

# Bolzano a základy matematické analýzy

---

Jaroslav Folta

Život a vědecké snahy Bernarda Bolzana

In: Vojtěch Jarník (author); Jaroslav Folta (other); Josef Novák (other): Bolzano a základy matematické analýzy. (Czech). Praha: Jednota čs. matematiků a fyziků, 1981. pp. 11–[30].

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/400177>

## Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

## ŽIVOT A VĚDECKÉ SNAHY BERNARDA BOLZANA

Život málokterého matematika byl určován tak významnými složkami, jaké utvářely osud a dílo Bernarda Bolzana. Jejich důsledkem byla na jedné straně jeho téměř totální izolace, násobená vlastně i skutečností, že stěžejní výsledky jeho matematického díla nebyly za jeho života vůbec vydány. Na druhé straně pod vlivem jeho životních osudů se formovalo i jeho oceňování významu a důležitosti různých oblastí vlastní práce; v něm byly matematické snahy poněkud zasouvány ostatními Bolzanovými zájmy. Tím spíše je nutno obdivovat obrovskou sílu jeho matematické invence, vyrůstající z neobyčejně silného matematického nadání a schopnosti obracet se k základním problémům tehdejší matematiky netradičním pohledem a přístupem, invence, která razila metodicky i obsahově cestu do směrů, v nichž se matematické bádání začalo prosazovat až v poslední třetině 19. století. Přitom je třeba mít stále na mysli, že Bolzanovy nedokončené práce tvoří jen zlomek jeho díla, které zasahuje řadu aktuálních problémů logiky, filozofie, utopického socialismu, ale i teologické spory apod. A nadto v celkovém rámci Bolzanových snah měla matematika sloužit prohloubení dokonalosti člověka a nikoliv praktickým cílům; a rysy této koncepce se bezesporu projevily i v zaměření Bolzanovy matematiky i v jejích výsledcích.

### 1. Život

Když si brzy po polovině 18. století zvolil vzdělaný obchodník uměleckými předměty Bernard Pompeius Bolzano (1737–1816), pocházející z osady Nesso na Comském jezeře v severní Itálii, Prahu za svůj nový domov a svým sňatkem s Marií Cecilíí Maurerovou (1753–1821) v roce 1776 založil zde svoji rodinu, přicházel do Čech v době, kdy osvícenský absolutismus vlády Marie Terezie a Josefa II. se začínal projevovat ve školství, v kulturním i společenském životě českých zemí spolu s nesmělým ohlasem osvícenských tendencí před-revoluční Francie. V roce, kdy bylo vyhlášeno zrušení nevolnictví, kdy byl vydán toleranční patent, zaručující náboženské svobody i nekatolíkům, kdy byla uvolněna cenzurní opatření, se narodilo v Bolzanově rodině 5. října 1781 čtvrté dítě – syn Bernard. Z dvanacti dětí se zralého věku vedle Bernarda dožil jen jeho nejstarší bratr Jan (1777–1859), který byl Bernardovi celý život oporou. Oba bratři po několika letech soukromého vzdělávání vstoupili na piaristické gymnázium na pražském Novém Městě. Zatímco starší studium nedokončil a věnoval se práci v rodinném obchodě, který po otcově smrti v r. 1816 převzal, Bernard

v roce 1796 absolvoval střední školu s výborným prospěchem a vstoupil na filozofickou fakultu Karlovy univerzity. To už bylo v době, kdy desetiletí josefínského osvícenství bylo vystřídáno zesilujícími obavami rakouské monarchie před vlivem francouzské buržoazní revoluce. Utužení reakce, represe, cenzura, snaha udržet policejním režimem feudální stát před „buřičskými“ myšlenkami, přicházejícími z Francie, se staly součástí života v Rakousku až do buržoazní revoluce v roce 1848. S protirevoluční propagandou vystupovala velmi aktivně katolická církev. Tato situace tedy provázela Bolzana už po celý život a v mnohém zkomplikovala jeho osobní osudy.

Ve svých univerzitních studiích věnoval Bolzano velkou pozornost filozofii, logice a matematice. Je paradoxem, že právě v logice a matematice potřeboval zpočátku pomoc od svých spolužáků. Naproti tomu byl v té době více poután fyzikou; ovšem už u této vědy poznává, že většina jejích empirických pouček „není odvozena bezprostředně ze zkušenosti“ a že nezbytně vyžadují zdůvodnění, důkazu a vymezení platnosti.<sup>1)</sup> Zatímco přednášky z elementární matematiky u Stanislava Vydry ho příliš nenadchly, stal se mu učitelem vlastní učitel Gaussův A. G. Kästner svou obsáhlou učebnicí *Anfangsgründe der Mathematik* [69]. Bolzano na ní oceňoval právě snahu po vymezení principů, z nichž jsou vyvozovány a dokazovány důsledky. Po absolvování filozofického studia se věnoval celý rok 1799/1800 studiu převážně vyšší matematiky u profesora Gerstnera; stejnou pozornost však zaměřil i ke studiu Kanta a jeho kritiků i stoupenců. Když se v r. 1800 rozhodl pro studium teologie, neznamenalo to, že by matematika šla stranou jeho zájmů. Právě v té době sepisuje svou matematickou prvotinu *Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie* [1], práci, která v roce 1804 na něj upozornila pražské matematiky. V roce 1804 stále ještě váhá mezi matematikou a teologií a účastní se konkurzu jak na místo profesora elementární matematiky po profesoru Vydrovi, tak také na místo zřizované katedry „náboženské vědy“. Bolzano byl v březnu 1805 jmenován provizorním katechetou – učitelem náboženství na katedře, jež měla paralyzovat revoluční myšlenky mezi univerzitními studenty a jež byla – jak Bolzano vzpomíná ve své autobiografii [25] – studenty přijata s velkou nevolí. Po jmenování v rychlém sledu za sebou byl promován, přijal kněžská svěcení a začal přednášet. Matematik Bolzano sepisuje svou druhou práci *Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik* [2] a zároveň ve svých nedělních a svátečních promluvách (exhortách) ke studentům získává katolický kněz Bolzano univerzitní mládež pro katolickou víru. Dalo by se soudit, že nastupuje do prostých kolejí života. Avšak záhy přichází zlom. Již v roce 1805 přichází první denunciaci, na jejímž základě bylo jeho postavení změněno na provizorní a teprve po intervencích a po dvou letech byl ve své funkci potvrzen; musel však přednášet náboženství podle oficiální učebnice [56] a nikoliv podle svých vlastních osnov. Vlastních komentářů

---

<sup>1)</sup> To ostatně ukazuje jeden z jeho raných, nedokončených fyzikálních rukopisů „Aetiologie“ [3], v němž se pokouší o axiomatické vybudování mechaniky analogické matematice, snaží se zpřesnit vztahy mezi pojmy a tím i celý výklad základů této disciplíny.

se však nevzdává a od r. 1811 je mu povoleno přednášet i podle vlastní přípravy.<sup>2)</sup> V roce 1813 vydává svá nedělní kázání ([4], viz též pozn. 7), která pravidelně konal pro studenty a která si získala velké obliby, byla zaznamenávána, opisována a rozšiřována; v roce 1815 byl dokonce zvolen děkanem filozofické fakulty a stal se členem Královské české společnosti nauk. V letech 1815–1816 byl Bolzano nemocen a nepřednášel. Zdá se však, že se v této době intenzivně věnoval matematice. Alespoň v roce 1816 vychází jeho spisek *Der binomische Lehrsatz* [8], v následujícím roce pak *Rein analytischer Beweis* [9] a *Die drey Probleme* [10], v nichž přinesl a precizoval mnohé základní pojmy jak matematické analýzy, tak také geometrie.

Když se vrátil k přednáškám, nový ředitel filozofických studií F. Wilhelm ho roku 1817 znovu obvinil, že přednáší na základě vlastních textů a nedrží se oficiální učebnice. Bolzano zdůvodňuje svůj postup ostrým výpadem proti povinné učebnici, jejímž autorem však byl dvorní kaplan a císařův zpovědník Frint. A přestože zvláštní komise ani teologická a filozofická fakulta vídeňské univerzity neshledaly na Bolzanových přednáškách nic závadného, a Bolzano je hájen svými spolupracovníky a dokonce i úřadem českého gubernia, útoky proti Bolzanovi neustávají a tzv. „Bolzanův proces“ nabývá politického charakteru, i když ve zdůvodnění dvorského dekretu proč byl Bolzano zbaven místa na univerzitě se 24. 12. 1819 (Bolzanovi byl doručen až 19. 1. 1820) uvádí, že „se hrubě prohřešil na povinnostech kněze, učitele náboženství a vychovatele mládeže“. Nepochybně poslední příčinou před tímto rozhodnutím byla i přímá intervence papežské kurie, vyvolaná dalším udáním Bolzana jeho pražskými nepřáteli v Římě.<sup>3)</sup> Námitky proti Bolzanovu učení, které zavdaly příčinu k ještě dalším pěti letům církevního vyšetřování, napadaly Bolzana nejen pro jeho racionalismus, nahražování náboženství etikou, ale i jeho přejímání moderních přírodovědeckých výsledků a v neposlední řadě zejména za jeho téze, mající protifeudální, povětšinou buržoazní, ale i socialistický charakter: tvrzení o věčném pokroku, o rovnosti lidí, odmítání rodového šlechtictví s jeho výsadami i majetkem, odhalování původu soukromého vlastnictví, pranýřování nemorálního vztahu bohatých k chudým a jejich parazitismus („není hoden života, kdo by chtěl pouze žít z práce druhých a sám nikomu nic neposkytoval“), kritika nedostatků státu a společenského zřízení, dokonce i právo občanů na ozbrojený odpor apod. Tím „veřejně a z posvátného místa přednášel zásady, ohrožující klid státu“. Zdá se tedy, že to byly hlavně Bolzanovy nedělní exhorty, které se sice zabývaly otázkami náboženskými, ale

---

2) Tyto přednášky byly později (1834) anonymně vydány Schneiderem, Dittrichem a Hoffmannovou ve třech dílech jako *Lehrbuch der Religionswissenschaft* [22].

3) O charakteru udání svědčí citace: „Na pražské univerzitě přednáší náboženskou nauku jistý kněz jménem Bernardus Bolzano, jenž je pro svůj nový a neobvyklý způsob vyučování náboženství a sofistické pletichaření proslulý po celých Čechách ... Příkladem jeho rouhačství je to, že odmítá spolehlivé a nevývratné katolické doktriny ... Tento muž, koryfej našich lžíproroků, má od prvopočátku bezpočet žáků a stoupenců, kteří jsouce roztroušeni po celém kraji dál šíří mezi luzou zásady, jimiž byli nakaženi.“

Lehrbuch der Physik. Fünfte Auflage von  
Ulmann'schem Antiquariat.

3.1.  
Grund und Ursach d. phys. Erschein.

In der Physik wird die so wichtige  
 Begriffe von Grund und Ursach gibt  
 es mancherley Ansätze, von denen  
 Einige freilich gar ungenügend sind,  
 sondern nur die von Galiläus und Descartes,  
 Andere dagegen von dem Aristoteles, daß  
 sie nur durch ein notwendiges Bedürf-  
 nis der Natur entstehen und von dem  
 Natur selbst kommen. Ist wenn die  
 Natur selbst, Ursach und ganz abstrah.  
 vollständig, also es in der gewöhn-  
 lichen Anschauung der Philosophie, und  
 insbesondere der Metaphysik schon  
 der Antiquität \* diesen Ansätzen ist,  
 zu kommen; und wenn sie nicht  
 nicht genug, um einen eigenen Titel  
 zu verdienen, so könnte man sie mit  
 dem Namen der Antiquität belegen.

\* z. B. selbst in Wolff's Ontologia.

nabývaly spíše etického a moralizujícího a také abstraktně politického charakteru,<sup>4)</sup> jež vzbudily rozhodný odpor nejreakčnějších kruhů katolické církve v Rakousku a přiměly stát, aby Bolzana zcela izoloval od tehdejšího intelektuálního prostředí.

Bolzano měl své názory odvolat, obdobně jak to byl donucen učinit už v r. 1824 jeden z jeho nejradikálnějších žáků, správce litoměřického bohosloveckého semináře, M. J. Fesl. Bolzano napsal znovu rozklad, nesoucí mnohé známky nedůslednosti a rozpornosti v názorech, jež byly předmětem sporu. Přesto odpověď neuspokojila církevní orgány a jen zásah významného slavisty a osvícence Josefa Dobrovského, který osobními listy pohrozil arcibiskupu Chlumčanskému i císařovu kaplanu Frintovi, že zveřejní v Lužici Bolzanovu poslední repliku, odvrátil od Bolzana osud klášterního vězení a vynucení plného odvolání.

Od roku 1825 mohl Bolzano žít relativně klidně, využívaje pohostinství rodiny Hoffmannových na jejich zámečku v Těchobuzi, nebo v Radiči jižně od Prahy u advokáta Pistla a později v Liběchově u Antonína Veitha nebo v Jirnech u Úval u jeho sestry. Sklonek svého života pak prožil opět v Praze u svého bratra. Josef Hoffmann se vyjádřil dokonce tak, že celý proces pomohl Bolzanovi prodloužit život tím, že ho zbavil pro něj namáhavé povinnosti přednášet a obrátil ho k vědecké práci v prostředí, v němž byl obklopen péčí svých přátel. Tuberkulóza, která byla příčinou smrti jeho sourozenců, se nevyhnula ani jemu a už ve dvacátých letech trpěl chrlením krve a neduh se mu i poté často obnovoval (1828, 1832, 1835, 1843).

Bolzanova žádost o místo profesora matematiky na pražské univerzitě byla zamítnuta; nabízenou profesuru náboženské dogmatiky v Tübingen odmítá sám. Rovněž jeho vztahy s Královskou českou společností nauk se uvolňují. Protože je mu v Rakousku nejen odmítáno vydávání spisů, ale dokonce jejich rukopisy jsou mu zabavovány, snaží se dosáhnout jejich publikace v cizině. V tom mu pomáhají jeho žáci. Snaží se formulovat své hlavní názory, domnívá se, že ve svých žácích bude mít i své pokračovatele. Kromě *Wissenschaftslehre* [13] však řada jeho spisů, zejména matematického charakteru, zůstala opomenuta v rukopisech až do dvacátého století. Rovněž shrnutí jeho vize utopicko-socialistických názorů *Von dem besten Staate* [18], věnované r. 1831 paní Hoffmannové, zůstalo celých sto let v rukopise, který ovšem koloval v několika opisech.

Bolzano žije skromně, až asketicky, celý život. Prostředky na nákup knih dostává od některých svých šlechtických stoupců, zejména od Lva Thuna. Jeho činnost, korespondence a styky jsou od dvacátých let pod neustálým policejním dohledem.

Po svém návratu do Prahy (1841), který souvisel s nemocí paní Hoffmannové, se Bolzano už nemohl vpravit do vztahů, jež se v českém společenském prostředí vytvořily, a i když se zajímá intenzivně o sociální a politické problémy, v událostech revolučního roku 1848 – posledního roku svého života – se již neorientuje, a tak umírá v nové izolaci jak od progre-

---

<sup>4)</sup> Je zajímavé, že později (1840) Bolzano uvažuje o možnosti zbavit myšlenkový obsah exhort náboženské formy.

Dr. B. Bolzanos  
**Wissenschaftslehre.**

---

V e r s u c h  
einer ausführlichen und größtentheils neuen Darstellung

der  
**L o g i k**

mit steter Rücksicht auf deren bisherige Bearbeiter.

---

Herausgegeben  
von  
mehrern seiner Freunde.

Mit einer Vorrede  
des  
Dr. J. Ch. A. Heineoth.

---

Erster Band.

---

Sulzbach,  
in der J. C. v. Seidel'schen Buchhandlung.  
1837.

sívních složek tehdejší společnosti, k nimž nenalezl cestu, tak od svých dřívějších šlechtických ochránců, jichž se některými svými prohlášeními dotkl.

Svým utopickým socialismem se vzdálil radikálním demokratům – nejrevolučnější složce buržoazní revoluce 1848 – jak prakticky (protože zde byl jejich revoluční činností překonán), tak i teoreticky (protože zdaleka nemohli chápat, natož realizovat jeho socialistické ideje). Po své smrti (18. 12. 1848) se Bolzano brzy stává „mučedníkem“, symbolem ideálního bezúhonného člověka, pronásledovaného pro své pokrokové názory církevními i světskými úřady, a tedy záštitou celých dalších generací českých pokrokových kruhů, které se ho dovolávaly ve svých bojích jak proti habsburské monarchii, tak i za sociální spravedlnost.

## 2. Vědecké snahy

Je bezesporné, že běh Bolzanova života do značné míry ovlivnil i jeho vlastní hledisko na priority vědecké práce. Jestliže jsme se zmínili o tom, že po dvacátých letech se snažil zajistit vydání svých prací, zdá se, že to platí především pro ten okruh jeho výsledků, který on a jeho přátelé považovali za nejzávažnější – a to byla díla nábožensko-etické povahy.<sup>5)</sup> Z ostatních velkých prací vychází jen *Wissenschaftslehre* a poté několik statí v *Pojednáních Královské české společnosti nauk*, převážně však až v posledním období jeho života,<sup>6)</sup> přičemž matematicko-fyzikální statě jsou zde jen čtyři a to ještě matematický *Pokus o objektivní zdůvodnění nauky o třech dimensích prostoru* [32] byl údajně napsán už v r. 1815. Uvědomíme-li si tuto skutečnost, pak vidíme, že – kromě raného období – z hlavních směrů jeho zájmu, totiž matematiky, logiky, náboženství a filozofie a sociální reformy je právě matematika stavěna na vedlejší kolej a hlavní její výsledky zůstávají dlouhou dobu jen v rukopisech. Přitom je zřetelné, že už ve své době právě matematické myšlenky Bolzanovy byly nejprogresivnější a mohly v daleko větší míře ovlivnit světový vývoj této oblasti. Na druhé straně problémy utopického socialismu v Bolzanově pojetí lze pouze konfrontovat s řadou jiných obdobných tendencí jeho předchůdců i současníků a koneckonců i ony zůstaly po vydání *Vzdělávacích řečí* [4]<sup>7)</sup> jen v rukopise.<sup>8)</sup> Takže hlavní pozornost „bolzanistů“

<sup>5)</sup> Tak vycházejí: 1827 [11, 12]; 1831 [19]; 1834 [22, 23]; 1835 [24]; 1836 [25]; 1837 [26, 27]; 1838 [28a]; 1839 [29]; 1840 [30]; 1845 [39]; 1847 [43, 44].

<sup>6)</sup> Vedle dvou biografii: Gerstnerovy [28] a Krombholzovy [40] jde pouze o čtyři statě matematicko-fyzikálního charakteru: 1842 [31]; 1845 [32]; 1843 [38]; 1847 [41]. Zbývající tři jsou věnovány: logickým problémům Exnerova nominalismu a realismu [34], pojmu krásna [33] a obecné jazykovědě [42].

<sup>7)</sup> *Erbauungsreden für Akademiker* 1. vyd. Praha 1813 (xx + 354 str.), 2. vyd. Sulzbach 1839 (xvi + + 376 str.). Další vydání vyšla až po Bolzanově smrti (1849–50, 1851, 1852, ve čtyřech dílech), pak jako I. díl Bolzanových *Gesammelte Schriften* (Viedeň 1882) a vzápětí i v českém překladu *Řečí vzdělávací akademické mládeži I–IV* (Praha 1882–1887).

<sup>8)</sup> To platí zejména o jeho stěžejním díle v tomto ohledu *Von dem besten Staate*, napsaném 1831 a vydaném poprvé až 1930 [18].



Dr. Bernard Bolzano's

# Paradoxien des Unendlichen

herausgegeben

aus dem schriftlichen Nachlasse des Verfassers

VON

Dr. Fr. Přihonsky.

Je suis tellement pour l'infini actuel, qu'au lieu d'admettre, que la nature l'abhorre, comme l'on dit vulgairement, je tiens qu'elle l'affecte par-tout, pour mieux marquer les perfections de son Auteur. (*Leibniz, Opera omnia studio Ludov. Dutens. Tom II part 1. p. 243.*)

**Leipzig,**

bei C. H. Reclam sen.

1851

byla upoutána právě ke spisům, jež měly ukázat nespravedlnost důsledků Bolzanova procesu, a tedy vlastně k nejvíce pomíjející problematice.<sup>9)</sup>

### *Bolzanova koncepce matematiky*

Přehlédneme-li dosud známé Bolzanovy matematické výsledky, pak vidíme, že téměř všechny problémy, které v průběhu života řešil, měly své kořeny už v jeho raných pracích. Vracel se k nim, dalo by se říci, znovu v širších souvislostech a se snahou vytvořit „dokonalou“ koncepci výkladu celé matematiky – tj. vybudovat matematiku od samých základů. Tato tendence v tehdejší době vlastně znamená rozšíření matematiky o určitou část – v dnešní terminologii – metamatematické problematiky; rozšíření matematiky hlouběji k jejím základům. Už ve své matematické prvotině ([1] – Úvod) výslovně formuluje program revize základů: „Především jsem si stanovil pravidlo, že mě žádná zřejmost předpokladu nepřiměje k tomu, abych se cítil zproštěn povinnosti hledat pro něj důkazy tak dlouho, dokud jasně neuvidím, že nelze a proč nelze požadovat žádný důkaz.“ A z tohoto hlediska zkoumá v historickém sledu:

- základy geometrie
- základy matematického důkazu a výstavby vědecké teorie
- základy matematické logiky
- základy matematické analýzy
- základy teorie množin.

V prvním období – do dvacátých let – zkoumá drobné problémy<sup>10)</sup>, po r. 1820 začíná se systematickým souborným zpracováním.

*Wissenschaftslehre* je systematickým výkladem metodiky výkladu vědy, a v jejím rámci se objevují některé partie, jež jsou rozpracováním matematické logiky. Na tuto práci má navázat *Größenlehre* (nauka o veličinách), která nebyla nikdy dokončena, i když jednotlivé její části byly už značně rozpracovány (existují až tři rukopisná zpracování některých partií) a staly se základem prvních edicí ve Spisech Bernarda Bolzana (*Functionenlehre* [20]; *Zahlentheorie* [21]). A protože Bolzano pro dokončení této práce počítá – bohužel marně – s pomocí svých žáků, vrhá se s posledními silami znovu do problematiky základů nekoneč-

<sup>9)</sup> Právě v této souvislosti je třeba vyzvednout pozornost, kterou Bolzanově matematické pozůstalosti věnovali čeští profesori M. Jašek [65–67], V. Jarník [61–64] a K. Rychlík [81–83], kteří na začátku dvacátých let začali systematicky rozebírat a vydávat hlavní výsledky B. Bolzana, především v oblasti matematické analýzy a teorie čísel. Z jejich iniciativy začala Královská česká společnost nauk vydávat Spisy Bernarda Bolzana (sv. I [20], II [21], III [18], IV *Der Briefwechsel Bernard Bolzano's und F. Exner*, Praha 1935, V: *Geometrické práce*, [J. Vojtěch ed.], Praha 1948). Za dřívější zhodnocení Bolzanových publikovaných matematických prací vděčíme zejména H. Hanke-  
lovi (1871) [60], H. A. Schwarzovi (1872) [85] a O. Stolzovi (1881) [86].

<sup>10)</sup> Viz: Ryze analytický důkaz [9, str. 26n], kde říká, že si již roku 1804 předsevzal, že v žádné vědě nezačne s vydáváním úplně soustavy, ale že své názory, jež se odchyľují od běžných pojmů, uveřejní jen v samostatných pojednáních.

ných procesů a dospívá ve svých *Paradoxien des Unendlichen* [38] k závažným výsledkům teorie množin.

To ukazuje, že Bolzano jako matematik neměl v úmyslu napsat jako řada matematiků 18. století všeobjímající učebnici – kompendium matematiky, ale koncepční syntézu – výklad výstavby matematiky.

### *Matematická logika*

Je charakteristické, že jediná oblast Bolzanova mimonáboženského zájmu byla vydána relativně záhy po svém zpracování. Je to logika, jejíž prvé problémy se snaží naznačit v *Beyträge* [2] a poté se k ní vrací v letech 1820–1829, když připravuje některé partie *Wissenschaftslehre* [13].<sup>11)</sup> Charakteristické je to proto, že ve všech vědních oblastech, jimiž se zabýval, postrádal Bolzano právě obecná pravidla, podle nichž je třeba řadit jednotlivá tvrzení tak, aby je bylo možno vhodně a přesvědčivě vykládat a prokazovat. A přestože Bolzano považoval matematiku za důležitý prostředek k výcviku správného myšlení, nalézal ve způsobech jejího výkladu nedostatky, které se snažil odstraňovat. Například národnost odmítal považovat za důkazový prostředek. V předmluvě k *Ryze analytickému důkazu* [9, str. 6] říká: „Při nejobvyklejším důkazu užívá se pravdy přejaté z geometrie... Ani proti správnosti, ani proti jasnosti této geometrické poučky nelze ničeho namítat. Je však rovněž zřejmé, že je v rozporu se správností metody, odvozují-li se pravdy čisté (nebo obecné) matematiky (tj. aritmetiky, algebry nebo analýzy) z úvah, jež přísluší jen její aplikované (nebo speciální) části, zejména geometrii ... Uvážíme-li, že vědecké důkazy nemají být pouhá ujišťování, nýbrž naopak odůvodnění, tj. výklady objektivních důvodů, svědčících ve prospěch hledané pravdy, tak vyjde najevo, že ryze vědecký důkaz, nebo objektivní základ nějaké pravdy, jež platí o všech veličinách ..., nemůže být obsažen v pravdě, jež platí jen o veličinách prostorových ... Neboť i když je geometrická pravda, na niž se odvoláváme ... nanejvýš zřejmá a nepotřebuje tedy žádného důkazu pro ujištění, vyžaduje přesto odůvodnění. Je přece zřejmé, že pojmy, z nichž se skládá, jsou tak složité, že ani na okamžik nelze připustit, že by patřily k oněm jednoduchým pravdám, jež nazýváme základními poučkami nebo základními pravdami, poněvadž jsou jen základem, nikoliv však výsledkem jiných; že je tedy poučkou nebo pravdou výslednou, tj. takovou pravdou, která má svůj základ v nějakých pravdách jiných, a tedy i ve vědě musí být z nich odvozena jako výsledek.“<sup>12)</sup>

<sup>11)</sup> Logickými studii se Bolzano zabýval podle svých zápisků „*Adversarií*“ už v r. 1812, kdy chtěl vydat práci „*Pokus o novou logiku, jež má způsobit úplný převrat ve všech vědách*“. V r. 1814 píše „*Logische Vorbegriffe*“ [5] a brzy poté má sepsán rukopis „*Etwas aus der Logik*“ [7], který vyšel nejdříve v českém překladu v časopise *Krok* (1831, 553–578).

<sup>12)</sup> Obdobně ve čtvrtém díle *Wissenschaftslehre* upozorňuje, jak Kantova *Kritika čistého rozumu* (2. vyd., str. 547) může právě v tomto směru škodlivě působit na vědeckou výstavbu matematiky: „*Neboť, jestliže matematikové i dříve měli sklon odvolávat se při důkazu svých vět ... na to, o čem může poučit prostý pohled na obrazec, nyní začali věřit ..., že mají plné právo takto postupovat ...*

Tyto úvahy ukazují, kterým směrem Bolzano zaměřoval svou pozornost v budování logiky.<sup>13)</sup> V *Beiträge* [2] si všímá především matematických pojmů a na příkladech upozorňuje, že řada z nich je pouze intuitivní a vyžaduje zpřesněného vymezení, stejně jako pro výstavbu teorie je nezbytný důsledný postup od jednoduchých pojmů ke složitějším. „Jednoduchost“ zde však chápe jako objektivní vlastnost pojmů a tvrzení a matematikovi přisuzuje úkol vyhledat pojmy a axiomy, jež jsou pro danou oblast základní. U pojmů Bolzano odmítal Kantovo dělení na empirické a apriorní a soudil, že pravdivost našeho vědění se opírá o různé formy zkušenostního poznání [77, str. 14].

Ve *Wissenschaftslehre* se Bolzano snaží podle vzoru matematiky vybudovat logicky přesnou metodologii výkladu libovolné vědy. Ve druhé části díla zkoumá vlastnosti výroků a jejich souvislostí. Využívá k tomu pojem proměnné převzatý z matematiky. Zavádí zároveň pojem výrokové funkce jakožto výroku, jehož jednu nebo více částí pokládá za proměnné, pouze spona (kopule) zůstává pevná a vyjadřuje se u něho vždy výrazem „má“ (hat) na rozdíl od běžnějšího „je“. Zkoumá i pravděpodobnost pravdivosti soudu, jehož je proměnná představa částí. To pak využívá k teorii závěru i k definici analytického soudu jako věty, jež je pravdivá pro jakoukoliv proměnnou představu, při níž má věta smysl. Jedním z nejčernějších Bolzanových výsledků je zavedení „vztahu odvoditelnosti“ (*Verhältnis der Ableitbarkeit*), což v moderní terminologii znamená implikaci v podobném smyslu, jak ji později zavedli Carnap [51] a Tarski. To umožňuje i formulaci logické ekvivalence a rozbor dalších možných vztahů mezi větami. (Srv. [76].)

Ve třetí části se Bolzano zabývá metodikou objevování pravdy, teorií otázky a teorií definice, kterážto partie se objevuje i v následující části díla. Tam si všímá i teorie důkazu.

Důvody, proč na toto dílo nebylo okamžitě navázáno, tkví bezesporu jak v značném rozsahu práce (2397 stran), nedostatečném jejím rozšíření, koneckonců i v Bolzanově izolaci a jiném filozofickém pozadí díla, ale též v logice vývoje této disciplíny, v níž Bolzanova koncepce historicky předchází dobu anglických logiků Boola [48, 49] a de Morgana [74] s jejich algebrou logiky, přičemž se rozvíjí spíše na jakési intuitivně sémantické úrovni, jež je vlastní až vývoji 30. let 20. století; v té době je také na Bolzana znovu upozorňováno [53].

Avšak tam, kde výklad ... má dosahovat nejvyššího stupně vědeckosti, tam pokládám za povinnost nic neodvozovat z prostého pohledu na obrazec, z takzvaného nazírání, ... a zkrátka postupovat stejným způsobem jako při dokazování ryze filozofických pravd. Okolnost, že se to často nedařilo, a že většině z těch, kdo chtěli dokázat matematické pravdy filozoficky, z toho vycházelo jen samé tlachání, nedokazuje, že to není možné.“

<sup>13)</sup> I v dopisu I. P. Romangovi 1. 5. 1847 říká: „Mám-li označit ..., čím se mé filozofické i teologické pojmy liší od [pojetí] jiných, pak bych chtěl říci, že je to okolnost, že jsem s větší pečlivostí, než se dosud obecně dělo, usiloval o to, abych si objasnil vše, o čem přemýšlím, s co možná největší jasností a zřetelností ... jen cestou přesných určení pojmů jsem dospěl ke všem těm osobitým naukám a názorům, s nimiž se setkáváte v mých spisech (i matematických). Chce-li mne však kdo pochopit a posoudit důvody, o něž se tato tak osobitá tvrzení opírají, pak nutně musí vyjít z Logiky [tj. *Wissenschaftslehre*].“ Srv. [46].

2. Die Gleichung  $x^2 - Ax + B = 0$  mit den

$x^2 - 2mnx - mn(m+n) = 0$ ,  
 wobei  $a = \sqrt{m^2} + \sqrt{n^2}$  vorausgesetzt, ist lösbar,  
 weil  $m$  in  $B$  und  $D$  enthalten, nämlich  
 $m = \frac{A}{5}$ ,  $m+n = \frac{B}{5A}$  ist.

Ist die Gleichung  $x^2 - Ax^2 - Bx - C = 0$  mit

(a)  $\dots x^4 - 4(mn+np+mp)x^2 - 4mpx - mnp(m+n+p) = 0$   
 lösbar, indem  $m+n+np+mp = \frac{A}{4}$ ,  $mnp = \frac{B}{4}$ ,  $mnp(m+n+p) = \frac{4C}{D}$   
 folgt, d. h.  $m, n, p$  sind die Wurzeln der Gleichung

$y^2 - \frac{4C}{D}y + \frac{A}{4}y - \frac{B}{4} = 0$   
 finden lässt, und mittels Wurzelsatz, Teil 3. ein Lösungsverfahren,  
 die Gleichung (a) auflösen, wobei man dann Gleichung (a)  
 in gegebenen Gleichung  $x^2$  aufteilt findet.

4. Eben so verfährt man mit der Gleichung Teil 3. 5. Grad

Ist  $x^5 - Ax^2 - Bx^2 - Cx - D = 0$ , so in Gleichung

(b)  $\dots x^5 - 5(mn+np+mq+pq+mp+mp)x^2 - 5(mnp+mpq+mpq+mpq)x^2 - 5mnpq = 0$ ,  
 $- 5mnpq = \frac{4C}{D}$

indem  $m+n+mp+mq+np+mp+pq = \frac{A}{5}$   
 $mnp+mpq+mpq+mpq = \frac{B}{5}$   
 $mnpq = \frac{4C}{5D}$   
 $mnp+pq = \frac{4C}{5D}$

folgt, wo dann  $m, n, p, q$  sind und die Gleichung Teil 4. 4. Grad

$y^2 - \frac{4C}{5D}y + \frac{A}{5}y - \frac{B}{5} = 0$

angeben: Denn oben  $m, n, p, q$  gefunden, so, nimmt man  
 die Gleichung (b), weil sie symmetrisch ist, einmal  
 teilt, und mit ihr die gegebenen Teil 5. Grad

Abteil, man erhält den gesuchten Wurzel aus der Gleichung  
ab. Die Wurzeln der Gleichung findet man mittels Teil 3.  
man erhält den gesuchten Wurzel aus der Gleichung  
ab. Die Wurzeln der Gleichung findet man mittels Teil 3.  
man erhält den gesuchten Wurzel aus der Gleichung  
ab. Die Wurzeln der Gleichung findet man mittels Teil 3.

$x = \frac{A}{5} + \sqrt{W_1} + \sqrt{W_2} + \sqrt{W_3} + \dots$

haben man erhält den gesuchten Wurzel aus der Gleichung  
ab. Die Wurzeln der Gleichung findet man mittels Teil 3.  
man erhält den gesuchten Wurzel aus der Gleichung  
ab. Die Wurzeln der Gleichung findet man mittels Teil 3.

*Matematická analýza*

V úvodu předchozího odstavce jsme si připomenuli důvody, proč Bolzano hlavní pozornost věnoval výstavbě logiky; současně je však v jeho argumentaci zřetelně vidět uvědomělý, nový metodický, aritmetický přístup k základům matematiky, přístup, který právě u něj a ve stejné době i u Cauchyho [52] dovolil překonat problémy, které stará eulerovská koncepce matematické analýzy nebyla schopna vyřešit.

To se objevuje již v raných matematických pracích z let 1816–1817. Zde se objevuje přesné vymezení limity, derivace, spojitosti funkce, intervalu a infima. Ale i Grössenlehre, která vznikala v letech 1833–1841, podstatným způsobem rozšiřuje tyto významné Bolzanovy výsledky z teorie funkcí. Je zde zpřesněna definice spojitosti, zaveden pojem spojitosti zprava i zleva, přesně postižen rozdíl mezi otevřeným a uzavřeným intervalem, zavádí se pojem derivace zprava a zleva s jeho důsledky a dochází se k větě, že funkce spojitá v uzavřeném intervalu je v něm i omezená. Je zde zároveň odvrženo eulerovské ztotožnění funkce s analytickým výrazem a zavádí se pojem funkce ve smyslu vzájemného přiřazení hodnot ze dvou souborů. To Bolzanovi umožňuje konstrukci „geometricky nenázorných“ funkcí s komplikovanými vlastnostmi. Z nich nejzajímavějším výsledkem je konstrukce funkce definované a spojitě v otevřeném intervalu, která není v žádné jeho části monotónní. Bolzano o ní dokazuje, že tato funkce přes svou spojitost „nemá derivaci pro tolik hodnot své proměnné, že mezi libovolnými dvěma z nich lze nalézt ještě třetí, pro níž rovněž nemá derivaci“ [20]. Již v Ryze analytickém důkazu (§ 6 a 7) vyslovuje Bolzano nutnou a postačující podmínku pro konvergenci posloupnosti (Bolzanova-Cauchyova podmínka konvergence), a protože se ještě nemůže opřít o teorii reálných čísel, nedaří se mu důkaz její postačitelnosti. Je možné, že právě tyto problémy vedou v letech 1830–35 Bolzana k napsání práce „Unendliche Zahlen—(Grössen)—begriffe (-ausdrücke)“ [15], v níž se snaží vytvořit aritmetickou teorii reálných čísel. Předjímá zde způsob Cantorových fundamentálních posloupností (1869). V dalším pak uvádí a dokazuje např. větu, že množina reálných čísel je všude hustá, znovu se vrací k nutné a postačující podmínce konvergence (§ 102). Už v Ryze analytickém důkazu vyslovuje (§ 13) větu o největší dolní závoře (infimu), zde se k ní vrací (§ 104) a explicitně formuluje větu o supremu a infimu. Tyto věty byly předpokladem pro vyslovení obecnějšího tvrzení obsaženého ve Functionenlehre (§ 19–23), že každá omezená nekonečná posloupnost má hromadný bod.

Již toto konstatování hlavních výsledků ukazuje, že Bolzanovo dílo mohlo tvořit jeden ze základních kamenů rozvoje moderní matematické analýzy. Je paradoxem společenského vývoje českých zemí, důsledkem Bolzanovy vědecké i lidské izolace, a nepochybně i celkové dynamiky rozvoje matematiky, že na tomto základním kameni nebylo dále budováno.

*Obecně geometrické úvahy*

Bolzanův přístup k matematickým problémům se vyznačoval schopností nalézt novou, netradiční metodiku, již se pokusil překonat problematiku vzdorující řešení dosavadními

prostředky. Tento přístup se objevuje i v geometrii. Jeho matematická prvotina *Betrachtungen* [1] je zaměřena k vyřešení tehdy populárního problému rovnoběžek. Podstatné zde není, že ho řeší pomocí široce pojatého pojmu podobnosti, ale spíše to, že Bolzano už v této práci podrobil kritice dosavadní (povětšinou tradičně eukleidovskou) výstavbu elementární geometrie. V 2. části svého výkladu se pokouší dospět k vymezení pojmu přímky a roviny, vychází z nejjednoduššího geometrického útvaru, dvojice bodů, a zkoumá jeho vlastnosti. Tak vymezuje pojem směru dvojice bodů, její vzdálenost, a buduje dále v podstatě geometricky vektorový prostor, pro který naznačuje i trojdimenzionální analogon [55]. Tedy dospívá v podstatě k obdobnému výsledku jako při geometrické interpretaci komplexních čísel v r. 1799 G. Wessel [88] nebo k jakému později (1844) v podstatně obecnější formě dospěl H. Grassmann ve své *Ausdehnungslehre* [59].

V ostatních geometrických pracích se Bolzano zaměřil k postizení geometrické podstaty geometrických pojmů a využitím metodiky vypracované vlastně při aritmetizaci analýzy dospěl téměř k topologickému chápání geometrických představ. Objevuje se to už v r. 1817 v práci *Die drey Probleme* [10] při vymezení pojmů čára, plocha a těleso, v mnohém připomínajícím Mengerovo vymezení regulární křivky jakožto kontinua [73]. Bolzano dokonce předjímá Jordanovu větu pro jednoduché uzavřené křivky; takovou křivku definuje pomocí dvou vlastností: a) každý bod křivky má pro dostatečně malé vzdálenosti právě dva sousední body (v Bolzanově terminologii „sousedním bodem“ je bod křivky v dané vzdálenosti); b) vzdálenost mezi dvěma body čáry nepřesáhne nikdy jisté maximum. Ve 30. letech v rukopise *Versuch einer Erklärung* [17], v o něco pozdějším rukopise *Anti-Euclid* [16] a později v letech 1843–4 v rukopisech *Über Haltung, Richtung, Krümmung und Schnörkelung bei Linien* [36] a *Geometrische Begriffe* [37] se tyto problémy objevují ve zpřesněné formě. V práci *Versuch einer Erklärung* [17] při zkoumání pojmu rozlehlost (*Ausdehnung*) využívá jím zavedeného pojmu kruhového okolí a „prostorovosti“, již rozumí hustě rozloženou bodovou varietu „jejíž každý bod je svázán (verbunden) s ostatními body, tzn., že má v této prostorovosti sousední body, jež jsou tak blízké jak je potřeba, nebo, že pro jakkoliv malou vzdálenost existují v prostorovosti body, jež mají od daného bodu tuto vzdálenost“. Současně tento pojem hustě rozložené variety doplňuje definicí izolovaného bodu. Výslovně tuto definici podává v práci *Über Haltung* ([36], str. 143) a v téže práci hned vzápětí (str. 144–5) vyslovuje ideu rozlehlosti (*Ausdehnung*) opírající se o pojem sférického okolí bodu: *Prostorovost (Ausgedehntes)*, jejíž každý bod pro každou libovolně malou vzdálenost má jen tolik sousedních bodů, že jejich souhrn pro každou z těchto vzdáleností pozorován sám o sobě nepředstavuje žádnou prostorovost, se nazývá „prostorovým předmětem jediné či jednoduché rozlehlosti (*Ausdehnung*) nebo také čarou“ [68]. Obdobně zavádí i pojmy dvojnásobné a trojnásobné rozlehlosti. Tímto způsobem dospívá velmi blízko k modernímu pojmu topologické dimenze.

I tyto pojmy, s nimiž matematikové začali pracovat až v 70. letech, ukazují neobyčejný rozsah Bolzanových nových metodických přístupů k předmětům matematického zkoumání; i když ne vždy ani jím samým dále využitých.

*Teorie množin*

Paradoxien des Unendlichen [38], práce, která byla z Bolzanovy pozůstalosti vydána Fr. Příhonským v r. 1851, je vlastně ojedinělým Bolzanovým výsledkem, na nějž bylo výslovně navázáno, jak to sám přiznává tvůrce teorie množin Georg Cantor, který se s Paradoxoy nekonečna seznámil ještě dříve než se začal zabývat teorií množin [50]. Bolzano v práci chce řešit obtíže vyplývající z nepřesně vymezeného, ale v matematice užívaného pojmu „nekonečno“. Diskutuje pojmy „potenciálního“ a „aktuálního“ nekonečna. Zavádí pojem množiny, jíž jedině může příslušet vlastnost konečnosti či nekonečnosti. Množina je nekonečná, jestliže „řada“ přirozených čísel, jež by měla vyčerpát všechny prvky množiny, nemá poslední člen. Tento princip přiřazování vlastně přibližuje zcela moderní vymezení ekvivalence množin, vztahu množiny a její pravé podmnožiny apod. Bolzano dochází k závěru, že z hlediska mnohosti svých prvků nejsou všechny nekonečné množiny ekvivalentní. Blíží se tak k pojmu kardinálního čísla a snaží se budovat „počítání s nekonečny“; předjímá pojem kontinua a jeho vlastností. I zde se objevuje pojem všude husté množiny, idea dimenze a pod.

Bernard Bolzano prožil celý svůj život v Čechách, považoval je za svou vlast, z jeho několika exhort je vidět, že rozpoznával sociální kořeny národnostního útlu českého národa a v rámci svých utopicko-humanistických koncepcí stranil utlačovanému, přičemž se snažil stejnými prostředky čelit rodícímu se buržoaznímu nacionalismu vyvolávajícímu nacionalistickou nenávisť. Bolzano nikdy ani na krátký čas Čechy neopustil. Valná část jeho vědecké pozůstalosti zůstala v Praze. Bylo jen zcela náhodné, že právě matematické rukopisy Bolzanovy jsou chovány mimo Čechy. Bolzano celý život doufal, že mezi svými žáky objeví i matematika, který by byl schopen dokončit jeho matematické záměry. Od svého návratu do Prahy (1841) vkládal naděje do talentu Roberta Zimmermanna (1824–1898), o němž se v korespondenci několikrát pochvalně zmiňuje. Proto odkázal svou matematickou pozůstalost právě jemu. Když se Zimmermann stal profesorem filozofie (1850) na vídeňské univerzitě, přešla i Bolzanova matematická pozůstalost s ním trvale do Vídně.

Je to poslední trpkost osudu Bolzanova díla, že Zimmermann pro zpracování Bolzanovy pozůstalosti nic neudělal. Přesto nový zájem o Bolzanovy matematické výsledky vyrostl ve 20. letech našeho století mezi Bolzanovými krajany – českými matematiky. Věřme, že dvousté výročí Bolzanova narození znovu připoutá pozornost k hodnocení dosud nezpracovaných stránek jeho matematické pozůstalosti.

JAROSLAV FOLTA



## 3. Z bolzanovské literatury

## A) Citované spisy B. Bolzana\*

- [1] 1804 — Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementar-Geometrie. Praha 1804.
- [2] 1810 — Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik. Erste Lieferung. Praha 1810.
- [3] po 1810 — Aetiologie, in: Bernard Bolzano — Gesamtausgabe, II.A.5.c. [J. Berg, ed.] Stuttgart — Bad Cannstatt 1977.
- [4] 1813 — Erbauungsreden für Akademiker. Praha 1813. (2. vyd. Sulzbach 1839).
- [5] 1814 — Logische Vorbegriffe, in: Bernard Bolzano — Gesamtausgabe, II.A.5.g. [J. Berg, ed.] Stuttgart—Bad Cannstatt 1977.
- [6] 1815 — Versuch einer objectiven Begründung der Lehre von den drei Dimensionen des Raumes. Praha 1843.
- [7] po 1815 — Etwas aus der Logik, in: Bernard Bolzano — Gesamtausgabe, II.A.5.i. [J. Berg, ed.] Stuttgart—Bad Cannstatt 1977.
- [8] 1816 — Der binomische Lehrsatz, und als Folgerung aus ihm der polynomische, und die Reihen, die zur Berechnung der Logarithmen und Exponentialgrössen dienen, genauer als bisher erwiesen. Praha 1816.
- [9] 1817 — Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens einer reelle Wurzel der Gleichung liege. Praha 1817.
- [10] — Die drey Probleme der Rectification, der Complonation und der Cubirung, ohne Betrachtung des unendlich Kleinen, ohne die Annahme des Archimedes, und ohne irgend eine nicht streng erweisliche Voraussetzung gelöst; zugleich als Probe einer gänzlichen Umgestaltung der Raumwissenschaft, allen Mathematikern zur Prüfung vorgelegt. Leipzig 1817.
- [11] 1827 — Athanasia oder Gründe für Unsterblichkeit der Seele. Sulzbach 1827. (2. vyd., Sulzbach 1838).
- [12] — Schreiben eines katholischen Geistlichen an den Verfasser des Buches: die Katholische Kirche Schlesiens. Sulzbach 1827.
- [13] 1829 — Wissenschaftslehre. Versuch einer ausführlichen und grösstentheils neuen Darstellung der Logik mit steter Rücksicht auf deren bisherige Bearbeiter. Sulzbach 1837.
- [14] — Bolzano's Wissenschaftslehre und Religionswissenschaft in einer beurtheilenden Uebersicht. Eine Schrift für Alle, die dessen wichtigste Ansichten kennen zu lernen wünschen. Sulzbach 1841.
- [15] 1830—35 — Unendliche Zahlen- (Grössen)-begriffe (-ausdrücke), in: Rychlík, K.: Theorie der reellen Zahlen im Bolzanos handschriftlichen Nachlasse. Praha 1962.
- [16] po 1830 — Anti-Euclid [K. Večerka ed.], in: Sborník pro dějiny přírodních věd a techniky 11 (1966), 203—216.
- [17] — Versuch einer Erklärung der Begriffe von Linie, Fläche und Körper, in: Bernard Bolzano — Gesamtausgabe, II.A.11.c. [J. Berg, E. Morscher, eds.] Stuttgart—Bad Cannstatt.
- [18] 1831—46 — Von dem besten Staate. [A. Kowalewski, ed.], in: Spisy B. Bolzana, sv. 3, Praha 1930.
- [19] 1831 — Ein Vorschlag zur Verbesserung einiger Armenanstalten. Gotha 1831.
- [20] 1833—41 — Functionenlehre. [K. Rychlík, ed.], in: Spisy B. Bolzana, sv. 1. Praha 1931.
- [21] 1833—41 — Zahlentheorie (Verhältniss der Theilbarkeit unter den Zahlen), [K. Rychlík ed.], in: Spisy B. Bolzana, sv. 2. Praha 1931.
- [22] 1834 — Lehrbuch der Religionswissenschaft, ein Abdruck der Vorlesungshefte eines ehemaligen

\* *Letopočty před bibliografickým údajem uvádějí přibližnou dobu vzniku práce.*

- Religionslehrers einer katholischen Universität, von einigen seiner Schüler gesammelt und herausgegeben. Sulzbach 1834.
- [23] — Ansichten eines freisinnigen katholischen Theologen über das Verhältnis zwischen Kirche und Staat; entwickelt in einer Kritik der Aphorismen des Herrn A. Gengler über denselben Gegenstand in dem dritten Hefte des Jahrganges 1832 der Tübinger Quartalschrift. Sulzbach 1834.
- [24] 1835 — Religionsbekenntnisse zweier Vernunftfreunde, nämlich eines protestantischen [J. F. Röhr] und eines katholischen Theologen [B. Bolzano]. Sulzbach 1835.
- [25] 1836 — Lebensbeschreibung des Dr. B. Bolzano mit einigen seiner ungedruckten Aufsätze und dem Bildnisse des Verfassers (Sulzbach 1836).
- [26] 1837 — Sendschreiben an Se. Hochwürden Herrn Dr. Joh. Friedr. Röhr, betreffend die aus seiner kritischen Prediger-Bibliothek hier abgedruckte Kritik des Buches: „Religionsbekenntnisse zweier Vernunftfreunde usw.“ Sulzbach 1837.
- [27] — Beleuchtung der in den Göttingischen gelehrten Anzeigen befindlichen Recension des Buches: Lehrbuch der Religionswissenschaft etc. Stuttgart 1837.
- [28] — Leben Franz Joseph Ritters von Gerstner. Praha 1837.
- [28a] 1838 — Ueber das Recht der Geistlichkeit, ihren Lebensunterhalt von Personen zu beziehen, welche nicht ihres Glaubens sind. Eine kirchenrechtliche Abhandlung nach B. Bolzano's Ansichten von einem seiner Schüler bearbeitet, Stuttgart 1838.
- [29] 1839 — Dr. Bolzano und seine Gegner. Ein Beitrag zur neuesten Literaturgeschichte. Sulzbach 1839.
- [30] 1840 — Prüfung der Philosophie des seligen Georg Hermes von einem Freunde der Ansichten Bolzano's. Sulzbach 1840.
- [31] — Versuche einer objectiven Begründung der Lehre von der Zusammensetzung der Kräfte. Praha 1842.
- [32] 1843 — Versuch einer objectiven Begründung der Lehre von den drei Dimensionen des Raumes. Praha 1843.
- [33] — Über den Begriff des Schönen. Eine philosophische Abhandlung. Praha 1843.
- [34] — Aufsatz, worin eine von Hrn. Exner in seiner Abhandlung: „Über den Nominalismus und Realismus“ angeregte logische Frage beantwortet wird. Praha 1843.
- [35] — Ein Paar Bemerkungen über die neue Theorie in Herrn Professor Ch. Doppler's Schrift: „Ueber das farbige Licht der Doppelsterne und einiger anderer Gestirne des Himmels“. Leipzig 1843.
- [36] 1843—44 — Über Haltung, Richtung, Krümmung und Schnörkelung bei Linien sowohl als Flächen samt einigen verwandten Begriffen, in: Spisy B. Bolzana, sv. V., [J. Vojtěch, ed.]. Praha 1948, str. 139—183.
- [37] — Geometrische Begriffe, die Jeder kennt und nicht kennt, in: Bernard Bolzano — Gesamtausgabe, II.A.11.d. [J. Berg, E. Morscher, eds.], Stuttgart—Bad Cannstatt.
- [38] 1844—48 — Paradoxien des Unendlichen. [J. Přihonský, ed.] Leipzig 1851.
- [39] 1845 — Ueber die Perfectibilität des Katholicismus. Streitschriften zweier katholischer Theologen; zugleich ein Beitrag zur Aufhellung einiger wichtiger Begriffe aus Bolzano's Religionswissenschaft. Leipzig 1845.
- [40] — Dr. Vincenz Julius Edler v. Krombholz nach seinem Leben und Wirken. Praha 1845.
- [41] 1847 — Christ. Doppler's neueste Leistungen auf dem Gebiete der physikalischen Apparatenlehre, Akustik, Optik und optischen Astronomie. Leipzig 1847.
- [42] — Untersuchungen auf dem Gebiete der allgemeinen Sprachlehre. Praha 1847.
- [43] — Vorschläge zur Behebung des unter einem beträchtlichen Theile der Bewohner Prags dermal um sich greifenden Nothstandes. Praha 1847.
- [44] — Über die Wohlthätigkeit. Dem Wohle der leidenden Menschheit gewidmet von einem Menschenfreunde. Praha 1847.

B) *Další literatura*

- [45] Berg, J.: *Bolzano's Logic*. Stockholm 1962.
- [46] Berka, K. - Prokešová, B.: Bolzanovy boje o vydání a uznání Vědosloví, in: *Filozofický časopis XXVII* (1979), 697—725.
- [47] Beth, E. W.: *The philosophy of Mathematics from Parmenides to Bolzano*. Antwerp 1944.
- [48] Boole, G.: *An investigation of the laws of thought on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities*. London 1854.
- [49] Boole G.: *The mathematical analysis of logic*. Cambridge 1847.
- [50] Cantor, G.: Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeit, in: *Math. Annalen* 21 (1883): 51—58, 545—591.
- [51] Carnap, R.: *Abriss der Logistik*. 1929.
- [52] Cauchy, A. L.: *Cours d'analyse de l'Ecole Royale Polytechnique*. I<sup>er</sup> partie: *Analyse algébrique*. Paris 1821.
- [53] Dubislav, W.: Bolzano als Vorläufer mathematischer Logik, in: *Philosophisches Jahrbuch* 44, Fulda 1931: 448—456.
- [54] Fels, H.: *Bernard Bolzano*. Leipzig 1929.
- [55] Folta, J.: Bernard Bolzano and the Foundation of Geometry, in: *Acta historiae rerum naturalium necnon technicarum, Spec. Issue 2*, Prague 1966, 75—104.
- [56] Frint, J.: *Handbuch der Religionswissenschaft für die Candidaten der Philosophie I—III*. Wien—Triest 1806—1813.
- [57] Grattan-Guinness, I.: Četl Cauchy Bolzana před napsáním *Cours d'analyse*? *Pokroky MFA XV* (1970), 133—137.
- [58] Grattan-Guinness, I.: *The development of the foundations of mathematical analysis from Euler to Riemann*. MIT Press, Cambridge—London 1970.
- [59] Grassmann, H.: *Die Ausdehnungslehre aus 1844 oder Die lineale Ausdehnungslehre*. Leipzig 1878.
- [60] Hankel, H.: „Grenze“, in: *Allgemeiner Enzyklopädie [Ersch, Gruber], 1. Sekt. Bd. XC*, Leipzig 1871.
- [61] Jarník, V.: O funkci Bolzanově, in: *Časopis pro pěstování matematiky a fyziky* 51 (1922), 248—264, v této publikaci, 60—73.
- [62] Jarník V.: Bolzanova Functionenlehre, in: *Časopis pro pěstování matematiky a fyziky* 60 (1931) 240—265, v této publikaci, 39—59.
- [63] Jarník, V.: Bernard Bolzano a základy matematické analýsy, in: *Zdeňku Nejedlému Československá akademie věd*. Praha 1953, 450—458, v této publikaci, 31—38.
- [64] Jarník, V.: Bernard Bolzano (October 5, 1781—December 18, 1848), in: *Czechoslovak Mathematical Journal* 11 (1961), 485—489, v této publikaci, 74—78.
- [65] Jašek, M.: Aus dem handschriftlichen Nachlass Bernard Bolzanos. Das erste historisch nachweisbare Beispiel einer stetigen nirgends differenzierbaren Funktion. Enthalten in dem Manuskripte Bolzano's „Functionenlehre“. — Nationalbibliothek in Wien; in: *Věstník Královské české společnosti nauk*. Tř. mat. př. 1 (1921) 1—32.
- [66] Jašek, M.: Funkce Bolzanova. Z neznámých jeho rukopisů v bývalé dvorní knihovně vídeňské. In: *Časopis pro pěstování matematiky a fyziky* 51 (1922), 69—76.
- [67] Jašek, M.: O funkcích s nekonečným počtem oscilací v rukopisech Bernarda Bolzana. Dodatkem ke zprávě o funkci Bolzanově. In: *Časopis pro pěstování matematiky a fyziky* 53 (1924) 102—110.
- [68] Johnson, D.: *Prelude to Dimension Theory: The Geometrical Investigations of Bernard Bolzano*, in: *Archive for History of Exact Sciences*, Vol. 17, Nr 3, (1977), 261—295.
- [69] Kästner, A. G.: *Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie und Perspective*, I. Th., I Abtl. 5. Aufl. Göttingen 1792.

- [70] Křivský, P.: Jan Křtitel Bolzano. Literární pozůstalost. Památník národního písemnictví. Praha 1972.
- [71] Laugwitz, D.: Bemerkungen zu Bolzano's Grössenlehre, in: *Archive for History of Exact Sciences* 2 (1965), 398—409.
- [72] Loužil, J.: Bernard Bolzano, Praha 1978.
- [73] Menger, K.: Grundzüge einer Theorie der Kurven, in: *Mathematische Annalen* 95 (1925), 277—306.
- [74] Morgan, A. de: *Formal logic, or the calculus of inference necessary and probable*. London 1847.
- [75] Nový, L.: Bernard Bolzano (1781—1848), in: [Wussing, Arnold, eds.] *Biographien bedeutender Mathematiker*. Berlin 1975.
- [76] Nový, L. a kol.: *Dějiny exaktních věd v českých zemích do konce 17. století*. Praha 1961.
- [77] Petr, K.: *Bernard Bolzano a jeho význam v mathematice*. Praha 1926.
- [78] Rootselaar, B. van: Bernard Bolzano, in: *Dictionary of Scientific Biography*, Vol. II, New York 1967, 273—279.
- [79] Rootselaar, B. van: Bolzano's Corrections to his Functionenlehre, in: *Janus* 50 (1969), 1—21.
- [80] Rootselaar, B. van: Bolzano's theory of real number, in: *Archive for History of Exact Sciences* 2 (1962—66), 168—180.
- [81] Rychlík, K.: La theorie de fonctions de Bolzano. In: 6. Congresso internazionale dei matematici. Bologna, 3.—10. settembre 1928. *Argumenti delle comunicazioni*, p. 105.
- [82] Rychlík, K.: Teorie reálných čísel v rukopisné pozůstalosti Bernarda Bolzana, in: *Časopis pro pěstování matematiky* 81 (1956), 391—395. (Totéž, viz: *Istoriko-matěmaticeskije issledovanija* 11 (1958), 515—532, a také: *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, 14 (1961), 313—327.
- [83] Rychlík, K.: Úvahy z logiky v Bolzanově rukopisné pozůstalosti, in: *Časopis pro pěstování matematiky* 83 (1958), 230—235. (Viz též: *Czechoslovak Mathematical Journal* 8 (1958), 197—202.
- [84] Slavík, B.: *Od Dobnera k Dobrovskému*. Praha 1975.
- [85] Schwarz, H. A.: Zur Integration der partiellen Differentialgleichung..., in: *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 74 (1872), 218—253, zejména str. 221.
- [86] Stolz, O.: Bolzano's Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung, in: *Mathematische Annalen*, XVIII (1881) 255—279.
- [87] Veselý, F.: Život Bernarda Bolzana a jeho matematicko-přírodovědecké práce, in: *Pokroky MFA II* (1957): 119—127, 234—243.
- [88] Wessel, C.: Om Directionens analytiske Betegning, in: *Nye Samling af det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter*, V (1799).
- [89] Winter, E.: Bernard Bolzano. Ein Lebensbild, in: *Bernard Bolzano — Gesamtausgabe*. Einleitungsband, I. T. Biographie. Stuttgart—Bad Cannstatt 1969.
- [90] Wussing, H.: Bernard Bolzano und die Grundlegung der Infinitesimalrechnung, in: *Zeitschrift für Geschichte der Naturwissenschaft und Medizin* 1 (1964) 57—73.

