq, gleich der algebraischen Summe der beiden ob und $o\alpha$ nehmen; worauf sich denn die aus den Puncten p, q auf op, oq errichteten Lothe in einem Puncte c schneiden, der die verlangte Richtung und Grösse der mittleren Kraft durch die zu ihm gezogene Gerade oc angibt. Die Uebereinstimmung dieser Construction mit jener durch das Parallelogramm brauchen wir nicht erst nachzuweisen.