Jan Vojtěch
Anmerkungen des Herausgebers

In: Bernard Bolzano (author); Jan Vojtěch (author): Bernard Bolzano's Schriften. Band 5. Geometrische Arbeiten. (German). Praha: Královská česká společnost nauk v Praze, 1948. pp. 185–207.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/400220

ANMERKUNGEN DES HERAUSGEBERS

A

Wie schon in der Einleitung angeführt ist, sind hier Bernard Bolzanos geometrische Abhandlungen I, II und III nach ihren Veröffentlichungen aus den Jahren 1804, 1845 und 1817 neu abgedruckt. Dagegen erscheint die IV. (unvollendete) Arbeit Bolzanos zum ersten Male gedruckt und zwar nach der Handschrift, welche in der Nationalbibliothek in Wien aufbewahrt ist und dem Herausgeber in photographischen Kopien zugänglich war (an einigen Stellen recht schwer lesbar und mit zahlreichen Korrekturen des Autors). In allen diesen Fällen wurden nur kleinere Änderungen redaktioneller Art vorgenommen.

1. Abkürzungen, die oft genug vorkommen, wurden durch die vollständig ausgeschriebenen Wörter ersetzt: z. B. Erkl. = Erklärung, Lehrs. = Lehrsatz, Bew. = Beweis, W. = Winkel, R. = Richtung, par. = parallel, a. d. L. v. d. g. L. = = aus der Lehre von der geraden Linie; u. s w. Auch abgekürzte lateinische Wörter wurden ergänzt: z. B. ex def. = ex definitione, p. constr. = per constructionem, conv. simpl. = conversio simplex, conc. hyp. in modo toll. = conclusio hypothetica in modo tollente; u. a. m.

2. Die alte Rechtschreibung wurde beibehalten, aber in einzelnen Arbeiten einheitlich gemacht (wenn sie auch im Original jeder Abhandlung nicht immer konsequent ist). Auch das Symbol fx statt $f(x)$ wurde nicht geändert. Statt „gleich" würde des Autors = (im Satze) gelassen.

3. Einige ungewöhnliche Ausdrücke oder offensichtliche Irrtümer der Handschrift oder des Druckes (besonders in der I. und III. Abh.) wurden ausgebessert: z. B. Winkeln (nom. pl.) = Winkel, ohne dem Begriffe = ohne den Begriff, in diesem einem = in diesem einen, u. dgl. m.; in Abh. I, § 50 wurde statt p richtiges b, in § 52 statt y richtiges η, in Abh. III statt y richtiges z, statt Δx richtiges Δs, statt + richtiges = gesetzt; u. s. w. Manche Kleinigkeiten wurden verbessert: z. B. zahlreiche ungehörige Interpunktionszeichen weggelassen, anderswo unentbehrliche hinzugefügt; u. a. m.

4. Die zwei Tafeln von Abbildungen in den Abhandlungen I und III wurden photographisch reproduziert. Eine weitere Tafel zur Abh. IV wurde nach den geringen Skizzen des Autors hergestellt.

Endlich sei bemerkt, daß die geometrischen Abhandlungen B. Bolzanos (samt der Einleitung und den Anmerkungen) schon im Jahre 1933 zum Drucke vorbereitet waren.

B

[1]) Bolzano führt seine Schrift mit einem Motto aus der Rede *Εὐαγόρας* des berühmten griechischen Lehrers der Beredsamkeit und Politikers Isokrates (lebte in Athen von 436 bis 338 v. Chr.) ein (es lautet: *Τὰς ἐπιδόσεις ὁρῶμεν γιγνομένας καὶ τῶν τεχνῶν καὶ τῶν ἄλλων ἁπάντων οὐ διὰ τοὺς ἐμμένοντας τοῖς καθεστῶσιν, ἀλλὰ διὰ τοὺς ἐπανορθοῦντας καὶ τολμῶντας ἀεί τι κινεῖν τῶν μὴ καλῶς ἐχόντων*), welches seine Arbeit durch den Ausspruch charakterisiert und rechtfertigt, daß jeder Fortschritt nicht durch Leute verwirklicht wird, die bei feststehenden Ansichten verharren, sondern durch Leute, die es wagen, den unvollkommenen Stand der Dinge in Bewegung zu bringen und zu verbessern.

[2]) Stanislav Vydra (geboren am 13. November 1741 in Hradec Králové [Königgrätz], gestorben am 3. Dezember 1804 in Prag), tschechischer Mathematiker, Jesuit, von 1772 bis 1803 Professor der Mathematik an der Universität in Prag, ein eifriger Lehrer und Prediger. Er schrieb insbesondere Primae calculis differentialis et integralis notiones (1774); Historia matheseos in Bohemia et Moravia cultae (1776); Počátkové arithmetiky (tschechisch, herausgegeben von J. L. Jandera 1806). Nach Vydras Erblindung wurde Bolzano als sein berechtigter Nachfolger auf dem Lehrstuhl für Mathematik anerkannt, ernannt aber wurde der etwas ältere J. L. Jandera; Bolzano, der auch als Professor für Religionswissenschaft vorgeschlagen war, wurde 1805 an derselben Universität für dieses Fach angestellt.

[3]) Abraham Gotthelf Kästner (geboren 1719 in Leipzig, gestorben 1800 in Göttingen), von 1739 Privatdozent und von 1746 Professor an der Universität in Leipzig, von 1756 Professor der Mathematik und Physik an der Universität in Göttingen. Ein berühmter Lehrer; ein ungewöhnlich produktiver Schriftsteller, dessen Schriften in vielen Auflagen erschienen und große Verbreitung fanden. Seine Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, der ebenen und sphärischen Trigonometrie und Perspektive bildenden I. Teil, 1. Abteilung seines 10bändigen Kompendiums Mathematische Anfangsgründe, Göttingen 1758 (6. Aufl. 1800). Er schrieb auch eine ausführliche, aber ungünstig beurteilte Geschichte der Mathematik in 4 Bänden, Göttingen 1796—1800. Siehe über ihn M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik IV, besonders S. 8 u. f., 355 u. f.

Bolzano verweist vielleicht auf den Zusatz zum Grundsatz von der Ebene, enthalten in Kästners Anfangsgründen (Geometrie, II. Teil): „Eine gerade Linie, von welcher zwei Punkte in einer Ebene sind, befindet sich ganz in dieser Ebene. Da aber die Ebene, in welcher diese gerade Linie ist, sich um eine Axe drehen kann, so bestimmen drei Punkte die Lage einer Ebene; und also ist jeder ebene Winkel und jedes Dreieck, in einer Ebene".

[4]) Nikolaus Mercator, eigentlich Kaufmann (geboren ungefähr 1620 zu Cismar in Holstein, gestorben 1687 in Paris), studierte in Kopenhagen, dann lebte er längere Zeit in London und schließlich in Paris, wo er die Konstruktion der Versailler Fontänen leitete. U. a. veröffentlichte er Astronomia sphaerica ... (1651); Logarithmotechnia (London 1668 und 1674), worin er eine unendliche Reihe für den Logarithmus ableitete; Euclidis elementa geometrica, novo methodo demonstrata (London 1678). Über ihn siehe J. E. Montucla, Histoire des mathématiques II (1758, p. 307 u. f.).

[5]) Entgegen dem hier verteidigten rein logischen Standpunkt, der den Begriff der Bewegung aus der Geometrie ausschließt, wurden später die Bewegungen ohne physikalische Vorstellung als umkehrbar eindeutige Punkttransformationen mit bestimmten Eigenschaften charakterisiert, deren Gesamtheit eine kontinuierliche Gruppe bildet, welche die Gruppe der Translationen als invariante Untergruppe enthält; es konnte also der Begriff der Bewegung eine berechtigte Grundlage der Elementargeometrie werden (und zwar entweder selbständig oder vom projektiven Standpunkt aus). Die zugehörigen Theorien gaben hauptsächlich H. Helmholtz (1868), S. Lie, H. Poincaré und D. Hilbert; für den systematischen Aufbau der gewöhnlichen Geometrie benutzten die Bewegung Ch. Méray (1874, Nouveaux éléments de géométrie, 3. Auflage 1906), É. Borel, C. Bourlet, J. Henrici und P. Treutlein, J. Vojtěch u. a. Siehe besonders F. Enriques, Prinzipien der Geometrie (Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften III, 1, S. 27 und 107); M. Zacharias, Elementargeometrie in synthetischer Behandlung (Encyklopädie d. math. Wiss. III 1_2, S. 876); D. Hilbert, Über die Grundlagen der Geometrie (Math. Annalen 56, 1902, abgedruckt in den Grundlagen der Geometrie, 7. Auflage 1930, S. 178); F. Klein, Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus II (3. Auflage 1925, S. 174); F. Schur, Grundlagen der Geometrie (1909, S. 28).

[6]) Johann Schultz (1739—1805), Hofprediger und Professor der Mathematik in Königsberg, ein Freund Kants. Er schrieb u. a.: Entdeckte Theorie der Parallelen, nebst einer Untersuchung über den Ursprung ihrer bisherigen Schwierigkeiten (Königsberg 1784); Versuch einer genauen Theorie des Unendlichen (ebendort 1788); Anfangsgründe der reinen Mathesis (ebendort 1790); Kurzer Lehrbegriff der Mathematik (3 Bde, ebendort 1797—1806); Sehr leichte und kurze Entwickelung der wichtigsten mathematischen Theorien (ebendort 1803); Anfangsgründe der reinen Mechanik (ebendort 1804).

[7]) Bolzano veröffentlichte erst im Jahre 1843 in den Abhandlungen d. Böhm. Ges. Wiss. Prag (5) 2 (1841—42) die Arbeit „Versuch einer objectiven Begründung der Lehre von der Zusammensetzung der Kräfte" (mit der Jahreszahl 1841). Er führt hier an, daß er sich schon vor vierzig Jahren mit diesem Gegenstand befaßt habe und daß er nicht nur sichere Ergebnisse wolle, sondern auch eine tiefere Begründung anstrebe.

[8]) Inhalt des I. Teiles der I. Arbeit:

§ 1—6: Von den Winkeln (§ 4, 6 über Kongruenz).

§ 7—10: Einführendes über das Dreieck.

§ 11: Über die Bezeichnung der Kongruenz.

§ 12—15, 21—23: Bestimmtheit, Kongruenz und Ähnlichkeit von Dreiecken I. (zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel).

§ 16—20, 24: Ähnlichkeit.

§ 25—40: Über die Gerade, welche durch einen auf oder außerhalb einer gegebenen Geraden gelegenen Punkt geht und mit dieser Geraden einen gegebenen, speziell einen rechten Winkel einschließt.

§ 41—44: Bestimmtheit, Kongruenz und Ähnlichkeit der Dreiecke II. (eine Seite und die beiden anliegenden Winkel).

§ 45: Der Pythagoreische Lehrsatz.

§ 46—48: Bestimmtheit, Kongruenz und Ähnlichkeit von Dreiecken III. (drei Seiten).

§ 49: Abschließendes über die Beweise von der Kongruenz der Dreiecke.

§ 50—67: Über parallele und sich schneidende Gerade.

[9]) Mit dem Worte „gerade Linie" bezeichnet Bolzano gewöhnlich eine Strecke als begrenzten Teil einer Geraden, während er die Benennung Gerade manchmal umschreibt als „eine zu beiden Seiten ins Unbestimmte verlängerte gerade Linie" (§ 30).

[10]) Zum Vergleich mit der Definition des Winkels, welche Bolzano (I, §§ 1—2; II, §§ 12—13) gibt, sei angeführt: Eukleides sagt (tautologisch), daß ein ebener Winkel die Neigung zweier verschiedener Geraden in einer Ebene gegeneinander sei, die einander treffen. Legendre (Éléments de géométrie, 1794) definiert den Winkel unpassend als Unterschied von Richtungen. Bézout (Cours de mathématiques, 1812) nennt einen Winkel die Größe der Drehung, welche den einen seiner Schenkel in die Lage des anderen überführt; hiezu (für die Kongruenz zweier Winkel) siehe z. B. F. Schur, Grundlagen der Geometrie (1909), S. 79, und F. Klein, Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus II (1925), S. 180. L. Bertrand (Développement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques, 1774) definiert den Winkel als denjenigen Teil der Ebene, der den zwei Halbebenen gemeinsam ist, die durch seine Schenkel begrenzt werden; ähnlich H. Thieme (Die Elemente der Geometrie, 1909), daß der Winkel einer der beiden Teile der Ebene ist, welche durch zwei von demselben Punkte ausgehende Halbstrahlen bestimmt werden. Um den Winkel nicht mit Hilfe der zweidimensionalen Ebene zu erklären, schlägt G. Veronese (Fondamenti di geometria, 1891) vor, den Winkel als die Gesamtheit aller Strahlen zu erklären, welche zwischen zwei Strahlen liegen; so auch F. Enriques und U. Amaldi (Elementi di geometria ad uso delle scuole secondarie superiori, 1903), F. Schur u. a. Die beiden zuletzt gegebenen Definitionen führt F. Severi (Elementi di geometria I, 3. Auflage 1930) an: Ein Winkel ist die Gesamtheit aller Punkte, welche zwei Halbebenen derselben Ebene gemeinsam sind, deren Begrenzungsgeraden sich schneiden; er ist die Gesamtheit aller Halbstrahlen, die dem Teil eines Büschels in der Ebene angehören, der von zwei Halbstrahlen des Büschels begrenzt wird. Dem Standpunkt Bolzanos am nächsten ist die Definition, welche z. B. H. Hankel (Theorie der komplexen Zahlen, 1867) anführt: Ein Winkel ist ein Gebilde, welches aus zwei Strahlen besteht, die von einem Punkte ausgehen; und D. Hilbert (Grundlagen der Geometrie, 7. Auflage 1930): Ein Winkel ist ein System zweier verschiedener Halbstrahlen in der Ebene, die von einem Punkte ausgehen (und verschiedenen Geraden angehören); mit der Betrachtung Bolzanos vgl., was Hilbert a. a. o. (über Kongruenz und Vergleichen von Winkeln) sagt, S. 13 u. f. und 21 u. f. Bolzano vergaß eine Erklärung der Scheitelwinkel zu geben (§ 5).

[11]) Bolzano übernimmt für die Lehre von der Kongruenz die Erklärung von Leibniz: Gebilde sind kongruent, wenn die sie bestimmenden Elemente kongruent sind (si determinantia sunt congrua, talia erunt etiam determinata posito scilicet eodem determinandi modo); aber dieser nur logische Standpunkt ist unzureichend (siehe auch III, § 22). Die Weiterentwicklung dieser Frage zeigte, daß man die Kongruenz geometrischer Gebilde auf zwei grundsätzlich verschiedene Arten definieren kann. Die eine Richtung benützt systematisch den Begriff der Bewegung, welchen man mehr oder weniger axiomatisch einführt; siehe die frühere Anmerkung.

Die andere Richtung nimmt die Kongruenz als Grundbegriff an, der durch geeignete Axiome erklärt wird. In formaler Hinsicht ist vor allem hervorzuheben, daß der Begriff der Kongruenz (wie die Gleichheitsbeziehung überhaupt) reflexiv (das Gebilde A ist mit sich selbst kongruent), symmetrisch (wenn A kongruent mit B, dann B kongruent mit A) und transitiv ist (wenn A kongruent mit B und B kongruent mit C, dann C kongruent mit A) welche Eigenschaften man auf zwei zurückführen kann. M. Pasch (Vorlesungen über neuere Geometrie, 1882, 2. Auflage 1926) erklärt die Kongruenz zweier beliebiger Gebilde als umkehrbar eindeutige Beziehung bestimmter Eigenschaften, welche durch ein System von Postulaten definiert werden, wobei er von der Kongruenz der Strecken ausgeht und von der Kongruenz der Winkel nicht spricht. G. Veronese (Fondamenti di geometria, 1891, und Elementi di geometria, 1897, 3. Auflage 1904) nimmt als Grundbegriff nur die Kongruenz zweier Strecken an, womit er dann mit Hilfe der Korrespondenz die Kongruenz zweier Winkel und geometrischer Gebilde überhaupt definiert. D. Hilbert (Grundlagen der Geometrie, 1899, 7. Auflage 1930) gibt (in der dritten Gruppe seines Axiomensystems) fünf einfache Axiome für die Kongruenz von Strecken und Winkeln. Neben der elementaren Behandlungsweise kann man auch (vom höheren Standpunkte aus) zur Kongruenz durch eine Spezialisierung der Kollineation oder Affinität gelangen. Zur Orientierung über die die Kongruenz betreffenden Fragen siehe besonders A. Guarducci, Della congruenza e del movimento (in der Sammlung F. Enriques, Questioni riguardanti le matematiche elementari I_1, 3. Auflage 1928, S. 109); F. Enriques, Prinzipien der Geometrie (in der Encyklopädie math. Wiss. III, 1_1, 1907, S. 27); M. Zacharias, Elementargeometrie in synthetischer Behandlung (in der Encyklopädie math. Wiss. III, 1_2, 1913, S. 881), und desselben Elementargeometrie der Ebene und des Raumes (1930, S. 28). Siehe auch J. Mollerup, Studier over den plane geometris aksiomer (Diss. Köbenhavn 1903), und Die Beweise der ebenen Geometrie ohne Benutzung der Gleichheit und Ungleichheit der Winkel (Math. Annalen 58, 1904, S. 479); T. Bonnesen, Remarques sur l'idée de congruence (L'enseignement math. 6, 1904, S. 284); F. Severi, Elementi di geometria I (3. Auflage 1930, S. 34).

[12]) Die angeführte Schrift „Bemerkungen über die Theorien der Parallelen des Herrn Hofprediger Schultz und der Herren Gensichen und Bendavid" (Libau 1796) erschien (absichtlich) ohne Namensnennung; nach der Vermutung F. C. Schweikarts (Die Theorie der Parallelen, 1807) ist ihr Autor Anders. Dieses Büchlein (207 Seiten Mitteloktav) betrifft eine Publikation von J. Schultz, Entdeckte Theorie der Parallelen, und die mit ihr zusammenhängenden Veröffentlichungen von L. Bendavid, Über die Parallellinien; J. F. Gensichen, Bestätigung der Schultzischen Theorie der Parallelen; es ist in der Bücherei Bolzanos vorhanden.

[13]) Andreas Tacquet (geboren 1612 zu Antwerpen, gestorben 1660 ebendort), belgischer Mathematiker, Jesuit, Professor der Mathematik am Ordensinstitut in Löwen und in Antwerpen. Seine Schrift Elementa Euclidea geometriae planae ac solidae, quibus accedunt selecta ex Archimede theoremata, zum erstenmal 1654 in Antwerpen herausgegeben, erschien später oftmals in Cambridge, Amsterdam, Rom, Padua und an anderen Orten (neuerdings in Wien 1805). Siehe A. Quételet, Histoire des sciences mathématiques et physiques chez les Belges (1864).

Über den Winkel (welchen er definiert: angulus planus est duarum linearum in plano se mutuo tangentium, et non in directum iacentium, alterius ad alteram inclinatio) sagt er (Elementa geometriae, liber 3, propositio 16, scholium) „angulus non est quantitas, sed modus quantitatis" und weiter „quoniam anguli non sunt quantitas, sed modus quantitatis, eorum inter se comparatorum relatio non est aequalitas et inaequalitas, sed similitudo et dissimilitudo" (wobei er zwei Winkel dann ähnlich nennt, wenn man sie zur Deckung bringen kann, daß ihre beiden Schenkel zusammenfallen).

[14]) Bolzano benützt hier und später für kongruente Gebilde den kurzen Terminus „gleich" statt der üblichen Bezeichnung „gleich und ähnlich", wobei er dieselbe Bezeichnung auch für manche Eigenschaft ungleicher (d. h. inkongruenter) Gebilde (speziell für die Größe) zulässt, die er ausdrücklich einführt, da er keinen passenden Ausdruck für den Kongruenzbegriff besitzt. Dazu sei bemerkt, daß Eukleides unter dem Worte gleich (ἴσος) gleich groß versteht und erst in der Stereometrie die Bezeichnung gleich und ähnlich (ἴσος καὶ ὅμοιος) für kongruente Gebilde verwendet. Dieses Wortpaar tritt für den Begriff der Kongruenz in deutschen Schriften bis zum Ende des 18. Jahrhunderts auf (z. B. Chr. Wolff 1750, A. G. Kästner 1764), während das Wort congruere in den lateinischen Büchern (z. B. Wolff 1717, Karsten 1760) für Gebilde gebraucht wird, die gleiche Begrenzung haben oder haben können. Aber vom Ende des 18. Jahrhunderts an begann man den Terminus „Kongruenz" in der heutigen Auffassung zu verwenden: so Hildebrandt, Handbuch der reinen Größenlehre (1785); Thibaut, Grundriß der reinen Mathematik (1801); u. a. (Vgl. § 49, wo sich Bolzano gegen das Wort congruiren im obigen Sinne ausspricht). Bolzano benützt für diesen Begriff auch das Gleichheitszeichen $=$ (z. B. § 25); Wolff (1717) schreibt „$=$ und $\sim$"; das jetzt gebräuchliche Symbol $\cong$ (als Verbindung der Zeichen für Ähnlichkeit und Kongruenz) wählte Leibniz (in einer Handschrift) schon 1679. Siehe z. B. J. Tropfke, Geschichte der Elementarmathematik IV (2. Auflage 1923, S. 73). Siehe weiter Bolzano III, § 22.

[15]) Christian Wolff (geb. 1679 in Breslau, gestorben 1754 in Halle), Philosoph der Aufklärung und Mathematiker, von 1703 Dozent an der Universität in Leipzig, von 1707 bis 1723 Professor der Mathematik und Physik an der Universität in Halle, von dort vertrieben, da er des Atheismus beschuldigt wurde, ging er an die Universität Marburg, 1740 wurde er aber nach Halle zurückberufen. Er veröffentlichte Anfangsgründe aller mathematischen Wissenschaften in 4 Bänden (1710), einen Auszug daraus (1717, 10. Aufl. 1772), auf 5 Bände erweitert als Elementa matheseos universae (1713—41); weiter Mathematisches Lexikon (1716) und viele andere, besonders auch philosophische Publikationen (davon Philosophia prima sive Ontologia methodo scientifico pertractata, qua omnis cognitionis humanae principia continentur, enthält im 1. Teil, sectio III, caput 1 eine Betrachtung De identitate et similitudine, §§ 195 bis 224, spez. § 222). Sein mathematisches Hauptwerk war sehr beliebt, erschien in zahlreichen Auflagen und wurde in viele Sprachen übersetzt. Wolff legt in seinen Erörterungen Gewicht auf die Erläuterung und die Beweise. Siehe über ihn M. Cantor, Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik III, bes. S. 260, 493, 503, 508 u. f.

[16]) Hier (und überhaupt) ist zu bemerken, daß Bolzano vergaß die Möglichkeit ähnlicher Gebilde zu fordern (obwohl er sie für die Kongruenz in Erinnerung bringt, Teil II, § 3) oder sie aus anderen Postulaten abzuleiten. Siehe aber Bolzano III, § 30.

[17]) Bolzanos Lehre von der Ähnlichkeit gründet sich auf seine Definition der Ähnlichkeit räumlicher Gebilde (§ 16) und den Grundsatz von der Entfernung (§ 19) und schreitet dann analog wie bei der Kongruenz mit Hilfe der

bestimmenden Elemente weiter (§ 17). Wie Bolzano selbst anführt, ist diese Auffassung nicht neu (wenn er auch selbständig zu ihr gelangt ist). So definiert Leibniz die Ähnlichkeit mit den Worten: Similia sunt, in quibus per se singulatim consideratis inveniri non potest, quo discernantur. Ch. Wolff, von dem Bolzano (im § 24) spricht, sagt (Anfangsgründe aller mathematischen Wissenschaften I, neue Ausgabe Wien 1775, S. 104): Die Ähnlichkeit ist die Übereinstimmung dessen, wodurch die Dinge durch den Verstand von einander unterschieden werden; und fügt hinzu, daß man ähnliche Dinge von einander nicht unterscheiden kann, außer z. B. mit Hilfe eines Maßstabes. Bolzano benützt diesen Gedanken auch später (Versuch einer objectiven Begründung der Lehre von der Zusammensetzung der Kräfte, § 6). Ähnlich schreibt z. B. M. Simon (Die Elemente der Geometrie mit Rücksicht auf die absolute Geometrie, 1890): Ähnliche Figuren sind solche, welche sich nur durch Abänderung des Maßstabes unterscheiden. Wenn auch der Kern dieses Gedankens für die Charakterisierung der Elementargeometrie grundlegende Bedeutung hat (siehe F. Klein in den berühmten Vergleichenden Betrachtungen aus dem J. 1872 über die Gruppe der Ähnlichkeitstransformationen), so genügt er doch nicht für die Theorie der Ähnlichkeit.

Eukleides nennt solche Gebilde ähnlich, in denen die Winkel einzeln gleich sind und die gleiche Winkel umfassenden Seiten in Proportion stehen. Er geht von (Eudoxos') scharfsinniger Theorie der Proportionalität von Größen aus (bei der man kommensurable und inkommensurable Größen nicht auseinanderhalten muß); dann beweist er als Hauptsatz der Ähnlichkeit, welcher die Grundlage dieser Lehre bildet, mit Hilfe von Dreiecksinhalten das Theorem von der Proportionalität der Abschnitte, welche auf zwei Seiten eines Dreieckes durch eine Parallele zu seiner dritten Seite abgeschnitten werden, und die Umkehrung dieses Satzes. Euklids Erklärung der Ähnlichkeit wurde später in mehrfacher Hinsicht verbessert: Legendre ersetzte die geometrische Grundlage der Lehre von den Proportionen durch eine arithmetische Definition des Verhältnisses und der Proportionalität mit Hilfe von Maßzahlen; Baltzer (Elemente der Mathematik) u. a. ersetzten den Gebrauch der Flächeninhalte beim Beweise der Proportionalität durch einen direkten Vergleich kommensurabler und (als Grenzfall) inkommensurabler Strecken; die Definition ähnlicher Gebilde, die zuviel verlangt, wurde durch den konstruktiven Beweis der Existenz solcher Gebilde ergänzt oder durch die Definition ähnlicher Dreiecke als Dreiecke, die in den Winkeln übereinstimmen, ersetzt. Später wurde eine Reihe von Versuchen gemacht, um eine rein geometrische Theorie der Ähnlichkeit (G. Paucker, Ebene Geometrie, 1823; H. Graßmann, Die lineale Ausdehnungslehre, 1844; Rajola-Pescarini, Studio sulla proporzionalità grafica e sue applicazioni alla similitudine e alla omotetia, 1876; R. Hoppe im Archiv Math. Phys. (1) 62, 1878; K. Kupffer, Sitzungsberichte Naturf. Ges. Dorpat 14, 1893), namentlich auf Grund eines Spezialfalles des Satzes von Pappus, zu ermöglichen (welcher einen Spezialfall des Pascalschen Satzes vom Sechseck, das einem Kegelschnitt eingeschrieben ist, darstellt und dann eintritt, wenn der Kegelschnitt in zwei voneinander verschiedene Geraden zerfällt und wenn zwei Paare von Seiten des Sechseckes und also auch das dritte Paar seiner Seiten gleichlaufend sind). Von diesem Satze geht auch D. Hilbert (Grundlagen der Geometrie) aus, definiert ähnliche Dreiecke als solche, die in den Winkeln übereinstimmen, und entwickelt die ganze Theorie der Ähnlichkeit auf der Grundlage seiner projektiven Axiome (Axiome des Ineinanderliegens und der Anordnung), der Kongruenzaxiome und des Parallelenaxioms (ohne die Axiome der Stetigkeit und ohne Betrachtungen aus der räumlichen Geometrie); hieran knüpfen sich noch Vereinfachungen, welche F. Schur (Math. Annalen 57, 1903), J. Mollerup (ebendort 58, 1904) u. a. gegeben haben. Man kann auch die Ähnlichkeit vorteilhaft mit Hilfe einer Homothetie definieren: Zwei Gebilde sind ähnlich, wenn eines von ihnen einem Gebilde kongruent ist, das mit dem andern homothetisch ist; so verfuhren schon J. D. Gergonne (1825), L. Olivier, A. Tellkampf (Vorschule der Mathematik, 1829), J. M. C. Duhamel (Des méthodes dans les sciences de raisonnement II, 1866, p. 358). Endlich kann man die Ähnlichkeit als Spezialfall einer kollinearen Beziehung erhalten. — Siehe M. Simon, Über die Entwicklung der Elementar-Geometrie im XIX. Jahrhundert (1906), S. 169 u. f.; F. Enriques, Principes de la géométrie in Encyclopédie des mathém. III, 1_1, p. 57 u. f; G. Vailati, Sulla teoria delle proporzioni in Questioni riguardanti le matematiche elementari I_1, 3. Auflage 1928, S. 143 u.f.; M. Zacharias, Elementargeometrie der Ebene und des Raumes (1930), S. 86 u. f., und besonders in der Encyklopädie d. math. Wiss. III, 1_2, S. 888 u. f.

[18]) Ignace Gaston Pardies (1636—1673), Jesuit, Lehrer der alten Sprachen und später der Mathematik und Physik in Pau, dann der Eloquenz in Paris; er gab unter anderem heraus: Élémens de géométrie (Paris 1671); seine Oeuvres de mathématiques erschienen in Lyon 1709 und 1725.

[19]) Hier liegt offenbar ein Druckfehler vor. Statt gleich soll ähnlich stehen.

[20]) Es ist die Bedeutung der Wörter „lothrecht" und „Loth" nicht angeführt (obwohl im vorhergehenden Absatz die Benennung des rechten Winkels hervorgehoben ist).

[21]) Dieser Beweis des Pythagoreischen Lehrsatzes von Bolzano stützt sich auf den Satz (§ 32), daß durch einen Punkt außerhalb einer Geraden auf diese ein und nur ein Lot gefällt werden kann. M. Simon nennt ihn (an einem weiter unten angeführten Orte) „ganz eigenartig". Einen anderen ebenso einfachen wie geistreichen Beweis gab Bolzano an einem andern Orte: Weil die beiden Dreiecke, in welche ein rechtwinkliges Dreieck durch die Höhe auf die Hypotenuse geteilt wird, ihm ähnlich sind und weil die Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke sich wie die Quadrate entsprechender Seiten verhalten, folgt aus der Tatsache, daß das rechtwinklige Dreieck aus den beiden angeführten Teilen zusammengesetzt ist, die Gültigkeit des Pythagoreischen Lehrsatzes. Eine große Anzahl von Beweisen des Pythagoreischen Lehrsatzes gaben in übersichtlicher Weise inbesondere: J. J. I. Hoffmann, Der Pythagoreische Lehrsatz mit 32 teils bekannten, teils neuen Beweisen versehen (Mainz 1819, 2. Auflage 1821); C. Cramer, Systematische Zusammenstellung von 93 Konstruktionen für ebensoviel verschiedene Beweise des Pythagoreischen Lehrsatzes (Frankfurt a. Main, 1837; siehe E. Haentzschel, Eine seltene Schrift mit 93 Figuren zum Beweise des Lehrsatzes von Pythagoras, Zeitschrift math. naturw. Unterricht 47, 1916); J. Wipper, Sechsundvierzig Beweise des Pythagoreischen Lehrsatzes (aus d. Russischen v. F. Graap, Berlin 1880, 2. Ausgabe 1911); A. Versluys, Zes en negentig bewijzen voor het theorema van Pythagoras (Amsterdam 1914); E. Scott Loomis, The Pythagorean proposition (Cleveland 1928). Siehe auch M. Simon, Über die Entwicklung der Elementar-Geometrie im XIX. Jahrhundert (1906), S. 109 u. f.; H. Brandes, Über die axiomatische Einfachheit mit besonderer Berücksichtigung der auf Addition beruhenden Zerlegungsbeweise des Pythagoreischen Lehrsatzes, Diss.

Halle (Braunschweig 1908); M. Zacharias, Elementargeometrie in synthetischer Behandlung (Encyklopädie d. math. Wiss. III, 1_2, S. 923, 967 u. f.); W. Lietzmann, Der Pythagoreische Lehrsatz (1912, 4. Auflage 1930).

[22]) Bolzano beweist, indem er von der Definition des Dreieckes (§ 7) ausgeht und sich dann auf seine Grundsätze stützt, welche Kongruenz und Ähnlichkeit von Gebilden betreffen (§§ 4, 6; 16, 17), daß in folgenden drei Fällen Dreiecke eindeutig bestimmt sind: wenn zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben sind (§§ 12, 14, 21) oder eine Seite und die beiden ihr anliegenden Winkel (§§ 41—43) oder drei Seiten (§§ 46—48); hieraus schließt Bolzano auf Kongruenz und Ähnlichkeit von Dreiecken; außerdem bringt er einige Anwendungen dieser Sätze und Hilfssätze, welche er für die Beweise benötigt. Er vermeidet, wie er wiederholt hervorhebt (§§ 6, 49), die Einführung überflüssiger Hilfsbegriffe (z. B. den Begriff der Ebene). Sein Beweis des Satzes 2 und besonders des Satzes 3 sind daher eigentümlich: jenen beweist er mit Hilfe des Satzes, daß man durch einen gegebenen Punkt nur eine Transversale zu einer gegebenen Geraden ziehen kann, welche mit ihr einen vorgegebenen Winkel von bestimmtem Sinne einschließt, diesen dann mit Hilfe des Pythagoreischen Lehrsatzes. Bolzano hat mit Rücksicht darauf auch die Reihenfolge dieser Sätze geändert (Eukleides stellt den Satz von den drei Seiten an zweite Stelle). Den 4. Satz über Kongruenz und Ähnlichkeit der Dreiecke (zwei Seiten und der einer von ihnen gegenüberliegende Winkel) führt Bolzano nicht an; Eukleides hat hier nur den Satz von der Ähnlichkeit, den Satz von der Kongruenz findet man zuerst (unvollständig) bei Wolff in seinen Anfangsgründen aller mathematischen Wissenschaften (1. Auflage 1710) bis in der Auflage vom Jahre 1750. Siehe z. B. J. Tropfke, Geschichte der Elementarmathematik IV (2. Auflage 1923, S. 74—78).

[23]) Unter parallelen Geraden versteht Eukleides Gerade in derselben Ebene, welche sich nicht treffen, wenn man sie auch noch so weit nach beiden Seiten hin verlängert; verwandt damit ist auch die Definition, sie als Gerade zu erklären, welche sich im Unendlichen treffen (J. Kepler 1609) oder welche im Unendlichen einen gemeinsamen Punkt haben (G. Desargues 1693, I. Newton und systematisch in der projektiven Geometrie). Häufig wurden Parallele als Gerade bezeichnet, welche ständig dieselbe Richtung besitzen (oder mit einer Transversalen gleiche Gegenwinkel einschließen), wie es zuerst P. Varignon (1731) tat; verwandt damit ist die Weise, die Bahnkurven der Punkte eines starren Systems bei Translationen Parallele zu nennen. Sehr beliebt ist endlich die Definition der Parallelen als Gerade konstanten Abstandes, die auch Bolzano wählt; sie findet sich im Altertum bei Heron und Geminus, in der neueren Zeit bei P. Ramus (1569) und in vielen Lehrbüchern des 16. bis 18. Jahrhunderts, besonders bei Ch. Wolff (Elementa matheseos universae I, 1713, Geometria § 78), A. C. Clairaut, A. M. Legendre u. a.

[24]) Johann Friedrich Gensichen (sic!), Bestätigung der Schultzischen Theorie der Parallelen und Widerlegung der Bendavid'schen Abhandlung über die Parallelen (Königsberg 1786).

Über J. Schultz siehe Anm. [6])

[25]) Lazarus Bendavid (1762—1832), Philosoph und Mathematiker, Leiter der jüdischen Schule in Berlin, ein treuer und eifriger Schüler Kants. Er schrieb u. a.: Über die Parallellinien (Berlin 1786); Versuch einer logischen Auseinandersetzung des mathematisch Unendlichen (Berlin 1789); Vorlesungen über die metaphysischen Anfangsgründe der Naturwissenschaften (Wien 1798).

[26]) Karl Christian Langsdorf (geboren 1757 in Nauheim, gestorben 1834 in Heidelberg), deutscher Ingenieur und Mathematiker, von 1796 Professor des Maschinenbaues an der Universität zu Erlangen, von 1804 Professor der Mathematik und Technologie an der Universität in Wilna, von 1806 bis 1827 Professor der Mathematik an der Universität in Heidelberg. Er veröffentlichte zahlreiche mathematische und mechanische Arbeiten und Schriften über Salinenwirtschaft. Es seien hervorgehoben: Erläuterung der Kästner'schen Analysis endlicher Größen (2 Bde, Mannheim 1776—78); Lehrbuch der Hydraulik (Altenburg 1794—96); Handbuch der Maschinenlehre (2 Bde, Altenburg 1797—99); Anfangsgründe der reinen Elementar- und höheren Mathematik (Erlangen 1802); Einleitung in das Studium der Elementar-Geometrie, Algebra, Trigonometrie, Differential- und Integralrechnung, der höheren Geometrie und der Dynamik mit vorzüglicher Rücksicht auf Maschinenlehre (Mannheim 1814).

[27]) Louis Bertrand (1731—1812), französischer Mathematiker, bis zur Revolution Professor der Mathematik an der Akademie in Genf (vorher längere Zeit in Berlin). Sein umfangreiches und gründliches Werk Développement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques, prise dans toute son étendue (2 Bände, Genève 1778) ist für Anfänger bestimmt und enthält im ersten Teil die Arithmetik und Algebra, im zweiten Teil die Geometrie. Hier gibt er vor allem eine Theorie des Kreises und der Geraden, wobei er auch das fünfte Postulat Euklids beweist. Siehe M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik IV, S. 332 u. f, 390 u. f.

[28]) Die Theorie der Parallelen, welche Eukleides auf sein 5. Postulat (Wenn eine Gerade zwei Gerade trifft und mit ihnen auf derselben Seite innere Winkel bildet, die zusammen kleiner als zwei rechte sind, so sollen die beiden Geraden, ins Unendliche verlängert, schließlisch auf der Seite zusammentreffen, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei rechte sind) aufbaute, war während vieler Jahrhunderte Gegenstand von Versuchen, die jenes Postulat beweisen wollten, wobei aber (häufig unwissentlich) ein anderer ihm gleichwertiger grundlegender Satz benutzt wurde. Besonders bemerkenswert sind die Betrachtungen der Vorläufer der nichteuklidischen Geometrie (G. Saccheri 1733, J. H. Lambert 1766) und die zahlreichen Versuche, welche A. M. Legendre in den verschiedenen Ausgaben seines Lehrbuches Éléments de géométrie (1794—1833) unternahm. Aber schon J. Wallis (1693) und später andere (z. B. Kästner, Klügel) zweifelten an der Möglichkeit eines Beweises des euklidischen Postulates. Doch erst im 19. Jahrhundert wurde diese Frage von den Begründern der nichteuklidischen Geometrie richtig beantwortet (N. J. Lobatschevskij 1826—29 und später, J. Bolyai 1832, aber schon 1816 C. F. Gauss in unveröffentlichten Aufzeichnungen; später B. Riemann, F. Klein u. a.).

Dem euklidischen Postulat äquivalent erwiesen sich die folgenden Sätze: Durch einen Punkt außerhalb einer Geraden kann man zu dieser eine und nur eine Parallele ziehen (Ptolemaios). Durch einen Punkt innerhalb eines Winkels kann man eine Gerade immer so legen, daß sie beide seine Schenkel schneidet (Lorenz). Die Winkelsumme in einem Dreiecke ist gleich zwei Rechten (Proklos, Legendre). Der geometrische Ort aller Punkte, die auf derselben Seite einer Geraden liegen und von ihr gleichen Abstand haben, ist eine Gerade. In einem Viereck mit drei rechten Winkeln ist auch der vierte Winkel ein rechter. Jedem Dreiecke kann man einen Kreis umschreiben. Es gibt zwei ähnliche nicht kongruente Dreiecke (Wallis u. a.).

Über Einzelheiten aus der Theorie der Parallelen siehe insbesondere: H. Schotten, Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichtes II (1893, S. 183 u. f); F. Engel-P. Stäckel, Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauß (1895); R. Bonola, Sulla teoria delle parallele a sulle geometrie non-euclidee in Questioni riguardanti le matematiche elementari I (1900, neu in der 2. Auflage, 1912) und ausführlicher in La geometria non-euclidea, esposizione storico-critica del suo sviluppo (auch deutsch H. Liebmann 1908, russisch und englisch); M. Simon, Über die Entwicklung der Elementar-Geometrie im XIX. Jahrhundert (1906, S. 53 u. f); F. Enriques, Prinzipien der Geometrie in der Encyklopädie der math. Wiss. III, 1_1 (1907, S. 39 u. f) oder in der französischen Ausgabe; M. Zacharias, Elementargeometrie und elementare nichteuklidische Geometrie in synthetischer Behandlung in der Encyklopädie der math. Wiss. III, 1_2 (1914 und 1921, S. 863 u. f., 1137 u. f.).

Bolzano zitiert hier nicht die vor ihm erschienenen bedeutenden Veröffentlichungen über die Theorie der Parallelen (wahrscheinlich hatte er von ihnen keine Kenntnis), wie z. B. die Abhandlungen, welche bis zu jener Zeit Wallis 1693, Saccheri 1733, Klügel 1763, Karsten 1778 und 1786, Lambert 1786, Hauff 1799, Hoffmann 1801 veröffentlicht hatten.

[29]) Inhalt des II. Teiles der I. Arbeit:

§ 1—2: Über die Begriffe Identität und Kongruenz.

§ 3: Über die Möglichkeit von kongruenten räumlichen Gebilden.

§ 4—5: Über die Definition von Körper, Fläche, Kurve und Punkt.

§ 6—11: Das System von zwei Punkten: Entfernung und Richtung.

§ 12—17: Von den Winkeln.

§ 18—20: Das Dreieck als System dreier Punkte und dreier Winkel.

§ 21—24: Von der identischen und der entgegengesetzten Richtung.

§ 25—29: Definition und Bestimmtheit einer Strecke (einer Geraden) durch zwei Punkte mit Hilfe des Begriffes eines Punktes zwischen zwei Punkten.

§ 30: Die Mitte des Systems zweier Punkte.

§ 31—42: Das Messen von Strecken, ihre Summe und Differenz und die vierte Proportionale zu drei gegebenen Strecken.

§ 43: Die Definition der Ebene.

[30]) Hiezu vgl. F. Enriques, Prinzipien der Geometrie in der Encyklopädie der math. Wiss. III, 1_1 (1907, S. 16 u. f., S. 60 u. f.); H. Mangoldt, die Begriffe „Linie" und „Fläche", ebendort S. 130 u. f.

[31]) Siehe I, § 5.

[32]) Zur Betrachtung Bolzanos über den Begriff „zwischen" (§§ 21—25) ist zu bemerken, daß später auch C. F. Gauss (1832) auf die Notwendigkeit einer Analyse dieses Begriffes hinwies. Eine solche Analyse gaben namentlich M. Pasch (1882), G. Peano, G. Veronese, D. Hilbert u. a. Siehe speziell M. Pasch, Vorlesungen über neuere Geometrie (1882, 2. Auflage 1926); A. N. Whitehead, The axioms of descriptive geometry (Cambridge 1914); Ch. Müntz, Ein nichtreduzierbares Axiomensystem der Geometrie (Jahresberichte d. Deutschen Math.-Vereinigung 23, 1914); E. Huntington, A new set of postulates for betweenness with proof of complete independence (Transactions Amer. math. soc. 25, 1924).

[33]) Dazu sei folgendes bemerkt: Außer der unklaren Erklärung, welche Eukleides von der Geraden gab, wurde die Gerade definiert mit Hilfe der Ent-

fernung als kürzeste Verbindung zweier Punkte (Legendre), mit Hilfe der Richtung als Bahn, welche von einem Punkte beschrieben wird, der sich in konstanter Richtung bewegt (Graßmann), weiter auch als Kurve, welche ihre Lage nicht ändert, wenn man sie um zwei ihrer Punkte dreht (Proklos, Gauss), bis in der systematischen Grundlegung der Geometrie die Gerade (Strecke) als Grundbegriff genommen und durch eine Reihe von Postulaten beschrieben wurde (Pasch, Peano, Hilbert u. a.). Siehe U. Amaldi, Sui concetti di retta e di piano in Questioni riguardanti le matematiche elementari I (1900, 3. Aufl. 1928); F. Enriques, Prinzipien der Geometrie in der Encyklopädie d. math. Wiss. III, 1_1 (1907, S. 16 u. f.); M. Zacharias, Elementargeometrie der Ebene und des Raumes (1930, S. 15 u. f.).

[34]) Einen anderen Vorschlag Bolzanos für die Ebene siehe § 13.

Die Ebene wurde auf verschiedene Weise mit Hilfe der Geraden definiert: Bei Eukleides analog, aber ebenso unklar wie die Gerade; später gern als Fläche, welche jede Gerade enthält, von der sie zwei Punkte enthält (Theon, Simson); weiter als geometrischer Ort aller Punkte, welche von zwei festen Punkten gleich weit abstehen (Leibniz, Lobatschevskij); als Fläche, welche von denjenigen Geraden gebildet wird, die durch einen bestimmten Punkt einer bestimmten Geraden hindurchgehen und zu dieser senkrecht stehen (Fourier, Gauss); als Gesamtheit der Punkte aller Geraden, die durch einen festen Punkt und durch eine diesen Punkt nicht enthaltende feste Gerade gehen (Crelle) oder als Gesamtheit aller derjenigen Geraden, welche die Endpunkte eines Dreieckes mit den Punkten der gegenüberliegenden Seiten verbinden (Peano); endlich mit der Geraden als Grundbegriff aufgefaßt, die durch eine Gruppe von Postulaten erklärt werden (Pasch, Hilbert). Näheres siehe an den in der Anmerkung[33]) zitierten Stellen.

Siehe auch Bolzano I, § 37.

[35]) In seiner Abhandlung, die einen ähnlichen Titel, nämlich „Versuch einer objectiven Begründung der Lehre von der Zusammensetzung der Kräfte", führt und in den Abhandlungen d. Böhm. Gesellschaft d. Wiss. (5) 2 (1841—42) erschienen ist, bestimmt Bolzano in §§ 52, 53 eine Funktion aus einer vorgegebenen Eigenschaft und erwähnt, daß dies von dem heimatlichen Gelehrten „von seltenen Talenten und vielseitiger Ausbildung" Antonín Ritter von Slivic stamme. Dieser begabteste Schüler Bolzanos (er lebte ungefähr in der Zeit von 1790 bis 1860) widmete sich aber vom Jahre 1831 an (entgegen der Hoffnung Bolzanos) der Bewirtschaftung seines Gutes in Solnice; siehe E. Winter, Die Persönlichkeit und geistige Entwicklung B. Bolzanos, Philosophisches Jahrbuch 45 (1932).

[36]) Bolzano unterscheidet in seiner Wissenschaftslehre § 525 (Erklärung des objectiven Grundes der Wahrheit, Band IV, S. 261—263) den Beweis, der angibt, daß ein Satz wahr ist (Gewißmachung), und den Beweis, der angibt, warum ein Satz wahr ist (Begründung). Er bemerkt, daß Aristoteles (und die Scholastiker) zwar diese beiden Arten von Beweisen (ὅτι und διότι) unterschieden, die neueren Logiker aber diesen Unterschied wenig beachten. In einigen Wissenschaften (den Begriffswissenschaften) kann man fast jeden Satz auf die zweite Art beweisen, in anderen (den empirischen) nur selten. Bolzano empfiehlt (Wissenschaftslehre § 401, Band IV, S. 32—34) in den Lehrbüchern immer (soweit es möglich ist und obzwar es manchmal beschwerlich wird) Beweise zu geben — oder sich wenigstens darum zu bemühen — die eine objektive Begründung liefern, da sie besser sind; ihre Vorzüge sollen darin liegen, daß sie manchmal die Unrichtigkeit eines Satzes

aufdecken, daß sie das Vertrauen in seine Richtigkeit erhöhen, daß sie die belehrendsten und überzeugendsten (manchmal auch die kürzesten) sind, daß sie oft viele andere Wahrheiten zu finden gestatten (speziell die Ursache einer Erscheinung in den empirischen Wissenschaften), daß sie mehr über die Wahrheit enthalten und besondere Freude bereiten.

[37]) Inhalt der II. Abhandlung:

§ 1: Beziehung zwischen Zeit und Raum (die Zeit ist einfacher und höher als der Raum).

§ 2: Der Begriff der Zeit (was sie nicht ist und was sie ist).

§ 3: Einige Beschaffenheiten der Zeit, abgeleitet aus ihrem Begriffe.

§ 4: Der Begriff des Raumes (was er nicht ist und was er ist, analog wie in § 2).

§ 5: Von der vollständigen Bestimmtheit eines Gegenstandes durch sein Verhältnis zu einem anderen.

§ 6: Über die Existenz eines Systems von vier Punkten, die man nicht rein begrifflich bestimmen kann, die aber jeden anderen Punkt durch sein Verhältnis zu ihnen bestimmen.

§ 7: Es existieren in einem Punkte des Raumes drei und nur drei aufeinander senkrechte Richtungen, d. h. der Raum hat drei Dimensionen.

[38]) A. a. O. (Wissenschaftslehre § 80: Eigenschafts- und Verhältnißvorstellungen, Teil I, S. 378—389) bei der Erörterung der Begriffe Beschaffenheit (eigentliche, innere oder auch absolute Beschaffenheit) und Verhältniß (uneigentliche, äußere oder auch relative Beschaffenheit) charakterisiert (N. 2) Bolzano den Unterschied zwischen Beschaffenheit und Bestimmung (neben dem hier angeführten Unterschied) exakter folgendermaßen: In einem richtigen Satz A hat b ist das Prädikat b immer eine Beschaffenheit des Subjektes A, und umgekehrt läßt sich eine Beschaffenheit von A immer zu seinem Prädikat in einem richtigen Satze machen; dann bildet jede Beschaffenheit, sobald sie als Prädikat in einem solchen Satze auftritt, eine Bestimmung des Subjektes A. Allein nicht umgekehrt muß jede Bestimmung eines Gegenstandes vermittelst der Prädikatvorstellung in einem Satze geschehen, in welchem dieser Gegenstand das Subjekt ist. Vielmehr gibt es auch Vorstellungen, die zur Bestimmung eines Gegenstandes dienen, ohne Beschaffenheiten desselben zu sein. Es sind dies Vorstellungen, die eben das Eigentümliche haben, daß sie nie in der Stelle der Prädikatvorstellung (b), sondern nur lediglich als Teile in der Subjektvorstellung (A) selbst auftreten können. Von dieser Art sind namentlich die Zeit- und Raumbestimmungen der existierenden Dinge.

[39]) In seiner Wissenschaftslehre § 91 (Band I, S. 428—433) nennt Bolzano nach allgemeinem Gebrauch Vorstellungen dann ähnlich, wenn sie so viele gemeinschaftliche Beschaffenheiten haben, daß es leicht ist, sie miteinander zu verwechseln; er tadelt dabei (in der Anmerkung 3) viele Logiker, weil sie (vielleicht mehr einen verfehlten Ausdruck gebrauchend) Vorstellungen ähnlich nennen, die einige Eigenschaften gemeinsam haben (denn sonst müßte man nämlich alle Vorstellungen ähnlich nennen); er gesteht zu, daß es oft ziemlich schwankend sein wird, ob ein Paar von Vorstellungen den Namen ähnlich verdient oder nicht (was im Wesen der Sache gelegen sei); und er beruft sich bei seiner Erklärung auf Wolff (Ontologia § 195): Similia sunt, in quibus ea eadem sunt, per quae a se invicem discerni debebant. In der nachfolgenden Bemerkung 4 meint Bolzano

aber, die obige Bedeutung des Wortes ähnlich „wäre doch für den Gebrauch des Mathematikers zu schwankend"; und er will in der Mathematik nur solche Gegenstände ähnlich nennen, die alle inneren und nur durch reine Begriffe ausdrückbaren Eigenschaften gemeinsam haben. Siehe dazu Anm. [17]).

[40]) Zu diesen Betrachtungen Bolzanos über Zeit und Raum siehe auch seine Wissenschaftslehre (1837) I, § 79 (Ob die Vorstellungen von Zeit und Raum zu den Anschauungen oder Begriffen gehören, S. 361—378, wo er auch Kants Stellung zu diesen Problemen und Schultz' Erklärungen kritisiert), wie auch seine Paradoxien des Unendlichen (1851), §§ 17, 39 und 40 (eben so §§ 27 und 38).

Das oft diskutierte Problem von Raum und Zeit wurde vom philosophischen (logisch-noetischen), mathematischen, physikalischen und auch vom physiologisch-psychologischen Standpunkte aus behandelt. Neben der Lehre Platos, der Atomisten und des Aristoteles, dann der religiösen Denker und der Astronomen zu Beginn der Neuzeit sind die von Newton (absolute Substanz), Leibniz (Ordnungsschema) und Kant (die von uns gebildeten Anschauungsformen) gegebenen Theorien am bedeutungsvollsten, auf welche dann die tiefgehende Entwicklung im 19. und 20. Jahrhundert folgt (Gauss, Lobatschevskij, Bolyai, Riemann, Helmholtz, Klein, Lie, Poincaré, Enriques, Lorentz, Minkowski, Einstein, Weyl u. a.). Für einen Überblick siehe vielleicht F. Enriques, Spazio e tempo davanti alla critica moderna (in Questioni riguardanti le matematiche elementari I_2, 3. Auflage 1925, S. 429—459); A. Vassilieff, Développement du concept scientifique de l'espace, Scientia 46 (1929), S. 221—230, 289—300; F. Hausdorff, Das Raumproblem, Annalen der Naturphilosophie 3 (1904) S. 1—23; R. Carnap, Der Raum (Ein Beitrag zur Wissenschaftslehre), Kantstudien, Ergänzungsheft Nr. 56 (1922), mit einem reichhaltigen Literaturverzeichnis. Weiter (für die Anschauungen der älteren Philosophen) J. J. Baumann, Die Lehren von Raum, Zeit und Mathematik in der neueren Philosophie nach ihrem ganzen Einfluß dargestellt und beurteilt I, II (1868, 1869); B. Erdmann, Die Axiome der Geometrie (eine philosophische Untersuchung der Riemann-Helmholtz'schen Raumtheorie, 1877); V. Henry, Das erkenntnistheoretische Raumproblem in seinem gegenwärtigen Stande, Kantstudien, Ergänzungsheft Nr. 34 (1915). Außerdem speziell W. Wundt, Logik (drei Teile), besonders I (Allgemeine Logik und Erkenntnistheorie, 1879, 4. Auflage 1919), S. 465—506; H. Poincaré, La science et l'hypothèse, S. 49—109 (deutsch von F. u. L. Lindemann 1904, 3. Auflage 1914 und 1928, mit Anmerkungen), La valeur de la science, S. 35 bis 136 (deutsch von E. u. H. Weber 1906, 2. Auflage 1921), Science et méthode, S. 95—122 (deutsch von F. u. L. Lindemann 1914), Dernières pensées, S. 35—97 (deutsch von K. Lichtenecker 1913); F. Enriques, Problemi della scienza (1906, 2. Auflage 1910), S. 261—347 (deutsch von K. Grelling 1910); E. Study, Die realistische Weltansicht und die Lehre vom Raume (Geometrie, Anschauung und Erfahrung), Die Wissenschaft B. 54 (1914); H. Weyl, Raum — Zeit — Materie (Vorlesungen über allgemeine Relativitätstheorie, 1918, 5. Auflage 1923), dazu Mathematische Analyse des Raumproblems (1923).

[41]) Hiezu vgl. Betrachtungen II, § 26 und § 43. Auch III, § 15 und § 37.

[42]) Die Dreidimensionalität unseres Raumes wird häufig für selbstverständlich gehalten. In der Geometrie wird sie aber bekanntlich in verschiedener Weise postuliert. Neben dieser Grundeigenschaft des Raumes haben allerdings noch andere ihn betreffende Fragen (konstante Krümmung, insbesondere Nullkrümmung,

also Homogenität, Isotropie, Linearität u. a.), wie sie in den in Anmerkung[40]) zitierten Arbeiten erklärt werden, keine geringere Bedeutung. Auch auf das hier von Bolzano behandelte Problem beziehen sich verschiedene dort angeführte Betrachtungen über den Raum; speziell H. Poincaré, La valeur de la science (S. 59—136), Dernières pensées (S. 57—97). Außerdem: A. Kirschmann, Die Dimensionen des Raumes, Philosophische Studien 19 (Wundt-Festschrift, 1902), P. Ehrenfest, Welke rol speelt de drietalligheid der afmetingen van de ruimte in de hoofdwetten der physica?, Verslagen Akad. Amsterdam 26 (1917), S. 105—114 (Auszug: Welche Rolle spielt die Dreidimensionalität des Raumes in den Grundgesetzen der Physik, Annalen der Physik 61 [1920], S. 440—446); R. Weitzenböck, Der vierdimensionale Raum, Die Wissenschaft B. 80 (1929).

Von einem allgemeinen Standpunkt aus handelt es sich vor allem um eine Definition des Begriffes Dimension: Ein geometrisches Gebilde hat bei analytischer Auffassung soviel Dimensionen, als Parameter notwendig sind, um es in der Umgebung eines in ihm beliebig gewählten Elementes eindeutig und stetig darzustellen. Angemessener ist allerdings eine rekurrente geometrische Definition, die sich schon in Euklids Elementen vorgebildet findet. Dort heißt es, daß die Grenzen einer Strecke Punkte, die Grenzen einer Fläche Strecken und die Grenzen eines Körpers Flächen sind. Weitaus besser definiert Bolzano (Paradoxien des Unendlichen, Anmerkung zu § 40): Ich sage, ein räumlich Ausgedehntes sei einfach ausgedehnt oder eine Linie, wenn jeder Punkt für jede hinlänglich kleine Entfernung einen oder mehrere, keinesfalls aber so viele Nachbarn hat, daß dieser Inbegriff für sich allein schon ein Ausgedehntes wäre; ich sage ferner, ein räumlich Ausgedehntes sei doppelt ausgedehnt oder eine Fläche, wenn jeder Punkt für jede hinlänglich kleine Entfernung eine ganze Linie von Punkten zu seinen Nachbarn hat; ich sage endlich, ein räumlich Ausgedehntes sei dreifach ausgedehnt oder ein Körper, wenn jeder Punkt für jede hinlänglich kleine Entfernung eine ganze Fläche voll Punkte zu seinen Nachbarn hat.“ Auf dem Begriffe des Schnittes beruht die Definition des n-dimensionalen Kontinuums, welche Poincaré gibt (Dernières pensées, S. 67): Un continu a n dimensions, quand on peut le décomposer en plusieurs parties en y pratiquant une ou plusieurs coupures, qui soient elles-mêmes de continus à $n - 1$ dimensions.“ Und genauer im Sinne der Mengentheorie (Brouwer und Menger): „Eine Menge M heißt n-dimensional, wenn n die kleinste Zahl ist derart, daß jeder Punkt von M in beliebig kleinen Umgebungen enthalten ist, deren Begrenzungen mit M höchstens $(n-1)$-dimensionale Durchschnitte haben.“ Siehe L. E. J. Brouwer, Über den natürlichen Dimensionsbegriff, Journal r. ang. Mathematik 142 (1913), S. 146 u. f.; K. Menger, Dimensionstheorie (1928), S. 74 u. f., und Axiomatische Einführung des Dimensionsbegriffes, Comptes-rendus du I. congrès des mathématiciens des pays slaves 1929 (1930), S. 57 u. f.

[43]) Archimedes wählte diese Postulate in seiner Schrift *Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου* (Über Kugel und Zylinder) im 1. Buch; siehe z. B. Archimedes' Werke, herausgegeben von Th. L. Heath, deutsch von F. Kliem (1914), S. 155 u. f.

[44]) In seiner hier zitierten Schrift Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik I. aus dem Jahre 1810 (deren Fortsetzung allerdings nicht erschien) erforscht Bolzano im II. Kapitel (Über die mathematische Methode) Teil B (Von den Grundsätzen und Forderungen, §§ 10—23) den Charakter der Grundsätze (er führt die Merkmale an, welche sie haben dürfen und welche nicht, beweist ihre Existenz u. Ä.). Dieses Büchlein gab H. Fels unter dem Titel Philo-

sophie der Mathematik oder Beiträge ..., Paderborn 1926 (als 9. Band der P. Schöninghs Sammlung philosophischer Lesestoffe) neu heraus.

[45]) Über J. Schultz siehe Anmerkung [6]); unendlich kleine Größen denkt er sich gleich Null (vgl. z. B. M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik IV, S. 658).

Im Vorwort zu seiner Abhandlung „Der binomische Lehrsatz und als Folgerung aus ihm der polynomische, und die Reihen, die zur Berechnung der Logarithmen und Exponentialgrößen dienen, genauer als bisher erwiesen" betont Bolzano (a. a. O.) den richtigen Begriff einer infinitesimalen Größe als einer veränderlichen Größe, „die kleiner als jede gegebene werden könne", aber keineswegs als einer Größe, welche kleiner ist als jede beliebig gegebene. Der zweite Einwand Bolzanos (welcher in der Frage ausgesprochen wird) ist allerdings unrichtig.

[46]) Bolzano zeigt dort, daß ein Urteil, dessen Subjekt oder Prädikat ein zusammengesetzter Begriff ist, kein Grundsatz sein kann; Grundsätze kommen nur unter Urteilen vor, deren Subjekt und Prädikat ganz einfache Begriffe sind.

[47]) Über K. Ch. Langsdorf siehe Anm.[26]). J. B. E. Dubourguet, Professor der Mathematik am Collège Louis-le-Grand in Paris, früher Marineoffizier, gab das zitierte zweibändige Werk in Paris 1810—11 heraus. Der Tadel und die Verwunderung Bolzano sind sicher ganz berechtigt.

[48]) Von den hier aufgezählten Autoren ist allerdings der erste der bei weitem bedeutendste: Joseph Louis Lagrange, Théorie des fonctions analytiques, contenant les principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissants, de limites et de fluxions, et réduits à l'analyse algébriques des quantités finies (Paris, 1. Auflage 1797, 2. Aufl. 1813; Oeuvres IX, 1881); desselben Leçons sur le calcul des fonctions (1. Aufl. in den Séances de l'École normale 1801 und im Journal de l'École polytechnique 1804, 2. Aufl. 1806). Über ihn vgl. vielleicht M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik IV.

Johann Pasquich (1753 in Wien — 1829 ebendort), Priester, Professor der höheren Mathematik und später Astronom an der Sternwarte in Budapest. Er veröffentlichte Arbeiten über Mathematik, Astronomie, Mechanik u. a., darunter Anfangsgründe einer neuen Exponentialrechnung (Archiv der reinen und angewandten Math. 2, 1798, S. 385—424), Anfangsgründe der gesammten theoretischen Mathematik (2 Bde, Wien 1812); siehe M. Cantor, Vorlesungen IV, S. 667, und F. J. Studnička, Bericht über die mathematischen und naturwissenschaftlichen Publikationen d. Kön. böhm. Gesellschaft d. Wiss., Prag 1884, S. 114.

Johann Philipp Grüson (1768 — 1857), Professor der Mathematik am Kadettencorps, an der Bauakademie und an der Universität in Berlin. Er veröffentlichte: Supplement zu L. Euler's Differentialrechnung, worin außer den Zusätzen und Berichtigungen auch noch andere nützliche analytische Untersuchungen ... enthalten sind (Berlin 1795 und 1798), Grundriß der reinen und angewandten Mathematik u. s. w. (2 Teile, Berlin 1799—1800); er übersetzte zahlreiche mathematische Schriften (Euler, Lagrange, Mascheroni u. a.).

Karl H. Ignatius Buzengeiger (1771—1835), Professor der Mathematik und Mineralogie an der Universität zu Freiburg (Breisgau), veröffentlichte Leichte und kurze Darstellung der Differential-Rechnung (Ansbach 1809).

Johann G. Friedrich Bohnenberger (1765—1831), Professor der Mathematik und Astronomie an der Universität zu Tübingen; außer Abhandlungen aus der Astronomie, Optik u. a. gab er Anfangsgründe der höheren Analysis (Tübingen 1811) heraus.

August Leopold Crelle (1780—1855), Ingenieur für Eisenbahn- und Straßenbau; er veröffentlichte einige Lehrbücher (über Algebra, Geometrie, Trigonometrie, Geodäsie u. a.), übersetzte die Schriften von Lagrange und Legendre, gründete im Jahre 1826 das Journal der reinen und angewandten Mathematik und gab es bis zu seinem Tode heraus, weiter das Journal für die Baukunst in den Jahren 1829—1851; neben einer Reihe von speziellen Abhandlungen aus der Mathematik und dem Ingenieurwesen schrieb er: Versuch einer rein algebraischen.... Darstellung der Rechnung mit veränderlichen Größen ... I (Göttingen 1813), Über die Anwendung der Rechnung mit veränderlichen Größen auf Geometrie und Mechanik (Berlin 1816), Über Parallelen-Theorien und das System in der Geometrie (Berlin 1816). Siehe weiter den Anhang zu dieser Arbeit Bolzanos.

[49]) Seine berühmten Éléments de géométrie veröffentlichte Adrien Marie Legendre (1752—1833) zum erstenmal 1794, dann (mit wiederholten Änderungen) die 2. Aufl. 1799, die 3. Aufl. 1800, die 10. Aufl. 1813, die 12. Aufl. (wesentlich geändert) 1823; in deutscher Übersetzung gab sie zum erstenmal A. L. Crelle 1821 heraus, in der 2. Aufl. 1833 nach der 12. Aufl. des Originals: die zitierten Stellen finden sich hier auf Seite 116 und 242); später erschien das Original (mit Ergänzungen) unter der Redaktion von M. A. Blanchet (1. Aufl. 1845, 3. Aufl. 1857). Dieses Lehrbuch des „zweiten Eukleides" nimmt eine hervorragende Stellung in der Geschichte der Elementargeometrie ein; siehe z. B. M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik IV, S. 336 u. f.

Ernst Gottfried Fischer (1754—1831), Professor der Physik und Mathematik am Gymnasium zu Berlin; außer zahlreichen anderen Publikationen (hauptsächlich aus der Physik) und der angeführten Untersuchung ... (1808), veröffentlichte er: Theorie der Dimensionszeichen nebst einer Anwendung auf verschiedene Materien aus der Analysis endlicher Größen (2 Teile, 1792); Lehrbuch der Elementar-Mathematik (3 Bde, 1820—24); Versuch einer logischen Analyse vom Begriff des Unendlichkleinen (1829).

[50]) Ein analytisches Urteil ist ein solches, dessen Prädikat im Subjekt enthalten ist; es bietet nichts Neues.

[51]) Enthymema ist ein abgekürzter Syllogismus, bei welchem einer der beiden Vordersätze verschwiegen wird; diese verschwiegenen Sätze errät Bolzano.

[52]) Johann Friedrich Lorenz (1738—1807), Professor der Mathematik an der Klosterschule zu Magdeburg, Übersetzer des Eukleides (1773 und 1781). Er schrieb die angeführten Elemente der Mathematik in 2 Teilen 1785—86 (2. Aufl. 1793—95), weiter Grundriß der reinen und angewandten Mathematik (2 Teile 1791—92), Grundlehren der allgemeinen Größenberechnung (1792) u. a.

Sylvestre François Lacroix (1765—1843), Professor der Mathematik an vielen Orten, schließlich an der Technik (von 1799), an der Universität und am Collège de France in Paris; seine Éléments de géométrie erschienen zuerst als Bestandteil seines siebenbändigen Werkes Cours de mathématiques à l'usage de l'École centrale des quatre-nations 1796—99 (3. Aufl. 1803, 10. Aufl. 1814, 25. Aufl. 1897) und hatten einen ähnlichen Erfolg wie Legendres Lehrbuch. Siehe z. B. M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik IV, S. 344 u. f.

Johann Joseph A. Ide (1775—1806), Privatgelehrter in Göttingen, seit 1803 Professor der Mathematik an der Universität in Moskau.

Bernhard Friedrich Thibaut (1775—1832), Professor an der Universität in Göttingen; er gab den angeführten Grundriß der reinen Mathematik zum erstenmal 1801 heraus (2. überarbeitete Aufl. 1809, 5. Aufl. 1831).

Über J. Pasquich siehe Anmerkung[48]) (an zweiter Stelle). Über A. G. Kästner, siehe Anmerkung [3]).

[53]) Georg Simon Klügel (1739—1812), Professor der Mathematik an der Universität in Helmstädt, später in Halle, gab außer zahlreichen anderen mathematischen und physikalischen Publikationen (beginnend mit der Dissertation Conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio, 1763) ein ausführliches und sehr geschätztes Mathematisches Wörterbuch in 3 Bänden heraus (Leipzig 1803—08); den 4. Band dieses Wörterbuches gab C. B. Mollweide 1823, den 5. Band und zwei Ergänzungsbände J. A. Grunert 1831, bzw. 1833—36 heraus.

[54]) Wie schon aus dieser Probe über Rektifikation des ebenen Bogens ersichtlich ist, erreicht Bolzanos Herleitung wegen unzulässiger Voraussetzung und anderer Fehler das gesteckte Ziel nicht. Dieser Versuch Bolzanos erfuhr eine ablehnende Beurteilung (besonders in Bezug auf das Vorwort) hauptsächlich in der Leipziger Literatur-Zeitung für das Jahr 1822, N. 175 und 176 (vom 17. und 18. Juli), S. 1393—1403; siehe auch O. Stolz, B. Bolzanos Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung, Math. Annalen 18 (1881), S. 267 u. f.

[55]) Inhalt dieser III. Arbeit:

§ 1—10: Bestimmung der Werte einer stetigen Funktion aus den Werten anderer Funktionen für bestimmte Werte ihrer Argumente, speziell für die Werte Null, analoge Bestimmung zweier Funktionen und Verwendung dieser Analogie zur Bestimmung einer unbekannten Funktion gemäß der Bestimmtheit der bekannten Funktion.

§ 11—18: Der Begriff der Kurve und ihre Arten; ihre Bestimmung.

§ 19—20: Bogenlänge.

§ 21—29: Die Länge von kongruenten Kurven; die Länge einer Strecke.

§ 30—31: Die Längen von ähnlichen Kurven.

§ 32—34: Rektifikation des Bogens.

§ 35—44: Der Begriff der Fläche und ihre Arten; ihre Bestimmung.

§ 45—49: Inhalt einer Fläche.

§ 50—51: Komplanation einer Fläche.

§ 52—56: Begriff und Bestimmung eines Körpers.

§ 57—60: Inhalt eines Körpers.

§ 61—62: Kubatur eines Körpers.

§ 63: Analogie in den Definitionen des Bogens, der Fläche und des Körpers, ihrer Größe und ihrer Bestimmung.

Anhang: Kritik einer Arbeit A. L. Crelles.

[56]) In diesem Absatz soll (bei den gemischten Ableitungen zweiter Ordnung) hervorgehoben werden, daß es sich um ihren Wert für $\Delta x = 0$, $\Delta y = 0$ handelt.

[57]) Über den Begriff der Kurve (und ihre Darstellung) siehe kurz F. Enriques, Prinzipien der Geometrie in der Encyklopädie d. math. Wiss. III, 1_1 (1907), besonders Absatz 14, S. 60 u. f.; ein ausführliches Referat gab H. Mangoldt, Die Begriffe „Linie“ und „Fläche“ in der Encyklopädie d. math. Wiss. III, 1_1 (1907), S. 130 u. f. (ergänzt, aber nur teilweise erschienen, von L. Zoretti in der Encyklopédie d. sciences math. III, 1_1, 1911, S. 152 u. f.); insbesondere siehe einige Abhandlungen, die später bei der Rektifikation der Kurve angeführt

sind. Weiter (vom Standpunkt der Mengentheorie) A. Schoenflies, Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten II (1908), S. 199 u. f.; L. Zoretti, La notion de ligne, Annales de l'École normale sup. (3) 26 (1909), S. 485—497; K. Menger, Neuere Methoden und Probleme der Geometrie, Verhandlungen des internationalen Math.-Kongresses Zürich 1932, B. I, S. 310 u. f.; desselben Kurventheorie (1932).

[58]) Robert Simson (1687—1768), Professor an der Universität in Glasgow, gab im Jahre 1756 Euclidis Elementorum libri priores sex, item undecimus et duodecimus, ex versione latina Federici Commandini, dazu Notae criticae et geometricae (S. 339—411) heraus. Es folgten unzählige weitere Ausgaben der Elemente, die den Unterricht der Elementargeometrie in England beherrschten.

[59]) Was die Bezeichnung betrifft, siehe Anm. [14]); über Kongruenz und Ähnlichkeit siehe Anm. [11]) und [17]).

[60]) Über Ch. Wolff siehe Anm. [15]); dazu Anm. [17]).

[61]) Über die Definition der Bogenlänge und ihre Berechnung (hauptsächlich mit Hilfe von ein- oder umgeschriebenen Polygonzügen, mit Hilfe von Inhalten und Abbildungen) siehe besonders A. L. Cauchy, Leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la géométrie II (1828), Oeuvres (2) 5 (1903), p. 407—430; J. M. C. Duhamel, Des méthodes dans les sciences de raisonnement II (1866), S. 411—417; E. Rouché-Ch. Comberousse, Traité de géométrie I (6. Auflage 1891), S. 189 u. f.; P. du Bois-Reymond, Erläuterungen zu den Anfangsgründen der Variationrechnung, Math. Annalen 15 (1879), S. 283 u. f.; O. Stolz, B. Bolzano's Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung, Math. Annalen 18 (1881), S. 268—278; desselben Grundzüge der Differential- und Integralrechnung II (1896), S. 306—320; desselben Zur Erklärung der Bogenlänge und des Inhaltes einer krummen Fläche, Transactions Amer. math. soc. 3 (1902), p. 23—37 und 302—304; L. Scheeffer, Allgemeine Untersuchungen über Rectifikation der Curven, Acta math. 5 (1884), S. 49—82 (und die Bemerkung von P. du Bois-Reymond in den Acta math. 6, 1885, S. 167); C. Jordan, Cours d'analyse de l'École polytechnique I (2. Auflage 1893), S. 90—108; E. Study, Über eine besondere Classe von Functionen einer reellen Veränderlichen, Math. Annalen 47 (1896), S. 298—316; H. Minkowski, Über die Begriffe Länge, Oberfläche und Volumen, Jahresbericht der Deutschen Math.-Vereinigung 9 (1901), S. 115—121, Gesammelte Abhandlungen II (1911), S. 122—127; E. Schmidt, Über die Definition des Begriffes der Länge krummer Linien, Math. Annalen 55 (1902), S. 163—176; H. Lebesgue, Intégrale, longueur, aire, Annali di mat. (3) 7 (1902), S. 231—259 (erschien auch selbständig). Eine Übersicht der einschlägigen Betrachtungen gibt H. Mangoldt, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Kurven und Flächen in der Encyklopädie d. math. Wiss. III, 3 (1902), S. 20—23; z. T. auch O. Chisini, Aree, lunghezze e volumi nella geometria elementare in F. Enriques' Questioni riguardanti le matematiche elementari I_2 (3. Auflage 1925), S. 61—131; weiter A. Schoenflies in dem in Anmerkung [57]) erwähnten Buche (S. 191—253). Aus der jüngsten Zeit siehe G. Barba, Sulla definitione di lunghezza di una curva, Note esercitazioni mat. 6 (1931), S. 16—18; K. Menger, Some applications of point set methods, Annals of math. (2) 32 (1931), S. 739 u. f.; J. Favard, Une définition de la longueur et de l'aire, Comptes r. Acad. Paris 194, 1932, S. 334—336; K. Menger, Kurventheorie (1932).

[62]) Über den Begriff der Fläche vgl. (analog wie beim Begriff des Bogens,

Anm.[57])) F. Enriques und H. Mangoldt in der Encyklopädie d. math. Wiss. III, 1_1 (1907), S. 63 u. f., bzw. S. 149 u. f.

[63]) Über die Definition des Inhaltes einer krummen Fläche und seine Berechnung siehe besonders A. L. Cauchy, Leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la géométrie II (1828), Oeuvres (2) 5 (1903), p. 459—494; H. A. Schwarz Sur une définition erronnée de l'aire d'une surface courbe in Ch. Hermite' Cours professée à la faculté des sciences (1883), S. 35—36, Gesammelte math. Abhandlungen II (1890), S. 309—311 (dazu Anmerkung S. 369—370); O. Stolz, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung III (1899), S. 234—254; H. Minkowski, Theorie der konvexen Körper, insbesondere Begründung ihres Oberflächenbegriffes, Gesammelte Abhandlungen II (1911), S. 131—229; desselben Volumen und Oberfläche, Math. Annalen 57 (1903), S. 447—495, Ges. Abh. II, S. 230—276; U. Cassina, Volume, area, lunghezza e curvatura di una figura, Atti Accad. Torino 57 (1922), S. 205—216; K. Petr, Počet integrální (2. Ausgabe 1931), S. 589—604. Vgl. außerdem einige Arbeiten, die bei der Rektifikation des Bogens angeführt sind (Duhamel, Stolz, Lebesgue, Favard). Um einen Überblick zu erhalten, siehe die dort zitierten Arbeiten von H. Mangoldt. O. Chisini, A. Schoenflies; dazu F. Sibirani, Sulla definizione di area di una superficie curva, Periodico mat. (3) 3 (1905), S. 32—43 (von Archimedes bis Minkowski).

[64]) Siehe (neben einigen früher angeführten Publikationen) z. B. C. Jordan, Cours d'analyse de l'École polytechnique I (2. Aufl. 1893), S. 28 u. f.; O. Stolz, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung III (1899), S. 206 u. f.; K. Petr, Počet integrální (2. Aufl. 1931), S. 536 u. f., 584 u. f.

[65]) Wie aus dem Folgenden (besonders §§ 14, 15, 23, 28) hervorgeht, bezeichnet Bolzano mit dem Worte „Haltung" die Gesamtheit der Eigenschaften eines stetigen ein- oder zweidimensionalen Gebildes in jedem seiner Punkte, welche man bei einer Kurve durch die Begriffe Richtung, Krümmung und höhere dieser Art ausdrückt.

Mit dem Worte „Schnörkelung" bezeichnet Bolzano offenbar die Geschwindigkeit, mit der sich die Krümmung einer Kurve in einem ihrer Punkte ändert (ähnlich wie die Krümmung bei ebener Kurve die Geschwindigkeit angibt, mit der sie ihre Richtung ändert).

Die Bezeichnungen für die Krümmung von Raumkurven kritisierte (1844) B. Saint-Venant in seiner Abhandlung Mémoire sur les lignes courbes non planes, Journal de l'École polytechnique 18 (1845), Note I, S. 52—64; er lehnt die Benennungen „Flexion", „Inflexion", „Torsion", „zweite Krümmung" u. a. ab und empfiehlt die Namen Krümmung (courbure) und Windung (cambrure).

[66]) Bolzanos Kritik über den Krümmungskreis kann sich allerdings nur auf Raumkurven beziehen; dort aber wird die erste Krümmung (und ihre Veranschaulichung durch einen Kreis) durch die zweite Krümmung (Windung) ergänzt.

[67]) Bei der logarithmischen Spirale ist die Ableitung des Krümmungsradius nach dem Bogen konstant ($r = as$), nicht aber die Ableitung der Krümmung. Als Kurve, deren Krümmung eine konstante Änderungsgeschwindigkeit besitzt und deshalb direkt proportional dem Bogen ist, wurde die sogenannte Klothoide (nach der Benennung von E. Cesàro) gefunden; siehe z. B. G. Loria, Curve piane speciali algebriche e trascendenti II (1930), S. 72—75, oder Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven II (1911), S. 70—73.

[68]) In dieser Abhandlung Bolzanos werden die hervorgehobenen Gesichtspunkte nur auf Kurven angewendet; die zugehörigen Betrachtungen über Flächen fehlen, obwohl sie offensichtlich geplant waren.

[69]) Inhalt der IV. Abhandlung.

§ 1—9: Von den räumlichen Gebilden.

§ 10—12: Die Berührung.

§ 13—19: Die Haltung eines Gebildes (von ein oder zwei Dimensionen) in einem seiner Punkte (allgemein).

§ 20—22: Haltung einer Kurve.

§ 23—26: Richtung einer Kurve.

§ 27—28: Krümmung einer Kurve.

§ 29—35: Der Kreis und die (gewöhnliche) Schraubenlinie.

§ 36—39: Ebene Krümmung.

§ 40—43: Räumliche Krümmung.

§ 44: Nachwort.

[70]) Sie bedeuten also die Elemente eines räumlichen Gebildes. Im Folgenden sind aber genauer „Nachbarn des Punktes im betrachteten Gebilde für eine bestimmte Entfernung“ Punkte, welche auf dem Gebilde liegen und eine gegebene Entfernung von jenem Punkte haben.

[71]) In der angeführten Gleichung soll in einem der beiden irrationalen Glieder offenbar $x - 1$ stehen.

[72]) Bolzano erinnert an die Definition der Kurve, der Fläche und des Körpers, die er (mit Anmerkungen) in der angeführten III. Abhandlung in § 11—12, § 35—36 und § 52 gegeben hat. Siehe auch B. Bolzano, Paradoxien des Unendlichen, herausgegeben von F. Přihonsky (Leipzig 1851), § 40, Anm.

[73]) Christian Doppler (1803—1853) ist bekannter durch das nach ihm benannte physikalische Gesetz (Prinzip) über die Änderung der Wellenlänge und daher der Frequenz bei einem Erregungszentrum, das sich einem ruhenden Beobachter nähert oder sich von ihm entfernt (von Doppler zum erstenmal in der Abhandlung „Über das farbige Licht der Doppelsterne und einiger anderer Gestirne des Himmels“ ausgesprochen, veröffentlicht in den Abhandlungen d. Königl. böhm. Gesellschaft d. Wiss. (5) 2); er wirkte als Assistent, Supplent und Professor der Mathematik an den Technischen Hochschulen in Wien und Prag, als Professor der Physik und praktischen Geometrie an der Bergakademie in Šťávnica und an der Technischen Hochschule und Universität in Wien. In den hier angeführten beiden geometrischen Abhandlungen, welche in den Abhandlungen d. Königl. böhm. Gesellschaft d. Wiss. (5) 1 und 2 veröffentlicht wurden (von denen die zweite eine 165 Seiten lange Monographie ist), führt Doppler eine kompliziertere Symbolik ein und bemüht sich ihre Bedeutung für die analytische Geometrie darzutun, was aber keine Anerkennung fand. Siehe auch F. J. Studnička, Bericht über die mathematischen und naturwissenschaftlichen Publikationen der K. böhm. Gesellschaft d. Wiss. II (1885), S. 261—290.

[74]) Für kongruente Gebilde gebraucht hier Bolzano eine Bezeichnung, die er früher wiederholt abgelehnt hat: in der Abhandlung I (§ 11 und anderswo) verwendet er den Terminus gleich, in der Abhandlung III (§ 22 und anderswo) den Terminus geometrisch gleich (auch für Gebilde, die sich nur durch den Sinn unterscheiden). Siehe Anm. [14]); weiter § 19.

[75]) In dem ausführlichen Kapitel 668 (Wie zu sorgen, daß die Leser den Sinn unserer Zeichen erfahren, S. 542—551) sagt Bolzano (S. 543): „Verständigung sind alle diejenigen in einem Lehrbuche vorkommenden Sätze, die wir nur eben in der Absicht aufstellen, um unsern Lesern die Bedeutung, in der wir gewisse Zeichen gebrauchen, bekannt zu geben". Dagegen über die „Erklärung" eines Begriffes sagt er: „Sie mag denn die Bestimmung eines Begriffes durch seine Theile, auch die Zerlegung, oder eine Erklärung im engeren oder strengwissenschaftlichen Sinne heißen".

[76]) Im § 80 seiner Wissenschaftslehre I (S. 378—389) unterscheidet Bolzano (Abs. 5, S. 383) zwei Arten von Verhältnissen: „Die eine Art findet dort Statt, wo die Gegenstände $A, B, C, D, \ldots$ an der Beschaffenheit, welche dem aus denselben gebildeten Ganzen zukommt, alle einen gleichen Antheil haben; die andere, wo dieses nicht der Fall ist. Verhältnisse der ersten Art nenne er Verhältnisse der Gleichheit oder auch gegenseitige; jene der zweiten Art aber Verhältnisse der Ungleichheit oder auch ungleiche, einseitige." Als Beispiel der einen Art führt Bolzano die Entfernung zweier Punkte an, als Beispiel der anderen Art die Richtung, in der der eine Punkt zum andern liegt.

[77]) Zu dieser Bemerkung Bolzanos über die Berührung von Kurven und Flächen vgl.: J. Lagrange, Théorie des fonctions analytiques II (1797); S. F. Lacroix, Traité du calcul différentiel et du calcul intégral (2. Aufl. 1810). Weiter siehe besonders A. Cauchy, Leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la géométrie I (1826; Oeuvres, 2. série, tome 5), 8–10, 18, 21—22. leçon; É. Picard, Traité d'analyse I (1891), S. 318—348; G. Scheffers, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie (3. Aufl. 1923) I, S. 27 u. f.; 214 u. f., 306 u. f.; II, S. 172 u. f.

[78]) Am a. O. sagt Bolzano zunächst: „Ich sage, daß zwei Vorstellungen einander entgegengesetzt sind, wenn es eigentlich nur die durch sie vorgestellten Gegenstände selbst sind". Und besonders: „Die bestimmte Erklärung dieses Begriffes ist nun, wie mir däucht, folgende. Wir nennen zwei Gegenstände α und β einander entgegengesetzt, sofern es möglich ist, aus einer ausschließlich nur auf den einen derselben z. B. α passenden Vorstellung A durch bloße Zuthat einiger reinen Begriffe $m, n, p, \ldots$ eine Vorstellung $[A, m, n, p, \ldots]$ zusammenzusetzen, die ausschließlich nur den andern Gegenstand β vorstellt, und dabei so beschaffen ist, daß, sobald wir die in ihr vorkommende Vorstellung A mit einer ausschließlich nur β vorstellenden B vertauschen, die neue Vorstellung $[B, m, n, p, \ldots]$ nun eben so ausschließlich nur den Gegenstand α vorstellt". Und als Beispiel führt er den Begriff zweier entgegengesetzter Richtungen OR, OS an (wenn für zwei auf ihnen gewählte Punkte M, N, welche die Entfernung MN haben, die Beziehung $MN = OM + ON$ gilt).

[79]) Hiezu siehe z. B. G. Scheffers, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie I (3. Aufl. 1923), S. 104 u. f.; F. Enriques, Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche II (libro 4), S. 325 u. f.; L. Berzolari, Allgemeine Theorie der höheren ebenen algebraischen Kurven in der Encyklopädie d. math. Wissenschaften III, 2_1 (1906), besonders S. 383 u. f.

[80]) Über den Begriff der Tangente in einem gegebenen Punkte einer Kurve und ihre Bestimmung vgl. z. B. A. Cauchy, Leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la géométrie I (1826), 1. und 13. leçon; G. Scheffers, Anwendung

der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie I (3. Auflage 1923), S. 18 u. f., 214 u. f.; H. Mangoldt-K. Knopp, Einführung in die höhere Mathematik II (6. Aufl. 1932), S. 447 u. f.

[81]) Es sollen die Projektionen des Winkels $R'OS'$ auf die Ebenen AOB und AOC, also die Winkel $r'Os'$ und $\varrho'O\sigma'$ sein.

[82]) Die Krümmung der gewöhnlichen Schraubenlinie (auf dem Rotationszylinder) ist hier nicht richtig berechnet; die Schraubenlinie mit den Gleichungen $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$ hat die Krümmung $\frac{a}{a^2 + b^2}$, während Bolzano einen Wert findet, der bei dieser analytischen Schreibweise $\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ergibt.

[83]) Hiezu vgl. z. B. A. Cauchy, Leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la géométrie I (1826), 6. und 7., 17. und 18. leçon; G. Scheffers, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie I (3. Aufl. 1923), S. 45 u. f., 249 u. f.

[84]) Bei einer Raumkurve existiert in jedem ihrer (gewöhnlichen) Punkte eine einparametrische Schar von oskulierenden gewöhnlichen Schraubenlinien (ihre Berührung mit der Kurve ist von zweiter Ordnung); unter ihnen existiert eine einzige, die mit der gegebenen Kurve in Krümmung und Windung übereinstimmt; eine gewöhnliche Schraubenlinie, die mit der Kurve eine Berührung dritter Ordnung (vier gemeinsame zusammenfallende Punkte) hat, ist im allgemeinen nicht möglich (sie existiert nur bei Kurven konstanter Krümmung, wie schon 1835 Th. Olivier gefunden hat). Siehe z. B. W. Schell-E. Salkowski, Allgemeine Theorie der Kurven doppelter Krümmung (3. Aufl. 1914), S. 135 u. f., G. Scheffers, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie I (3. Aufl. 1923), S. 254 u. f.; auch G. Grübner, Über die Schmiegungsschraubenlinien von Raumkurven, Archiv der Math. u. Phys. (3) 20 (1913), S. 11—28.

[85]) Über die doppelte Krümmung von Raumkurven siehe besonders Th. Olivier, De la courbure et de la flexion d'une courbe à double courbure, Journal de l'École polytechnique 15 (1835), S. 61—91; B. Saint-Venant, Mémoire sur les lignes courbes non planes, Journal de l'École polytechnique 18 (1845), S. 1—76 (auch über die verschiedenen Bezeichnungen dieser Krümmungen); weiter z. B. W. Schell-E. Salkowski, Allgemeine Theorie der Kurven doppelter Krümmung (3. Aufl. 1914); É. Picard, Traité d'analyse I (1891); R. Lilienthal, Vorlesungen über Differentialgeometrie I (1908); L. Bianchi, Lezioni di geometria differenziale I (3. Aufl. 1922).

[86]) Siehe Anmerkung [84]). Weiter T. Levi-Cività und G. Fubini, Sulle curve analoghe al circolo osculatore quando si passa da tre a quattro punti infinitamente vicini, Annali mat. p. et a. (6) 7 (1930), S. 193—211.