§ 1

Jistě většina paradoxních tvrzení, s nimiž se setkáváme v oblasti matematiky, i když to nejsou všechna, jak soudí Kästner, jsou věty, které buď přímo obsahují pojem nekonečna, nebo se o něj nějakým způsobem opírají, pokusíme-li se o jejich důkaz. Ještě méně sporné je to, že k tomuto druhu patří ty matematické paradoxy, které zaslouží naší největší pozornosti, protože rozhodnutí neobyčejně důležitých otázek mnohých jiných věd, jako fyziky a metafyziky, závisí na uspokojivém vyvrácení jejich zdánlivého sporu.

A právě to je důvod, proč se v tomto pojednání zabývám výhradně jen úvahami o paradoxech nekonečna. Nebylo by však možné, jak sami uznáme, rozpoznat zdánlivý spor, který na těchto paradoxech lpí, jako pouhé zdání, kterým ve skutečnosti je, kdybychom si především neozřejmili, který pojem spojujeme s nekonečnem. To tedy předešleme.

§ 2

Již slovo samo říká, že nekonečné stavím proti všemu, co je pouze konečné. A okolnost, že název prvého odvozujeme z názvu druhého, prozrazuje mimo to, že si myslíme pojem nekonečna jako takový pojem, který vzniká z pojmu konečna teprve připojením nové součásti (jako je již sám pojem negace). Že posléze jsou oba pojmy aplikovány na množiny, či lépe na množství (tj. na množiny jednotek) a tím také na veličiny, nedá se popírat již proto, že je to právě matematika, tj. nauka o veličinách, kde nejčastěji o nekonečnu mluvíme, když bereme za předmět svých úvah — a dokonce výpočtu — jak množství konečná, tak nekonečná a vedle konečných veličin též nejen nekonečně velké, ale i nekonečně malé.

Aniž bychom již předpokládali, že ony oba pojmy (totiž konečna a nekonečna) se dají stále aplikovat jenom na předměty, u nichž se dá z nějakého hlediska prokázat velikost a množství, smíme doufat, že podrobnější zkoumání otázky, za jakých okolností prohlašujeme nějakou množinu za konečnou nebo nekonečnou, nám poskytne objasnění toho, co je nekonečno vůbec.

§ 3

K tomu cíli se však musíme vrátit až k jednomu z nejjednodušších pojmů našeho rozumu, abychom se nejprve dorozuměli o slovu, kterého chceme užít k jeho označení. Je to pojem, který je základem spojky *a*, avšak má-li tak zřetelně vystoupit, jak to vyžadují v nesčetných případech účely matematické právě tak jako filosofické, mohu jej vyjádřit nejvhodněji, jak jsem přesvědčen, slovy: souhrn určitých věcí nebo celek složený z určitých částí, stanovíme-li totiž, že hodláme tato slova pojímat v tak širokém významu, aby bylo možno tvrdit, že ve všech větách, kde obvykle užíváme spojky a, tedy například právě v těchto: „slunce, země a měsíc — na sebe navzájem působí"; „růže a pojem růže — je dvojice velmi rozličných věcí"; „pojmenování Sokrates a Sophronisků syn — označují tutéž osobu" — je předmět, o němž v těchto větách mluvíme, určitým souhrnem věcí, z určitých částí složeným celkem: v první větě totiž je to onen celek, který spolu tvoří slunce, země a měsíc, o kterém vypovídáme, že je celkem, jehož části na sebe navzájem působí; ve druhé větě je to souhrn, který spolu vytvářejí dva předměty „růže a pojem růže", o nichž soudíme, že jsou dvěma velmi různými věcmi atd. Již toto samo by mohlo stačit k tomu, abychom porozuměli pojmu, o němž tu mluvíme, jestliže jen pro všechny případy připojíme, že jakýkoli předmět A s jakýmikoli jinými B, C, D, ... může být spojen v souhrn, nebo (ještě správněji vyjádřeno) je sám o sobě již souhrnem, o němž lze vypovídat mnohé závažnější i méně závažné pravdy, pokud jen každá z představ A, B, C, D, ... představuje vskutku jiný předmět, nebo pokud není pravdivá žádná z vět: A je totožné s B, A je totožné s C, B je totožné s C atd. Neboť je-li například A toutéž věcí jako B, nemá ovšem smysl hovořit o souhrnu věcí A a B.

§ 4

Existují souhrny, které sice obsahují tytéž části A, B, C, D . . ., avšak jeví se být přesto různé (nazývám je podstatně různé) podle hlediska (pojmu), ze kterého o nich právě uvažujeme, například celá sklenice a sklenice na kusy rozbitá, pojímaná jako nádobka na pití. To, na čem je založen tento rozdíl takových souhrnů, nazývám způsob spojení nebo uspořádáni jejich částí. Souhrn, který podřídíme takovému pojmu, vzhledem k němuž je uspořádání částí souhrnu lhostejné (na němž se tedy nic pro nás podstatného nemění, mění-li se pouze uspořádání) jmenuji množinou; a množina, jejíž všechny části jsou chápány jako jednotky určitého druhu A, tj. jako předměty, které jsou podřazeny pojmu A, se nazývá množství druhu A.

§ 5

Existují, jak známo, také souhrny, jejichž části samy jsou složené, tj. jsou opět souhrnem. Mezi nimi jsou i takové, o nichž uvažujeme z takového hlediska, že se na nich nic podstatného nezmění, jestliže chápeme části částí jako části samého celku. Nazývám je součty termínem vypůjčeným od matematiků. Neboť v tom právě spočívá pojem součtu, že musí platit $A + (B + C) = A + B + C$.

§ 6

Uvažujeme o předmětu, jenž patří k takovému druhu věcí, že každé dvě z nich, M a N, nemohou být v jiném vztahu než v tom, že jsou si buď rovny, nebo že jedna z nich je součtem, obsahujícím část rovnou druhé, tj. že platí buď $M = N$ nebo $M = N + \nu$ nebo $N = M + \mu$, kde o částech ν a μ musí opět platit totéž, a to že jsou si buď rovny nebo že jednu z nich je třeba pokládat za část, obsaženou v druhé: pak uvažujeme o tomto předmětu jako o veličině.

§ 7

Má-li daný souhrn věcí ... *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* ... *L*, *M*, *N*, ... takovou povahu, že se ke každé části *M* dá uvést nějaká odlišná část *N* tak, že můžeme určit buď *N* jeho vztahem k *M* nebo *M* jeho vztahem k *N* podle stejného zákona, platícího pro všechny části, pak nazývám tento souhrn řadou a jeho části členy této řady; onen zákon, podle něhož lze určit buď *N* jeho vztahem k *M* nebo *M* jeho vztahem k *N*, je vytvořující zákon řady; jeden ze členů, a to kterýkoli, nazývám (aniž bych chtěl tímto pojmenováním označit pojem skutečného časového nebo prostorového sledu) předním nebo předcházejícím, druhý zadním nebo následujícím; každý člen *M*, který má jak předcházející, tak i následující člen, tj. který je nejen sám vyvoditelný z nějakého jiného, nýbrž z něhož je také vyvoditelný jiný člen podle vytvořujícího zákona, platícího pro řadu, nazývám vnitřním členem řady, z čehož již snadno poznáme, které členy nazývám vnější, který prvním anebo posledním, jestliže takové členy existují*).

§ 8

Myslíme-li řadu, jejímž prvním členem je jednotka druhu *A*, avšak jejíž každý člen je odvozen z předcházejícího členu tak, že předmět rovný předcházejícímu členu spojíme s novou jednotkou druhu *A* v součet: tak budou zřejmě všechny členy této řady — s výjimkou prvního, který je pouhou jednotkou druhu *A* — množství druhu *A*, a to taková, která nazývám konečná nebo počítatelná, též snad přímo čísla (a to včetně prvního členu), určitěji: celá čísla.

§ 9

Podle různé povahy pojmu, označeného zde *A*, může existovat jednou větší, podruhé menší množina předmětů, které v sobě zahr-

---

*) Bližší objasnění těchto pojmů, jakož i některých jiných, použitých již v předchozích paragrafech, je třeba hledat ve Wissenschaftslehre.

nuje, tj. jednotek druhu *A*, takže jednou dává větší, podruhé menší množinu členů řady o které bylo mluveno. Zejména jich může být i tolik, že tato řada, má-li vyčerpat (do sebe pojmout) všechny tyto jednotky, nesmí mít žádný poslední člen; jak to v dalším ještě hodláme obšírněji doložit. Za tohoto předpokladu nazvu nekonečným množstvím takové množství, které je větší než každé konečné, tj. množství, které má samo takovou povahu, že každá konečná množina představuje pouze jeho část.

§ 10

Bude mi, jak doufám, dáno za pravdu, že vysvětlení obou pojmů konečného množství a nekonečného množství, jež jsem tu podal, určuje vskutku jejich rozdíl tak, jak si jej myslili ti, kteří těchto výrazů užívali v přesném smyslu. Bude mi též dáno za pravdu, že v těchto výměrech není skrytý kruh. Jde tedy již jen o to, zda budeme schopni určit, co je nekonečno vůbec, a to výkladem toho, co se nazývá nekonečným množstvím. Tak by tomu bylo, kdyby se ukázalo, že přísně vzato neexistuje nic jiného, než právě množství, nač lze pojem nekonečna vlastně aplikovat, tj. kdyby se ukázalo, že nekonečnost je pouze určitou skladbou množství, neboli, že všechno, co prohlašujeme za nekonečné, nazýváme tak jen proto a pokud na něm pozorujeme skladbu, která se dá pojímat jako nekonečné množství. Zdá se mi, že tomu též skutečně je. Matematik neužívá tohoto slova zřejmě nikdy v jiném smyslu; neboť to, čeho určením se zabývá, jsou skoro vůbec jen veličiny, přičemž upotřebí pojmu čísla a jedné z veličin, která je téhož druhu a již zvolí za jednotku. Nalezne-li veličinu větší, než jakýkoli počet těch, které byly zvoleny za jednotku, nazývá ji nekonečně velkou; nalezne-li veličinu tak malou, že jakýkoli její násobek je menší než jedna, nazývá ji nekonečně malou; a krom těchto dvou rodů nekonečna a těch druhů nekonečně velkých a nekonečně malých veličin vyššího řádu, jež se z nich pak ještě odvodí, což všechno vyplývá z téhož pojmu, neexistuje pro něj jinak žádné nekonečno.

§ 11

Tímto nekonečnem, tak dobře známým matematikům, nelze však ještě uspokojit některé filosofy, zvláště novější doby, jako *Hegela* a jeho přívržence, kteří je pohrdavě nazývají špatným nekonečnem a tvrdí, že znají ještě mnohem vyšší, pravé, *kvalitativní nekonečno*, které nacházejí zejména v bohu a vůbec jen v *absolutnu*. Jestliže si myslí, jako Hegel, Erdmann a jiní, matematické nekonečno pouze jako veličinu, která je proměnná a jejíž růst nemá žádnou hranici (což ovšem mnozí matematikové, jak brzo uvidíme, stanovili jako výměr svého pojmu), pak s nimi sám souhlasím, když kritizují tento pojem jako veličinu do nekonečna pouze *rostoucí*, nikdy však nekonečna *nedosahující*. *Pravá nekonečná* množina, například délka celé přímky na obě strany neomezené (tj. velikost toho prostorového útvaru, který obsahuje všechny body, jež jsou určeny pouhým pojmově představitelným poměrem ke dvěma daným bodům), nemusí právě být proměnná, jak v tomto příkladu vskutku není; a veličina, která jen vždy může nabýt větší hodnoty, než kterou jsme jí již dali a která se může stát větší než každá daná (konečná) veličina, může přitom nicméně zůstat stále jen konečnou veličinou, jak je tomu zejména u každé číselné veličiny 1, 2, 3, 4, ... Nepřipouštím pouze to, že by filosof znal nějaký předmět, kterému by byl oprávněn dát přívlastek nekonečnosti, aniž by dříve dokázal, že v tomto předmětu existuje nekonečná veličina, nebo alespoň množství v nějakém ohledu nekonečné. Mohu-li dovodit, že dokonce u boha, tedy u té bytosti, kterou považujeme za nejdokonalejší jednotu, je možno prokázat hlediska, z nichž v něm spatřujeme nekonečnou množinu, a že jsou to právě jen tato hlediska, z nichž mu připisujeme nekonečnost: pak bude sotva nutné ještě dále dovozovat, že podobná hlediska jsou základem i všech ostatních případů, kde pojem nekonečna je plně oprávněn. Říkám tedy: nazývám boha nekonečným, poněvadž mu musíme přiznat síly více než jednoho druhu, které mají nekonečnou velikost. Tak mu musíme připsat poznávací schopnost, která je pravou vševědoucností, tedy obsáhne nekonečnou množinu pravd, protože je v sobě obsáhne vůbec všechny, atd. A jaký by to byl pojem, který by nám chtěli vnutit místo pojmu pravého nekonečna, který tu byl ustanoven? Má to být Veškerost, která v sobě zahrnuje cokoliv, absolutní Veškerost, krom níž není již nic. Podle tohoto údaje by to bylo nekonečno, které také podle našeho výkladu v sobě obsahuje nekonečně mnohé. Byl by to souhrn nejen všech skutečných věcí, nýbrž i všeho toho, co žádnou skutečnost nemá, totiž vět a pravd o sobě. A tak by se mohlo říci, že není žádný důvod — nehledíme-li ani ke všem ostatním omylům, které byly do učení o Veškerosti zapleteny — opustit náš pojem nekonečna a přijmout onen pojem.

§ 12

Nevidím však také jinou možnost, než zamítnout jako nesprávné i jiné výměry nekonečna, jež byly podány samotnými matematiky v domnění, že představují jenom součásti tohoto jednoho a téhož pojmu.

1. Vskutku byli někteří matematikové přesvědčeni, jak jsem právě výše poznamenal, mezi nimi sám Cauchy (ve svém Cours d' Analyse a mnohých jiných spisech), autor článku „Nekonečno" v Klügelově slovníku, že definují nekonečno, jestliže je popíší jako proměnnou veličinu, jejíž hodnota neomezeně roste a podle toho může být větší než jakákoli sebe větší daná veličina. Mezí tohoto neomezeného růstu je nekonečně velká veličina. Tak je tangenta pravého úhlu, myšlená jako spojitá veličina, neomezená, bez konce, ve vlastním slova smyslu nekonečná. Chybnost tohoto výměru vysvítá již z toho, že co nazývají matematikové proměnnou veličinou, není vlastně veličina, nýbrž pouhý pojem, pouhá představa veličiny, a to taková představa, která v sobě pojímá nejen jednu jedinou veličinu, nýbrž dokonce nekonečně mnoho veličin, které se navzájem liší ve své hodnotě, tj. ve své velikosti. To, co nazýváme nekonečným, nejsou ony různé hodnoty, které tu představuje výraz tangens φ, zvolený jako příklad, pro různé hodnoty φ, nýbrž pouze ona jediná hodnota, o níž si představují (ač v tomto případě neprávem), že jí onen výraz nabývá při hodnotě $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Je v tom také jistě protimluv, mluví-li se

o mezi neomezeného růstu a právě tak, mluví-li se při výměru nekonečně malého o mezi neomezeného ubývání. A prohlásí-li se ona první mez za nekonečnou veličinu: pak by se měla podle analogie tato druhá, tj. pouhá nula (nic) prohlásit za nekonečně malé: což je jistě nesprávné a ani Cauchy ani Grunert si to nedovolují říci.

2. Byl-li právě uvedený výměr příliš široký, je naproti tomu příliš úzký onen výměr, který přijímá Spinoza a mnoho jiných, jak filosofů, tak matematiků, a to že nekonečné je pouze to, co není schopno žádného zvětšení, nebo k čemu již nelze nic připojit (přičíst). Matematik si dovoluje připojit ke každé veličině, i k nekonečně velké, jiné veličiny, a to nejen konečné, nýbrž i jiné veličiny, které jsou samy nekonečné, ba dokonce znásobuje nekonečnou veličinu nekonečněkrát atd. A vedou-li ještě někteří spory o tom, zda je takový postup přípustný: který matematik, jen když nezavrhuje jakékoli nekonečno, nebude musit uznat, že délka přímky, omezené jen v jednom směru a prostírající se v druhém směru do nekonečna, je nekonečně velká a že může být nicméně v onom prvním směru prodloužena?

3. Uspokojivější není ani vysvětlení těch, kteří se přesně přidržují složek výrazu „nekonečno" a říkají, že nekonečno je to, co nemá konec. Kdyby přitom myslili pouze na konec v čase, na zánik, pak by se mohly nazývat konečnými nebo nekonečnými pouze věci v čase. My se však ptáme také u věcí, jež nejsou v čase, např. u čar nebo veličin vůbec, zda jsou konečné nebo nekonečné. Chápou-li však ono slovo v širším smyslu, asi ve významu hranice vůbec: pak připomínám za prvé, že existují mnohé předměty, u nichž nemůžeme dobře prokázat, že by měly nějakou hranici, ledaže bychom s tímto slovem spojovali nanejvýš kolísavý a vše matoucí význam, a které nicméně nikdo mezi nekonečné nepočítá. Tak nemá jistě žádný jednoduchý díl času nebo prostoru (časový okamžik nebo prostorový bod) hranice, spíše je sám obvykle považován jen za hranici (časového nebo délkového intervalu), ba dokonce jej tak většinou definují, jakoby to patřilo k jeho podstatě; nikomu však ještě nenapadlo (leda snad Hegelovi), spatřovat nekonečno v pouhém bodu. Právě tak nezná matematik hranici u kružnice a tolika jiných čar a ploch, jež se do sebe vracejí, a pokládá je přece za věci pouze

konečné (leda že by začal hovořit o nekonečné množině bodů, které jsou v nich obsaženy, avšak v tomto ohledu musí připustit něco nekonečného i na každé omezené čáře). Poznamenávám za druhé, že existuje dokonce mnoho předmětů, které nepopíratelně jsou ohraničeny a přitom přece musí být pokládány za veličiny, které náležejí k nekonečným. Tak je tomu nejen u zmíněné již přímky, která sahá do nekonečna pouze v jednom směru, nýbrž také u plochy, kterou omezuje dvojice nekonečných rovnoběžek nebo kterou svírají dvě ramena úhlu, narýsovaného v rovině, která se prostírají do nekonečna. Tak nazveme i v racionální psychologii poznávací schopnost již tehdy nekonečně velkou, když je schopna, aniž by byla vševědoucí, přehlédnout jen nějakou nekonečnou množinu pravd, například jen celou nekonečnou posloupnost desetinných míst, která má jediná veličina $\sqrt{2}$.

4. Nejobvykleji se říká: nekonečně velké je to, co je větší než jakákoli stanovitelná veličina. Tu potřebujeme především přesnější určení o tom, co si myslíme při slově stanovitelná? Má to znamenat jen tolik, že něco je možné, tj. může být skutečné, nebo jen to, že to není nic, co by obsahovalo spor? V prvním případě omezujeme pojem konečného výhradně na onu sféru věcí, které patří ke skutečnostem, jsou buď skutečné v každé době, nebo alespoň v určitých dobách skutečné byly či ještě budou, nebo alespoň by se někdy mohly stát skutečnými. Zdá se, že v tomto smyslu skutečně pojal nekonečno Fries (Naturphilosophie § 47), nazývá-li je nedokončitelným. Obecná mluva užívá však pojmu konečna právě tak jako nekonečna při obojím, jak u předmětů, kterým přísluší skutečnost, jako je zejména bůh, tak také u jiných, kde se vůbec nedá mluvit o nějaké jejich existenci, jako jsou pouhé věty a pravdy o sobě včetně jejich částí, představ o sobě; neboť předpokládáme, že tvoří i konečné i nekonečné množiny. Jestliže však rozumíme pod stanovitelným všechno to, co si právě jen neodporuje: pak vkládáme již do výkladu pojmu, že není žádné nekonečno; neboť veličina, která má být větší, než jakákoli veličina, která si neodporuje, by musila být větší než ona sama, což zřejmě nemá smysl. Je však ještě třetí význam, v němž bychom mohli chápat slovo stanovitelný, kdybychom jím rozuměli jen to, co právě může nám

být jenom dáno, tj. co může být předmětem naší zkušenosti. Ptám se však každého, zda slova konečné a nekonečné nepojímá za všech okolností v takovém smyslu a — mají-li být ve vědě užitečně upotřebena — zda je v takovém smyslu nemusí pojímat nutně, aby vystihla na každý způsob jistou vnitřní skladbu předmětů, rozhodně ne však pouhý jejich vztah k naší poznávací schopnosti, dokonce k našim smyslům (zda o nich můžeme mít zkušenosti či ne). Tak otázka, zda je něco konečné nebo nekonečné, nemůže jistě záviset na tom, zda předmět, o kterém se mluví, má velikost, kterou jsme ještě schopni vnímat (například přehlédnout či nepřehlédnout očima).

§ 13

Jestliže jsme se již shodli v tom, který pojem budeme vázat se slovem nekonečno, a jestliže jsme si také již jasně uvědomili části, z nichž tento pojem skládáme: pak je nejbližší otázka, má-li též předmětnost, tj. zda jsou také věci, na něž se dá aplikovat, zda existují množiny, které smíme nazývat nekonečnými ve vyloženém významu toho slova. A na toto si troufám rozhodně odpovědět kladně. Nepochybně existují množiny, které jsou nekonečné, již v oblasti těch věcí, které si nečiní nárok na skutečnost, ba ani na možnost. Množina vět a pravd o sobě je nekonečná, jak se dá velice snadno nahlédnout; neboť vezmeme-li jakoukoli pravdu, na příklad větu, že vůbec existují pravdy, nebo ostatně jakoukoli jinou větu, kterou označíme *A*; pak shledáme, že věta, kterou vyjadřujeme slovy „*A* je pravdivé" je odlišná od *A* sama; neboť tato věta má zřejmě zcela jiný subjekt než ona první. Jejím subjektem je totiž celá věta *A* sama. Avšak podle téhož zákona, podle něhož z věty *A* vyvozujeme větu od ní odlišnou, kterou nazvu *B*, dá se opět z *B* vyvodit třetí věta *C*, a tak stále bez konce. Souhrn všech těchto vět, kde každá následující je k nejblíže předcházející ve vztahu právě uvedeném, vezme totiž předcházející větu za svůj subjekt a vysloví o něm, že je pravdivou větou, tento souhrn — říkám — zahrnuje množinu částí (vět), která je větší, než jakákoli konečná množina. Neboť i bez mého upozornění si všimne čtenář podobnosti, kterou má řada těchto vět, sestrojená podle právě uvedeného vytvořujícho zákona, s řadou číselnou, o níž se uvažovalo v § 8; podobnost spočívá v tom, že ke každému členu této druhé řady existuje odpovídající člen předchozí řady tak, že k jakémukoli sebe většímu jejich počtu existuje stejně velký počet různých vět, a že nad to můžeme ještě vždy tvořit nové věty, nebo, lépe řečeno, že takové věty samy o sobě existují, ať již je tvoříme nebo ne. Z toho pak plyne, že souhrnu všech těchto vět přísluší množství, které převyšuje libovolné číslo, tj. nekonečné množství.

§ 14

Jakkoli jednoduchý a jasný je právě podaný důkaz: přece je značný počet učených a velmi bystrých mužů, kteří samu větu, o níž věřím, že jsem ji tu dokázal, prohlašují nejen za paradoxní, nýbrž dokonce za falešnou. Popírají, že existuje vůbec nějaké nekonečno. Nejen mezi věcmi, které jsou skutečné, ale ani mezi ostatními není podle jejich tvrzení ani jediná, a rovněž tak ani souhrn více věcí, u níž by se dala z nějakého hlediska předpokládat nekonečná množina částí. O důvodech, které uvádějí proti nekonečnu v říši skutečna, budeme uvažovat později, protože také teprve později podáme důvody pro existenci takového nekonečna. Zde tedy vyslechněme pouze důvody, jimiž má být prokázáno, že něco nekonečného není nikde, ani u těch věcí, které si činí nárok na skutečnost.

1. „Nekonečná množina“ říká se, „nemůže již proto nikde existovat, protože nekonečná množina nemůže být nikdy sjednocena v celek, nemůže být nikdy myšlením obsáhnuta.“ — Toto tvrzení musím označit přímo za omyl, který byl vyvolán nesprávným názorem, že k tomu, abychom si mohli myslit celek, sestávající z předmětů *a*, *b*, *c*, *d*, . . . musili bychom si nejprve o každém z nich vytvořit představu, která představuje každý z těchto předmětů zvlášť (jednotlivé jejich představy). Tak tomu naprosto není: mohu si myslit množinu, souhrn, či chceme-li raději obyvatele Prahy nebo Pekinu jako celek, aniž bych si představoval každého z těchto obyvatel jednotlivě, tj. aniž bych měl představu, která se vztahuje výhradně jen k němu. Činím to skutečně právě nyní, mluvím-li

o této množině obyvatel a vyslovím-li např. soud, že jejich počet je v Praze mezi čísly 100 000 a 120 000. Je totiž zcela snadné, mám-li představu *A*, která reprezentuje každý z předmětů *a*, *b*, *c*, *d*, . . ., ale již nic jiného, dospět k představě souhrnu, utvořeného všemi těmito předměty. K tomu není vskutku zapotřebí ničeho jiného, než spojit s představou *A* pojem, který je označen slovem souhrn, tak jak to naznačují slova: souhrn všech *A*. Touto jedinou poznámkou, jejíž správnost musí být každému zřejmá, jak jsem přesvědčen, padá celá obtíž, kterou hledají v pojmu množiny sestávající z nekonečna mnoha částí: pokud jen tu je rodový pojem, který zahrnuje každou z těchto částí, jinak však nic jiného, jak tomu je u pojmu: „množina všech vět nebo pravd o sobě", kde není použito žádného jiného rodového pojmu než toho, který tu již máme, totiž: „věta nebo pravda o sobě". — Nemohu však ponechat bez kritiky ještě druhý omyl, který se v uvedené námitce prozrazuje.

Je to názor, „že množina by nebyla, kdyby tu dříve nebyl někdo, kdo si ji myslí". Kdo tvrdí toto, měl by nejen tvrdit, že neexistuje žádná nekonečná množina vět anebo pravd o sobě, aby tak byl důsledný, pokud je to vůbec při omylu možné, ale měl by tvrdit, že neexistují vůbec žádné věty a pravdy o sobě. Neboť jestliže jsme si již jasně uvědomili pojem vět a pravd o sobě a nepochybujeme opravdu vůbec o jejich předmětnosti: můžeme jenom ztěžka dospět k tvrzením, že by množina nebyla bez někoho, kdo ji myslí, avšak jistě u nich nesetrváme. Abych to každému jasně ukázal, dovolím si nadhodit otázku, zda se též na zemských pólech nevyskytují tělesa, tekutá i tuhá, vzduch, voda, kameny atd., zda tato tělesa na sebe navzájem nepůsobí podle určitých zákonů, např. tak, že rychlosti, které si navzájem sdělují při srážce, se mají k sobě v obráceném poměru jejich hmot apod., a zda se toto vše neděje i když tam není ani člověk ani jiná myslící bytost, aby to pozoroval? Budeme-li s tím souhlasit (a kdo by nemusil souhlasit?): pak jsou také věty a pravdy o sobě, které vyjadřují všechny tyto děje, aniž by si je někdo myslil nebo je znal. A v těchto větách běží často o celky a množiny; neboť každé těleso přece je celkem a způsobuje velmi mnoho svých účinků pouze prostřednictvím množiny částí, z nichž je složeno. Jsou tedy celky a množiny, aniž by tu byla bytost, která si je myslí. A kdyby tomu tak nebylo, kdyby tyto množiny samy tu nebyly jak by mohly být pravdivé soudy, které o nich vyslovujeme? Nebo spíše, co by musilo být smyslem těchto soudů, kdyby byly pravdivé teprve tím, že je tu někdo, kdo tyto děje vnímá? Řeknu-li: „Tento balvan se před mými zraky odtrhl od skály a zřítil se, rozrážeje vzduch“; musilo by to mít asi tento smysl: Poněvadž jsem si v mysli zkombinoval určité jednoduché předměty tam nahoře, vzniklo jejich spojení, které nazývám balvanem; toto spojení se odloučilo od jiných spojení, která se sloučila v celek, jenž nazývám skalou, protože jsem si je myslil dohromady (jako celek); atd.

2. Mohlo by se však říci: „při tom všem zůstává pravda, že je to pouze náš výtvor, a to z větší části libovolný výtvor, zda sloučíme v mysli určité jednoduché předměty v souhrn, či myslíme-li si je nesloučené; a teprve tehdy, učiníme-li tak, vzniknou mezi nimi vztahy. Atom, který je právě uprostřed tohoto knoflíku na mém kabátě a atom, který je právě uprostřed oné věžní báně, nemají nic společného a nejsou v žádném vzájemném spojení; teprve tím, že si je myslíme současně, vzniká mezi nimi jistý druh spojení.“ — Také tomu musím odporovat. Oba atomy na sebe vzájemně působily ještě dříve, než myslící bytost spojila jejich představy, např. silou přitažlivou apod.; a kdyby myslící bytost nejednala pod vlivem svých myšlenek ještě tak, aby se změnily poměry obou atomů: pak je zcela nepravda, že teprve myšlenkovou kombinací by mezi nimi vznikaly vztahy, které by tu jinak nebyly. Mám-li pravdivě soudit, že onen atom je níže, tento výše, a že tedy tento atom je oním atomem nepatrně tažen do výše: pak i kdybych na to nebyl myslil, musilo by tomu všemu být tak.

3. Avšak jiní říkají: „To, že si myslící bytost nějaký souhrn vskutku myslí, není nutné k tomu aby byl: avšak k tomu aby byl, je nutné aby mohl být myšlen. A protože není možná bytost, která by byla schopna představit si v nekonečné množině věcí každou zvlášť, a pak tyto představy spojit: není také možný žádný souhrn, který by obsáhl nekonečnou množinu věcí jako svých částí.“

Již v odst. 1. jsme viděli, jak mylný je předpoklad, zde opakovaný, že je nutné myslit si všechny části souhrnu jednotlivě, aby se došlo k myšlence souhrnu, to znamená, že se žádá, aby se myslila každá jednotlivá část pomocí jednotlivé představy, která se jí týče; také nemusíme teprve poukazovat na vševědoucí bytost, které nečiní žádnou námahu dokonce ani pochopení každé věci zvlášť v nekonečné množině. Nesmíme však připustit ani první předpoklad, že by existence souhrnu byla vázána podmínkou, aby takový souhrn mohl být myšlen. Neboť „možnost myslit si nějakou věc" nemůže být nikdy základem možnosti věci; nýbrž spíše je naopak, že možnost nějaké věci je základem toho, aby rozumná bytost, pokud se právě nemýlí, shledala, že věc je možná, nebo jak se (pouze přeneseně) říká, že je myslitelná, že si ji může myslit. O správnosti této poznámky a naprosté neudržitelnosti názoru, ovšem velmi rozšířeného, který tu potírám, se přesvědčíme ještě plněji, pokusíme-li se ujasnit si složky, z nichž se skládá nanejvýš důležitý pojem možnosti. Že jmenujeme možným to, co může být, není zřejmě žádným rozkladem tohoto pojmu; nebo ve slově moci tkví ještě celý pojem možnosti. Bylo by však ještě méně správné, chtít podat výklad, že možné je to, co může být myšleno. Myšlení ve vlastním slova smyslu, které zahrnuje také již pouhé představování, může mít za předmět i nemožné; a také si je skutečně myslíme, jakmile o něm pronášíme soud a prohlásíme je např. právě za nemožné; jako když říkáme, že neexistuje a nemůže existovat veličina, kterou představuje 0 nebo $\sqrt{-1}$. Avšak i když tu myšlením nerozumíme pouhé představování, nýbrž vlastní pochopení pravdy, je nesprávné, že by bylo možné vše, co můžeme považovat za pravdivé. Omylem považujeme někdy za pravdivé také něco nemožného, například to, že jsme nalezli kvadraturu kruhu. Musilo by se tedy říci (jak jsme již dříve v opravené formě připustili), že možné je to, o čem myslící bytost, když usuzuje podle pravdy, vyslovuje soud, že může být, tj. že je možné. To je výklad, který obsahuje zřejmý kruh! Jsme tedy při výkladu možného nuceni vzdát se úplně vztahu k nějaké myslící bytosti a poohlédnout se po nějakém jiném znaku. Možné je, jak také někdy slýcháváme říkat, „co sobě neodporuje". Ovšemže je nemožné všechno, co má v sobě nějaký spor, např. že koule není koulí. Avšak není všechno, co je nemožné, takového rázu, aby se spor vyskytoval již mezi samotnými složkami, z nichž jsme jeho představu složili. Je nemožné, aby těleso, které je omezeno sedmi rovinnými stěnami, bylo omezeno stejnými stěnami; avšak v samotných slovech, která jsou tu spojena, se spor neprojevuje zjevně. Musíme tedy svůj výklad rozšířit. Kdybychom však chtěli říci, že nemožné je to, co je ve sporu s nějakou pravdou: pak bychom vše, co není, prohlásili za nemožné již proto, poněvadž věta, říkající že to je, odporuje pravdě, že to není. Nepřipustili bychom tak vůbec žádný rozdíl mezi možným a skutečným, ba dokonce nutným, což všichni činíme. Vidíme podle toho, že oblast pravd, kterým odporuje nemožné, by se musila omezit na jeden určitý rod; a nyní nám již sotva unikne, který rod pravd to je. Jsou to ryzí pojmové pravdy. Co odporuje nějaké ryzí pojmové pravdě musíme nazvat nemožným; možným pak to, co není ve sporu s žádnou ryzí pojmovou pravdou. Kdo jednou nahlédl, že je to správný pojem možnosti, tomu sotva přijde na mysl tvrdit, že něco je teprve tehdy možné, když je to myšleno, tj. když je to považováno za možné myslící bytostí, která se ve svém úsudku nemýlí. Neboť to by znamenalo říci: „Věta neodporuje teprve tehdy žádné ryzí pojmové pravdě, neodporuje-li žádné ryzí pojmové pravdě, že existuje myslící bytost, která o této větě vysloví podle pravdy soud, že neodporuje žádné ryzí pojmové pravdě.“ Kdo by neviděl, jak je sem zapletena myslící bytost, aniž by to vůbec patřilo k věci? Jestliže však je rozhodnuto, že to není myšlení, které by možnost teprve podmiňovalo, jak je možné vyvozovat z domnělé okolnosti, že nekonečná množina nemůže být myšlena jako souhrn, to, že takové množiny nemohou existovat?

§ 15

Považuji nyní za dostatečně prokázané a obhájené, že nekonečné množiny jsou alespoň mezi těmi věcmi, které nemají žádnou skutečnost; zejména že množina všech pravd o sobě je nekonečná. Podobně také připustíme, jak bylo usouzeno v § 13., že nekonečná je i množina všech čísel (takzvaných přirozených nebo celých, jejichž pojem jsme objasnili v § 8.). Avšak i tato věta zní paradoxně a mohli bychom ji vlastně považovat za první paradox, jenž se objevuje v oblasti matematiky; neboť předchozí paradoxy patří vlastně ještě do obecnější vědy, než je nauka o veličinách.

„Jestliže každé číslo“, mohlo by se snad říci, „je podle svého pojmu pouze konečnou množinou, jak může být množina všech čísel nekonečná? Uvažujeme-li o řadě přirozených čísel:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$$

zpozorujeme, že množina čísel, obsažených v této řadě, počínajíc prvním (jednotkou) až k některému z nich, např. k číslu 6, je vždy vyjádřena právě tímto posledním číslem. Tedy musí být množina všech čísel stejně velká jako poslední z nich, takže musí být sama také číslem a tedy nemůže být nekonečná.“

To, co na tomto závěru svádí k omylu, zmizí ihned, vzpomeneme-li si jen, že v množině všech čísel, uspořádaných do přirozené řady, není žádné poslední; a že proto pojem posledního (nejvyššího) čísla je bezpředmětný, poněvadž je to pojem, skrývající v sobě spor. Neboť podle vytvořujícího zákona, uvedeného při výkladu oné řady (§ 8), existuje ke každému z jejích členů opět člen následující. Tento paradox bychom tedy mohli považovat za rozřešený touto jedinou poznámkou.

§ 16

Je-li množina čísel (totiž takzvaných celých čísel) nekonečná: je tím nepochybněji nekonečná i množina veličin (podle výkladu v § 6 a ve Wissenschaftslehre v § 87). Neboť podle onoho výkladu jsou nejen všechna čísla současně veličinami, nýbrž existuje ještě mnohem víc veličin než čísel, neboť také zlomky $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ a rovněž i tak zvané iracionální výrazy $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}, \ldots \pi$, $e, \ldots$ označují veličiny. Podle tohoto výkladu není dokonce nijak sporné hovořit o veličinách, které jsou nekonečně velké, a jiných, které jsou nekonečně malé, pokud rozumíme nekonečně velkou veličinou jen takovou veličinu, která se jeví být při zvolené základní jednotce sama takovým celkem, že každá konečná množina jednotek tvoří pouze její část; *nekonečně malou* veličinou však takovou, že každé její konečné množství se jeví být pouze částí celku, který tvoří jednotka sama. — Množina všech čísel je hned takovým nepopíratelným příkladem nekonečně velké *veličiny*. Říkám výslovně veličiny; ovšemže není příkladem nekonečně velkého *čísla*; neboť nelze číslem tuto nekonečně velkou množinu vůbec nazvat, jak jsme právě v posledním paragrafu poznamenali. Zvolíme-li však teď za jednotku samu takovou veličinu, která se jeví být *nekonečně velkou* vzhledem k jiné přijaté jednotce, a měříme-li ji tou, kterou jsme dříve za jednotku pokládali: bude se tato jednotka jevit *nekonečně malou*.

§ 17

Nanejvýš důležitý rod nekonečně velkých veličin, které také nepatří do oblasti skutečna, ačkoli mohou být *určením* skutečna, je *čas a prostor*. Ani čas ani prostor nejsou něčím skutečným; neboť nejsou ani *substancemi* ani *vlastnostmi* substancí; vystupují pouze jako určení na všech nedokonalých (omezených, konečných, nebo — což je totéž — závislých, stvořených) *substancích*; neboť každá z nich musí vždy existovat v nějakém čase a rovněž v nějakém prostoru; takže každá jednoduchá substance musí v každém *okamžiku*, tj. v každé jednoduché části času, být v nějaké jednoduché části prostoru, tj. v nějakém jeho bodě. Jak u času, tak jistě též u prostoru je množina jednoduchých částí neboli bodů, z nichž čas i prostor sestává, *nekonečná*. Dokonce je nekonečně velká nejen množina jednoduchých částí, z nichž je složen celý čas a celý prostor, tj. množina časových a prostorových bodů, které vůbec jsou; ale již sama množina okamžiků, které jsou mezi dvěma jakkoli blízkými okamžiky α a β, právě tak jako množina prostorových bodů, které leží mezi dvěma jakkoli blízkými prostorovými body a a b, je nekonečná. Obhajovat tyto věty jistě nemusím, protože stěží se vyskytne matematik, který by nebyl na naší straně, ledaže by popřel vůbec každé nekonečno. — Avšak odpůrci *všeho* nekonečna *vůbec* se zachraňují námitkou, „že si jistě můžeme k těm okamžikům a prostorovým bodům, které jsme si již myslili, přimyslit více dalších, že však je přesto množina těch, které skutečně existují, vždy jen konečná.“ Na to však odpovídám, že ani čas ani prostor, a tedy ani jednoduché části času nebo prostoru, nejsou ničím skutečným; že je tedy nesmyslné mluvit o konečné množině těch částí, které existují skutečně; ještě však nesmyslnější si představit, že tyto části nabudou skutečnosti teprve naším myšlením. Neboť z toho by následovalo, že skladba času právě tak jako prostoru by závisela na našem myšlení nebo na tom, co uznáme za pravdivé, a že by tedy poměr průměru kruhu k jeho obvodu byl racionální, pokud bychom jej omylem za racionální považovali, a že prostor by nabyl teprve tehdy všech těch vlastností, až bychom je jednou poznali! — Opravují-li však odpůrci uvedený výrok tak, že jen jedno myšlení určuje skutečné vlastnosti času a prostoru, totiž to, které je ve shodě s pravdou; pak vyslovují pouhou tautologii, a to, že co je pravdivé, je pravdivé; z toho jistě nelze vyvodit to nejmenší proti nekonečnosti času a prostoru, kterou hájíme. Je proto v každém případě nemístné říkat, že čas a prostor obsahují jen tolik bodů, kolik si jich právě myslíme.

§ 18

Ačkoliv každou veličinu, vůbec každý předmět, který máme z nějakého hlediska pokládat za nekonečný, musí být možno pochopit právě z tohoto hlediska jako celek, složený z nekonečné množiny částí: neplatí přece obráceně, že by musila již být nekonečnou každá veličina, kterou pokládáme za součet nekonečné množiny vesměs konečných množin. Tak se například uznává všeobecně, že iracionální veličiny, jako $\sqrt{2}$, jsou vzhledem k základní jednotce konečné, ač by mohly být pokládány za veličiny, složené z nekonečné množiny zlomků tvaru

$$\frac{14}{10} + \frac{1}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{2}{10\,000} + \ldots,$$

kde čitatelé i jmenovatelé jsou celá čísla; právě tak že je součet nekonečné řady sčítanců tvaru: $a + ae + ae^2 + \ldots$ in inf. roven konečné veličině $\frac{a}{1-e}$, pokud je $e < 1$ *)Není tedy jistě nic sporného v tvrzení, že součet nekonečna mnoha konečných veličin dává pouze konečnou veličinu, protože by se jinak nedala prokázat jeho pravdivost. To paradoxní, co by nám na něm mohlo padnout do očí, plyne pouze z toho, že zapomeneme, jak se přičítané členy stále a stále zmenšují. Nemůže přece nikoho překvapit, že suma sčítanců, z nichž každý následující má např. pouze polovinu hodnoty předchozího, nemůže být větší než dvojnásobek prvního sčítance, když u každého sebe pozdějšího členu této řady se k onomu dvojnásobku ještě právě tolik nedostává, kolik činí hodnota tohoto posledního členu.

---

*) Poněvadž obvyklý důkaz pro součet této řady se nezdá být zcela přesný, budiž mi dovoleno při této příležitosti tento důkaz naznačit. Předpokládáme-li $a = 1$ a pozitivní e (protože aplikace na jiné případy vyplývá sama sebou) a položíme-li v symbolické rovnici

(1) $$S = 1 + e + e^2 + \ldots \text{ in inf.},$$

je jisto alespoň to, že S označuje pozitivní veličinu, ať již konečnou nebo nekonečnou. — Je však také pro každou celočíselnou hodnotu n

$$S = 1 + e + e^2 + \ldots + e^{n-1} + e^n + e^{n+1} + \ldots \text{ in inf.}$$

nebo také

(2) $$S = \frac{1 - e^n}{1 - e} + e^n + e^{n+1} + \ldots \text{ in inf.},$$

za což můžeme také psát

(3) $$S = \frac{1 - e^n}{1 - e} + P^1,$$

označíme-li hodnotu nekonečné řady $e^n + e^{n+1} + \ldots$ in inf. znakem P^1; přitom víme jistě alespoň to, že P^1 označuje veličinu v každém případě pozitivní, závislou na e a na n, ať již měřitelnou nebo neměřitelnou. Tutéž nekonečnou řadu můžeme však vypsat i takto:

$$e^n + e^{n+1} + \ldots \text{in inf.} = e^n[1 + e + \ldots \text{ in inf}]$$

Součet nekonečně mnoha členů v závorce na pravé straně rovnice, totiž

$$[1 + e + e^2 + \ldots \text{ in inf.}],$$

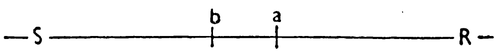
vypadá zcela j ko řada, která je dána symbolickou rovnicí (1) = S, avšak nemůže se s ní pokládat za totožnou, neboť množina sčítanců zde a v (1) není přece táž, ač je v obou případech nekonečná; zde má nesporně o n členů méně než v (1). Můžeme tedy s plnou jistotou napsat jen rovnici

$[1 + e + e^2 + \ldots \text{ in inf.}] = S - P^2$, kde můžeme předpokládat, že P^2 označuje v každém případě veličinu stále kladnou, závislou na n. Tak dostaneme

(4) $$S = \frac{1 - e^n}{1 - e} + e^n\,[S - P^2] \text{ nebo}$$

§ 19

Již u těch příkladů nekonečna, o kterých jsme dosud uvažovali, nám nemohlo uniknout, že není možno pokládat všechny nekonečné množiny za *sobě rovné z hlediska jejich množství*; ale že mnohá z nich je *větší* nebo (*menší*) než jiná, tj. obsahuje v sobě jinou množinu jako svůj díl (nebo naopak, je sama obsažena v jiné jako pouhý její díl). I to je tvrzení, které zní mnohým lidem *paradoxně*. Jistěže všichni, kteří vykládají nekonečno jako to, co není schopno žádného zvětšení, musí nejen uznat za paradoxní, ale přímo za *sporné*, že by jedno nekonečno bylo větší než jiné. Avšak poznali jsme již dříve, že tento názor spočívá na takovém pojmu nekonečna, který vůbec nesouhlasí s jazykovým užitím toho slova. Podle našeho výkladu, který odpovídá nejen jazykovému užití, nýbrž i účelům vědy, nemůže najít nikdo nic sporného, ba ani nápadného, na myšlence, že jedna nekonečná množina je větší než jiná. Jak by například mohlo být někomu nejasné, že délka přímky



Obr. 1

$$S[1-e^n] = \frac{1-e^n}{1-e} - e^n P^2 \text{ nebo konečně}$$

(5) $$S = \frac{1}{1-e} - \frac{e^n}{1-e^n} . P^2$$

Spojením rovnic (3) a (5) dostaneme

$$\frac{-e^n}{1-e} + P^1 = \frac{-e^n}{1-e^n} . P^2 \text{ nebo}$$

$$P^1 + \frac{e^n}{1-e^n} . P^2 = + \frac{e^n}{1-e},$$

z čehož je patrno, že vezmeme-li n libovolně velké a učiníme tím hodnotu $\frac{e^n}{1-e}$ menší než libovolně malá veličina $\frac{1}{N}$, musí též každá z veličin P^1 a $\frac{e^n}{1-e^n} . P^2$ sama o sobě klesnout pod libovolně malou hodnotu. Je-li tomu tak, pak nás poučuje každá z rovnic (3) a (5), že $S = \frac{1}{1-e}$, protože S při tomtéž e může mít jen jednu neproměnnou hodnotu, a tedy nemůže záviset na n.

postupující neomezeně ve směru aR, je nekonečná? A že přímku bR, běžící v tomtéž směru od bodu b, musíme nazvat větší o úsek ba než aR? A že přímku, postupující neomezeně v obou směrech aR a aS musíme nazvat větší o veličinu, která je sama opět nekonečná? Atd.

§ 20

Přejděme nyní k úvaze o nanejvýš pozoruhodné zvláštnosti, jež se může vyskytnout u vztahu dvou množin, jsou-li obě nekonečné, dokonce jež se vlastně vyskytuje vždy, avšak byla dosud přehlížena ke škodě pro poznání mnohých důležitých pravd metafyzických, jakož i fyzikálních a matematických, a která i nyní, vyřknu-li ji, bude pokládána za tak paradoxní, že by bylo velmi potřebné se při úvaze o ní trochu déle zdržet. Tvrdím totiž: dvě množiny, obě nekonečné, mohou být k sobě v takovém vztahu, že je na jedné straně možno spojit ve dvojici každou věc, náležející jedné z nich, s věcí, náležející druhé z nich, tak, aby vůbec žádná věc v obou množinách nezůstala bez spojení ve dvojici a také žádná aby se nevyskytovala ve dvou nebo více dvojicích; a přitom je na druhé straně možno, aby jedna z obou množin obsahovala druhou jako svůj pouhý díl, takže množství, která ony množiny představují, jsou k sobě v nejrozmanitějších poměrech, považujeme-li věci v nich za stejné, tj. za jednotky.

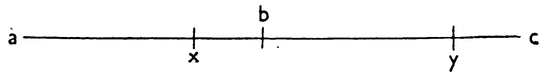
Důkaz tohoto tvrzení povedu na dvou příkladech, v nichž se nepopíratelně vyskytuje to, o čem byla řeč.

1. Vezměme dvě libovolné (abstraktní) veličiny, např. 5 a 12: pak je zřejmé, že množina veličin, které jsou mezi nulou a 5 (nebo které jsou menší než 5), je nekonečná právě tak, jako množina veličin, které jsou menší než 12; a právě tak jistě je nutno prohlásit druhou množinu za větší než první, protože první je nesporně jen jejím dílem. Dosadíme-li na místo veličin 5 a 12 jakékoli jiné, musíme dokonce usoudit, že ony dvě množiny nezůstávají v tomtéž vájemném poměru, nýbrž vstupují do nejrozmanitějších poměrů. Avšak právě tak pravdivé jako toto vše je i následující: označuje-li x jakoukoli veličinu mezi nulou a 5 a určíme-li vztah mezi x a y rovnicí

$$5\,y = 12\,x,$$

je také y veličinou, ležící mezi nulou a 12; a naopak, kdykoli je y mezi nulou a 12, je x mezi nulou a 5. Z oné rovnice také vyplývá, že ke každé hodnotě x přísluší jediná hodnota y a naopak. Z tohoto obojího je však jasné, že ke každé veličině $= x$ z množiny veličin mezi nulou a 5 existuje v množině čísel, která jsou mezi nulou a 12, jedna z veličin $= y$, a tyto veličiny se dají spojit ve dvojici tak, aby žádná z věcí, z nichž jsou tyto množiny složeny, nebyla bez takového spojení a že také ani jediná nevystupuje ve dvou nebo více spojeních.

2. Druhý příklad je vzat z prostorového útvaru. Kdo již ví, že skladba prostoru se zakládá na skladbě času, a že vlastnosti času se zakládají na abstraktních číslech a veličinách, nemusil by až na příkladu zpozorovat, že takové nekonečné množiny, jaké jsme právě nalezli u veličin vůbec, existují také u času a prostoru. Vzhledem k správné aplikaci naší věty v dalším textu je však nutné uvážit podrobně alespoň o jednom případu, kde se takové množiny vyskytují. Nechť tedy jsou *a*, *b*, *c* tři libovolné body na přímce, a poměr vzdáleností *ab* : *ac* nechť je libovolný, avšak takový, aby *ac* označovala větší z nich. Potom, protože obě množiny bodů v *ab* i *ac* jsou nekonečné, bude množina bodů v *ac* převyšovat množinu v *ab*, poněvadž v *ac* jsou vedle všech bodů z *ab* také všechny ty body z *bc*, které se v *ab* nevyskytují. Nemůžeme se dokonce vyhnout závěru, že změní-li se libovolně poměr vzdáleností *ab* : *ac*, bude také poměr těchto dvou množin velmi rozličný. Jistěže platí o těchto obou množinách totéž, co bylo předtím dokázáno o dvou množinách veličin ležících mezi 0 a 5 a mezi 0 a 12 vzhledem ke dvojicím, které je možno vždy vytvořit z jedné věci jedné množiny a jedné věci druhé množiny. Je-li totiž x libovolný bod v *ab*: pak bude také bod y v *ac*, zvolíme-li bod y ve směru *ax* tak, aby platil vztah



Obr. 2

$$ab : ac = ax : ay.$$

A naopak, je-li y bodem v *ac*, bude x bodem v *ab*, určíme-li jen *ax* podle téže rovnice z *ay*. Každé jiné *x* určí také jiné y a naopak každé jiné *y* určí jiné *x*. Z obou těchto pravd však opět vidíme, že se dá ke každému bodu z *ab* vybrat bod z *ac*, a ke každému bodu z *ac* bod z *ab* tak, že o dvojicích, které utvoříme vždy z páru takových bodů, lze tvrdit, že neexistuje ani jediný bod jak v množině bodů *ab* tak v množině bodů *ac*, který by se v některé z těchto dvojic neobjevil, a že také žádný se tam neobjeví dvakrát nebo víckrát.

§ 21

Tedy jen z toho důvodu, že dvě množiny *A* a *B* jsou v takovém vzájemném vztahu, že ke každé části *a*, obsažené v *A*, můžeme též vyhledat podle určitého pravidla část *b*, obsaženou v *B*, tak, aby všechny dvojice (a + b), které vytvoříme, obsahovaly každý předmět z *A* nebo z *B*, a každý pouze jednou - jen z této okolnosti — jak vidíme — není ještě nijak dovoleno uzavírat, že by si tyto množiny z hlediska množství svých částí byly navzájem rovny (tj. abstrahujeme-li od všech jejich rozdílů), jsou-li nekonečné; nýbrž mohou být přes tento svůj vztah, který je sám o sobě ovšem obapolně stejný, ve vztahu nerovnosti vzhledem ke svým množstvím, takže se může ukázat, že jedna z nich je celkem, jehož dílem je druhá. Na rovnost těchto množství se smí usoudit teprve tehdy, přistoupí-li k tomu ještě nějaký jiný důvod, jako například to, že obě množiny mají zcela stejná základní určení, například zcela stejný způsob vzniku.

§ 22

Paradox, jenž lpí na těchto tvrzeních — jak nechci vůbec popírat — vyplývá jedině z té okolnosti, že onen vzájemný vztah, který jsme nalezli u porovnávaných množin, spočívající v tom, že se nám zdaří sestavit jejich části do dvojic tak, jak jsme se již vícekrát zmínili, stačí ovšem za všech okolností k tomu, abychom je mohli prohlásit za zcela rovné i z hlediska množství jejich částí, jsou-li tyto množiny konečné. Dvě konečné množiny jsou si totiž i s ohledem na svá množství vždy rovny, jsou-li ovšem tak složeny, že ke každé věci *a* jedné z nich se nám podaří nalézt *b* z druhé množiny a spojit je ve dvojici tak, že v žádné z obou množin nezůstane ani jedna věc, k níž by se nedala nalézt odpovídající věc v druhé množině, a že také neexistuje věc, která by se objevila ve dvou nebo více dvojicích. To vzbuzuje zdání, že by tomu tak mělo být i když jsou místo konečných množin množiny nekonečné.

Tak se to zdá, pravím; avšak při bližší úvaze se ukazuje, že tomu tak vůbec nemusí být, neboť důvod, proč tomu tak u všech konečných množin je, spočívá právě v jejich konečnosti, a tedy odpadá u množin nekonečných. Jsou-li totiž obě množiny A a B konečné, nebo (poněvadž i toto již stačí) víme-li jen o jedné z nich, A, že je konečná a zanedbáme-li všechny rozdíly, které jsou mezi věcmi z nichž sestávají, abychom teď o nich mohli uvažovat jen z hlediska jejich množství: pak označíme-li kteroukoli věc z množiny A znakem 1, některou jinou znakem 2 atd. tak, abychom každé následující udělili označení, které udává počet věcí, jež jsme dosud vzali v úvahu (včetně té věci samé) musíme jednou dospět k některé věci z A, po jejímž označení nezbývá již žádná, která by byla neoznačena. To vyplývá přímo z pojmu konečného nebo počítatelného množství. Jestliže nyní obdrží poslední věc z A, o níž jsme právě mluvili, jako své označení n: pak je počet věcí v $A = n$. A protože se ke každé věci z A má dát nalézt jedna věc z B, která se s ní dá spojit ve dvojici, musí se dospět k tomu, že věcí v B, které jsme tak vyčerpali, je rovněž n, jestliže označíme každou věc z B právě tím znakem, který má věc z A, spojená s ní do dvojice; neboť každá z nich dostane označení, které umožňuje poznat, kolik jsme jich dosud vyčerpali. Z toho vysvítá, že věcí v B nemůže být jistě méně než n; neboť tento znak opravdu má jedna (právě ta, kterou jsme spotřebovali naposled). Avšak není jich také více; neboť kdyby existovala i jen jediná navíc k těm, které byly dosud odčerpány, neexistovala by k ní žádná věc v A, s níž by se mohla spojit ve dvojici; což odporuje předpokladu. Proto není počet věcí v B ani menší, ani větší než n, a tedy $= n$. Obě množiny mají tak jedno a totéž, nebo jak také můžeme říci, stejná množství. Tento závěr zřejmě ztrácí platnost, když je množina věcí v A nekonečná; neboť nyní nedospějeme nikdy nejen my počítající k poslední věci z A, ale podle objasnění nekonečné množiny neexistuje ani žádná taková poslední věc v A sama o sobě, tj. ať již jsme jich označili jakkoli mnoho, existují ještě vždy jiné, které je třeba označit; proto však padá všechen důvod, abychom uzavřeli, že množství obou množin je totéž, ačkoliv ani v množině B nechybí nikdy věci, které je možno spojovat s věcmi z A stále do nových dvojic.

§ 23

Řečené jistě ukazuje, že u nekonečných množin odpadá důvod, který vede k nutné rovnosti konečných množin, jestliže je mezi nimi vztah, o němž bylo nejednou mluveno; avšak to nám ještě neukazuje, jak a čím se jejich nerovnost často přivodí. Bude nám to zřejmé teprve z rozboru příkladů, které byly uvedeny. Ty nás totiž poučují o tom, že části a a b, vzaté ze dvou srovnávaných množin, které spojíme do dvojice (a + b), nevystupují ve svých množinách týmž způsobem. Neboť tvoří-li části a' a b' ještě druhý pár a srovnáme-li poměry, v nichž vystupují a a a' v množině A, a naproti tomu b a b' v množině B: ukazuje se ihned, že jsou různé. Vybereme (v prvním příkladě) z množiny veličin, které jsou mezi 0 a 5, libovolné dvě, třeba veličiny 3 a 4. pak jsou k nim v B příslušné (tvoří s nimi dvojici) zřejmě

$$\frac{12}{5} . 3 \text{ a } \frac{12}{5} . 4, \text{ tj. } 7\frac{1}{5} \text{ a } 9\frac{3}{5}.$$

Chápeme-li nyní (jak bychom měli) poměr dvou věcí jako souhrn všech vlastností, které se projevují na jejich spojení, nesmíme u poměru, v němž jsou části 3 a 4 v jedné, a $7\frac{1}{5}$ a $9\frac{3}{5}$ v druhé množině, dbát snad jednostranně jen toho poměru, který obyčejně nazýváme geometrickým, nýbrž všimnout si všeho, co sem náleží, zejména tedy také toho, ža aritmetický rozdíl mezi veličinami 3 a 4 je zcela jiný než mezi veličinami $7\frac{1}{5}$ a $9\frac{3}{5}$; zatímco první je $= 1$, je druhý $= 2\frac{3}{5}$. Ačkoli se tedy každá veličina z A nebo z B dá spojit do dvojice s jedinou veličinou z B nebo z A: je přece množina veličin v B jiná (větší) než v A, neboť i vzdálenost, kterou mezi sebou mají dvě takové veličiny z *B*, je jiná (větší), než vzdálenost, která odděluje dvě odpovídající veličiny z *A*. A z toho přirozeně následuje, že mezi dvěma veličinami z *B* je vždy jiná (větší) množina takových veličin než je tomu v *A*; a není tedy žádný div, když také celá množina veličin v *B* je jiná (větší) než v *A*. — Zcela podobně je tomu v druhém příkladu: proto o něm nic jiného neřekneme než to, že body v *ab*, které si myslíme spojené do dvojic s body v *ac*, jsou blíže u sebe než ty, které jim odpovídají v *ac*; neboť vzdálenost oněch bodů je k vzdálenosti těchto bodů vždy v poměru *ab* : *ac*.

§ 24

Smíme-li teď považovat větu z § 20 za dostatečně prokázanou a objasněnou tím, co bylo dosud uvedeno: pak je jedním z jejích nejbližších důsledků, že nesmíme hned položit rovnítko mezi dvě sumy veličin jen proto, že jsou si po dvou rovny (tj. vždy jedna z jedné sumy a druhá z druhé sumy), jakmile jsou jejich množiny nekonečné; ledaže bychom se dříve přesvědčili, že také nekonečná množství těchto veličin jsou v obou sčítancích táž. Je ovšem zcela nesporné, že sčítance určují svůj součet a že tedy stejné sčítance dávají také stejné součty, a platí to nejen tehdy, je-li množina těchto sčítanců konečná, nýbrž i když je nekonečná. Jen musí být v tomto druhém případě prokázáno, že nekonečná množina těchto sčítanců je u jednoho z těchto součtů přesně táž jako u druhého součtu, neboť existují různé nekonečné množiny. K tomu, abychom tak mohli usoudit, nestačí podle naší věty, dá-li se ke každému členu jednoho součtu nějak vyhledat člen druhého součtu, jemu rovný; nýbrž toto se dá s jistotou usoudit teprve tehdy, mají-li obě množiny stejná základní určení. Uvidíme na mnohých příkladech v dalším textu, do jakých nesmyslností se zaplete počítání s nekonečnem, přehlédneme-li tuto okolnost.

§ 25

Přicházím nyní k tvrzení, že nekonečno se nevyskytuje pouze mezi věcmi které nemají žádnou skutečnost, nýbrž i v oblasti samého skutečna. Kdo jen dospěl k nanejvýš důležitému přesvědčení, ať již řadou závěrů z ryzích pojmových pravd anebo jiným způsobem k tomu, že existuje bůh, bytost, která nemá základ svého bytí v žádném jiném bytí a právě proto je nanejvýš dokonalá, tj. spojuje v sobě všechny dokonalosti a síly, které jen mohou vedle sebe existovat, a každou z nich v nejvyšším stupni: ten již tím přijímá existenci bytosti, která je více než v jednom ohledu nekonečná, ve svém vědění, ve svém chtění, ve svém vnějším účinku (své moci), nekonečně mnohé ví, nekonečně mnohé (totiž sumu všeho o sobě možného dobra) chce, a vše, co chce, proměňuje ve skutečnost mocí svých zevnějších účinků. Z této poslední božské vlastnosti plyne další důsledek, že krom něho jsou totiž stvořené bytosti, které v protikladu k němu nazýváme bytostmi pouze konečnými; u nichž se však přesto dá prokázat mnoho nekonečného. Neboť již množina těchto bytostí musí být nekonečná; právě tak množina stavů, kterých každá z těchto bytostí během sebekratší doby nabývá, musí být nekonečně velká (neboť každá taková doba obsahuje nekonečně mnoho okamžiků) atd. Tedy také v oblasti skutečna se všude potkáváme s nekonečností.

§ 26

Avšak toto připustit váhají i mnozí z těch učenců, kteří chápou, že není možno popřít nekonečnost u věcí, které nemají žádnou skutečnost (jako tomu je u vět a pravd o sobě). Neboť připustit nekonečno dokonce v oblasti skutečna je zakázáno, jak se domnívají, starou zásadou, že všechno skutečné musí být úplně určeno. Jsem však přesvědčen, že jsem již ve Wissenschaftslehre (díl I., § 45) ukázal, že tato zásada platí o všech věcech skutečných právě v tomtéž smyslu jako neskutečných. Všude platí totiž pouze v tom smyslu, že každému předmětu (čemukoli) přísluší z každých dvou sobě odporujících vlastností jedna a druhá mu musí být upřena. Kdyby pak bylo opodstatněno, že se prohřešíme proti této zásadě, předpokládáme-li nekonečnost u věcí, které mají skutečnost, nesměli bychom ani u neskutečných předmětů svého myšlení mluvit o nějakém nekonečnu, a tedy bychom nesměli připustit ani nekonečnou množinu pravd o sobě ani množinu pouhých čísel. Avšak proti citované zásadě se jistě vůbec neprohřešujeme jen tím, že něco prohlásíme za nekonečné. Tu jen říkáme, že je na tomto předmětu z určitého hlediska množství částí, které je větší než jakékoli číslo; tedy ovšem množství, které se nedá určit jen číslem. Avšak z toho ještě nevyplývá, že by se toto množství nedalo nijak určit; z toho vůbec neplyne, že by existovala i jen jediná dvojice kontradiktorických vlastností *b* a non-*b* tak, že by mu bylo nutno obě upřít. Co nemá barvu, např. věta nedá se ovšem určit údajem jeho barvy; co nevydává tón, nedá se určit údajem jeho tónu atd. Avšak proto ještě nejsou ony věci nikterak neurčitelné a nejsou výjimkou z oné zásady, že ze dvou predikátů *b* a non-*b* (modrý nebo ne-modrý, dobře znějící nebo ne-dobře znějící) přísluší každé věci jediný z nich, jen když je vyložíme tak, jak musíme, aby totiž zůstaly kontradiktorické. Právě tak jako ne-modré nebo ne-vonící je určením (jistěže velmi širokým) Pythagorovy poučky, je také pouhý údaj, že množina bodů mezi *m* a *n* je nekonečná, jedním z určení této množiny. A nejsou často nutné ani příliš mnohé údaje, abychom takovou nekonečnou množinu věcí určili úplně, tj. tak, aby všechny její vlastnosti již samy vyplývaly z několika údajů, které jsme právě uvedli. Tak jsme určili právě zmíněnou nekonečnou množinu bodů mezi *m* a *n* co nejdokonaleji, jakmile jen určíme oba body *m* a *n* samy (třeba jejich příslušným názorem). Neboť pak již je přesně rozhodnuto, pouhými oněmi několika slovy, o každém jiném bodu, zda k této množině patří či ne.

§ 27

Jestliže jsem dosud v tak mnohých případech obhajoval připuštění nekonečna proti těm, kteří je neoprávněně potírají; musím nyní se stejnou otevřeností přiznat, že mnozí učenci, zvláště ze třídy matematiků, šli na druhé straně příliš daleko; neboť připouštěli hned nekonečně velké, hned zase nekonečně malé v případech, kdy podle mého nejvnitřnějšího přesvědčení žádné z nich neobstojí.

1. Ani já nenamítám nic proti tomu, přijmout nekonečnou časovou délku, rozumíme-li tím časovou délku, která buď nemá začátek, nebo konec, nebo dokonce ani ten ani onen (je tedy celým veškerým časem nebo souhrnem všech okamžiků vůbec); považuji však za nutné, myslit si poměr velikostí, který má jedna doba nebo časový úsek mezi dvěma okamžiky k jakékoli jiné době nebo časovému úseku mezi dvěma okamžiky, jako poměr konečný, úplně určitelný jen pojmy, tedy nepředpokládat nikdy, že doba ohraničená začátkem a koncem je nekonečněkrát větší nebo menší než jiná taková doba. To právě však činí, jak známo, dokonce mnozí matematikové, a to nejen když mluví o nekonečně velkých časových úsecích, jež přece mají být z obou stran omezeny, nýbrž ještě častěji o nekonečně malých dílcích času, ve srovnání s nimiž by se již právě proto musil uznat za nekonečně velký každý konečný časový úsek, např. vteřiny.

2. Obdobně je tomu se vzdálenostmi mezi dvěma body prostoru, které mohou být k sobě, podle mého názoru, vždy jen v konečném poměru, (úplně určitelném jen pojmy), zatímco u našich matematiků není nic běžnějšího, než mluvit o nekonečně velkých a nekonečně malých vzdálenostech.

3. Tak je tomu konečně také u vesmírových sil, přijímaných jak metafyzikou tak fyzikou, o nichž musíme předpokládat, že žádná z nich není nekonečněkrát větší nebo menší než některá jiná, ale že každá síla je ke každé jiné v poměru určitelném pouhými pojmy; ať si již lidé dovolují činit jakkoli často opak. Důvody, které mám pro všechny tato svá tvrzení, nemohu však nikomu zcela objasnit, kdo nezná vůbec pojmy, které spojuji se slovy: názor a pojem, odvoditelnost věty z jiných vět, objektivní vyvození nějaké pravdy z jiných pravd a mnohé jiné, konečně i výklad o času a prostoru. Kdo však četl alespoň obě pojednání „Pokus o objektivní zdůvodnění učení o skladu sil“*), a „Pokus o objektivní zdůvodnění učení o třech rozměrech prostoru“**), tomu nebude následující důkaz úplně nesrozumitelný.

*) Praha 1842, v komisi u Kronbergera & Rziwnase.

**) Praha 1843, v komisi u Kronbergera a Rziwnase.

Z výkladu času a prostoru vyplývá ihned, že všechny *závislé* (tj. stvořené) substance na sebe stále vzájemně účinkují; a že je rovněž přípustné pro jakékoli dva okamžiky α a β, ať jsou od sebe jakkoli daleko či blízko, považovat stav světa v dřívějším okamžiku α za *příčinu*, a stav světa v pozdějším okamžiku β za *účinek* (alespoň zprostředkovaný), započteme-li jen k příčině ještě přímá působení boží, která snad mohla v obdobích $\alpha\beta$ nastat. Z toho plyne dále, že z údaje obou okamžiků α a β, z údajů všech *sil*, které měly stvořené substance v okamžiku α, z údajů *poloh*, kde každá byla, a konečně z údajů o božím působení, jež zakusila ta či ona substance během $\alpha\beta$ — jsou odvoditelné jak *síly*, které budou mít tyto substance v okamžiku β, tak *polohy*, které budou zaujímat, a to tak, jak musí být odvoditelný *účinek* (lhostejno, zda zprostředkovaný či přímý) ze své úplné příčiny. To zase vyžaduje, aby se všechny vlastnosti účinku daly vyvodit z vlastností jeho příčiny prostřednictvím premisy, sestavené jen z ryzích pojmů, která má tuto formu: každá příčina o vlastnostech u, u', u'', ... má účinek o vlastnostech v, v', v'', ... Odtud snadno plyne důsledek, který právě k našemu účelu potřebujeme, totiž: každá okolnost příčiny, která *není* pro účinek *lhostejná*, tj. okolnost takového druhu, že účinek nezůstává stále týž, když ona se mění jakkoli, musí se *dát úplně určit* pouhými pojmy, přičemž z názorů jsou vzaty za základ nanejvýš některé takové, které jsou i pro určení účinku potřebné.

Teď, když jsme toto předeslali, dají se naše předchozí tvrzení snadno zdůvodnit. Neboť kdyby byly

1. třeba jen dva okamžiky, α a β, jejichž vzdálenost by byla nekonečněkrát větší nebo menší než vzdálenost mezi jinými okamžiky γ a δ, vznikl by z toho nesmysl, neboť stav světa, který má nastat v okamžiku β, by se vůbec nedal určit z toho stavu, který byl v okamžiku α, připočteme-li ještě boží působení za ono období a velikost období $\alpha\beta$ samého. Neboť i k určení stavu, v němž jsou stvořené bytosti, dokonce i jen k určení *velikosti jejich sil* v jediném okamžiku α, je nutno vzít za základ zvláštní jednotku; a protože tyto síly jsou jen *proměnnými silami*, nelze jejich velikost posoudit jinak, než vzhledem k dané časové jednotce, během níž tyto síly uplatní daný účinek. Vezměme tedy (což nám musí

být dovoleno) časový úsek $\gamma\delta$ za tuto časovou jednotku, pak vzdálenost, oddělující okamžik α od β, nebude možno určit onou časovou jednotkou, neboť se jeví být nekonečně velká nebo nekonečně malá, a to i v tom nejpříznivějším případě, kdy se při této jednotce dají přesně určit všechny síly stvořených substancí, existující v okamžiku α, a tedy se dá zcela přesně určit všechno ostatní, co náleží k úplné příčině stavu světa, jenž nastane v okamžiku β. Je-li tedy naopak přípustné uvažovat o každém stavu světa (za podmínek již vícekrát zmíněných) jako o příčině libovolného pozdějšího stavu: pak nemohou existovat ani dva okamžiky α a β, jejichž vzdálenost by se jevila být nekonečně velkou nebo nekonečně malou ve srovnání se vzdáleností, ve které je dvojice druhých okamžiků γ a δ.

2. Kdyby existovaly třeba jen dva body v prostoru a a b, jejichž vzdálenost by se ukázala být ve srovnání s dvojicí jiných bodů c a d nekonečně velkou nebo nekonečně malou: pak by patřilo k určení stavu světa v jakémkoli okamžiku α mimo jiné i to, určit velikost síly (třeba přitažlivosti nebo odpudivosti), kterou působí substance A, nacházející se v onom okamžiku právě v místě a, na substanci B v místě b. Ukázalo by se však, že je to u této jedné síly nemožné, a to i v tom nejpříznivějším případě, kdyby se to zdařilo u všech ostatních sil, přijmeme-li totiž (jak je jistě dovoleno) vzdálenost cd za jednotku délky. Neboť i kdyby přitažlivá nebo odpudivá síla, kterou působí substance A na podobnou substanci B ve vzdálenosti, zvolené za jednotku délky ($= cd$), měla zcela určitou velikost; byla by přece, a právě proto že tato veličina je určitá, velikost přitažlivosti nebo odpudivosti neurčitelná, kdyby poměr vzdáleností $ab : cd$, na němž v každém případě závisí, byl nekonečný a tím neurčitý.

3. Kdyby konečně existovala i jen jediná síla k, která by se jevila být nekonečně velkou nebo nekonečně malou ve srovnání s jinou silou l: pak, označíme-li α okamžik, kdy tento poměr platí, jevila by se právě proto veličina k jako nekonečně velká nebo nekonečně malá, tj. neurčitelná, a to i v tom nejpříznivějším případě, kdyby ostatní síly při zvolených jednotkách času a prostoru byly konečné, čímž by také l byla konečná veličina. Celkový stav světa v okamžiku α jevil by se být neurčitelný a nastala by tak nemožnost, odvodit nějaký pozdější stav světa jako účinek jím vyvolaný.

§ 28

Doufám, že jsem v předchozím určil základní pravidla, dovolující posoudit všechna podivně znějící učení, která ještě máme v dalším uvést, a na jejichž základě se musí dát rozhodnout, zda se oněch učení musíme vzdát jako omylů, či zda je musíme zachovat jako věty, které jsou pravdami, přestože se zdají být protimyslné. Pořadí, v němž tyto paradoxy uvedeme, nechť je stanoveno vědeckou oblastí, do které patří, a jejich vlastní, větší či menší závažností.

První a nejrozsáhlejší věda, v jejichž oblastech se potkáváme s paradoxy nekonečna je — jak nám již některé příklady ukázaly — obecná nauka o veličinách, kde o ně není nouze, dokonce i v samé nauce o číslech. Těmi tedy chceme začít.

Již pojem počítání s nekonečnem budí zdání, jak přiznávám, že skrývá vnitřní spor. Neboť chtít něco počítat znamená přece, pokusit se o jeho určení čísly. Jak se však chceme pokusit o určení nekonečna čísly — onoho nekonečna, které je podle našeho vlastního výkladu vždy něčím, co považujeme za množinu, sestávající z nekonečně mnoha částí, tj. za množinu, která je větší než každé číslo, která tedy nemůže být určena údajem pouhého čísla? — Avšak tato pochybnost zmizí, uvážíme-li, že správně prováděné počítání s nekonečnem není výpočtem, neboť ten právě u nekonečna není určitelný žádným číslem, není totiž výpočtem nekonečného množství o sobě, nýbrž má jen za účel určit poměr jednoho nekonečna k jinému nekonečnu; což se ovšem dá v určitých případech provést, jak chceme ukázat na větším počtu příkladů.

§ 29

Kdo připustí, že vůbec existují nekonečná množství a nekonečné veličiny, ten již nemůže popřít, že existují nekonečné veličiny, které se právě svojí veličinou (velikostí) velmi rozmanitě odlišují. Znázorníme-li si řadu přirozených čísel takto

$$1, 2, 3, 4, \ldots n, n+1, \ldots \text{ in inf.},$$

pak bude

$$1 + 2 + 3 + 4 \ldots n + (n + 1) \ldots \text{in inf.}$$

znakem součtu těchto přirozených čísel: avšak další znak

$$1^\circ + 2^\circ + 3^\circ + 4^\circ + \ldots n^\circ + (n + 1)^\circ + \ldots \text{in inf.},$$

v němž jednotliví sčítanci 1°, 2°, 3°, ... představují vesměs pouhé jednotky, bude označovat množinu všech přirozených čísel. Jestliže ji označíme $\overset{o}{N}$ a utvoříme rovnici pouze symbolickou

$$1^\circ + 2^\circ + 3^\circ + \ldots + n^\circ + (n + 1)^\circ + \ldots \text{in inf.} = \overset{o}{N} \ldots \quad (1),$$

a označíme-li právě tak množinu přirozených čísel počínajíc $(n + 1)$ znakem $\overset{n}{N}$, a utvoříme tak rovnici

$$(n + 1)^\circ + (n + 2)^\circ + (n + 3)^\circ + \ldots \text{in inf:} = \overset{n}{N} \quad \ldots (2),$$

dostaneme odečtením rovnici, které jistě nelze nic vytknout

$$1^\circ + 2^\circ + 3^\circ + \ldots + n^\circ = n = \overset{o}{N} - \overset{n}{N} \quad \ldots (3),$$

z níž vidíme, že dvě nekonečné veličiny $\overset{o}{N}$ a $\overset{n}{N}$ mají někdy zcela určitý konečný rozdíl.

Označíme-li naproti tomu písmenem $\overset{o}{S}$ veličinu, kterou udává součet všech přirozených čísel, nebo napíšeme-li rovnici pouze symbolickou

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n + 1) + \ldots \text{in inf.} = \overset{o}{S} \quad \ldots (4),$$

pochopíme ihned, že $\overset{o}{S}$ musí být mnohem větší než $\overset{n}{N}$; avšak nepodaří se nám tak snadno určit přesně rozdíl obou těchto nekonečných veličin nebo i jejich vzájemný (geometrický) poměr. Neboť kdybychom, jak to jistě mnozí učinili, chtěli napsat rovnici

$$\overset{o}{S} = \frac{\overset{o}{N} \cdot (\overset{o}{N} + 1)}{2}$$

neměli bychom k jejímu ospravedlnění žádný jiný důvod než to, že pro každou konečnou množinu členů platí rovnice

$$1 + 2 + 3 \ldots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2},$$

z čehož se zdá vyplývat, že při celé nekonečné množině čísel přejde pouze n v $\overset{o}{N}$. Avšak tak tomu jistě není: neboť nemá smysl hovořit o posledním členu nekonečné řady, který by měl hodnotu $\overset{o}{N}$.
Vezmeme-li však za základ rovnici pouze symbolickou (1), bude ovšem dovoleno odvodit také tyto rovnice, násobíme-li postupně oba členy $\overset{o}{N}$:

$$1^\circ . \overset{o}{N} + 2^\circ . \overset{o}{N} + 3^\circ . \overset{o}{N} + \ldots \text{in inf.} = (\overset{o}{N})^2$$

$$1^\circ . (\overset{o}{N})^2 + 2^\circ . (\overset{o}{N})^2 + 3^\circ . (\overset{o}{N})^2 + \ldots \text{in inf.} = (\overset{o}{N})^3$$

a tím se přesvědčíme, že existují také nekonečné veličiny tak zvaných *vyšších řádů*, z nichž jedna převyšuje nekonečněkrát jinou. Že jsou však i nekonečné veličiny, které jsou v jakémkoli racionálním a rovněž iracionálním poměru $\alpha : \beta$, plyne již z toho, že $\alpha . \overset{o}{N}$ a $\beta . N$ je dvojice rovněž nekonečných veličin, které se k sobě mají jako $\alpha : \beta$, označuje-li jen $\overset{o}{N}$ nějakou konstantní nekonečnou veličinu.

Nahlédneme jistě stejně jasně, že přestože celá *množina* veličin, ležících *mezi* dvěma danými, např. mezi 7 a 8, je *nekonečná*, a proto nemůže být určena žádným sebe větším číslem, závisí jen a jen na tom, jak velká je vzdálenost oněch dvou hraničních veličin, tj. na veličině 8 — 7, a tedy musí být stejná, jakmile je tato vzdálenost stejná. Za tohoto předpokladu, označíme-li množinu všech veličin ležících mezi a a b

$$\text{Mult}\,(b - a),$$

budou existovat nesčetné rovnice tohoto tvaru:

$$\text{Mult}\,(8 - 7) = \text{Mult}\,(13 - 12);$$

a rovněž tak tvaru

$$\text{Mult}\,(b - a) : \text{Mult}\,(d - c) = b - a : d - c,$$

proti jejichž správnosti se nedá uvést žádný platný důvod.

§ 30

A jako dokládá již těchto několik příkladů dostatečně, že existuje počítání s nekonečně velkým, tak existuje i počítání s nekonečně malým. Neboť je-li $\overset{o}{N}$ nekonečně velké, představuje

$$\frac{1}{\overset{o}{N}}$$

nutně veličinu, která je nekonečně malá, a nenalezneme žádný důvod prohlásit takovou představu za bezpředmětnou, alespoň ne v obecné nauce o veličinách. Neboť položíme-li otázku, abychom uvedli alespoň jediný příklad, jaká je pravděpodobnost že někdo, kdo nazdařbůh vystřelí kouli, vystřelí ji tak, aby její střed prošel na své cestě přesně středem onoho jablka, visícího na tomto stromě: musí každý přiznat, že množina všech možných případů o stejné nebo menší pravděpodobnosti je tu nekonečná, z čehož tedy plyne, že stupeň oné pravděpodobnosti má velikost = nebo < nějaké $\frac{1}{\infty}$.

Již tím však je prokázáno, že máme nekonečně mnoho nekonečně malých veličin, z nichž jedna může být ke druhé v libovolném poměru, zejména může být i nekonečněkrát větší; proto je také nekonečně mnoho řádů jak mezi nekonečně velkými, tak i mezi nekonečně malými veličinami; a bude ovšem možné najít dokonce mnohé správné rovnice mezi veličinami tohoto druhu, dodržíme-li určitá pravidla.

Je-li např. již stanoveno, že hodnota proměnné veličiny y závisí na jiné veličině x tak, aby pro ně stále platila rovnice:

$$y = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

a je-li slučitelné s povahou onoho zvláštního druhu veličin, označených tu x a y, aby byly také nekonečně malé, tedy aby též mohly nabývat nekonečně malých přírůstků: pak musí nutně platit i následující rovnice, necháme-li vzrůst x o nekonečně malou část, označenou dx, a příslušnou změnu y označíme dy:

$$y + dy = (x + dx)^4 + a(x + dx)^3 + b(x + dx)^2 + c(x + dx) + d,$$

z níž také vyplývá nesporně další:

$$\frac{dy}{dx} = (4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c) + (6x^2 + 3ax + b)\,dx +$$

$$+ (4x + a)\,dx^2 + dx^3,$$

která ukazuje, jak závisí poměr obou nekonečně malých veličin nejenom na a, b, c, a x, nýbrž i na hodnotě proměnného dx.

§ 31

Avšak většina matematiků, kteří se odvažují počítat s nekonečnem, jde mnohem dále, než připouštějí principy zde vytknuté. Nejen že si dovolují bez pochybností předpokládat jednou nekonečně velké, jindy nekonečně malé u veličin, které takovými podle své povahy nemohou být (příklady toho budou teprve v dalším uvedeny): ale dovolují si také položit sobě rovnými veličiny, které vznikají součtem nekonečné řady, jindy zase prohlásit jednu za větší nebo menší jen proto, že členy jedné řady lze spojit do dvojic se členy druhé řady tak, že pro každý pár platí onen vztah rovnosti nebo nerovnosti, ačkoliv jejich množiny si nejsou zřejmě rovny; odvážili se říci, že vymizí jako pouhá nula nejen každá nekonečně malá veličina sčítaná s veličinou konečnou, nebo i každá nekonečně malá veličina vyššího řádu vedle veličiny nižšího řádu, ale dokonce že vymizí v součtu i každá nekonečně velká veličina nižšího řádu vedle veličiny vyššího řádu; aby ospravedlnili alespoň trochu svoji početní metodu, založenou na této větě, připadli na tvrzení, že je dovoleno pokládat i pouhou nulu za dělitele, a že podíl

$$\frac{1}{0}$$

není v podstatě ničím jiným, než nekonečně velkou veličinou, naproti tomu podíl $\frac{0}{0}$ že označuje veličinu zcela neurčitou. Musíme dokázat, jak nesprávné a zavádějící jsou tyto pojmy, protože jsou i dnes více nebo méně v módě.

§ 32

Ještě v roce 1830 se pokusil dokázat autor, podepsaný M. R. S., v Gergonnových Annales de Mathématique (Sv. 20, č. 12), že známá nekonečná řada

$$a - a + a - a + a - a + \ldots \text{ in inf.}$$

má hodnotu $\frac{a}{2}$; položiv hodnotu oné řady $= x$, byl přesvědčen, že smí činit závěr

$x = a - a + a - a + \ldots$ in inf. $= a - (a - a + a - a + \ldots$ in inf.), kde řada, uzavřená v závorkách, je identická s řadou, která se má vypočíst, a tedy že se může znovu položit $= x$, což dává

$$x = a - x$$

a tedy $x = \frac{a}{2}$.

Klamný závěr tu není skryt příliš hluboko. Řada v závorce nemá zřejmě týž počet členů jako ta, která byla ponejprv položena $= x$; ale chybí jí první a. Její hodnota, kdyby ji vůbec bylo možno udat, by musila být označena $x - a$, což by však dávalo identickou rovnici

$$x = a + x - a.$$

„Avšak právě v tom“ mohlo by se třeba říci, „je něco paradoxního, že tato řada, která není jistě nekonečně velká, by neměla mít přesně určitelnou, měřitelnou hodnotu, zvláště když vzniká do nekonečna pokračujícím dělením čísla a číslem $2 = 1 + 1$, což je způsob vzniku, který mluví zcela pro to, aby její skutečná hodnota byla $\frac{a}{2}$.“

Připomínám, že existence výrazů pro veličiny, které neoznačují žádnou skutečnou veličinu, není sama o sobě ničím nepochopitelným, jak obecně uznáváme a musíme uznat u nuly.

Zvláště pak řada, prohlásíme-li, že o ní chceme uvažovat jako o veličině, totiž o součtu jejích členů, musí být právě vzhledem k pojmu součtu (který patří k množinám, tj. k takovým souhrnům, u nichž není třeba dbát na pořadí jeho částí) taková, že nedozná žádné změny své hodnoty — ať provedeme jakoukoli změnu v pořadí jejích členů. U veličin musí totiž platit:

$$(A + B) + C = A + (B + C) = (A + C) + B.$$

Tato vlastnost nám dává jasný důkaz, že znak, o kterém hovoříme:

$$a - a + a - a + a - a + \ldots \text{in inf.},$$

není výrazem pro skutečnou veličinu. Neboť na veličině, která je tu znázorněna, bychom jistě nic nezměnili, kdyby vůbec nějaká veličina tím znázorněna byla, jestliže bychom obměnili onen znak takto:

$$(a - a) + (a - a) + (a - a) + \ldots \text{in inf.}, \qquad (1)$$

neboť se tu nic jiného nestalo, než že se dva přímo po sobě následující členy spojily v částečný součet: což zřejmě musí být možné, neboť daná řada nemá vskutku mít poslední člen. Tím však dostaneme

$$0 + 0 + 0 + \ldots \text{in inf.},$$

což je zřejmě pouze $= 0$.

Právě tak se však nezmění nic na veličině, kterou onen výraz představuje, kdyby vskutku nějakou představoval, když ji přetvoříme takto:

$$a + (-a + a) + (-a + a) + (-a + a) + \ldots \text{in inf.} \qquad (2)$$

kde s výjimkou prvního členu spojíme vždy dva z následujících členů řady v částečný součet, nebo také takto:

$$-a + (a - a) + (a - a) + (a - a) + \ldots \text{in inf.}, \qquad (3)$$

kterou obdržíme z (1), vyměníme-li členy každého páru a na výrazu, který tak obdržíme, provedeme tutéž změnu, kterou (2) vznikla z (1). Kdyby tedy nebyl uvedený výraz pro veličinu bezpředmětný, musily by všechny výrazy (1), (2) a (3) označovat tutéž veličinu; neboť je jasné, že představa veličiny součtu jedné a téže množiny nemůže reprezentovat více veličin navzájem různých, jak je tomu například u představ $\sqrt{+1}$, arc. Sin. $= \frac{1}{2}$, a jiných. Sama představa veličiny, kterou máme před sebou:

$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ in inf. by musila být položena jak $= +a$, tak také $= -a$, není-li zcela bezpředmětná, a to tímtéž právem, jakým bychom ji chtěli položit rovnou nule (kterou ovšem také nazýváme obvykle veličinou v nevlastním smyslu); což je úplně nesmyslné a opravňuje nás k závěru, že máme před sebou zcela bezpředmětnou představu.

Je pravda, že řada, o které jsme mluvili, se jeví být podílem, který vznikne nekonečně pokračujícím dělením čísla a číslem $2 = 1 + 1$; ale všechny řady, které takto vzniknou, mohou pochopitelně právě proto, že ono dělení ponechává stále zbytek (v našem případě střídavě jednou $-a$ a jednou $+a$), udávat pravou hodnotu podílu $\left(\text{zde } \frac{a}{2}\right)$ nejvýše tenkrát, stávají-li se zbytky, vznikající dalším dělením, menšími než jakkoli malá veličina, jak tomu je v případě řady, o níž jsme uvažovali v § 18, $a + ae + ae^2 + \ldots$ in inf., která je vytvořena dělením čísla a číslem $1 - e$, pokud $e < 1$. Jestliže však, jako v tomto případě, je $e = 1$ nebo dokonce $e > 1$, kdy zbytky rostou tím výše, čím déle se v dělení pokračuje, není nic pochopitelnějšího než to, že hodnotu řady nemůžeme položit rovnou podílu $\frac{a}{1-e}$. Neboť jak bychom směli položit rovnou $\frac{1}{11}$ řadu se střídajícími se znaménky:

$$1 - 10 + 100 - 1000 + 10000 - 100\,000 + \ldots \text{ in inf.},$$

která vzniká dělením čísla 1 číslem $1 + 10$? Kdo by ještě chtěl dát řadě, složené vesměs z kladných členů

$$1 + 10 + 100 + 1\,000 + \ldots \text{ in inf.}$$

hodnotu $-\frac{1}{9}$ jen proto, že k ní vede rozvoj $\frac{1}{1-10}$? Uvedený M. R. S. bere nicméně takováto sčítání stále ještě v ochranu a chce prokázat např. správnost rovnice

$$1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64 - 128 + \ldots \text{ in inf.} = \frac{1}{3}$$

pouze tím, že by mělo platit

$$x = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64 - \ldots$$
$$= 1 - 2\,(1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \ldots) = 1 - 2x,$$

přičemž se znovu opomine, že řada, obsažená v závorkách, není vůbec totožná s původní, neboť nemá již tutéž množinu členů. Že také tento výraz pro veličinu je bezpředmětný, vysvítá podobně jako u výrazu, o kterém jsme uvažovali dříve, poněvadž vede k výsledkům, jež si odporují. Neboť na jedné straně by musilo být

$$\begin{aligned} &1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64 - \ldots \\ &= 1 + (-2 + 4) + (-8 + 16) + (-32 + 64) + \ldots \\ &= 1 + 2 + 8 + 32 + 64 + \ldots \end{aligned}$$

na druhé straně pak stejně jistě:

$$\begin{aligned} &= (1 - 2) + (4 - 8) + (16 - 32) + (64 - 128) + \ldots \\ &= -1 - 4 - 16 - 64 - \ldots \end{aligned}$$

takže by vyšla dvojím oprávněným postupem pro týž výraz jednou nekonečně velká hodnota kladná, podruhé záporná.

§ 33

Nechceme-li se tedy ve svých početních operacích s nekonečnem dostat na scestí: nesmíme si nikdy dovolit, prohlásit dvě nekonečně velké veličiny, vzniklé sčítáním členů dvou nekonečných řad, již jen proto za rovné, nebo jednu za větší či menší než druhou, poněvadž každý člen jedné z nich je vždy buď roven jednomu členu druhé řady, nebo je větší či menší než on. Nesmíme rovněž jeden součet prohlásit jen proto za větší, poněvadž obsahuje všechny členy jiného součtu a krom toho ještě mnohé další, dokonce nekonečně mnoho členů (vesměs kladných), které v druhém součtu chybí. Neboť přesto přesevšechno může ještě sám být menší, dokonce nekonečněkrát menší, než tento. Příklad nám poskytne velmi známý součet všech čtverců přirozených čísel, srovnáme-li jej se součtem prvních mocnin těchto čísel. Jistě nemůže nikdo popřít, že každý člen řady všech čtverců

$$\left.\begin{aligned} &1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + \ldots \text{in inf.} = \\ &1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 + 100 \ldots \text{in inf.} = \end{aligned}\right\} \overset{2}{S}$$

se objeví také v řadě všech prvních mocnin přirozených čísel

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + \\ + 14 + 15 + 16 \ldots \text{in inf.} = \overset{1}{S},$$

poněvadž je také přirozeným číslem; rovněž tak, že v poslední řadě $\overset{1}{S}$ je vedle všech členů $\overset{2}{S}$ ještě mnoho jiných (dokonce nekonečně mnoho) členů, které chybí v řadě $\overset{2}{S}$, poněvadž právě nejsou druhými mocninami. Nicméně $\overset{2}{S}$, součet všech čtverců, není menší, nýbrž nesporně větší než součet prvních mocnin všech čísel $\overset{1}{S}$. Neboť za prvé jistě je v obou řadách táž *množina členů* (ještě než o nich uvažujeme jako o součtech, a tedy dokud nejsou rozložitelné v libovolné množiny částí), přesto to, že se to zdá být naopak. Tím, že povýšíme každý jednotlivý člen řady $\overset{1}{S}$ na čtverec řady $\overset{2}{S}$, měníme pouze utváření (velikost) těchto členů, nikoli jejich množství. Jestliže však je množina členů v $\overset{1}{S}$ a $\overset{2}{S}$ táž, je jasné, že $\overset{2}{S}$ musí být mnohem větší než $\overset{1}{S}$, neboť s výjimkou *prvního* členu je každý z ostatních v $\overset{2}{S}$ rozhodně větší než jemu odpovídající člen $\overset{1}{S}$; takže $\overset{2}{S}$, chápaná jako veličina, obsahuje v sobě celé $\overset{1}{S}$ jako díl a má ještě další díl, který opět poskytne nekonečnou řadu o stejném počtu členů jako $\overset{1}{S}$, totiž:

$$0, 2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, \ldots n(n-1) \ldots \text{in inf.},$$

v níž, s výjimkou *dvou* prvních členů, jsou všechny následující členy větší než odpovídající jim členy v $\overset{1}{S}$, takže součet celé řady je nesporně opět větší než $\overset{1}{S}$. Odečteme-li od tohoto zbytku opět řadu $\overset{1}{S}$; dostaneme jako druhý zbytek řadu o téže množině členů

$$-1, 0, 3, 8, 15, 24, 35, 48, \ldots n(n-2), \ldots \text{in inf.},$$

v níž, s výjimkou prvních *tří* členů, jsou opět všechny další členy větší, než odpovídající jim členy v $\overset{1}{S}$; takže i tento třetí zbytek musíme nesporně považovat za větší než $\overset{1}{S}$. Ježto se dá v těchto závěrech bez omezení pokračovat, vysvítá z toho, že součet $\overset{2}{S}$ je nekonečněkrát větší než součet $\overset{1}{S}$; neboť máme obecně

$$\overset{2}{S} - m\overset{1}{S} = (1 - m) + (2^2 - 2m) + (3^2 - 3m) + (4^2 - 4m) + \ldots$$
$$+ \ldots + (m^2 - m^2) + \ldots + n(n - m) + \ldots \text{in inf.},$$

v kteréžto řadě je pouze konečný počet záporných členů, m-tý je 0, všechny následující však jsou kladné a rostou do nekonečna.

§ 34

Než postavíme do příslušného světla nesprávnost ostatních tvrzení, o nichž jsme se zmínili již v § 31, musíme ještě určit pojem nuly trochu přesněji, než se obvykle děje.*)

Nesporně chtějí všichni matematikové, aby se spojoval se znakem 0 vědomě jen takový pojem, který připouští napsat obě rovnice

$$\text{I. } A - A = 0, \qquad \text{II. } A \pm 0 = A,$$

a to ať je A jakýkoli výraz pro veličinu, lhostejno, zda odpovídá skutečné či zcela bezpředmětné veličině. Tu přizná každý, že je to přípustné jen tenkrát, nedíváme-li se na znak samotné 0 jako na reprezentanta skutečné veličiny, nýbrž, označuje-li nám pouze nepřítomnost nějaké veličiny, a považujeme-li znak $A \pm 0$ za požadavek, ani k libovolné veličině, označené A, ve skutečnosti nic nepřičítat, ani od ní nic neodčítat. Bylo by však omylem domnívat se, že objasnění nuly jako bezpředmětné veličiny postačí samo k úplnému určení pojmu, který s tímto znakem matematikové spojují. Neboť v matematice jsou zřejmě obvyklá ještě jiná označení veličin, jako zejména znak $\sqrt{-1}$, v analyze tak neobyčejně důležitý, která jsou rovněž bezpředmětná a která přesto nesmíme pokládat za ekvi-

*) Velice rád přiznávám panu M. Ohmovi zásluhu, že byl ve svém velmi cenném „Versuch eines vollkommen consequenten Systems der Mathematik“ (2. vyd. Berlin 1828) první, kdo upozornil matematickou veřejnost na obtíže pojmu nuly.

valentní 0, ani s nimi nesmíme tak zacházet. Určíme-li však přesněji význam znaku 0 vysvětlením: má být chápán tak, aby obecně platily rovnice I. a II.: pak ustavujeme pojem, který je na jedné straně dostatečně široký, jak to vyžaduje potřeba a zájem vědy, a přece je na druhé straně dostatečně úzký, aby se zabránilo jakémukoli jeho zneužití.

Přihlédneme-li blíže, vidíme, že požadovanou obecnou platností obou rovnic I. a II. se neurčuje specificky jen pojem nuly, ale že i pojmy sčítání a odčítání, které tu vystupují pod znaky $+$ a $-$, budou stanovením těchto rovnic zvláštním způsobem rozšířeny, což je vědě velmi na prospěch.

Právě tak vyžaduje krom toho ještě prospěch vědy, aby se dal i pojem násobení chápat v tak širokém smyslu, že lze připojit rovnici

$$\text{III.}\quad 0 \times A = A \times 0 = 0$$

bez ohledu na to, čím je A (ať je tedy konečnou nebo nekonečně velkou či nekonečně malou veličinou, nebo i pouhou představou bezpředmětné veličiny jako $\sqrt{-1}$ nebo 0).

Konečně musíme též požadovat v zájmu vědy, abychom mohli chápat i pojem dělení tak obecně, jak jen je slučitelné se třemi již stanovenými rovnicemi, abychom tedy mohli i v rovnici

$$\text{IV.}\quad B \times \left(\frac{A}{B}\right) = \left(\frac{A}{B}\right) \times B = A$$

dát znaku B tak široký rozsah, jak jen připouštějí ony tři rovnice v té obecnosti, která jim byla přiznána. Ty pak vždy připouštějí, aby B označovalo libovolnou konečnou i nekonečně velkou či nekonečně malou veličinu, a jistě též imaginární veličinu $\sqrt{-1}$; avšak nepřipouštějí, aby se položilo $B = 0$, tj. abychom jednou užili nuly nebo výrazu jí ekvivalentního jako dělitele. Neboť poněvadž podle III. musí být $0(A) = 0$ při jakémkoli A: musilo by pak být také $B\left(\frac{A}{B}\right) = 0$, vložíme-li do IV. $B = 0$, což by s rovnicí $B\left(\frac{A}{B}\right) = A$, požadovanou ve IV, souhlasilo jen v jediném případě, kdyby také $A = 0$. Abychom se nedostali do kontradikcí, musíme tedy stanovit pravidlo, že nesmíme nikdy užít nuly nebo výrazu jí ekvivalentního jako dělitele v rovnici, která má být ještě něčím jiným, než pouhou identitou, jakou je třeba

$$\frac{A}{0} = \frac{A}{0}.$$

Že je ohled na toto pravidlo naprosto nutný, dokazují vedle toho, co bylo řečeno, velmi mnohé nesmyslné důsledky, které plynou z úplně správných premis, jakmile si dovolíme dělit nulou.

Budiž a jakákoli reálná veličina: kdyby mělo být přípustné dělení výrazem ekvivalentním nule, např. výrazem 1 — 1, pak vyjde podle známé metody dělení, jistě zcela správné, tato rovnice:

$$\frac{a}{1-1} = a + a + \ldots + a + \frac{a}{1-1},$$

kde může vystupovat libovolný počet sčítanců formy a. Odečteme-li teď na obou stranách stejný výraz veličiny $\frac{a}{1-1}$: dostaneme zcela nesmyslnou rovnici:

$$a + a + \ldots + a = 0.$$

Je-li a a b dvojice různých veličin: pak platí dvě identické rovnice

$$a - b = a - b$$

$$b - a = b - a.$$ Tedy sečtením také

$$a - a = b - b \text{ nebo}$$

$$a(1-1) = b(1-1).$$

Je-li nyní dovoleno dělit oba členy rovnice činitelem ekvivalentním nule, dostaneme nesmyslný výsledek $a = b$, ať jsou a a b jakákoliv. Je však přece všeobecně známo, že narazíme při rozsáhlejších výpočtech až příliš snadno na nesprávný výsledek, odstraníme-li z obou stran rovnice společného činitele, aniž bychom se dříve přesvědčili, že není nulou.

§ 35

Bude teď snadné ukázat, jak nesprávné tvrzení mnozí vyslovují, že totiž vymizí nejen nekonečně malá veličina vyššího řádu, spojená sčítáním nebo odčítáním s jinou veličinou nižšího řádu nebo s veličinou konečnou, nýbrž i každá konečná veličina, ba dokonce nekonečně velká jakkoli vysokého řádu, spojená sčítáním nebo odčítáním s jinou nekonečně velkou veličinou vyššího řádu, jako by byla pouhou nulou. Kdyby se to mělo chápat tak — a v obvyklé řeči, která zní ještě trochu méně opatrně než výrazy právě užité, nejsme před takovými špatnými výklady smyslu varováni — tedy kdyby se to mělo, jak říkám, vykládat tak, že z komplexu obou veličin $M \pm m$, kde první je nekonečněkrát větší než druhá, by se tato druhá směla prostě vynechat, i když by snad v postupu výpočtu vypadla sama veličina M (například odečtením veličiny jí rovné): pak teprve nepotřebuji dokazovat mylnost tohoto pravidla.

Řeknou však: tak to není míněno. Prohlásí-li se veličiny M a $M \pm m$ za rovné, nemíní se tím, že zaručují stejný výsledek, jestliže do pokračujícího výpočtu vstupují nová spojení přičítáním nebo odčítáním; nýbrž jejich rovnost spočívá jen v tom, že vedou k stejným výsledkům, měříme-li je výslovně takovou veličinou N, která je s nimi stejného řádu a k jedné z nich, např. M, je v konečném (tedy plně určitelném) poměru. To by vskutku bylo to nejmenší, co bychom byli oprávněni požadovat k objasnění, že dvě veličiny jsou si rovny. Splňují však M a M $\pm$ m alespoň to? Je-li jedna z nich, např. M, v iracionálním poměru k míře N, může se ovšem přihodit, že při nejběžnějším měření najdeme k libovolně vysokému číslu q jiné číslo p takové vlastnosti, aby platilo

$$\frac{p}{q} < \frac{M}{N} < \frac{p+1}{q}$$

a může se stát, že také $\dfrac{M \pm m}{N}$ zůstává stále v těchže mezích, tj. že platí také

$$\frac{p}{q} < \frac{M \pm m}{N} < \frac{p+1}{q}.$$

Je-li však poměr $\dfrac{M}{N}$ racionální: pak existuje takové q, pro něž

$$\frac{M}{N} = \frac{p}{q}$$

a naproti tomu $\frac{M \pm m}{N}$ je buď $>$ nebo $< \frac{p}{q}$; tu se projevuje rozdíl těchto veličin dokonce ve srovnání s pouhými čísly (konečnými veličinami). Jak by se pak mohly nazývat stejnými?

§ 36

Aby takovým kontradikcím zabránili, utíkají se mnozí matematikové podle vzoru Eulerova k výkladu, že nekonečně malé veličiny jsou skutečně pouhými nulami, kdežto nekonečně velké veličiny jsou podíly, vznikající z konečných veličin dělením pouhou nulou. Tímto stanovením se víc než plně ospravedlnilo vymizení nebo odpadnutí nekonečně malé veličiny, spojené přičítáním ke konečné veličině; avšak tím nesnadnější bylo učinit pochopitelnou existenci nekonečně velkých veličin, stejně jako možnost vzniku konečné veličiny z podílu dvou nekonečně malých či nekonečně velkých veličin, a existenci nekonečně malých a velkých veličin vyšších řádů. Neboť nekonečně velká veličina se tak objevila při dělení nulou nebo při dělení výrazem, který je s ní ekvivalentní (a který je vlastně bezpředmětnou představou), tedy způsobem, který je početními zákony zakázán; avšak na všech oněch konečných nebo i nekonečných veličinách, které vznikly dělením nekonečné veličiny jinou nekonečnou veličinou, ulpěla skvrna nelegitimního zrodu zmnohonásobená.

Co zdánlivě ještě nejspíše mluví pro správnost tohoto počítání s nulami, je jistě způsob, jak se má určit hodnota veličiny y, závislé na x, která má být určena rovnicí

$$y = \frac{Fx}{\Phi x}$$

v tom zvláštním případě, když určitá hodnota $x = a$ učiní buď jen jmenovatele tohoto zlomku, nebo současně i čitatele i jmenovatele rovné nule. V prvním případě, když $\Phi a = 0$, avšak Fa zůstává konečnou veličinou, usuzujeme, že y se stalo nekonečně velkým. V druhém případě však, když jak Φa tak $Fa = 0$, uzavíráme, že oba výrazy Φx a Fx obsahují jednou nebo vícekrát činitele tvaru $(x - a)$, a že tedy musí mít formu

$$\Phi x = (x - a)^m \,.\, \varphi x; \qquad Fx = (x - a)^n \,.\, fx:$$

kde ovšem φx nebo fx mohou představovat i konstantu. Je-li nyní $m > n$, uzavíráme, že také po odstranění společných činitelů jmenovatele a čitatele, kterým se hodnota zlomku $\frac{Fx}{\Phi x}$ nemění, bude jmenovatel ještě stále pro $x = a$ nulou a setrváme tak při tvrzení, že hodnota $x = a$ by dávala nekonečně velké y. Je-li však $m = n$, považujeme veličinu, kterou vyjadřuje $\frac{fa}{\varphi a}$, za pravou hodnotu y, protože musí platit $\frac{Fx}{\Phi x} = \frac{fx}{\varphi x}$. A je-li konečně $m < n$, uzavíráme, že hodnota $x = a$ učiní veličinu y nulou, protože nyní se stane

$$\frac{Fx}{\Phi x} = \frac{(x - a)^{n-m} \,.\, fx}{\varphi x}$$

pro $x = a$ nulou.

O tomto postupu soudím tolik. Je-li hodnota y, příslušná k $x = a$, prohlášena v uvedených případech za nekonečně velkou: pak to může být zřejmě tehdy a jen tehdy náhodou pravda, náleží-li y k druhu těch veličin, které také mohou být nekonečně velké; avšak při tom zůstává v platnosti, že tento výsledek, vyžadující zde dělení nulou, nevyplývá z daného výrazu. Ze samotné okolnosti, že se hodnota y prohlásí za trvale totožnou s hodnotou, udávanou výrazem $\frac{Fx}{\Phi x}$, se dá usuzovat na vlastnosti veličiny y jen při všech oněch hodnotách x, při nichž onen výraz představuje skutečnou veličinu, nikoli však při těch hodnotách x, kdy je tento výraz bezpředmětný; jak tomu je, když jeho jmenovatel, nebo jen jeho čitatel, nebo dokonce oba jsou nulou. Jistě se dá říci, že v zmíněném prvním případě, kde jen $\Phi x = 0$, se y stane větší, a ve druhém případě, kde jen $Fx = 0$, se y stane menší než jakákoli daná veličina, konečně v třetím případě, kde $\frac{Fx}{\Phi x}$ obsahuje stejný počet faktorů tvaru $(x - a)$ v čitateli i jmenovateli, blíží se y libovolně těsně k hodnotě $\frac{fa}{\varphi a}$, jestliže se x blíží libovolně těsně k hodnotě a: avšak z toho všeho neplyne nic pro povahu této hodnoty tam, kde výraz $\frac{Fx}{\Phi x}$ je bezpředmětný, tj. nepředstavuje vůbec žádnou hodnotu, protože nabývá buď formy samotné 0 nebo formy $\frac{c}{0}$ nebo dokonce formy $\frac{0}{0}$. Neboť věta o rovnosti hodnot dvou zlomků, z nichž jeden se liší od druhého jen vypuštěním společného činitele, obsaženého v čitateli i jmenovateli, platí jistě ve všech případech, jen v tom ne, kdy je tento čitatel nulou; protože jinak tímtéž právem, kterým bychom chtěli tvrdit, že $\frac{2 . 0}{3 . 0} = \frac{2}{3}$, by se také mohlo tvrdit, že libovolná veličina, např. $1000 = \frac{2}{3}$. Neboť jistě platí jak $300 . 0 = 0$, tak také $2 . 0 = 0$. Když se tedy smí položit $\frac{2 . 0}{3 . 0} = \frac{2}{3}$, smí se také položit

$$\frac{2 \times (3000 . 0)}{3 \times (2 . 0)} = \frac{(2 . 3000) . 0}{(3 . 2) . 0} = \frac{2 . 3000}{3 . 2} = 1000$$

Chybný závěr, který tu bije do očí, byl dříve jen proto méně nápadný, že se dělení činitelem $(x - a)$, ekvivalentním nule, provádí ve formě, která tuto nulovou hodnotu zakrývá. A protože odstranění tohoto činitele je v každém jiném případě dovoleno, předpokládáme tím důvěřivěji, že si je můžeme dovolit v tomto případě, neboť hodnota pro y, která se objeví, vyjde právě tak, jak ji domněle oprávněně očekáváme; vyjde totiž přesně tak, jak to vyžaduje zákon spojitosti, je-li hodnotou konečnou; vyjde nula, jestliže nejbližší hodnoty ubývají až k nule, a vyjde nekonečně velká hodnota, jestliže nejbližší hodnoty rostou do nekonečna. Avšak přitom se zapomíná, že zákonem spojitosti se neřídí všechny proměnlivé veličiny, dále, že veličina, která se stane libovolně malou, přibliží-li se x hodnotě a libovolně blízko, nemusí ještě proto být nulou při $x = a$; a že právě tak, roste-li do nekonečna, když x se blíží hodnotě a, nemusí se stát pro $x = a$ opravdu nekonečnou. Zejména v geometrii je nesčíslně mnoho veličin, které neznají žádný zákon spojitosti, například velikosti čar a úhlů, jež slouží k určení obvodů a povrchů mnohoúhelníků a mnohostěnů, a mnohé jiné.

§ 37

Ačkoliv můžeme dosavadnímu podání nauky o nekonečnu vytknout tolik závažných nedostatků, a domnívám se, že nikoli neprávem; přece je známo, že dostaneme většinou zcela správné výsledky, řídíme-li se s náležitou obezřetností pravidly, která jsou obecně zavedena pro počítání s nekonečnem. Takové výsledky by nikdy nemohly vycházet, kdyby neexistoval způsob, jak tuto početní metodu pojmout a jak s ní pracovat, který je vskutku bezvadný; a rád věřím, že to byl v podstatě tento způsob, který tanul na mysli bystrým objevitelům oné metody, ač nebyli ještě současně schopni vyložit své myšlenky o tom se vší zřetelností; což se v obtížných případech zdaří obvykle až po opětovaných pokusech.

Budiž mi tedy dovoleno, naznačit zde jen v několika málo obrysech, jak se musí podle mého mínění tato početní metoda pojímat, aby se dala dokonale ospravedlnit. Postačí pohovořit o postupu, který pozorujeme u tak zvaného diferenciálního a integrálního počtu, neboť metoda počítání s nekonečně velkým vyplyne z toho již snadno pouhým protikladem, zejména po tom všem, co již vykonal Cauchy.

Nepotřebuji tu vůbec tak omezující podmínku, která by jinak byla jistě považována za nutnou, že veličiny, s nimiž se počítá, se mohou stát nekonečně malými; což je omezení, kterým jsou z oblasti této početní metody předem vyloučeny všechny ohraničené veličiny časové a prostorové, také všechny síly ohraničených substancí, tedy v podstatě všechny veličiny, na jejichž určení nám právě nejvíce záleží. Nepožaduji nic jiného, než aby tyto veličiny měly svou derivovanou funkci (*une fonction derivée* podle výkladu Lagrageova), pokud jsou proměnnými, závisejícími na jedné nebo více jiných veličinách, ne však volně proměnnými, a to, aby ji měly i když ne pro všechny hodnoty své primitivní funkce, tedy alespoň pro všechny takové hodnoty, kde se má výpočtu platně užít. Jinými slovy, označuje-li x jednu z volně proměnných veličin a $y = fx$ veličinu na ní závislou: pak, má-li náš výpočet dát správný výsledek pro všechna x, ležící uvnitř intervalu $x = a$ a $x = b$, musí y záviset na x tak, že pro všechny hodnoty x, ležící uvnitř a a b podíl

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - fx}{\Delta x}$$

vzniklý dělením přírůstku y příslušným přírůstkem x, se libovolně blíží buď konstantní veličině, nebo veličině $f'x$, závislé pouze na x, vezmeme-li jen Δx dostatečně malé, a potom zůstává ještě stále tak blízko nebo se přibližuje ještě více, učiní-li se Δx ještě menší*). Je-li dána rovnice mezi x a y, je obecně známou a snadnou věcí, nalézt tuto derivaci y. Kdyby např.

$$y^3 = ax^2 + a^3 \tag{1}$$

měli bychom pro každé Δx, pokud jen není nulou,

$$(y + \Delta y)^3 = a(x + \Delta x)^2 + a^3 \tag{2}$$

odkud vyplývá podle známých pravidel

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2ax + a\Delta x}{3y^2 + 3y\Delta y + \Delta y^2} \tag{3}$$

$$= \frac{2ax}{3y^2} + \frac{3ay^2\Delta x - 6axy\Delta y - 2ax\Delta y^2}{9y^4 + 9y^3\Delta y + 3y^2\Delta y^2}$$

A hledaná derivace y nebo (podle Lagrangeova označení) y' by byla

$$\frac{2ax}{3y^2},$$

to jest funkce, která vznikne z výrazu $\frac{\Delta y}{\Delta x}$,

*) Dá se ukázat, že všechny závisle proměnné veličiny, jsou-li jen vůbec určitelné, musí být vázány tímto zákonem tak, že výjimky z něho, i když v nekonečném množství, mohou nastat vždy jen pro osamocené hodnoty jejich volných proměnných.

když po příslušném jeho rozvinutí, při němž totiž v čitateli i jmenovateli oddělíme členy, násobené Δx nebo Δy od ostatních, tedy ve výrazu

$$\frac{2ax + a\Delta y}{3y^2 + 3y\Delta y + \Delta y^2}$$

položíme obojí, jak Δx tak $\Delta y = 0$.

Nepotřebuji říkat, jak mnohonásobný užitek dává objev této derivace; jak se pomocí takové derivace dá vypočíst každý konečný přírůstek y, odpovídající konečnému přírůstku x; a jak se také dá určit původní funkce fx až na konstantu, je-li opačně dána jen derivace $f'x$.

Protože však, jak bylo právě poznamenáno, obdržíme derivovanou funkci závislé veličiny y vzhledem k její proměnné x, jakmile položíme ve výrazu

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

jak Δx, tak $\Delta y = 0$, když byl předtím tak rozvinut, aby ani Δx ani Δy se neobjevilo jako dělitel; nemusilo by jistě být tak nevhodné, označit derivaci třeba takto:

$$\frac{dy}{dx},$$

když přitom prohlásíme, že na jedné straně všechna Δx, Δy vyskytující se v rozvoji $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, anebo ovšem dx, dy psaná místo nich, máme považovat za pouhé nuly a tak s nimi zacházet; na druhé straně však, že znak $\frac{dy}{dx}$ se má chápat nikoli jako podíl dy a dx, nýbrž právě jako symbol derivace y podle x.

Je jasné, že proti takovému postupu již nemůže být vznesena námitka, že by připouštěl takové poměry veličin, které vůbec neexistují (nula k nule); neboť nechceme ono označení brát na vědomí nijak jinak, než jako pouhý znak.

Právě tak bezvadné bude i dále, když **druhou** derivaci y podle x, tj. tu veličinu, závislou pouze na x, (nebo snad také pouhou konstantu), které se podíl

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$$

libovolně blíží, jakmile jen můžeme vzít také Δx libovolně malé, označíme

$$\frac{d^2 y}{dx^2}$$

a vyložíme tak, že považujeme veličiny Δx^2, $\Delta^2 y$, vyskytující se v rozvoji $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$, za pouhé nuly a tak s nimi také zacházíme, avšak nesmíme vidět ve znaku $\frac{d^2 y}{dx^2}$ dělení nuly nulou, nýbrž jen symbol funkce, ve kterou přechází rozvoj $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$ po změně právě požadované.

Jestliže již předpokládáme, že znaky $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$, ... mají tento význam, můžeme přísně dovodit, že každá proměnná veličina, závisející stanovitelným způsobem na jiné volné proměnné x,

$$y = fx$$

je nanejvýš s výjimkou určitých izolovaných hodnot veličin x a Δx vázána rovnicí

$$f(x + \Delta x) = fx + \Delta x \,.\, \frac{dfx}{dx} + \frac{\Delta x^2}{1\,.\,2} \,.\, \frac{d^2 fx}{dx^2} + \frac{\Delta x^3}{1\,.\,2\,.\,3} \,.\, \frac{d^3 fx}{dx^3} + $$

$$+ \ldots, + \frac{\Delta x^n}{1\,.\,2 \ldots n} \,.\, \frac{d^n f(x + \mu \Delta x),}{dx^n},$$

kde $\mu < 1$.*)

---

*) Důkaz této věty, a to pro každý druh závislosti y na x, lhostejno, zda je nám známa a lze ji popsat dosavadními znaky či ne, byl autorem již dávno napsán a bude snad co nejdříve uveřejněn.

V.

Nikomu není neznámo, jak mnohé důležité pravdy obecné nauky o veličinách (zejména takzvané vyšší analýzy) mohou být zdůvodněny touto jedinou rovnicí. Avšak i v užité nauce o veličinách, v nauce o prostoru (geometrii) a v nauce o silách (statice, mechanice atd.) razí tato rovnice cestu k řešení nejtěžších problémů, např. rektifikace čar, komplanace ploch, kubatury těles, aniž by tu bylo třeba jakéhokoli sporného předpokladu, že něco je nekonečně malé, ani jiného domnělého principu, jako je známý archimedovský a mnohé jiné.

Je-li však dovoleno napsat rovnice takového druhu, jako je např. formule pro rektifikaci křivek v pravoúhlé souřadné soustavě

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]}$$

ve významu dříve vysvětleném: pak bude též možné, aniž bychom se vydali v nebezpečí omylu, napsat rovnice takového druhu, jako je třeba tato:

$$d(a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots) = bdx + 2cxdx + 3dx^2dx + \ldots;$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2;$$

nebo, označuje-li r poloměr kružnice křivosti u křivky s jednoduchou křivostí

$$r = -\frac{ds^3}{d^2y \,.\, dx}\text{; a mnohé jiné,}$$

kde stále pokládáme znaky dx, dy, dz, ds, d^2y atd. ne za znaky skutečných veličin, nýbrž spíše za znaky rovnocenné nule, a na celou rovnici se nedíváme jinak, než jako na komplex znaků, který je tak utvářen, že se nikdy neobjeví nesprávný výsledek — pokud s nimi provádíme pouze takové změny, které dovoluje algebra u všech znaků skutečných veličin (zde tedy také dělení dx apod.) — jestliže se nakonec podaří, aby nám znaky dx, dy, atd. vymizely na obou stranách rovnice.

Lze lehko pochopit, že tomu tak je a že tomu tak musí být. Neboť je-li např. rovnice

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}$$

bezvadná: jak by neměla být bezvadná i rovnice

$$ds^2 = dx^2 + dy^2;$$

když se dá právě uvedeným postupem okamžitě odvodit z této rovnice i rovnice předchozí?

Je konečně nasnadě, že nemůže vést k žádnému omylu, jestliže v nějaké rovnici, obsahující znaky dx, dy, . . ., vypustíme pro zkrácení postupu všechny ty sčítance, o kterých víme předem bezpečně, že na konci výpočtu odpadnou jako veličiny ekvivalentní nule. Tak můžeme zpozorovat ihned, dostaneme-li se např. nějakým výpočtem k rovnici (plynoucí z (1) a (2))

$$3y^2 \,.\, \Delta y + 3y \,.\, \Delta y^2 + \Delta y^3 = 2ax\Delta x + a \,.\, \Delta x^2,$$

která nabude tvaru

$$3y^2 \,.\, dy + 3y \,.\, dy^2 + dy^3 = 2axdx + adx^2,$$

že přejdeme-li k znakům ekvivalentním s nulou, odpadnou v každém případě nakonec sčítance, obsahující vyšší mocniny dy^2, dy^3, dx^2 a tak napíšeme tedy jen

$$3y^2 \,.\, dy = 2axdx;$$

odkud pak ihned vyplývá hledaná derivace y podle x

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2ax}{3y^2}.$$

Celý postup, abychom to ještě nakonec vyjádřili jedním slovem, spočívá na principech zcela podobných těm, na nichž je založeno počítání tak zvanými imaginárními veličinami (které jsou pouhými znaky, podobně jako naše dx, dy, . . .) anebo také zkrácená metoda dělení, nalezená v novější době, a jiné podobné zkrácené výpočty. Zde totiž postačí, právě tak jako tam, dokázat oprávněnost postupu tím, že dáme zavedeným znakům

$$\left(dx, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \sqrt{-1}, (\sqrt{-1})^3, \frac{\sqrt{-1}}{-\sqrt{-1}} \quad \text{atd.}\right)$$

jen takový význam, a dovolíme si provádět s nimi jen takové změny, že posléze jsou obě strany rovnice co do své pravdivosti pokaždé ekvivalentní, jestliže se totiž na konci objeví místo bezpředmětných znaků takové znaky, které označují skutečné veličiny.

§ 38

Obrátíme-li se k aplikované části nauky o veličinách, setkáme se s prvním paradoxem v oblasti nauky o čase, a to v pojmu času samého, pokud by měl mít povahu spojité rozlohy. Avšak již odedávna doléhají na nás proslulé zdánlivé kontradikce, které lidé domněle nacházeli v pojmu kontinua jako spojité rozlohy jak časové, tak prostorové, a dokonce materiální; že o nich budeme uvažovat společně.

Bylo velmi dobře rozpoznáno, že vše, co má rozlohu, musí být složeno z částí, jak to odpovídá jejímu pojmu; poznalo se dále, že se bez bludného kruhu nedá vysvětlit podstata rozlohy složením z takových částí, které již samy rozlohou mají; chtěli však nicméně najít spor i v předpokladu, že rozloha vzniká z částí, které již samy žádnou nemají, nýbrž jsou zcela jednoduché (časové okamžiky, body v prostoru, atomy, tj. jednoduché skutečné substance ve vesmíru).

Když byla položena otázka, co je na tomto posledním výkladu závadné, pravilo se jednou, že vlastnost, která chybí všem částem, nemůže příslušet ani celku; jindy zase, že dva body, jak v čase, tak v prostoru, a právě tak i dvě substance, mají mezi sebou nějakou vzdálenost, a že tedy nikdy netvoří kontinuum.

Nemusíme však opravdu mnoho uvažovat, abychom rozpoznali nesmyslnost těchto námitek. Vlastnost, která chybí všem částem, že by neměla příslušet celku? Právě naopak! Každý celek má a musí mít mnohé vlastnosti, které chybí částem. Automat má vlastnost napodobit určité pohyby živého člověka tak, že nás to až klame, avšak jednotlivé části, péra, kolečka atd. tuto vlastnost nemají. — Že každé dva okamžiky jsou odděleny nekonečnou množinou okamžiků, položených mezi nimi; že právě tak je mezi dvěma body prostoru nekonečná množina bodů, jež jsou položeny mezi nimi, a že dokonce v oblasti skutečna je mezi každými dvěma substancemi nekonečná množina jiných — to ovšem je nutno připustit; avšak jaký spor z toho plyne? Plyne z toho jen tolik, že pouhými dvěma body, ba ani třemi, čtyřmi, a každou konečnou množinou bodů se žádná rozloha nevytvoří. S tím vším jsme srozuměni, ba dokonce jsme srozuměni i s tím, že ani nekonečná množina bodů nepostačí vždy k vytvoření kontinua, např. jakkoli krátké čáry, nemají-li tyto body současně příslušné uspořádání. Pokusíme-li se totiž uvědomit si jasně pojem, který označujeme názvy „spojitá rozloha nebo kontinuum“: neobejdeme se bez vysvětlení, že kontinuum existuje tam, avšak také jen tam, kde existuje souhrn jednoduchých předmětů (bodů v čase nebo prostoru nebo též jednoduchých substancí), které jsou tak položeny, že každý jednotlivý z nich má v tomto souhrnu souseda, a to v každé vzdálenosti, která jen je dostatečně malá. Když tomu tak není, když je např. v daném souhrnu prostorových bodů jen jeden jediný, který není tak hustě obklopen sousedy, aby se dala prokázat existence souseda pro každou vzdálenost — jen když je dostatečně malá: pak říkám, že tento bod je osamocený (izolovaný) a že onen souhrn právě z tohoto důvodu netvoří dokonalé kontinuum. Neexistuje-li však v daném souhrnu bodů ani jediný osamocený bod v tomto smyslu, má-li tedy každý z nich v sebe menší vzdálenosti alespoň jednoho souseda: pak nezbývá již nic, co by nás opravňovalo, abychom tomuto souhrnu odepřeli název kontinua. Neboť co ještě bychom chtěli požadovat?

„Toto“ bude odpověď, „aby ke každému bodu existoval takový, který se ho přímo dotýká!“ — Avšak tu žádáme něco, co je zřejmou nemožností, co v sobě obsahuje spor. Neboť kdy chcete říci, že se dva body dotýkají? Snad když hranice jednoho (například jeho pravá strana) spadá v jedno s hranicí druhého (například s jeho levou stranou)? Avšak body jsou jednoduchými částmi prostoru, nemají tedy žádná ohraničení, žádnou pravou a levou stranu. Kdyby jeden měl pouze část společnou s druhým, byl by s ním totožný; a kdyby měl mít vzhledem k němu něco odlišného, musily by ležet vně sebe, a tedy by tu musil ještě být prostor pro bod, který leží mezi nimi; ba dokonce tam musí být prostor pro nekonečnou množinu bodů, protože o tomto středním bodu platí vzhledem k oněm dvěma totéž.

„*Avšak toto vše*“, jak se říká, „*se nedá pochopit!*“ Zajisté že se to nedá pochopit pomocí prstů, nedá se to ovšem také vnímat očima; avšak pozná se to rozumem, a to jako něco, co je nutně tak a nemůže být jinak, takže vznikne spor až tehdy, když si to představujeme jinak, nesprávně.

Přesto se pokračuje: „Jak je nepochopitelné představit si v nejkratší čáře ještě nakupení nekonečně mnoha bodů, ba dokonce nekonečnou množinu takových nakupení, což všechno musíme činit podle běžného učení! Neboť musíme mít možnost, rozložit i tu nejkratší čáru dokonce ještě v nekonečnou množinu jiných čar, když ji nejprve rozložíme na dvě poloviny, potom tyto poloviny opět na poloviny a tak stále bez konce!“ — V celé této myšlenkové souvislosti nenacházím nic mylného ani podivného, až na jediný výraz, totiž *nejkratší čáry*, který si mnozí nechají uklouznout jen z nedostatku pozornosti, protože taková čára neexistuje a nemůže existovat, a o té, o které se tu právě uvažuje, se přímo říká, že může být rozložena v kratší čáry. Každá nekonečná množina, a to nejen bodů samotné čáry, se dá rozložit v části, které samy obsahují nekonečné množiny, ba dokonce se dá rozložit v nekonečně mnoho takových částí. Neboť znamená-li ∞ nekonečnou množinu, jsou také $\frac{\infty}{2}, \frac{\infty}{4}, \frac{\infty}{8} \ldots$ *nekonečné množiny*. Tak je to obsaženo v pojmu nekonečna. „Ale jaký smysl“ (odvážil by se nakonec říci ten, komu by se dosavadní objasnění snad přec jen nejevila po delší úvaze uspokojivá) „máme dát tvrzení těch matematiků, kteří sami vykládají, že rozloha se nedá vytvořit žádným, byť sebe větším nahuštěním bodů a že se nedá rozkladem na sebe větší množinu částí rozebrat až na jednotlivé body?“ — Přísně řečeno, mělo by se ovšem *na jedné straně* učit, že konečná množina bodů nevytvoří nikdy rozlohu a nekonečná množina bodů jen tehdy, potom však vždy, je-li splněna víckrát již zmíněná podmínka, že totiž každý bod má pro každou dostatečně malou vzdálenost určité sousedy; přitom by se však *na druhé straně* mělo přiznat, že také ne každý rozklad daného prostorového předmětu dospívá až k jednoduchým částem, zejména že k nim nedospěje žádný rozklad na takové části, jejichž množina by byla konečná, ale ani ne každý takový rozklad, který pokračuje do nekonečna (např. pokračujícím půlením), jak jsme viděli předtím. Musíme nicméně trvat na tom, že žádné kontinuum nemůže nakonec vznikat z ničeho jiného, než z bodů a zase jen z bodů. A obojí je velmi dobře slučitelné, jen když se to správně pochopí.

§ 39

Předem lze očekávat, že vlastnosti oné spojité rozlohy, kterou je čas, budou ještě budit zvláštní pohoršení. Nauka o čase musila především poskytnout vítanou látku zvláště těm filosofům, kteří tak jako skeptikové se zaměřili zejména na to, aby lidské pojmy jen popletli a našli zdánlivé spory, místo toho, aby je ozřejmili. Zmíním se tu však jen o tom nejdůležitějším, poněvadž ne vše, co se v té věci uvádělo, se týká pojmu nekonečna.

Kladla se otázka, zda je čas něčím skutečným, a když, zda je substancí nebo adherencí, a v prvním případě zda je stvořen či ne? „Platí-li ono“ mínili, „musí mít začátek a jistě také jednou skončí, musí se tedy měnit, a tedy potřebuje opět jiný čas, v němž by se měnil. Ještě nesmyslnější je, prohlašovat čas za samotného boha, nebo za adherenci, která na něm tkví. Jisto je také, že se stavěl čas proti věčnosti; čím ta je? Jak je možné, že v jediné, sebe kratší chvilce, je obsažena nejen nekonečná množina okamžiků, nýbrž dokonce celých časových intervalů, např. v jediném mžiknutí oka, od něhož má každá jednoduchá část času název okamžiku? Avšak ve skutečnosti (jak řekli nakonec) žádný čas není! Neboť čas, který minul, tu již není, zřejmě protože již prošel; budoucí čas však ještě nyní nenastal, protože je teprve budoucí; a konečně, co je přítomno, není ničím jiným než pouhým okamžikem v nejpřísnějším smyslu toho slova, který nemá žádné trvání, a proto nemá také žádné nároky na název času.“

Ve smyslu mých pojmů není ovšem čas nic skutečného ve vlastním smyslu slova, kdy skutečnost přisuzujeme jen substancím a jejich silám. Nepovažuji jej tedy ani za samotného boha, ani za stvořenou substanci, ani za adherenci jak na bohu, tak na nějaké stvořené substanci anebo jejich souhrnu. Proto právě není také ničím proměnlivým, ale spíše tím, v čem se veškerá změna děje. Řekneme-li opak, jako v příslovi: časy se mění, pak se tu časem rozumějí pouze věci a jejich stavy, jak bylo již dávno připomenuto. Sám čas, abychom to teď podrobněji uvedli, je tím určením, vyskytujícím se na každé (proměnné, nebo což je totéž) závislé substanci, jehož představu musíme připojit k představě této substance, abychom jí mohli pravdivě přisoudit jednu ze dvou sobě odporujících vlastností, *b* a non-*b*, a druhou odmítnout.

Přesněji vzato je určení tu zmíněné jedinou jednoduchou částí času, časovým bodem nebo okamžikem, v němž si musíme představit substanci *x*, které chceme připsat jednu ze dvou sobě odporujících vlastností *b* a non-*b*; takže náš výrok musí vlastně znít: *x* v okamžiku *t* má buď vlastnost *b* nebo non-*b*. Za předpokladu, že tento můj výklad pojmu okamžiku bude uznán správným, mohu jasně udat co je sám čas, a to veškerý čas neboli věčnost, totiž ten celek, jemuž náležejí všechny okamžiky jako části (díly). A každý konečný čas, tj. každé trvání, obsažené mezi dvěma okamžiky, neboli časový interval, vyložím jako souhrn všech okamžiků, které leží mezi oněmi hraničními. Podle těchto výměrů není tedy žádný rozdíl mezi časem a věčností, rozumíme-li jimi ovšem čas vcelku, v obou směrech bez konce, a ne (jak se často děje) čas omezený, konečný. Je ovšem jistě velký rozdíl, jak v tomto čase existuje bůh a jak v něm existují proměnlivé nebo stvořené bytosti. Ty existují v čase, měníce se v něm, kdežto bůh je v každé době týž, naprosto neproměnný. To dalo podnět, aby sám byl nazván věčným, kdežto ostatní bytosti, jeho výtvory pomíjejícími. — Může být ovšem těžkou úlohou pro naši fantazii, vymalovat si ve smyslovém obrazu to, že již každá sebe kratší chvilka, jako je mžiknutí oka, obsahuje nekonečnou množinu celých časových intervalů; ale stačí, pochopí-li to rozum a pozná-li to jako něco, co vůbec jinak nemůže být. Z pojmu času, jak jej zde nastiňujeme, se dá poznat i sám jeho objektivní základ; ale jeho rozbor by tu zabíhal příliš daleko. Nesmyslné by bylo jen to, kdybychom tvrdili, že kratší doba má tutéž množinu okamžiků jako delší doba, anebo že nekonečně mnoha časovým intervalům, na něž je možno rozdělit kratší dobu, přísluší stejná délka jakou by měly v nějaké delší době.

Konečně klamný zvěr, který chce úplně zničit realitu pojmu času, je tak zřejmý, že jeho vyvrácení sotva vyžaduje jediného slova. Přiznávám ovšem, že čas není nic existujícího a proto ovšem nemá existenci ani čas minulý, ani čas budoucí; neboť nemá ani současnou existenci: avšak jak z toho má plynout, že čas není ničím? Což nejsou věty a pravdy o sobě — ničím, ač by nikomu nenapadlo tvrdit, že jsou něčím existujícím— nezaměňujeme-li je ovšem za skutečné myšlenky nebo soudy, pochopené vědomím myslící bytosti?

§ 40

Pokud jde o paradoxy v nauce o prostoru, je známo, že lidé ani prostor neuměli vysvětlit; že jej často považovali také za něco existujícího, často jej zaměňovali za substance, které jsou v něm, často jej pokládali dokonce za samotného boha, přinejmenším za jeden atribut božství; že i veliký Newton přišel na myšlenku, prohlásit prostor za domnělé pocitové středisko božství: že připouštěli často nejen pohyb substancí, nacházejících se v prostoru, nýbrž i prostoru samého, tj. změnu polohy jeho míst; že podle jejich domnělého objevu (počínajíc Descartesem) neexistují v prostoru všechny substance, nýbrž jen tak zvané materiální: až posléze Kant připadl na ten nešťastný nápad, který po něm ještě mnozí papouškují, že se nemá ani prostor, ani čas pokládat vůbec za něco objektivního, nýbrž za pouhou (subjektivní) formu našeho názoru; že byla od té doby kladena otázka, zda jiné bytosti nemají jiný prostor, např. o dvou nebo čtyřech rozměrech; že konečně nás chtěl Herbart mimo to obdařit dvojitým prostorem, tuhým a spojitým, a právě takovým dvojitým časem. O tom všem jsem se již vyslovil na jiných místech.

Prostor, podobně jako čas, není pro mne žádnou vlastností substancí, nýbrž pouze jejich určením, a to takovým, že nazývám místy, na nichž jsou stvořené substance, ta jejich určení, která odůvodňují, proč tyto substance při svých vlastnostech vyvolávají vespolek v určité době právě takové a ne jiné změny, a souhrn všech míst pak nazývám prostorem, úplným prostorem. Tento výklad mi umožnil odvodit objektivně nauku o prostoru z nauky o času, tedy např. ukázat, že prostor má tři rozměry a proč je má, jakož i mnoho jiného.

Domnívám se tedy, že nemusím dále mluvit o paradoxech, které se hledaly již v pojmu prostoru, v oné předmětnosti, kterou má mít, ačkoli není ničím skutečným, v nekonečné množině jeho částí a v spojitém celku, který tyto části spolu vytvářejí, přestože se ani dvě z těchto jednoduchých částí (bodů) spolu nedotýkají, a že mohu tyto zdánlivé spory pokládat za vyřízené.

První, co ještě potřebuje podrobnější vysvětlení, by jistě mohl být pojem velikosti prostorové rozlohy. Není sporu o tom, že každá rozloha má velikost; také v tom jsou lidé jednotni, že veličiny, které se vyskytují ve třech prostorových rozměrech, se dají určit jen poměrem k jedné z nich, zvolené libovolně za jednotku míry, a to právě tak jako u časové rozlohy; rovněž, že tato rozloha, přijatá za jednotku, musí být téhož druhu, jako je rozloha jí měřená, tedy u čáry čára, u ploch plocha, u těles těleso*).

Ptáme-li se nyní, v čem vlastně spočívá to, co nazýváme velikostí prostorové rozlohy, pak, poněvadž taková rozloha se neskládá z ničeho jiného než z bodů, které jsou uspořádány podle určitého pravidla, kdežto u veličiny se nikdy nemá přihlížet k uspořádání, nýbrž jen k množině částí — mohli bychom být velmi nakloněni k závěru, že pod velikostí každého prostorového předmětu si myslíme právě tuto množinu bodů; jak se to zdá potvrzovat sám název, když velikost plochy nebo tělesa nazýváme přímo obsahem tohoto prostorového předmětu. Avšak podrobnější úvaha ukazuje, že tomu

*) Nebude snad mnohým nemilé, přečíst si tu příležitostně výklad těchto tří druhů prostorových rozloh. Připustí-li se správnost výměru rozlohy vůbec, podaného v § 38(má tu přednost, že se dá zobecnit snadným rozšířením i na ty veličiny obecné nauky o veličinách, které nazýváme spojitě proměnnými), pak říkám, že prostorová rozloha je jednoduchá nebo že je čárou, když každý bod pro každou dostatečně malou vzdálenost má jednoho nebo více sousedů, avšak v žádném případě ne tolik, aby jejich souhrn byl sám o sobě již rozlohou; říkám dále, že prostorová rozloha je dvojnásobná. nebo že je plochou, má-li kaž ý bod pro každou dostatečně malou vzdálenost za své sousedy celou čáru bodů; říkám konečně, že prostorová rozloha je trojnásobná, nebo že je tělesem, má-li každý bod pro každou dostatečně malou vzdálenost za své sousedy celou plochu.

tak není. Neboť jak bychom jinak mohli předpokládat, což přece obecně a bez pochybností činíme, že se velikost prostorového předmětu, např. krychle, v nejmenším nezmění, ať připočteme jeho ohraničení (povrch), zde tedy povrch krychle (který sám již má velikost) k jeho obsahu či ne? A tak nesporně postupujeme, když např. shledáme, že velikost krychle o straně 2 je osmkrát větší než krychle, jejíž strana je $= 1$, bez ohledu na to, že první krychle má o 12 čtvercových stěn velikosti $= 1$ méně než oněch osm krychlí druhých, neboť sestavíme-li je do jediné krychle, odpadne z 24 čtverců jejich povrchu polovina, totiž ty, které přijdou do vnitřku krychle. Z toho tedy vyplývá, že si vlastně pod velikostí prostorové rozlohy, ať je to čára, plocha nebo těleso, nemyslíme nic jiného, než veličinu, která je odvozena podle takového zákona z rozlohy téhož druhu, přijaté za jednotku a stejného druhu jako je veličina, která se má měřit, že když se jím řídíme a odvodíme pro část M veličinu m, a pro část N veličinu n, obdržíme podle téhož zákona pro rozlohu, vytvořenou spojením částí M a N, veličinu $m + n$, lhostejno, zda vezmeme nebo nevezmeme v úvahu hranice, které mají M a N i celek $M + N$, z nich sestavený. Ve spise, o němž byla již zmínka v § 37, je ukázáno, že se z tohoto pojmu dají vskutku odvodit nejobecnější formule nauky o prostoru, podávající výpočet délky čáry, výpočet plochy a obsahu, aniž by ještě bylo třeba nějakého jiného předpokladu, zejména aniž by bylo třeba principů, označených nesprávně jako Archimedovy.

§ 41

Opírajíce se o dosavadní výklady, můžeme nyní vytknout takové věty, jako jsou následující, ať se zdají být pro běžnou představu jakkoli paradoxní, a to bez obav, že by nás někdo obvinil ze sporu.

1. Souhrn všech bodů, které leží mezi body a a b, představuje jednoduchou rozlohu neboli čáru; avšak i když k ní budeme počítat body a a b, takže je pak omezenou přímkou, i když k ní nebudeme počítat jeden hraniční bod nebo druhý, nebo též oba, takže je pak neohraničená, má v každém případě tutéž délku jako předtím. Právě proto nemá žádná z takových neohraničených přímek na té straně,

kde jí chybí hraniční bod, ani žádný nejvnějšnější (nejvzdálenější) bod, nýbrž za každým je ještě vzdálenější, ač jejich vzdálenost zůstává stále konečná.

2. Obvod trojúhelníka *abc* se dá sestavit za prvé z přímky *ab*, ohraničené na obou stranách, za druhé z přímky *ac*, ohraničené jen na jedné straně bodem *c*, a za třetí z přímky *bc*, po obou stranách neohraničené; jeho délka je však rovna součtu tří délek *ab*, *bc*, a *ca*.

3. Představíme-li si, že přímka *az* je bodem *b* půlena, úsek *bz* že je znovu půlen bodem *c*, *cz* že je opět půleno bodem *d*, a že se tak postupuje neomezeně dál; a předpokládáme-li, že si odmyslíme ze souhrnu bodů, ležících mezi *a* a *z* těchto nekonečně mnoho půlících bodů *b*, *c*, *d*, . . . a bod *z* sám: pak ještě stále zasluhuje souhrn zbývajících bodů názvu čáry a její velikost bude táž jako předtím. Počítáme-li však *z* k souhrnu, nemůže se již celek nazvat spojitou rozlohou; bod *z* stojí totiž osamoceně, poněvadž pro něj neexistuje žádná sebemenší vzdálenost, o níž by se dalo říci, že má v této vzdálenosti a každé menší v tomto bodovém souhrnu souseda. Pro všechny vzdálenosti, které spadají pod tvar $\frac{\mathrm{az}}{2^n}$ chybí totiž k *z* soused.

4. Rovná-li se vzdálenost bodů *a* a *b* vzdálenosti bodů α a β, pak musí být připuštěno i to, že množina bodů mezi *a* a *b* je rovna množině bodů mezi α a β.

5. Rozlohy, které mají stejnou bodovou množinu, mají také stejnou velikost, opačně však nemusí mít stejně mnoho bodů dvě rozlohy, které mají stejnou velikost.

6. U dvojice prostorových útvarů, které jsou si zcela podobny, musí být množiny jejich bodů v tomtéž poměru jako jejich velikosti.

7. Je-li tedy poměr velikostí dvou zcela podobných prostorových útvarů iracionální; je také poměr mezi množinami jejich bodů iracionální. Existují tedy **množiny** (ovšem pouze nekonečné), **jejichž poměr má libovolnou iracionální hodnotu.**

§ 42

Z těchto vět, jejichž počet (jak vidíme) by se dal snadno zvětšit, došla v matematických spisech až dosud pozornosti jen šestá věta, pokud vím; avšak jenom v podobě věty, která vyslovuje její kontradiktorický opak, že totiž podobné čáry, ať se liší jakkoli ve svých velikostech, obsahují nicméně stejnou množinu bodů. To tvrdil Dr. J. K. Fischer („Grundriss der gesamten höheren Mathematik," Leipzig 1809, díl II. § 51, pozn.) zejména o podobných a soustředných kruhových obloucích, a připojil důvod, že se dá každým bodem jednoho z nich vést poloměr, který prochází bodem druhého oblouku. Jak známo, zabýval se tímto paradoxem již Aristoteles. Povaha Fischerova závěru prozrazuje zřejmě názor, že dvě množiny si musí být rovny, i když jsou nekonečné, jakmile je možno každou část jedné z nich spojit s částí druhé z nich ve dvojici. Po odkrytí tohoto omylu není vůbec třeba dále vyvracet toto učení, z něhož dokonce není ani patrno, proč bychom musili toto tvrzení o stejných bodových množinách omezovat právě jen na kruhové oblouky, jež leží soustředně a jsou podobné, poněvadž by se dal uvést stejný důvod i pro všechny přímé čáry a pro čáry nejrozmanitějších druhů, jež si rozhodně nejsou podobné.

§ 43

Ti kteří vyučovali nauce o prostoru, hřešili sotva častěji proti nějaké její pravdě než proti té, že každá vzdálenost mezi dvěma body v prostoru, a tedy každá oboustranně ohraničená přímka, je pouze konečná, tj. že je ke každé jiné v poměru, který se dá přesně určit pouhými pojmy. Neboť sotva existuje geometr, který by občas nemluvil o nekonečně velkých vzdálenostech a nenechal velikost přímky, která přece má na obou stranách své hraniční body, vzrůstat za určitých okolností do nekonečna. Stačí nám na příklad poukázat na onu známou dvojici čar, které se nazývají tangentou a sekantou úhlu nebo oblouku v geometrickém smyslu slova. To má být podle výslovného vysvětlení dvojice přímých čar, které jsou na obě strany ohraničeny; a jak přece je málo těch, kteří by byli na pochybách učit, že pro pravý úhel jsou i tangenta i sekanta nekonečně velké. Budeme však za toto falešné učení okamžitě potrestáni rozpaky, do nichž se dostaneme tehdy, máme-li udat, zda se mají tyto dvě nekonečné veličiny považovat za kladné nebo záporné? Neboť týž důvod, který by mohl být uveden pro jedno, mluví zřejmě také pro druhé; protože přímka, probíhající středem kružnice rovnoběžně k její tečně, má, jak známo, k oběma stranám této tečny zcela týž vztah, a proto se s ní stýká právě tak málo na jedné straně jako na druhé. Také výraz pro velikost obou těchto čar $\frac{1}{0}$ nedává ani ten nejmenší důvod, prohlásit tuto domněle nekonečnou veličinu spíše za kladnou, než za zápornou, protože nulu nelze považovat ani za kladnou, ani za zápornou. Není tedy jen paradoxní, nýbrž dokonce zcela falešné předpokládat existenci nekonečně velké tangenty pravého úhlu a právě tak všech úhlů tvaru

$$\pm n\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Jen příležitostně budiž připomenuto, že také pro úhel $= 0$ nebo $= \pm n \,.\, \pi$ neexistuje přísně řečeno ani sinus ani tangens. Rozdíl těchto dvou předpokladů je pouze v tom, že se při druhém z nich nedostaví žádný falešný výsledek, pohlížíme-li na součiny jako na neexistující v těch případech, kde tyto výrazy pro veličiny vystupují jako činitelé, avšak tam, kde tyto výrazy vystupují jako dělitelé, soudíme, že výpočet požaduje cosi nezákonného.

§ 44

Právě tak neoprávněný byl postup, který však naštěstí našel méně napodobitelů, jímž chtěl Joh. Schulz počítat velikost celého nekonečného prostoru, když pokládal za oprávněné soudit z okolnosti, že každým bodem *a* mohou být vedeny přímky do nekonečna na všechny strany, tj. v každém směru, který se jen vůbec vyskytne, a z další okolnosti, že každý bod *m*, který si jen lze ve vesmíru myslit, musí ležet na jedné a jen jedné z těchto čar, že můžeme závěrem považovat celý nekonečný prostor za kouli, která by byla opsána z libovolně zvoleného bodu *a* poloměrem o velikosti $= \infty$; z čehož mu okamžitě plynulo, že celý nekonečný prostor má přesně velikost jen $\frac{4}{3}\pi\infty^3$.

Byla by to bezpochyby jedna z nejdůležitějších pouček vědy o prostoru, kdyby se dala pravdivost tohoto výsledku ospravedlnit. A proti oběma premisám (které jsem tu však nepodal právě přesně podle Schulze, protože jsem neměl před sebou jeho přednášky) by se dalo sotva co zdůvodněného namítat. Neboť kdyby chtěl někdo říci, že druhý předpoklad je falešný již proto, že by z něj vyplývalo velmi nestejné rozdělení bodů ve světovém prostoru, totiž mnohem větší zhuštění u bodu *a*, který byl zvolen libovolně: pak by tím jen dával najevo, že ještě nepřekonal předsudek, který jsme potírali v § 21 a dále. Schulz chybil a zřejmě chybil jen v tom, že přímky, které se musí vést bodem *a* ve všech směrech neomezeně, protože každý bod prostoru má ležet na některé z nich, vzal za poloměr, což je čára na obě strany omezená. Neboť jen z tohoto předpokladu je vyvozena kulová podoba nekonečného prostoru a výpočet jeho velikosti $= \frac{4}{3} \pi \infty^3$. Z tohoto omylu plyne však i ten nesmysl — že domnělý celý prostor není právě celý, nýbrž že je jen částí, která má vně sebe ještě nekonečně mnoho jiných prostorů — protože ke každé kouli musí existovat i válec, který ji obsahuje, anebo krychle, která ji obsahuje, ba dokonce ještě mnoho jiných prostorových útvarů, například nekonečně mnoho koulí stejného poloměru, jež ji obklopují.

Jediná poznámka, že čára, vedená třeba jen v jednom směru do nekonečna, je právě proto v tomto směru neomezená, že se tedy také nedá mluvit o jejím hraničním bodu právě tak, jako se nedá mluvit o špičce koule nebo křivosti přímky nebo jediného bodu či o bodu, v němž se stýkají dvě rovnoběžky — tato jediná poznámka, pravím, stačí, aby se ukázala nicotnost většiny paradoxů (*mysteria infiniti*), které uvedl Boškovic' ve své *Diss. de transformatione locorum geometricorum* (připojeno k *Elem. univ. Matheseos T. II. Romae* 1754).

§ 45

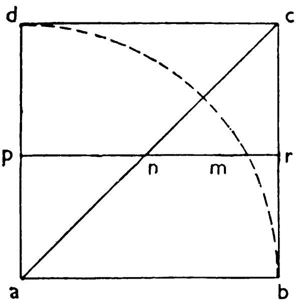
Také předpoklad nekonečně malých prostorových vzdáleností a čar nebyl mnohem vzácnější, než předpoklad nekonečně velkých, zejména když se jevilo být zdánlivě potřebné zacházet nicméně s čarami a plochami, jejichž žádná část (která ještě sama má rozlohu) není ani přímá ani rovinná, právě tak jako s těmi, které jsou přímé nebo rovinné, např. aby se mohla snadněji určit jejich délka nebo velikost zakřivení, nebo ovšem také určité jejich vlastnosti, pozoruhodné z hlediska mechaniky. V takových případech si dokonce dovolovali vybásnit si vzdálenosti, které mají být měřeny nekonečně malými veličinami druhého, třetího a jiných vyšších řádů.

Za to, že se při tomto postupu dospělo jen zřídka k falešnému výsledku, zejména v geometrii, mohlo se děkovat pouze té okolnosti, zmíněné v § 37, že proměnné veličiny, vztahující se k určitelným prostorovým rozlohám, musí být takové povahy, aby měly první, druhou a každou následující derivaci, a to nejvýš s výjimkou jednotlivých izolovaných hodnot. Neboť tam, kde tyto derivace existují, platí to, co lze tvrdit o tak zvaných nekonečně malých čarách, plochách a tělesech, a vůbec již o všech čarách, plochách a tělesech, které — ačkoli zůstávají stále konečné — mohou být nicméně pojímány jako libovolně malé, tj. (jak se vyjadřujeme) mohou se do nekonečna zmenšovat. O těchto proměnných veličinách vlastně platilo to, co se toliko nesprávně vypovídalo o nekonečně malých vzdálenostech.

Je však samo sebou pochopitelné, že takové podání věci musilo vždy přinést něco velmi paradoxního, ba dokonce zcela mylného a jen zdánlivě dokázaného. Jak pohoršlivě znělo např. již to, když se o každé zakřivené čáře a ploše tvrdilo, že není ničím jiným, než sestavou nekonečně mnoha úseček a rovinných ploch, o nichž se musí předpokládat, že jsou nekonečně malé, zejména, když se vedle toho opět připustily nekonečně malé čáry a plochy, které zase jsou zakřivené. Jak podivné bylo, když se tvrdilo o čarách, které nemají v některém svém bodě vůbec křivost, nýbrž mají tam např. bod obratu, že jejich křivost je v tomto bodě nekonečně malá a tedy poloměr křivosti nekonečně velký; nebo o čarách, které v jednom ze svých bodů vybíhají ve špičku, že jejich křivost je tu nekonečně velká, jejich poloměr křivosti nekonečně malý a mnohé jiné.

§ 46

Jako velmi nápadný a zároveň velmi jednoduchý příklad toho, k jakým nesmyslům poskytl látku a podnět předpoklad takových nekonečně malých vzdáleností, dovolím si tu uvést větu, kterou vyslovil podle Kästnerovy zprávy („Anfangsgründe der höheren Analysis“, II., předml.) již Galileo ve svých *Discorsi e dimonstrazioni matematiche* etc., jistě jen v úmyslu, povzbudit přemýšlení, jakoby totiž obvod kruhu byl tak velký jako jeho střed.



Obr. 3.

Aby čtenář nabyl představy o způsobu, jak se to pokoušeli dokazovat, nechť si myslí čtverec *abcd*, v němž je z *a* jako středu opsán čtvrtkruh *bd* poloměrem $ab = a$, pak vedena úsečka *pr* rovnoběžně k *ab*, která protíná obě strany čtverce *ad* a *bc* v *p* a *r*, úhlopříčku *ac* v *n* a čtvrtkruh v *m*, krátce řečeno, známý obrazec, kterým obvykle dokazujeme, že kruh o poloměru *pn* je rovný mezikruží, které zbude, když odloučíme kruh o poloměru *pm* od kruhu o poloměru *pr*; čili že platí

$$\pi \,.\, pn^2 = \pi \,.\, pr^2 - \pi \,.\, pm^2.$$

Přibližuje-li se *pr* stále více k *ab*, bude zřejmě kruh o poloměru *pn* stále menší a mezikruží mezi kruhy o poloměrech *pm* a *pr* bude stále užší. Geometři, kteří nenacházejí žádnou závadu v nekonečně malých vzdálenostech, rozšířili tento vztah také na ten případ, kdy *pr* postoupí nekonečně blízko k *ab*, tedy kdy např. se vzdálenost $ap = \mathrm{d}x$, takže by pak měla vyjít rovnice

$$\pi \,.\, \mathrm{d}x^2 = \pi \,.\, a^2 - \pi(a^2 - \mathrm{d}x^2),$$

o které se dá vskutku prokázat, že je pouhou identitou. Avšak v tom případě se stal podle jejich představy kruh o poloměru *pn* nekonečně malou veličinou druhého řádu; naproti tomu mezikruží, které zbude po odloučení kruhu o poloměru *pm* od kruhu o poloměru *pr* by nyní mělo šířku

$$\mathrm{mr} = \frac{1}{2} \cdot \frac{dx^2}{a} + \frac{1}{2\,.\,4} \cdot \frac{dx^4}{a^3} + \ldots,$$

která by již sama byla nekonečně malou veličinou druhého řádu. Za předpokladu, že *pr* přejde zcela v ab, stáhl se nekonečně malý kruh o poloměru *pn* v jediný bod *a* a nekonečně úzké mezikruží o šířce *mr* se proměnilo v pouhou obvodovou kružnici kruhu o poloměru *ab*. A proto se domněle pokládali za oprávněné učinit závěr, že pouhý střed *a* libovolného kruhu o poloměru *ab* je tak velký jako celý jeho obvod.

To, co v tomto závěru klame, bylo vyvoláno zejména vmísením nekonečně malého. Tím totiž byl čtenář sveden k posloupnosti myšlenek, která jej nechá mnohem snadněji přehlédnout, kolik nesmyslu je v tvrzeních, že z kruhu o poloměru *pn* zůstává přece ještě střed *a*, když místo bodu *p* zbude v úvaze jen bod *a*, a poloměr *pn* již vůbec neexistuje, a že právě tak mezikruží, které vznikne odloučením kruhu o menším poloměru *pm* od kruhu o větším poloměru *pr* se nakonec stane obvodem kruhu původně většího, jestliže oba poloměry a tím také kruhy si budou rovny. Neboť při nekonečně malých veličinách jsme jistě zvyklí na to, považovat je v jednom případě za sobě rovné, v jiném opět jednu z nich za větší nebo menší než jiné o nekonečně malou veličinu nějakého vyššího řádu, a jindy zase za zcela rovné nule. Chceme-li postupovat logicky, nesmíme ze správně stanovené rovnice

$$\pi\,.\,pn^2 = \pi\,.\,pr^2 - \pi\,.\,pm^2,$$

která srovnává obě velikosti (plošné obsahy) kruhů, o nichž se mluví, uzavírat nic jiného než to, že v tom případě, kdy *pr a pm* jsou si rovny, nemá kruh o poloměru *pn* žádnou velikost, a tedy vůbec neexistuje.

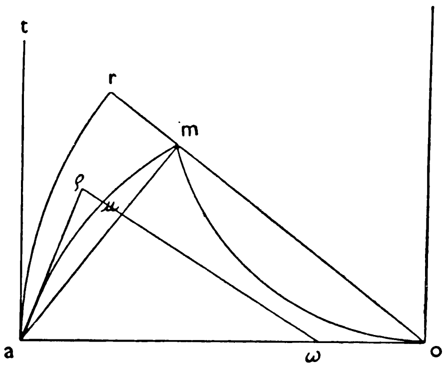
Je ovšem pravda (sám jsem uvedl v § 41 premisy, vedoucí k této pravdě), že jsou také kruhy s obvodem i bez něho a nic to nemění na jejich velikosti, která závisí jenom na jejich poloměru. A z toho by jistě mohl někdo vyvozovat ještě jeden zdánlivý důkaz Galileovy věty, když by vyšel z požadavku, který je ovšem přípustný, že si můžeme myslit kruh o poloměru *pm* bez obvodu, avšak kruh o poloměru *pr* i s jeho obvodem. Pak by totiž po odebrání kruhu s poloměrem *pm* od kruhu s poloměrem *pr* zbyl vskutku jen obvod kruhu o poloměru *ab*, přejdeme-li od *pr* k *ab*. Avšak ani nyní se nedá mluvit o nějakém kruhu okolo *a*, který se stáhl do jediného bodu, a tím méně by bylo přípustné, chtít se odvolávat na hoření rovnici a usuzovat z ní, že bod *a* a onen obvod jsou si rovny, poněvadž řečená rovnice jedná pouze o velikostech tří kruhů, ať již je bereme s obvodem nebo bez něho.

§ 47

Příklad, o němž jsme právě mluvili, nebyl ani svým objevitelem uveden za tím účelem, aby lidé nad ním žasli jako nad pravdou, jak jsme se již zmínili. Avšak za skutečnou pravdu se vydává učení, týkající se obecné cykloidy, že prý má nekonečnou křivost v bodě, v němž se stýká se svou základní přímkou, neboli (což znamená právě tolik) nekonečně malý poloměr křivosti a je tu k ní kolmá. Je to zcela správné, rozumíme-li tomu tak, že poloměr křivosti se nekonečně zmenšuje, zatímco oblouk cykloidy se základní přímce nekonečně přibližuje; jakož i to, že jeho směr v samotném bodě vstupu je k ní kolmý. Jenže to, co se říká o nekonečně malém poloměru křivosti, nebo poloměru křivosti, jenž se stal rovným nule, spočívá (správněji vyjádřeno) pouze v tom (protože křivka, jak známo, postupuje nad svojí základní přímkou v obou směrech do nekonečna, a tedy nemá žádné hraniční body), že se také v tomto bodě setkají dva oblouky tak, že tu vytvoří špičku, neboť oba stojí kolmo k základní přímce, a to takovou, kde mají oba týž směr, nebo jak se již méně správně říká) kde jejich směry svírají nulový úhel.

Avšak výpočtem se můžeme přesvědčit, že tomu vskutku tak je, aniž bychom pochopili, jak k tomu dojde, ba dokonce jak je to vůbec možné. Abychom si to osvětlili, neboť teprve tím se paradox rozřeší, musíme nejdříve pochopit, proč směr, v němž cykloida vystupuje nad svou základní přímku, je k této přímce kolmý.

Ze způsobu, jak může být sestrojena obecná cykloida, totiž tak, že opíšeme poloměrem vytvářejícího kruhu z každého bodu *o* základní přímky kruhový oblouk, jenž se jí dotýká, a odloučíme z něj část *om* stejné délky, jako je vzdálenost bodu *o* od počátečního bodu *a*, takže uvažujeme o *m* jako o bodu cykloidy — plyne okamžitě, že úhel *mao* se blíží stále více pravému úhlu, čím více se blíží bod *o* k *a*, neboť úhel *mao*, jehož mírou je poloviční oblouk *om*, je stále menší a poměr obou stran *oa* a *om* v trojúhelníku *moa* se blíží stále více poměru rovnosti; a proto se úhly u třetí strany *am* odlišují od pravého úhlu stále méně. Skutečný výpočet to ukazuje zcela zřetelně. Z toho však plyne navíc to, že oblouk cykloidy *am* leží zcela na téže straně sečny *am*, totiž mezi ní a kolmicí *at*, vztyčenou v *a*; takže ta udává směr křivky v bodě *a*. Označíme-li dále kruhový oblouk o středu *o*, vycházející z *a*, jako *oa*; je zřejmé, že protne prodlouženou sečnu *om* teprve v bodě *r*, protože musí platit



Obr. 4

$$or = oa > om.$$

Je-li teď μ nějaký bod křivky, ležící ještě blíže *a*, existuje k němu ω, ležící na *ao* ještě blíže k *a*, takže o sečně $\omega\mu$ platí totéž, co bylo právě tvrzeno o *om*, že totiž kruhový oblouk, opsaný z ω jako středu poloměru ωa, protne úsečku $\omega\mu$ prodlouženou za μ někde v bodě ϱ. Protože je $\omega a < oa$, leží také kruhový oblouk $a\varrho$ uvnitř kruhového oblouku *ar*, tedy mezi obloukem cykloidy $a\mu$ a kruhovým obloukem *ar*. Z toho vidíme, že ke každému kruhovému oblouku *ar*, opsanému libovolně malým obloukem *oa*, který se dotýká cykloidy *am* v *a*, existuje jiný oblouk $a\varrho$, který se jí v této oblasti ještě více blíží; jinými slovy, že neexistuje žádná sebe menší kružnice, která by se dala pokládat za míru křivosti v *a*, pokud by tu vůbec nějaká byla. Tedy tu neexistuje opravdu žádná křivost, nýbrž křivka, která v tomto bodě nekončí, má tu špičku, jak již víme.

§ 48

Také se často považovalo za paradoxní, že mnohé prostorové rozlohy, které se rozprostírají v nekonečném prostoru (tj. mají body, jejichž vzájemná vzdálenost převyšuje jakoukoli danou vzdálenost), mají nicméně pouze konečnou velikost, a jiné zase, které jsou omezeny v zcela konečném prostoru (tj. jejichž všechny body leží tak, že jejich vzájemné vzdálenosti nepřekračují danou vzdálenost) a přece mají nekonečnou velikost; nebo konečně, že mnohé prostorové rozlohy zachovávají konečnou velikost, ačkoliv oběhnou nekonečněkrát okolo jednoho bodu.

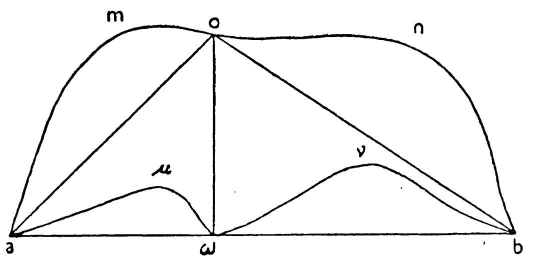
1. Musíme tu především rozlišovat, zda prostorovou rozlohou, o níž se tu mluví, rozumíme celek, složený z více oddělených částí (jako např. hyperbola se čtyřmi větvemi), nebo jen celek naprosto souvislý, tj. jen takovou rozlohu, která neobsahuje ani jedinou část, jež by sama ještě představovala rozlohu, na níž by neexistoval alespoň jeden bod, který by po připočtení k ostatním částem s nimi opět vytvářel rozlohu.

Že se může v nekonečném prostoru rozprostírat rozloha, sestávající z oddělených částí, aniž by přitom byla nekonečně velká, nepohorší nikoho, kdo si uvědomí, že také nekonečná řada veličin, zmenšujících se v geometrickém poměru, dává jen konečný součet. V tomto smyslu se může ovšem i čára rozprostírat do nekonečna a přece být konečnou, jako právě čára, která vznikne, když naneseme z daného bodu *a* v daném směru *aR* omezenou přímku *ab*, potom však ve vzdálenosti, která zůstane stále stejná, přímku *cd*, jež má pouze poloviční velikost oproti předchozí, a pokračujeme podle tohoto zákona do nekonečna.

Mluvme však — a to bude v dalším stále — pouze o takových prostorových rozlohách, které vyhovují podmínce, že jsou souvislým celkem: pak je ovšem jasné, že mezi rozlohami nejnižšího druhu, tj. čarami, nelze nalézt žádnou, která by se rozprostírala do nekonečna, aniž by současně měla nekonečnou velikost (délku). Neboť to vyplývá nutně ze známé pravdy, že nejkratší čarou, všude souvislou, která má spojovat dva body, je pouze přímka, jimi omezená*).

Jinak než u čar je tomu u ploch, které se mohou stát při téže délce pouhým zmenšením své šířky libovolně malými, a u těles, která při téže délce a šířce se mohou stát libovolně malými pouhým zmenšením své výšky. Z toho lze pochopit, proč si někdy zachovají konečnou velikost i plochy, které mají nekonečnou délku, i tělesa, která vedle nekonečné délky mají ještě nekonečnou šířku. I tomu nejméně obeznalému bude pochopitelný příklad, který mu dáme, požádáme-li ho, aby si myslil, že na přímce *aR*, jdoucí do nekonečna, jsou naneseny stejné úseky $ab = 1 = bc = cd$ atd., pak aby si představil nad prvním úsekem *ab* čtverec $b\alpha$, nad druhým *bc* obdélník $c\gamma$, který má za výšku pouze polovici *bc*, a tak nad každým dalším úsekem obdélník o poloviční výšce proti předcházejícímu, tu jistě

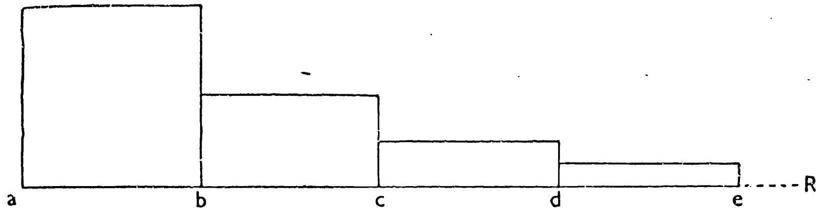
*) Protože důkaz této pravdy je tak krátký, dovoluji si jej vložit do této poznámky. Není-li čára *amonb* přímá, musí na ní být nějaký bod *o*, ležící mimo přímku *ab*, takže spustíme-li z *o* kolmici $o\omega$ na *ab*, platí o vzdálenostech



Obr. 5

$$a\omega < ao, \quad b\omega < bo.$$

Protože však všechny soustavy dvou bodů jsou si vzájemně podobné, existuje mezi body *a* a ω čára $a\mu\omega$, podobná té části *amo* dané čáry *amonb*, která leží mezi body *a* a *o*, a stejně tak čára $b\nu\omega$, ležící mezi body *b* a ω a podobná té části *bno* dané čáry *bnoma*, která leží mezi body *b* a *o*. Tato podobnost však také vyžaduje, aby se délka přímky $a\omega$ měla k délce $a\mu\omega$ jako délka přímky *ao* k délce části *amo* a délka přímky $b\omega$ k délce $b\nu\omega$ jako délka přímky *bo* k délce části *bno*. A protože $a\omega < ao$, musí také $a\mu\omega < amo$, a protože $b\omega < bo$, musí platit i $b\nu\omega < bno$. Proto je také celá $a\mu\omega\nu b <$ celá *amonb*. Křivá čára *amonb*, spojující *a* s *b*, není tedy nejkratší, nýbrž $a\mu\omega\nu b$ je kratší.



Obr. 6

velmi brzo pozná, že souvislá plocha, kterou tu má na mysli, sahá do nekonečna a přitom není větší než 2. Nebude pro něj o nic těžší, myslit si krychli o straně $= 1$ a pod ní podložené druhé těleso, jehož základnou by byl čtverec o straně 2, tedy čtyřikrát větší než základna předchozí krychle, avšak jehož výška by byla jen $\frac{1}{8}$; pod toto těleso podložit třetí, jehož základnou by zase byl čtverec čtyřikrát větší než předcházející, avšak výška by byla jen $\frac{1}{8}$ výšky předchozího tělesa — a představit si, že se podle téhož zákona bude pokračovat do nekonečna. Pochopí, že délka a šířka těles, která jsou tu postupně podkládána, roste do nekonečna, ačkoliv jejich prostorový obsah je stále menší a to tak, že každý následující je pouze polovinou předcházejícího; že tedy velikost pyramidovitého celku, jenž tak vznikne, nikdy nepřekročí prostorový obsah $= 2$, přestože má nekonečnou základnu.

2. Jako se může vyskytnout jen u dvou vyšších druhů rozlohy, totiž u ploch a těles, nikoli však u čar, případ dosud zkoumaný, že dojdeme jen k jejich konečné velikosti, přestože na sobě mají něco nekonečného (nekonečnou délku nebo i šířku): tak platí opak v případě, o kterém chceme mluvit, kdy rozloha, ačkoliv se jeví být konečnou proto, poněvadž je omezena ve zcela konečném prostoru, má vskutku nekonečnou velikost. Tento případ totiž může nastat jen u dvou nižších druhů rozlohy, u čar a ploch, nikdy však u těles. Těleso, v němž neexistují body, jejichž vzdálenosti by překračovaly

jakoukoli danou veličinu, nemůže být jistě nekonečné. Tak to plyne ihned ze známé pravdy, že koule o průměru E je největší ze všech těles, u nichž vzdálenosti dvojic bodů nepřekračují danou vzdálenost E. Neboť tato koule obsahuje ony body všechny a její velikost je $\frac{\pi}{6} . E^3$; každé těleso nepřesahující tento prostor musí tedy nutně být menší než $\frac{\pi}{6} . E^3$. Naproti tomu je nekonečně mnoho čar, které se dají zakreslit do prostoru jediné, jakkoli malé plochy, např. čtvereční stopy, a každé z nich můžeme jistě udělit alespoň konečnou velikost, např. délku stopy a připojením jedné, nebo i nekonečně mnoha spojnic, je sloučit v jedinou čáru, všude souvislou, jejíž délka pak musí jistě být nekonečná. A právě tak existuje nekonečně mnoho ploch, které se dají zakreslit do prostoru jediného, jakkoli malého tělesa, např. krychlové stopy, z nichž každé můžeme udělit např. velikost čtvereční stopy, a připojením jedné další spojující plochy, nebo i nekonečně mnoha takových ploch, můžeme všechny tyto plochy sloučit v jedinou, jejíž velikost pak bude nesporně nekonečná. To vše nemůže také nikoho udivit, kdo nezapomene, že čáry, plochy a tělesa neměříme toutéž jednotkou, a přestože je množina bodů již v jakkoli malé čáře nekonečná, musíme v ploše předpokládat množinu jistě nekonečněkrát větší než v čáře, a konečně v tělese s toutéž jistotou nekonečněkrát větší než v ploše.

3. Třetí paradox, zmíněný na začátku tohoto paragrafu, zněl, že existují také rozlohy, které nekonečněkrát oběhnou kolem určitého bodu a přitom přece zachovávají konečnou velikost. Kdyby to měla být lineární rozloha, může to nastat jenom tehdy, když je celá čára v konečném prostoru, jak jsme právě viděli v č. 1. Za této podmínky však není nic nepochopitelného v jevu, že zachovává konečnou velikost, ačkoliv uskutečňuje nekonečně mnoho oběhů kolem daného bodu; jen když je splněna další podmínka, že tyto oběhy, začínající nějakou konečnou velikostí, ubývají příslušným způsobem až do nekonečna, což je požadavek, umožněný opět okolností, že oběhy se uskutečňují okolo pouhého bodu. Neboť to dovoluje, aby vzdálenosti, které mají jednotlivé body takového

oběhu od tohoto středu, a tím také mezi sebou, ubývaly do nekonečna; a pak nás již sama kružnice poučuje, že také délka tohoto oběhu může být do nekonečna zmenšena. Našim čtenářům se již sama vynoří logaritmická spirála jako příklad čar, o kterých mluvíme, upneme-li pozornost jenom na tu její část, počínající nějakým daným bodem, která se přibližuje stále více středu, aniž by do něj vyústila.

Má-li však být plocha nebo těleso takovou prostorovou rozlohou, která koná nekonečně mnoho oběhů kolem daného bodu: pak není třeba ani omezující podmínky, že se prostorový útvar nevzdaluje v žádném svém bodě od svého středu nad určitou vzdálenost. Nechť si čtenář myslí, abych věc učinil co nejkratšeji srozumitelnou, zmíněnou spirálu jako jistý druh osy úseček, z jejíhož každého bodu vystupují pořadnice, kolmé k ní a k její rovině. Souhrn všech těchto pořadnic pak tvoří zřejmě plochu (válcovitou), která se na jedné straně v nekonečně mnoha závitech blíží středu, aniž by ho dosáhla, na druhé straně však se vzdaluje do nekonečna. Jak bude tato plocha velká, bude záviset na zákoně, podle něhož necháme pořadnice vzrůstat nebo ubývat. Avšak část, ubíhající ke středu, zůstane vždy konečná, pokud nenecháme pořadnice v tomto směru (tj. ve větvi, jejíž úsečky jsou pouze konečné) vzrůstat do nekonečna, poněvadž každá plocha, v níž ani úsečka ani pořadnice nevzrůstají do nekonečna, je konečná. Avšak i ta část plochy zůstane konečná, která je nad onou větví spirály, vzdalující se do nekonečna, pokud pořadnice ubývají v rychlejším poměru než úsečky (tj. délka oblouku spirály). Volíme-li tedy za osu úseček přirozenou spirálu, jejíž větev, ubíhající od poloměru = 1 ke středu, má délku $\sqrt{2}$, a vezmeme-li za ohraničení plochy oblouk hyperboly vyššího řádu, pro níž platí rovnice $yx^2 = a^3$: pak část této plochy, příslušná ke všem vyšším hodnotám x od $x = a$, má jenom velikost a^2, zatímco druhá část, příslušná ke všem menším hodnotám x, roste do nekonečna. Vezmeme-li však $a > \sqrt{2}$ a přemístíme-li koncový bod úsečky $x = a$ na bod spirály, který má poloměr 1, pak splývá střed spirály s koncovým bodem úsečky $x = a - \sqrt{2}$, má tedy ještě konečnou velikost, a ta část plochy, která leží nad touto větví spirály, není větší než

$$a^3\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{x}\right)=a^2-\frac{a^3}{a-\sqrt{2}}=-\left(\frac{a^3}{a-\sqrt{2}}-a^2\right);$$

takže celá plocha, postavená nad spirálou v obou směrech (kterou dostaneme, když obě velikosti sečteme v jejich kladné hodnotě) je

$$=a^2+\left(\frac{a^3}{a-\sqrt{2}}-a^2\right)=\frac{a^3}{a-\sqrt{2}}$$

Tedy např. pro $a=2$ obnáší celá plocha jen $4(2+\sqrt{2})$.

Velmi podobně je tomu u prostorových rozloh. Je třeba jen poznamenat, že část tělesa, ubíhající ke středu, by začala zasahovat do prostoru jeho vlastních sousedních oběhů (vpravo i vlevo), kdybychom jeho rozpětí chtěli zvětšovat v šířce i tloušťce. Kdybychom tomu chtěli zabránit a získat těleso, jehož všechny části leží vně sebe, dospěli bychom k cíli již tím, že bychom k ploše takového druhu, o jaké jsme právě uvažovali a které přibližováním ke středu přibývalo stále na šířce, připojili ještě třetí rozměr, tloušťku, která by se však zmenšovala ke středu v takovém poměru, aby obnášela stále méně než polovinu vzdálenosti mezi dvěma následujícími oběhy spirály.

§ 49

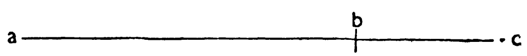
Prostorové rozlohy, které mají nekonečnou velikost, jsou právě pro tuto velikost v tak rozmanitých a často i paradoxních vztazích, že musíme ještě podrobit alespoň některé z nich zvláštní úvaze.

Tím, co bylo dosud řečeno, můžeme pokládat za dostatečně objasněné to všechno, že prostorový útvar, který obsahuje nekonečnou množinu bodů, nemusí proto ještě být spojitou rozlohou, právě tak že u spojité rozlohy nemusí právě její velikost určovat její množinu bodů, že ze dvou rozloh, které považujeme za stejně velké, může jedna obsahovat ještě o nekonečnou množinu bodů více nebo méně; ba dokonce, že plocha může obsahovat o nekonečně mnoho čar více nebo méně, těleso nekonečně mnoho ploch více nebo méně než rozloha téhož druhu, kterou pokládáme za stejně velkou.

1. První, na co chceme obrátit čtenářovu pozornost, je, že množina bodů, obsažená v jediné jakkoli krátké přímce *az*, je množinou,

která musí být považována za nekonečně větší než nekonečná množina těch bodů, které z ní vyjmeme, když začneme u jednoho z jejích hraničních bodů a, vyjmeme po něm v odměřené vzdálenosti druhý bod b, po něm v malé vzdálenosti třetí bod c a tak bez konce dál, přičemž zmenšujeme ony vzdálenosti podle nějakého zákona tak, aby nekonečná množina těchto vzdáleností měla za součet vzdálenost menší nebo rovnou vzdálenosti az. Ale poněvadž také každý z nekonečna mnoha úseků ab, bc, cd . . . , na něž se rozkládá az, je pokaždé opět konečnou čarou: může se s každým z nich učinit to, co jsme právě požadovali na az, tj. na každém z nich se dá opět prokázat taková nekonečná množina bodů jako na az, jež jsou zároveň položeny v az. A proto taková nekonečná množina musí být na celém az nekonečněkrát obsažena.

2. Každé přímce, ba dokonce každé prostorové rozloze vůbec, která je nějaké jiné nejen podobná, nýbrž i (geometricky) rovná (tj. shoduje se s ní ve všech znacích, které je možno na základě srovnávání s danou vzdáleností udat v pojmech), musí být přiznána i rovná množina bodů, připustíme-li jen u obou stejný způsob ohraničení, např. když u obou čar koncové body připočteme nebo nepřipočteme. Neboť opak by mohl platit jen tehdy, kdyby existovaly vzdálenosti, které sice jsou stejné, avšak připouštěly by nestejné množiny mezi oběma body, jejichž vzdálenost udávají. To však odporuje pojmu, který spojujeme se slovem geometricky rovný; neboť jen tehdy nazýváme vzdálenost ac nerovnou vzdálenosti ab, a to větší než tuto, když v tom případě, že b a c leží



Obr. 7

ve stejném směru, je bod b mezi a a c, a tím jsou všechny body mezi a a b jistě také mezi a a c, opačně však neleží všechny body mezi a a c také mezi a a b.

3. Označíme-li množinu bodů, ležících mezi a a b včetně a a b, znakem E a zvolíme-li úsečku ab za jednotku všech délek, pak množina bodů v úsečce ac, jež má délku n (čímž nyní rozumíme

výhradně celé číslo), bude $= nE - (n - 1)$, mají-li se připočíst její koncové body a a c.

4. Množina bodů ve čtvercové ploše, jejíž strana je $= 1$ (obvyklé míře pro plochy), bude $= E^2$, připočteme-li k ní obvod.

5. Množina bodů v každém obdélníku, jehož jedna strana má délku m a druhá n, bude včetně obvodu

$$mnE^2 - [n(m - 1) + m(n - 1)]E + (m - 1)(n - 1)$$

6. Množina bodů v krychli, jejíž hrana je $= 1$ (obvyklé míře těles), bude $= E^3$, včetně bodů povrchu.

7. Množina bodů v kvádru, jehož hrany mají délky m, n, r bude včetně povrchu:

$$mnr \,.\, E^3 - [nr(m - 1) + mr(n - 1) + mn(r - 1)]E^2 +$$
$$+ [m(n - 1)(r - 1) + n(m - 1)(r - 1) + r(m - 1)(n - 1)]E -$$
$$- (m - 1)(n - 1)(r - 1).$$

8. Přímce, která sahá v obou směrech do nekonečna, musíme připsat nekonečnou délku a množinu bodů, která je nekonečněkrát větší než množina bodů v úsečce $= E$, přijaté za jednotku. Všem takovým přímkám musíme též přiznat stejnou délku a stejnou bodovou množinu; neboť určující úseky, kterými se dají stanovit na každé ze dvou libovolných přímek dva body, jimiž každá z nich prochází, jsou si nejen podobné, nýbrž i (geometricky) rovné, jestliže vezmeme vzdálenost těchto bodů stejně velkou.

9. Libovolný bod na takové přímce má vůči oběma stranám přímky zcela podobnou polohu, a poskytuje také jen takové pojmově zachytitelné znaky, jaké má poloha každého jiného bodu toho druhu. Zajisté se nedá říci, že takový bod rozkládá přímku ve dvě stejně dlouhé části; neboť kdybychom to mohli říci o jednom bodu a, musili bychom to tvrdit ze stejného důvodu o každém jiném bodu b, což si však odporuje, neboť kdyby bylo $aR = aS$, nemohlo by také být $bR\ (= ba + aR) = bS(= aS - ab)$.

Obr. 8

Musíme tedy tím spíše tvrdit, že přímka na obě strany neomezená nemá žádný střed, tj. žádný bod, jehož určení by bylo možno podat ve vztahu k této čáře pouze pojmově.

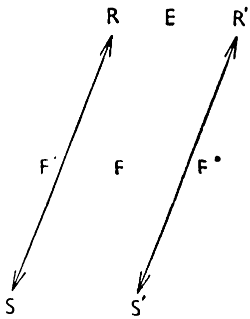
10. Rovinné ploše, kterou mezi sebou uzavírají dvě rovnoběžky na obě strany neomezené (tj. souhrn všech těch bodů, které jsou obsaženy na kolmicích, vedených z každého bodu jedné z těchto rovnoběžek ke druhé z nich), musíme přiznat nekonečně velkou plochu a množinu bodů, která je nekonečněkrát větší než množina bodů čtverce $= E^2$, přijatého za plošnou jednotku. Všem takovým pruhům mezi rovnoběžkami, mají-li stejnou šířku (délku kolmice), musíme též přisoudit stejnou velikost a stejnou množinu bodů. Neboť i ony se dají tak stanovit, že určující části jsou si nejen podobné, nýbrž i geometricky rovné; jsou-li např. určeny rovnoramennými pravoúhlými trojúhelníky o stejně velkých stranách a stanovíme-li, že jedna z těchto rovnoběžek má procházet základnou a druhá protějším vrcholem.

11. Kolmice, zvolená libovolně v takovém pruhu, omezeném rovnoběžkami, má polohu z hlediska obou stran plochy podobnou, a neposkytuje také žádné jiné znaky, které by bylo možno pojmově udat, než ty, které poskytuje poloha každé jiné takové kolmice. Ovšemže se nedá říci, že taková kolmice rozkládá plochu ve dvě geometricky rovné části. Neboť tento předpoklad by nás ihned zapletl do zcela podobného sporu jako v č. 9 a tím dokazuje svou nepravdivost.

12. Posléze rovině, která se rozprostírá ve všech směrech do nekonečna, musíme přiznat nekonečně velkou plochu a množinu bodů, která je k tomu nekonečněkrát větší než množina bodů v pruhu mezi rovnoběžkami. Avšak právě tak, jako musíme přiznat takovým pruhům stejné šířky stejnou množinu bodů, musíme přiznat stejnou nekonečnou množinu bodů i všem neomezeným rovinám. Neboť také o nich platí, že mohou být určeny nejen podobným, nýbrž i (geometricky) rovným způsobem; např. určíme-li každou třemi body které v ní leží a tvoří sobě podobné a rovné trojúhelníky.

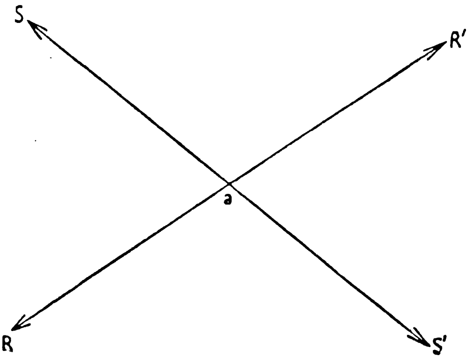
13. Poloha libovolné neomezené přímky, ležící v takové neomezené rovině, je z hlediska obou stran roviny zcela podobná; a nadto

poskytuje tytéž znaky, které lze pojmově udat, jako poloha každé jiné přímky. Nicméně se nedá říci, že taková přímka rozkládá rovinu ve dvě části geometricky stejně velké. Neboť kdybychom to směli tvrdit o jedné přímce RS, musili bychom to připustit také o každé jiné $R'S'$, což však vede ke zřejmému sporu, pokud chápeme obě přímky jako rovnoběžky.



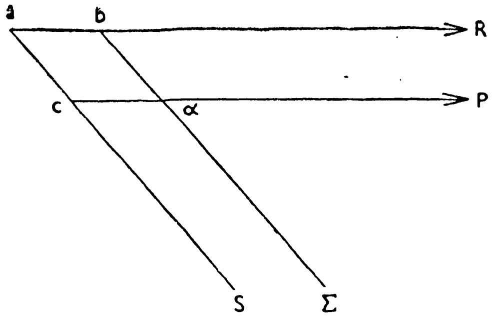
Obr. 9

14. Dvě neomezené přímky, ležící v téže rovině a nerovnoběžné, se tedy někde protínají a tvoří čtyři úhly (po dvou rovné), a dělí tak celou plochu neomezené roviny na čtyři části, z nichž vždy dvě, omezené rovnými (podobnými) úhly $RaS = R'aS'$, $RaS' = R'aS$, jsou si podobné. Každá z těchto čtyř úhlových ploch obsahuje nekonečnou množinu pruhů, vymezených rovnoběžkami, rozprostírajících se na jednu stranu do nekonečna a majících libovolnou šířku, jak jsme o nich uvažovali v č. 11; odmyslíme-li si jich však libovolný počet, zbývá ještě úhlový prostor, který je omezen stejným úhlem jako na začátku.



Obr. 10

Avšak právě tak jako v č. 9 a 10, nemáme ani právo nazvat ramena těchto úhlů sobě rovnými, ani tak nazvat pruhy mezi rovnoběžkami, o nichž můžeme dokázat, že jsou částmi jejich plochy: právě tak nejsme oprávněni nazvat tyto nekonečné úhlové plochy navzájem rovnými, tj. stejně velkými, a to ani při stejných (podobných) úhlech. Je zřejmé, že ze dvou úhlových ploch RaS a $P\alpha\Sigma$ je první



Obr. 11

větší než druhá když $b\Sigma \neq aS$, $cP \neq aR$, ačkoliv úhly samy jsou si rovny.

15. Část prostoru, kterou mezi sebou uzavírají dvě neomezené rovnoběžné roviny (tj. souhrn všech těch bodů, které jsou obsaženy na všech kolmicích, spuštěných z každého bodu jedné z nich na druhou) neboli neomezenou vrstvu, jak bychom ji mohli nazvat, musíme v každém případě prohlásit za nekonečně velkou, ať má jakoukoli šířku (délku takové kolmice). Při stejné šířce se však mohou tyto veličiny prohlásit za rovné a dokonce i množiny bodů v dvou takových vrstvách; stále podle téhož závěru, kterého jsme již vícekrát (č. 8, 10, 12) užili.

16. Libovolný rovnoběžný pruh, kolmý na roviny neomezené vrstvy, má polohu, která je vůči oběma stranám vrstvy zcela podobná a stejně tak je podobná i poloha libovolného jiného pruhu v téže vrstvě nebo i v každé jiné neomezené vrstvě. Nedá se však říci, že by musily být stejně velké ony obě části, na něž se vrstva takovým rovnoběžným pruhem rozloží.

17. Dvě neomezené roviny, které se protínají, rozkládají celý nekonečný prostor ve čtyři nekonečně velké části, z nichž vždy dvě protilehlé jsou si nesporně podobné, avšak proto ještě hned nemusí platit, že jsou stejně velké.

18. Právě tak nesmějí být vydávány za stejně velké prostory, omezené dvěma podobnými nebo (jak říkáváme) stejnými mnohohrany, které omezují jejich stěny, prodloužené do nekonečna.

19. Ani dvě části, na něž rozkládá celý prostor již sama jediná nekonečná rovina, nelze považovat za geometricky rovné, tj. stejné velikosti, a tím méně je pokládat za stejné množiny bodů, přestože jsou si podobné.

§ 50

Zbývá nám teď ještě krátce promluvit o těch paradoxech, s nimiž se potkáváme v oblasti metafyziky a fyziky.

V těchto vědách pronášíme tvrzení: „ve vesmíru neexistují dvě zcela stejné věci a tedy také ne dva zcela stejné atomy či jednoduché substance; avšak takové jednoduché substance musíme předpokládat, připustíme-li ve světě složená tělesa; musíme též konečně předpokládat, že všechny tyto substance jsou proměnlivé a že se stále mění.“ Tvrdím toto vše, poněvadž se mi zdá, že jsou to pravdy, které se dají tak přesně a jasně dokázat, jako kterákoli poučka matematiky. Přece se však musíme obávat, že mnozí fyzikové budou při poslechu těchto vět jen vrtět hlavou. Chlubí se totiž, že vyslovují jen ty pravdy, kterým je učí zkušenost; avšak zkušenost nedokazuje žádný rozdíl mezi nejmenšími částicemi těles, zejména těles jednoho druhu, např. mezi nejmenšími částicemi zlata, které jsme získali z toho či onoho dolu; zkušenost dále ovšem učí, že každé těleso je složené, avšak atomy, které by byly zcela jednoduché a tím i bez vší rozlohy, že ještě nikdo nevnímal; zkušenost konečně ukazuje, že různé látky, např. kyslík, vodík atd., vstupují hned do této sloučeniny, hned do jiné, a mimoto se projevují hned těmito, hned zase jinými účinky — ale že by se tím změnily ve svém nitru a že by se např. kyslík poznenáhlu změnil na něco jiného, to že je pouze vybájeno.

1. Podle mého názoru je omyl, že by zkušenost učila tomu, co se tu tvrdí. Zkušenost, pouhá bezprostřední zkušenost či vnímání, nás neučí bez spojení s určitými pojmovými pravdami ničemu jinému, než tomu, že máme ta či ona pozorování nebo představy vůbec. Odkud nám tyto představy přicházejí, zda působením nějakého jiného, od nás odlišného předmětu, ba dokonce, potřebují-li vůbec příčinu, a jaké má vlastnosti: o tom nás bezprostřední vnímání vůbec nepoučí, nýbrž to usuzujeme jen z určitých čistých pojmových pravd, které si musíme rozumem přimyslit, a usuzujeme na to většinou ještě podle pouhého pravidla pravděpodobnosti, např. že tato červená, kterou právě vidíme, je způsobena chorobným stavem našeho oka, ona vůně zase blízkostí květiny. Naproti tomu nepotře-

bujeme žádných závěrů pouhé pravděpodobnosti, vyvozených ze zkušenosti, abychom nahlédli, že mezi každými dvěma věcmi musí být nějaký rozdíl; ale můžeme to poznat po nepatrném rozmyšlení s úplnou jistotou. Mají-li být *A* a *B* dvě věci, musí být již proto také pravda, že věc *A* není věcí *B*, a toto je pravda, která předpokládá, že existují dvě představy *A* a *B*, z nichž jedna představuje pouze věc *A*, nikoli však *B*, a druhá jen věc *B* a nikoli *A*. A již v této okolnosti tkví rozdíl (a to vnitřní) mezi věcí *A* a *B*. Nahlédneme-li tak, že každé dvě věci mají nutně rozdíly, jak můžeme pokládat za oprávněné, pochybovat o takovém rozdílu jen proto, že jej tu a tam nevnímáme?, když přece k takovému vnímání patří zvláštní ostrost smyslů a ještě mnohé jiné okolnosti.

2. Je správné, že teprve zkušenost nás učí, že věcí, které na nás působí, je více, a zejména že všechny ty, které nám zprostředkuje názor, jsou složené. Avšak zkušenost tomu učí jen za předpokladu určitých ryzích pojmových pravd: jako je pravda, že různé účinky mohou přivodit jen různé příčiny atd. Avšak neméně jisté jsou ty pojmové pravdy, že každá příčina musí být něčím skutečným, a vše skutečné že je buďto substancí nebo souhrnem substancí, nebo vlastností jedné či více substancí; a stejně tak, že vlastnosti, které jsou něčím skutečným, nemohou být bez existence nějaké substance, na níž se nacházejí, a souhrny substancí nemohou být bez jednoduchých substancí, které jsou jejich částmi. Z toho všeho plyne s přísnou nutností existence jednoduchých substancí a stane se směšným, nechtít je připustit, protože je — nevidíme; a tím nesmyslnějším, když další přemýšlení učí, že každé těleso, které ještě je našimi smysly vnímatelné, je složené, ba dokonce že musí být složeno z nekonečné množiny jednoduchých částí.

3. Podobný klamný závěr na neexistenci z nevnímatelnosti vzniká, nechceme-li uznat, že všechny konečné substance podléhají změně, která nikdy neustává. Na své vlastní duši seznáváme přece dostatečně proměnlivost jejích stavů, představ, vlastností a sil. A již pouhá analogie nám dává popud, usuzovat na něco podobného u zvířecích duší a rostlin. Avšak teprve rozumové důvody nás opravňují uznat, že se ve skutečnosti přece všechny substance mění, i ty, které v rozmezí staletí nevykazují žádnou námi pozoro-

vatelnou změnu. Kdo to chce popírat, alespoň vzhledem k takzvané neživé hmotě a vzhledem k jejím jednoduchým částem nebo atomům, je donucen tvrdit, že všechny změny, které se jeví v této oblasti světa, když např. kus ledu, který byl ještě před chvílí pevný, nyní roztál a v následující hodině zmizí jako pára — že všechny tyto změny (říkám) nejsou ničím jiným, než pouhými změnami v prostorových vztazích menších a větších částeček těchto těles, přičemž se v nitru oněch částeček samých nemění nic. Avšak jak by mohlo ujít naší pozornosti, že při tomto výkladu upadneme do sporu? Neboť kdyby se v jednoduchých substancích samých (v jejich nitru) nemohlo nic měnit: čím by byly způsobeny změny v jejich vzájemných prostorových vztazích a jaké následky by měly tyto pouhé vnější změny, jakým účelům by sloužily a na čem vůbec by se poznaly? Na všechny takové otázky se dá rozumně odpovědět jen tehdy, když jednoduchým substancím — totiž takovým, které nejsou nanejvýš dokonalé, na něž tedy může účinkovat více sil než ony samy již mají — přiznáme právě proto schopnost změny, poněvadž na sebe vzájemně účinkují a jejich místa považujeme za taková jejich určení, která obsahují motiv, proč právě při té a té míře sil způsobuje jedna substance u druhé v daném časovém intervalu právě tyto změny a ne snad menší nebo větší. Jen za tohoto předpokladu, zřejmého i obyčejnému lidskému rozumu, zmizí onen spor v učení o vesmíru, a je třeba abychom se jen povznesli nad některé školské názory, již skoro zastaralé, abychom shledali, že je vše v souhlase.

§ 51

První z těchto školských názorů, kterého se musíme vzdát, je mrtvá nebo jen setrvačná hmota, vymyšlená staršími fyziky, jejíž všechny jednoduché části, pokud je má, navzájem rovné a věčně nepromĕnné, nemají mít žádné vlastní síly, ledaže by to byla jen samotná setrvačná síla. Cokoli je skutečné, musí též působit, a tedy mít síly k působení. Ale omezená substance, která je právě proto i proměnlivá, nemůže mít ovšem žádnou sílu, jejíž účinek by svou povahou nepřipustil změnu, tedy zejména žádnou tvořivou sílu, nýbrž musí mít jen síly vyvolávající změny, které ostatně mohou být buď imanentní, jako je síla vnímání, nebo tranzientní, jako je síla pohybová.

Avšak může nám být i nadále dovoleno, stejně jako dříve, představit si zpočátku věc mnohem jednodušeji a předpokládat jen existenci několika málo sil, místo nekonečné množiny sil, které tu skutečně spolupůsobí, ba myslit si vůbec taková tělesa a jejich vlastnosti, jež ve skutečnosti naprosto neexistují, abychom určili, co tato tělesa přivodí a naučili se tak postupně a s dostatečnou přesností posoudit účinek, který vyplyne z určitého spojení většího množství těles. Jenom nesmíme předpokládat, aniž bychom ještě o věci zvláště uvážili, že výsledek, který se v tomto vymyšleném případě musí objevit, bude také až do určitého stupně shodný s tím případem, který ve skutečnosti nastane. Pominutí této opatrnosti zavinilo mnohý paradox, jak ještě uvidíme.

§ 52

Jiný školský předsudek spočívá v tom, že jakýkoli předpoklad přímého působení jedné substance na druhou je ve vědě nepřípustný. Pravda je pouze to, že nesmíme nikdy předpokládat, že určité působení následuje bezprostředně, aniž bychom to dříve dokázali; je pravda, že by přestalo všechno vědecké studium, kdybychom chtěli každý jev, s nímž se setkáme, vyložit jen slovy, že je vyvolán bezprostředně. Šli bychom však zřejmě příliš daleko, kdybychom prohlásili každé působení, které může vykonávat jedna substance na druhou, jenom za zprostředkované, a tím bychom vůbec nikde nepřipustili bezprostřední účinek. Neboť jak by jen mohl povstat zprostředkovaný účinek, kdyby nebylo žádného bezprostředního? Protože to je dostatečně zřejmé, nechceme se u toho déle zdržovat, a spokojíme se jen poznámkou, jak je podivné, že tak veliký a obezřetný myslitel jako Leibniz připadl na onu nešťastnou hypotézu předzjednané harmonie, která hyzdí celý jeho systém kosmologie, jinak tak krásný, jen proto, že mu nebylo známo žádné prostředí, skrze něž by mohly substance, které jsou jednoduché, na sebe vzájemně působit.

§ 53

S tímto předsudkem je co nejúžeji spojen a již tím vyvrácen onen předsudek mohem starší, jakoby nebylo možné žádné působení (totiž žádné bezprostřední působení) jedné substance na jinou, když je od ní vzdálena. Tvrdím tím spíše, v nejostřejším protikladu k této představě, že každé působení jedné substance (která je v prostoru, a tedy omezená) na jinou je *actio in distans;* z toho prostého důvodu, že dvě jednoduché substance zaujímají v každém okamžiku také dvě různá jednoduchá místa, a tedy musí mít mezi sebou nějakou vzdálenost. O zdánlivém sporu, který je mezi tímto tvrzením a jedním naším tvrzením, že totiž prostor má být spojitě vyplněn, jsem již mluvil dříve.

§ 54

4. Tím se ovšem prohřešujeme proti jinému školskému předsudku novější doby, podle něhož by se mělo vidět, zejména v každé chemické sloučenině, pronikání substancí. Každou možnost takového pronikání bezpodmínečně popírám; neboť již v pojmu jednoduchého místa (nebo bodu) je obsaženo, pokud vidím, že je to místo, které může zaujímat jedna jediná (jednoduchá) substance. Kde jsou dva atomy, tam jsou také dvě místa. Z našeho výkladu prostoru, který jsme již vícekrát opakovali, plyne rovněž ihned, že velikost změny, kterou přivodí vzájemné působení dvou atomů během dané doby, je určeno jen velikostí vzdálenosti dvou atomů, jež na sebe účinkují. Kdyby mohly existovat na jednom místě dvě nebo více substancí, třeba sebe kratší dobu, byla by velikost jejich vzájemného působení v této době naprosto neurčitelná; a kdyby to byl jen jediný okamžik, nebylo by možno určit v něm jejich stav.

§ 55

5. Avšak od Descartesových dob se vynořil ještě jeden nový školský předsudek. Zatímco on sám se domníval (veden jistě velmi

chvályhodným úmyslem), že nemůže nikdy dost přehnat rozdíl mezi myslícími a nemyslícími substancemi (duchem a hmotou, jak je nazval), připadl na tvrzení, každému obyčejnému lidskému rozumu tak podivné, ba skoro nemyslitelné, že duchová bytost se nejen nesmí považovat za něco rozprostraněného, tj. skládajícího se z částí, nýbrž ani za něco, co by existovalo v prostoru, tedy za bytost, která by svojí přítomností vyplňovala třeba jen pouhý bod v prostoru. A poněvadž Kant šel později dokonce tak daleko, že prohlásil prostor (právě tak jako čas) za pouhou dvojici forem našeho názoru, kterým žádný předmět neodpovídá; a protože postavil takřka proti sobě dva světy, inteligibilní svět ducha a smyslový svět: nelze se divit, když se alespoň v Německu tak hluboko upevnil předsudek o tom, že duchovní bytosti jsou neprostorové, že trvá až do dnešního dne ve školách. Pokud jde o důvody, jimiž jsem tento předsudek potřel, jak se domnívám, musím poukázat na jiné spisy, zejména na Wissenschaftslehre a na Athanasii. Tolik mi každý musí přiznat, že pro názor mnou vyslovený, podle něhož musí existovat všechny stvořené substance ze společného důvodu jak v čase, tak v prostoru, a celý jejich rozdíl je pouhým rozdílem stupňů, mluví ve srovnání s každým jiným názorem již sama jeho jednoduchost.

§ 56

Zaujmeme-li toto hledisko, odpadne také velký paradox, který se až dodnes hledal stále ve spojení mezi duchovní a hmotnou substancí. Jak jen může působit hmota na ducha a ten opět na ni, když jsou tak nestejného rodu, to bylo prohlášeno za tajemství, které my lidé nemůžeme vyzkoumat. Avšak z uvedených názorů plyne, že toto vzájemné působení musí být alespoň zčásti bezprostřední, a potud v sobě nemůže jistě mít nic tajemného a skrytého; čímž jsme ovšem nechtěli říci, že by nebyla hodna mnohého vědeckého a badatelského úsilí ta oblast těchto účinků, které jsou nějak zprostředkovány, zejména organismy.

7. Jestliže si lidé před dávnými časy vymyslili substance bez sil, chtěli zase v nové době sestrojit vesmír jen z pouhých sil bez substancí. Byla to bezpochyby okolnost, že žádná substance nám neprojevuje své bytí jinak než svými účinky, tedy silami, která vyvolala mylný výklad pojmu substance jako souhrnu pouhých sil. A hrubý smyslový obraz, na který poukazuje etymologie slov: substance, substrát, subjekt, nositel a podobných jiných, zdánlivě podával jasný důkaz, že všeobecně vládnoucí učení, podle něhož k existenci substance je zapotřebí ještě čehosi zvláštního, čemu příslušejí ony síly jako jeho vlastnosti, je založena na pouhém smyslovém klamu; neboť nositele, podkladu ve vlastním slova smyslu, tu jistě nebylo třeba. Musíme však zůstat u tohoto smyslového výkladu? Jakékoli něco, dokonce pouhý pojem ničeho, musíme přece považovat za předmět, kterému nenáleží jen jedna vlastnost, nýbrž celý souhrn nekonečně mnoha vlastností. Myslíme si proto jakékoli něco jako nositele ve vlastním smyslu? Jistě ne! Myslíme-li si však něco s tím určením, že je to něco skutečného, a to takové skutečno, které není žádnou vlastností jiného skutečna, pak to podřadíme pojmu substance podle správného výkladu tohoto slova. A takových stvořených substancí existuje, s výjimkou jedné nestvořené, nekonečně mnoho. Silami nazývám ve smyslu převládajícího jazykového užití všechny ty vlastnosti substancí, o nichž musíme předpokládat, že jsou nejbližší (tj. bezprostřední) příčinou nějaké jiné vlastnosti, a to uvnitř nebo vně té substance, která je vyvolává. Síla, která by nepříslušela žádné substanci jako její vlastnost, musila by být něčím skutečným, poněvadž jako příčina je něčím skutečným, a přitom by se nevyskytovala na žádné jiné skutečnosti, takže by se neměla nazývat pouhou silou, nýbrž přímo samostatně existující substancí.

Po tom všem, co jsme uvedli o podobných vztazích (§ 38 a násl.) u času a prostoru, nevyžadují žádného dalšího ospravedlnění tyto paradoxy — že v božím stvoření neexistuje žádný nejvyšší stupeň bytí a žádný nejnižší; že dále na každém sebe vyšším stupni a v každé sebe starší době byli tvorové, kteří se rychlým pokrokem vyšvihli právě na tento stupeň; že však také na každém sebe nižším stupni a v každé sebe pozdější době budou tvorové, kteří se přes svůj stálý pokrok teprve nyní nacházejí na tomto stupni.

§ 59

Mnohem pohoršlivěji však zní paradox: přestože „veškerý nekonečný prostor vesmíru je všude a ve všech dobách tak vyplněn substancemi, že ani jediný bod není ani okamžik bez substance, která by v něm byla, a že také ani jeden bod nepřechovává dvě nebo více substancí — může přece existovat nekonečná množina různých stupňů hustoty, kterou mají různé části prostoru v různých dobách, takže táž množina substancí, která v tomto okamžiku vyplňuje např. kubickou stopu, by mohla být v jiném čase rozprostřena v prostoru milionkrát větším, a opět v jiném čase by mohla být zhuštěna v tisíckrát menším prostoru, aniž by byl při rozpínání některý bod ve větším prostoru prázdný a aniž by musil bod v menším prostoru pojmout při zhušťování dva nebo tři atomy.“

Jsem si velmi dobře vědom toho, že tím tvrdím něco, co v očích většiny fyziků vypadá až do nynějška jako nesmysl. Neboť jen právě proto, poněvadž se domnívají, že fakt nestejné hustoty těles nelze sloučit s předpokladem spojitě vyplněného prostoru, předpokládají určitou pórovitost jako všeobecnou vlastnost všech těles, dokonce i těch, u nichž (jako u plynů a éteru) pro to nemluví sebe menší pozorování, a v těchto pórech, z nichž větší mají být veskrze naplněny plyny, tedy vlastně jen v pórech kapalin, jež nebyly nikdy pozorovány, předpokládají fyzikové ještě až do nynějška tak zvané *vacuum dispertitum*, tj. určité prázdné prostory v takovém množství a v takové rozloze, že stěží biliontý díl prostoru, vyplněného pouhým éterem, obsahuje skutečnou hmotu. Nicméně doufám, že všem těm, kteří náležitě uvážili co bylo řečeno v §§ 20 a násl., bude dostatečně jasné, proč není vůbec nic nemožného v tom, že táž (nekonečná) množina atomů zaujímá hned větší prostor, hned se opět stáhne na menší, aniž by v prvním případě zůstal třeba jen jediný bod onoho prostoru opuštěný, a v druhém případě aniž by jen jediný bod musil přijmout dva atomy.

§ 60

A nyní bychom se již sotva pohoršili nad tvrzením (které bylo již beztak vysloveno starší metafyzikou v učení o *nexu cosmico*), že každá substance světa je s každou jinou v obapolném spojení, avšak tak, že změna, kterou jedna způsobuje u druhé, je tím menší, čím je větší jejich vzdálenost a že úhrnný výsledek vlivu všech substancí na každou jednotlivou je změnou, která se řídí známým zákonem spojitosti — pomineme-li případ, kdy nastane přímý boží zásah, protože odchylka od tohoto zákona vyžaduje sílu, která by ve srovnání se spojitou silou musila být nekonečně velká.

§ 61

Jakkoli snadno se dá z pouhých pojmů vyvodit učení o vládnoucích substancích, vyslovené již v prvním vydání Athanasie (1829), lze v něm přece zpozorovat paradoxy, pročež je nutné zmínit se tu o nich několika slovy.

Vycházím totiž (viz citované místo) z té myšlenky, že v každé době existují substance, jejichž síly již natolik vzrostly, že působí s jistou převahou na všechny okolní substance, a to ať je toto okolí jakkoliv malé, protože mezi každými dvěma substancemi vesmíru musí být v každém čase, jak známo, nějaký rozdíl konečné velikosti. — Bylo by omylem, který by tento předpoklad ihned vystavil podezření z vnitřního sporu, kdyby si chtěl někdo představovat, že taková vládnoucí substance musí mít síly, které převyšují síly ovládané substance o nekonečno. Tak tomu vůbec není. Dejme tomu, že v prostoru konečné velikosti, např. v prostoru koule, je substance (třeba v jejím středu), která převyšuje svými silami všechny ostatní substance v konečném poměru, jako by to např. bylo, kdyby každá z nich měla pouze poloviční sílu proti oné. Ačkoliv se pak vůbec nedá pochybovat o tom, že celkový účinek těchto nekonečně mnoha slabších substancí převyšuje nekonečněkrát účinek silnější substance tam, kde se náhodně ve své činnosti spojí (jak se stává např., když se snaží přiblížit se k ústřednímu tělesu, jak brzo uslyšíme): přece mohou a musí být jiné případy, kdy ony síly nesměřují právě k témuž cíli, zejména se musí dát zpravidla říci — přihlédneme-li teď pouze k tomu účinku, který každá ze substancí, nacházejících se v prostoru, sama vykonává na každou jinou a zase z její strany přijímá — že toto vzájemné působení na straně silnější substance je silnější v tomtéž poměru k její síle. V tomto příkladu tedy substance, o níž jsme předpokládali, že je alespoň dvakrát silnější než každá ze sousedních, bude na každou z nich alespoň dvakrát silněji působit, než ony působí na ni. A jen toto si myslíme, když říkáme, že ovládá druhé substance.

§ 62

Avšak někdo snad řekne, že je-li tomu jen takto, pak musíme potkat nejen v některých prostorech, nýbrž v každém sebemenším prostoru, ba dokonce v každém libovolném souhrnu atomů, jeden vládnoucí; neboť v každém souhrnu musí být několik nejsilnějších, právě tak jako nejslabších. Doufám však, že žádný z mých čtenářů nepotřebuje poučení, že toto platí nejvýše o konečných množinách, ale že tam, kde je množina nekonečná, může mít každý člen nad sebou ještě větší (nebo pod sebou ještě menší) člen, aniž by některý z nich překročil danou konečnou veličinu (anebo pod ni klesl).

§ 63

Tyto vládnoucí substance, kterých již ve smyslu jejich pojmu je v každém konečném prostoru jenom konečný počet, každá z nich však obklopená hned větším, hned zase menším obalem pouhých služebných substancí, vytvářejí spojením ve shluky konečné velikosti to, co nazýváme rozličnými tělesy, vyskytujícími se ve světě (plynnými jakož i kapalnými, pevnými, organickými atd.). V protikladu k nim nazývám éterem celou ostatní světovou látku, která vyplňuje všechny kdekoli existující prostory, aniž by obsahovala význačné atomy, a tak spojuje všechna tělesa světa. Není tu místo k rozboru, jak mnohé jevy, dosud jen nedokonale vysvětlené nebo vůbec nevysvětlené, se z dosavadního předpokladu (i když jej chceme připustit jen jako předpoklad) velmi lehce vysvětlí. S ohledem na účel tohoto spisu si musím dovolit jen několik náznaků k objasnění zdánlivých sporů.

Jestliže se všechny stvořené substance navzájem rozlišují jen stupněm své síly, musí-li tedy být přiznán každé z nich alespoň sebemenší stupeň vnímavosti a působí-li všechny na všechny: pak není nic pochopitelnějšího než to, že libovolným dvěma substancím, ať již jakkoli ustrojeným, a tím spíše dvěma význačným substancím se nejeví každá vzdálenost jako stejně vhodná (tj. taková vzdálenost, která by jim činila stejně dobře); neboť na velikosti vzdálenosti závisí jak velikost účinků, které vykonávají, tak těch, které přijímají. Jestliže vzdálenost, ve které jsou, je větší než je pro ně vhodné: dostaví se u nich snaha, tuto vzdálenost zkrátit, tedy tak zvané přitahování, v opačném případě však odpuzování. Nesmíme si myslit ani odpuzování ani přitahování jako oboustranné, a tím méně to, že je doprovázeno skutečnou změnou místa: avšak smíme předpokládat jako jisté, že pro každou dvojici substancí ve vesmíru existuje dostatečně velká vzdálenost, aby při ní a při každé větší vzdálenosti nastalo vzájemné přitahování, a právě tak vzdálenost dostatečně malá, aby při ní a při každé menší nastalo vzájemné odpuzování. Ať se však v čase jakkoliv mění velikost uvedených dvou vzdáleností, které jsou mezemi přitahování a odpuzování pro dvě uvedené substance, a to nejen podle vlastností těchto substancí samých, nýbrž i podle vlastností sousedních substancí, ležících v jejich celém okolí: je přece nesporné, že veškerý vliv, který na sebe vykonávají dvě substance za okolností jinak pochybných, se musí zmenšovat s úbytkem jejich vzdálenosti; již z toho důvodu, že také množina těch substancí, které by mohly zaujmout místo ve stejné vzdálenosti a měly by nárok na tentýž účinek, přibývá se čtvercem oné vzdálenosti. Poněvadž dále převaha, kterou má každá význačná substance nad substancí pouze podřízenou, dostupuje vždy jen konečné velikosti, a naproti tomu množina podřízených substancí přesahuje v každém prostoru množinu oněch prvních nekonečněkrát: lze pochopit, že velikost přitažlivosti, kterou působí všechny substance v daném prostoru na jeden atom ležící vně, se jeví být přibližně táž, dosáhla-li jeho vzdálenost dostatečné velikosti, jako velikost, které by přitažlivost nabyla i tehdy, kdyby onen prostor neměl žádné význačné substance, nýbrž obsahoval jen stejně velkou množinu obyčejných atomů. Ve spojení s předchozím nás to vede k důležitému závěru, že mezi všemi tělesy, za předpokladu, že jejich vzájemná vzdálenost je dostatečně velká, existuje přitažlivá síla, která je přímo úměrná jejich masám (tj. množině jejich atomů) a nepřímo úměrná čtverci jejich vzdáleností. Žádný fyzik ani astronom našich dnů nepopře, že tento zákon byl ve vesmíru pozorován; avšak zdá se, že se jen zřídka vzpomnělo na to, jak těžko je slučitelný s obvyklým názorem na vlastnosti elementárních částic různých těles Kdyby totiž se to mělo skutečně tak, jak se věc dosud obecně vykládá, že oněch 55 a více jednoduchých látek, které chemikové poznali na zemi, by tvořilo masu všech těles, se kterými se tu setkáváme, takže každé by bylo pouze souhrnem atomů jedné nebo druhé nebo většího počtu těchto látek, takže např. zlato by bylo pouze souhrnem atomů zlata, síra souhrnem atomů síry atd.: pak ať mi vyloží, kdo do dovede, čím je to, že látky, které se tak rozdílně chovají pokud jde o jejich síly, zejména ve stupni vzájemné přitažlivosti, jsou si přece ve své váze veskrze rovny, tj. že jejich váhy se mají k sobě jako jejich masy. Neboť známá zkušenost učí přímo že tomu tak je, když koule z libovolné látky, mající stejnou váhu, se chovají při srážce přesně tak, jak to musí činit tělesa o stejné hmotě (mase), když se např. přivedou při stejné rychlosti do klidu (pokud je účinek pružnosti odstraněn nebo počítá-li se s ním). Předpokládáme-li však, že všechna tělesa nejsou vlastně z ničeho jiného než z nekonečné množiny éteru, v němž je ve srovnání s touto množinou zcela mizivý počet význačných atomů, jejichž síly převyšují síly éterového atomu jen konečněkrát: pak pochopíme, že přitažlivá síla, kterou působí celá zeměkoule na tato tělesa, nemůže být v žádném případě citelně zvýšena malým počtem oněch význačných atomů, že tedy jejich váha musí být úměrna jen jejich celé mase. Avšak i dnes jsou fyzikové, kteří považují tepelnou látku (tedy v podstatě tutéž látku, kterou já sám ztotožňuji s éterem) za kapalinu, která je ve všech tělesech a nikdy se z nich nedá úplně vypudit. Kdyby si tedy nebyli na neštěstí představovali tuto tepelnou látku jako imponderabilii a kdyby se byli povznesli k názoru, že množina stomů, které jsou ještě krom tepelného fluida v každém individuálním tělese, je proti tepelné látce mizivá (a jak blízko tomu byli, když někdy požadovali, že si musíme představovat atomy oddělené vzdálenostmi, které jsou ve srovnání s jejich průměry nekonečně velké): pak by jim bylo jistě bývalo zcela jasné, že je to jen tato tepelná látka, která určuje váhu všech těles.

§ 64

Je nasnadě, že moc, kterou vyvíjí význačná substance na své nejbližší okolí, spočívá, když ne v jiném, tedy alespoň v jistém vnějším přitahování jejích sousedních atomů, pročež jsou atomy okolo ní a vzájemně vůči sobě hustěji stlačeny, než by jinak byly, a proto právě mají snahu, vzdálit se trochu při dané příležitosti jak od tohoto přitahujícího bodu, tak navzájem, tedy se navzájem odpuzovat; což je fakt, na který poukazuje tolik zkušeností, avšak k jehož výkladu se zcela zbytečně předpokládala prvopočáteční odpudivá síla mezi částečkami éteru.

§ 65

Z této okolnosti vyplývá snadný důkaz věty, kterou jsem vyslovil již v Athanasii, že totiž žádná význačná substance nedozná uvnitř svého obalu takovou změnu, aby si nepodržela určitý (i když jakkoli malý) díl svého nejbližšího okolí. Jistě se nikdo neobává, že význačná substance *a* by mohla být oloupena o ty atomy éteru, které jsou jí nejblíže, jestliže žádný z jejích nejbližších okolních sousedů význačného stupně *b*, *c*, *d*, *e* .. nemění svoji vzdálenost od *a*; pouze tehdy by mohla být nějaká obava, kdyby některá z nich nebo i všechny se vzdálily. Avšak i když se to stane, může jenom část éterových částic, obklopujících *a*, sledovat unikající substance *b*, *c*, *d*, *e* . . ., avšak část, a to těch které jsou neblíže *a*, musí vždy zůstat; přičemž nejen připouštím, že se tato část rozepne do širšího prostoru, nýbrž dokonce tvrdím, že je to nutné. Podle stavu okolností by sem dokonce mohly proudit z určitých vzdálených končin éterové atomy a vnikat do oněch prostorů, které jsou naplněny relativně mnohem řidším éterem, poněvadž vzdálenosti, do nichž se rozptýlily substance *a*, *b*, *c*, *d*, *e* . . . jsou příliš velké. Není však žádný důvod, aby tento éter, přicházející zdaleka, vytlačil úplně éter, který původně obklopoval substanci *a* a chtěl získat jeho místo. Éter sem proudící musí jen zabránit vlastnímu rozpínání éteru, obklopujícího substanci *a*, místo aby jej vypudil úplně, a stlačit jej natolik, až jeho hustota je v rovnováze se silami přitažlivosti všech okolních atomů.

§ 66

Potom je možno ihned odpovědět na mnohé otázky způsobem, který by mohl někdo pokládat za paradoxní, kdyby to, co jsme předeslali, nezaručovalo vysvětlení. Takového druhu je otázka po hranicích těles: kde vlastně jedno těleso končí a druhé začíná? Já však pokládám za hranici tělesa souhrn všech nejvnějšnějších atomů, které ještě k němu patří, tj. které jsou silněji přitahovány jeho význačnými atomy než jinými vládnoucími atomy, které jsou v sousedství; takže změní-li těleso svoje postavení vůči svému sousedství (např. se od něho vzdálí), odcházejí s ním, i když snad ne toutéž rychlostí, přece však tak, že nedojde k žádnému odloučení atomů a žádnému vstupu cizích atomů mezi ně. Předpokládáme-li tento pojem hranice, ukáže se brzy, že ohraničení tělesa je něčím velmi měnlivým, ba že se skoro stále mění, jak jen probíhá nějaká změna zčásti v něm samém, zčásti v sousedních tělesech, neboť všechny takové změny mohou pochopitelně způsobit mnohé změny jak velikosti, tak i směru přitažlivosti, která působí na atomy nějakého tělesa, a to nejen na ovládané, nýbrž dokonce na vládnoucí Tak jistě četné částečky tohoto brku, které ještě krátce předtím byly jeho ostatní hmotou silněji přitahovány než okolním vzduchem, a tedy ještě k brku náležely, budou nyní přitahovány mými prsty silněji než hmotou brku a tím se od něho odtrhnou. — Přesnější úvaha ukazuje, že mnohá tělesa nemají na určitých místech vůbec žádné hraniční atomy, tj. nemají takové atomy, které by ještě náležely k tělesu a pohybovaly se s ním, kdyby se jeho poloha změnila, a přitom byly nejvnějšnější. Neboť opravdu, jakmile má jedno ze sousedních těles na některém místě nejvzdálenější atom, jenž odchází s ním, nemůže mít druhé těleso již proto žádný takový nejvzdálenější atom, poněvadž všechny atomy éteru, které jsou za ním, patří již k němu.

§ 67

Tím je také dána odpověď na otázku, zda jsou tělesa v přímém dotyku a kdy, či zda jsou oddělena prostorem mezi nimi? Dovoluji si totiž (což se mi zdá být nejúčelnější) ten výklad, že dvě tělesa se dotýkají, kdykoli nejvnějšnější atomy, které podle vysvětlení předchozího paragrafu patří k jednomu z nich, tvoří s atomy druhého spojitou rozlohu: pak se jistě nedá popřít, že existuje mnoho těles, která se vzájemně dotýkají; nejen tehdy, je-li jedno z nich tekuté či dokonce obě dvě, nýbrž i když jsou pevná, pokud ovšem napřed odstraníme silným stiskem nebo jinak vzduch, který je mezi nimi, a který na nich lpí při obvyklých poměrech na zemi. Nedotýkají-li se obě tělesa: pak musí být prostor mezi nimi vyplněn nějakým jiným tělesem nebo alespoň pouhým éterem, poněvadž žádný zcela prázdný prostor neexistuje. Dá se tedy tvrdit, že vlastně každé těleso je ze všech stran v dotyku s některými jinými tělesy anebo s pouhým éterem, když taková tělesa nejsou.

§ 68

Vzhledem k rozmanitým druhům pohybu, které se uskutečňují ve vesmíru, bychom se mohli domnívat, že když není (podle našeho názoru) žádná část prostoru prázdná, není možný jiný pohyb než jeden, při němž celá současně se pohybující hmota tvoří jedinou rozlohu, navracející se zpět do sebe samé, kde každá část hmoty zaujímá jen ta místa, která přímo předtím zaujímala jiná část hmoty. Kdo však zachoval v paměti to, co bylo řečeno v § 59 o rozličných stupních hustoty, kterými prostor může být vyplněn, pochopí, že mohou a musí nastat i jiné pohyby. Zejména s jedním pohybem, a to kmitavým, se musíme takřka stále potkávat nejen u všech éterových atomů, nýbrž také skoro u všech význačných atomů z důvodu, který je tak zřejmý, že jej nepotřebuji teprve uvádět. Jemu nejblíže musí také být otáčivý pohyb, velmi běžný zejména u tuhých těles. Jak si jej máme myslit, jak se dá vysvětlit, že tytéž atomy, které jsou nyní na jedné straně osy, dospějí po půlotáčce na protější stranu, aniž by se odtrhly, jestliže osou otáčení je hmotná čára (což musí podle našich názorů být vždy): to může přivést do rozpaků jen toho, kdo zapomene, že právě tak v kontinuu, jako mimo ně, je každý atom v určité vzdálenosti od každého jiného a proto může okolo něj kroužit, aniž by se odtrhl, nebo aniž by se přitom dokonce otáčel kolem sebe; toto otáčení kolem sebe sama by bylo u jednoduché prostorové věci něčím, co by si samo odporovalo.

§ 69

Aniž bychom chtěli tvrdit, že i jen jediný vládnoucí atom nebo obyčejný atom opisuje ve vesmíru v nějaké době dokonale přímou čáru nebo dokonalou kružnici (což by při nekonečné množině poruch které utrpí každý atom účinkem ostatních, mělo spíše nekonečně velkou nepravděpodobnost): nesmíme přece prohlásit takové pohyby za něco, co by samo o sobě bylo nemožné. Zajisté však smíme tvrdit, že k opisování např. lomené čáry může dojít jen tehdy, když rychlosti atomu na konci úseku *ab* ponenáhlu tak ubývá, že je v bodě *b* nulou; načež se v každém okamžiku, následujícím po příchodu do *b*, musí dostavit opět rychlost (rostoucí od nuly), nemá-li být pohyb přerušen konečnou dobou klidu.

Není tomu tak u jistých jiných čar, jako zejména u logaritmické spirály. I když si odmyslíme všechny poruchy z vnějšku, shledáme, že je něco kontradiktorického v tom, že by atom měl proběhnout v konečné době třeba i jen tu část této čáry, která směřuje ke středu, počínajíc nějakým jejím bodem: a ještě nesmyslnější je požadovat, aby atom, který ji opisuje, dosáhl středu spirály. Abychom toto dokázali jen pro ten případ, kdy atom postupuje po své dráze stálou rychlostí: mysleme si nejprve, že se pohybuje sám. Pak se brzo ukáže, že na jeho pohyb po spirále se dá nahlížet tak, jako by byl složen ze dvou pohybů: jednoho rovnoměrného pohybu po průvodiči, směrem ke středu, a úhlové rotace se středem v tomto bodě, jejíž rychlost, rovnoměrně vzrůstající, musí být větší než jakákoli konečná veličina, má-li atom dospět libovolně blízko středu. Jistě tedy neexistuje v přírodě síla, která by mu mohla udělit tuto rychlost;

a tím méně síla, která by mohla dát tuto rychlost celé mase atomů, rozprostřené ve třech rozměrech, jaké je zapotřebí, když každý její atom má proběhnout všech nekonečně mnoho závitů spirály, až ke středu v konečné době. Avšak i kdyby ji měl, mohli bychom o něm říci, že dospěl do středu? Já sám nejsem toho mínění. Neboť ačkoliv můžeme říci, že tento střed tvoří s body spirály (které jí zcela nepochybně patří) kontinuum, protože se mezi nimi najde v každé sebemenší vzdálenosti jeho soused: přece chybí této lineární rozloze ještě druhá vlastnost, kterou musí mít každá rozloha, má-li být opsána pohybem atomu, a to, že má v každém svém bodě jeden nebo několik určitých směrů. A tomu tak ve středu spirály není, jak známo.

Sem konečně patří i škádlivá otázka, zda může podle našich názorů o nekonečnosti vesmíru dojít k posuvu všeho vesmíru v nějakém daném směru nebo k jeho otáčivému pohybu kolem dané osy či světového středu? Odpovím, že ani jeden, ani druhý pohyb nemůžeme prohlásit za nemožný z toho pouhého důvodu, že by snad nebylo možno nalézt pro každý atom místa, na něž by vstoupil; avšak musíme je prohlásit za nemožné, protože se nedostává příčin (sil), které by takový pohyb měly přivodit. Neboť nedá se vymyslit ani důvod fyzický nebo uspořádání obecně nutné (tj. které je pouhým důsledkem ryze teoretických pojmových pravd), ani morální důvod nebo uspořádání jen podmíněně nutné (tj. které nacházíme ve světě jen proto, poněvadž bůh způsobuje každou událost prospěšnou blahu jeho stvoření) — z něhož by plynulo, že se ve světě a takovým pohybem setkáme.

§ 70

Uzavřeme tyto úvahy dvěma paradoxy, které proslavil zejména Euler. Již Bošković upozornil na okolnost, že na jednu a tutéž otázku po pohybu atomu *a*, přitahovaného silou, nacházející se v *c* a nepřímou úměrnou čtverci vzdálenosti, dostaneme dvě různé odpovědi: podle toho, díváme-li se na tento případ jako na pohyb, do něhož pomalu přechází pohyb eliptický, když jeho rychlosti vrhu ubývá k nule, nebo díváme-li se na věc tak, jak je sama o sobě, abstrahujíce zcela od této fikce. Kdyby atom *a* získal vrhem (nebo jiným způsobem) na začátku svého pohybu složku rychlosti kolmou k *ac*: musil by (zanedbáme-li jakýkoli odpor prostředí) opisovat elipsu, jejíž jedno ohnisko je *c*. Ubývá-li této složky rychlosti do nekonečna, ubývá do nekonečna také menší osa této elipsy; pročež Euler usoudil, že v tom případě, kdy atom nemá v bodě *c* žádnou rychlost, musí dojít k jeho kmitavému pohybu mezi body *a* a *c*; a jedině tento pohyb že to je, do něhož přechází onen pohyb eliptický, nemá-li se porušit zákon spojitosti. — Jiní, zejména Busse, shledali naproti tomu nesmyslnost v tom, že atom, jehož rychlost ve směru *ac* má vzrůstat přiblížením k bodu *c* do nekonečna, by tu byl zcela bezdůvodně ve svém běhu zabrzděn a puzen zpět v opačném směru (neboť přítomnost něčeho, co by bránilo průchodu tímto místem, jako třeba neprostupného atomu, který by tu byl nehybně položen, nebyla vůbec předpokládána). Tvrdili tedy, že musí přece ve svém pohybu pokračovat ve směru *ac* za *c*, avšak nyní s ubývající rychlostí, až dosáhne konce úseku *cb* = *ca*, pak se podobně z *b* vrátit do *a* zpět a tak stále dál. — Podle mého názoru tu nemohlo být nic rozhodnuto Eulerovým poukazem na zákon spojitosti. Neboť proti takovému druhu spojitosti, která vskutku prokazatelně vládne u změn ve vesmíru (a to v růstu nebo poklesu sil jednotlivých substancí), se jev, o nějž je veden spor, neprohřešuje, a to ani když necháme atom oscilovat v mezích *a* a *b*, ani když jej necháme oscilovat mezi *a* a *c*.

Obr. 12

Avšak proti tomuto zákonu se prohřešíme způsobem, který se nedá ospravedlnit, již tím, že tu předpokládáme síly, a to přitažlivou sílu, která roste do nekonečna; a již proto se nesmíme divit, když se dají ze sporných premis vyvodit i sporné závěry. — Z toho však vidíme, že nejen Eulerova odpověď na otázku je nesprávná, nýbrž i Busseho odpověď; neboť předpokládá již něco, co je samo o sobě nemožné, totiž nekonečně velkou rychlost v bodě *c*. Napraví-li se tato chyba, předpokládá-li se tedy, že rychlost, jakou atom postupuje, se řídí takovým zákonem, že zůstává stále konečnou; pamatuje-li se též na to, že nemůžeme nikdy hovořit o pohybu jediného atomu, aniž bychom předpokládali prostředí, v němž se pohybuje, a větší nebo menší množství atomů, jež se současně s ním pohybují: objeví se zcela jiný výsledek, jehož bližším popisem se tu nepotřebujeme zabývat.

Druhý paradox, který chceme ještě několika slovy uvést, se týká kyvadlového pohybu, a spočívá v tom, že poloviční doba kyvu jednoduchého kyvadla o délce $= r$, počítaná pomocí nekonečně malého oblouku je, jak známo $= \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{r}{g}}$; kdežto doba pádu po tetivě tohoto oblouku, jejíž délku přece pokládáme obyčejně za stejně velkou s délkou oblouku, vyjde $= \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{r}{g}}$. Že Euler v tom viděl paradox spočívá jistě jen v jeho nesprávné představě o nekonečně malém, které si myslil jako ekvivalentní nule. Ve skutečnosti však neexistují ani nekonečně malé oblouky, ani tetivy; to však, co tvrdí matematikové o svých tak zvaných nekonečně malých obloucích a tetivách, dokázali vlastně jen pro oblouky a tetivy, které mohou být pokládány za tak malé, jak si jen přejeme; a hoření dvě rovnice, správně pochopené, nemohou mít žádný jiný smysl než ten: poloviční doba kyvu kyvadla se blíží veličině $\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{r}{g}}$ tak blízko jak chceme, jestliže vezmeme oblouk, na němž je necháme kývat, tak malý, jak chceme: avšak doba pádu po tetivě tohoto oblouku se blíží za těchže okolností veličině $\sqrt{2} \sqrt{\frac{r}{g}}$ tak přesně, jak jen chceme. A že tyto dvě veličiny jsou rozdílné, že tedy oblouk a jeho tetiva se liší vzhledem k zmíněné době pádu, ať je vezmeme jakkoliv malé: na tom není nic podivného právě tak, jako na mnohých jiných jejich rozdílech, jejichž vymizení nikdo neočekává, dokud oblouk a tetiva existují, jako například na tom rozdílu, že oblouk si zachová vždy křivost, jejíž velikost bychom mohli měřit $\frac{1}{r}$, zatímco tetiva zůstává stále přímá, tj. nemá žádnou křivost.