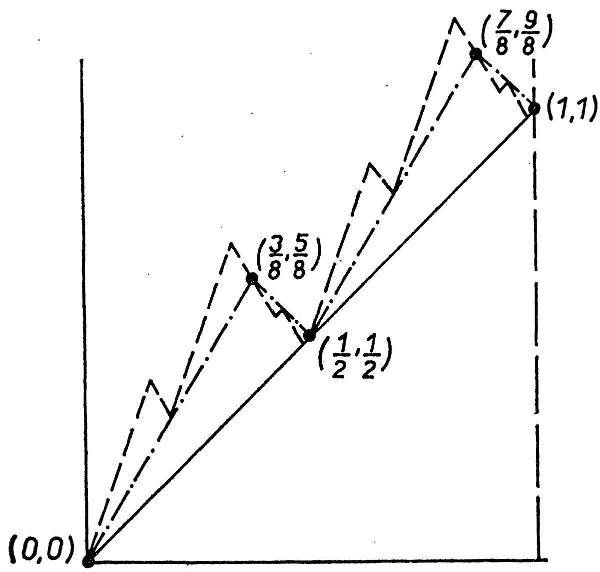
O FUNKCI BOLZANOVĚ

Účelem tohoto článku je dokázat, že funkce Bolzanova[1]) nemá pro žádnou hodnotu proměnné derivaci, a pojednat o jejích derivovaných číslech.

Funkci Bolzanovu definujeme takto: budiž dána úsečka $y = x$ v intervalu $[0, 1]$; rozdělme interval $[0, 1]$ na čtyři intervaly $[0, 3/8]$, $[3/8, 1/2]$, $[1/2, 7/8]$, $[7/8, 1]$ a sestrojme body o souřadnicích $(0, 0)$, $(3/8, 5/8)$, $(1/2, 1/2)$, $(7/8, 9/8)$, $(1, 1)$. Spojme pak vždy dva po sobě následující z těchto bodů úsečkou. Tak dostáváme čtyři intervaly, jež nazvu „prvními dělicími intervaly“; uvedených pět bodů nazvu „prvními dělicími body“ (pokud není třeba obávat se nedorozumění, budu tak nazývat i jejich průměty na osu x); lomenou čáru, spojující dělicí body a složenou ze čtyř úseček, nazvu „první lomenou čarou“ (na obr. 1 čerchovaně vytaže-



Obr. 1

[1]) Viz M. Jašek, Funkce Bolzanova, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 51 (1922), str. 69–76.

na). Nyní nad každou z těchto čtyř úseček sestrojím lomenou čáru podle téhož předpisu: tj. jsou-li (a, A), (b, B) koncové body některé z těch úseček, sestrojím body

$$(a, A), \quad (a + \tfrac{3}{8}(b - a), \quad A + \tfrac{5}{8}(B - A)), \quad (\tfrac{1}{2}(a + b), \quad \tfrac{1}{2}(A + B)),$$
$$(a + \tfrac{7}{8}(b - a), \quad A + \tfrac{9}{8}(B - A)), \quad (b, B)$$

a spojím vždy dva po sobě následující úsečkou; tak dostávám „druhou lomenou čáru", složenou ze 16 úseček (na obr. 1 čárkována), 17 „druhých dělicích bodů" (ovšem každý první dělicí bod je též druhým dělicím bodem) a 16 „druhých dělicích intervalů". Tak postupuji dále; obecně „n-tá lomená čára" se skládá ze 4^n úseček, z nichž každá leží v jednom ze 4^n „n-tých dělicích intervalů"; koncové body těchto úseček tvoří $4^n + 1$ „n-tých dělicích bodů". Má-li některý dělicí bod souřadnice x, y, je hodnota Bolzanovy funkce pro hodnotu proměnné x rovna y. Tím je funkce Bolzanova definována v množině dělicích bodů všude husté v intervalu $[0, 1]$. Je-li tedy vůbec možno doplnit její definici v intervalu $[0, 1]$ tak, aby v tomto uzavřeném intervalu byla spojitá, je to možno jen jediným způsobem.[2])

Tyto poznámky, vědomě neúplné, uvádím jen proto, abych objasnil význam názvů, jichž v dalším užívám.

Funkci Bolzanovu značím v dalším symbolem f, symbolem $\langle x \rangle$ značím bod Bolzanovy čáry (tj. čáry o rovnici $y = f(x)$) o souřadnicích $x, f(x)$.

Předešlu ještě dvě poznámky, jichž v následujícím budu stále užívat.[3])

(A) *V libovolném dělicím intervalu* $[a, b]$ *konstruuje se čára Bolzanova z úsečky* $\overline{\langle a \rangle \langle b \rangle}$ *týmž způsobem, jako v intervalu* $[0, 1]$ *z úsečky* $\overline{\langle 0 \rangle \langle 1 \rangle}$.

Bolzanova čára se skládá v intervalu $[0, 1]$ ze dvou shodných částí, jež jsou k sobě v následujícím vztahu: jsou-li x, x' dvě hodnoty intervalu $[0, 1]$ takové, že $x' - x = 1/2$, je i $f(x') - f(x) = 1/2$, tj. spojnice $\overline{\langle x \rangle \langle x' \rangle}$ má směrnici 1.

(B) Obdobně: *Je-li* $[a, b]$ *libovolný n-tý dělicí interval a k směrnice n-té lomené čáry v tom intervalu, potom ku každé hodnotě x v* $[a, b]$ *existuje hodnota x' rovněž v* $[a, b]$ *taková, že* $|x' - x| = (b - a)/2$ *a že spojnice* $\overline{\langle x \rangle \langle x' \rangle}$ *má směrnici k.* Tyto dva body $\langle x \rangle$, $\langle x' \rangle$ nazvu „body sdruženými vzhledem k intervalu $[a, b]$".

---

[2]) Důkaz, že funkci takto definovanou lze vskutku tak doplnit, podal K. Rychlík v pojednání Über die Funktion von Bolzano (viz Věstník Král. české spol. nauk 1921—22), kde je též jiným způsobem dokázáno, že funkce Bolzanova nemá derivace. V následujícím budu pod „funkcí Bolzanovou" rozumět funkci spojitou, definovanou tímto způsobem v celém uzavřeném intervalu $[0, 1]$.

[3]) Správnost těchto poznámek a jejich smysl je čtenáři bezprostředně patrný pro dělicí body, jež dostáváme konečným počtem elementárních geometrických konstrukcí (resp. početních operací). Pro ostatní body vyplývá snadným limitním přechodem. Prosím čtenáře, aby si v dalším ke každému případu nakreslil vždy příslušný schematický obrázek.

I

Přistupme nyní k důkazu, že *Bolzanova funkce nemá v žádném bodě uvnitř intervalu* $[0, 1]$ *konečnou derivaci, ani v bodě* $x = 0$ *konečnou derivaci zprava, ani v bodě* $x = 1$ *zleva.*

K tomu cíli provedu následující úvahu: Uvažujme hodnotu x, jež není dělicím bodem. Potom bod x leží uvnitř jednoho z prvních dělicích intervalů; tento interval označím J_1, a podrobněji J_1^{I} nebo J_1^{II} nebo J_1^{III} nebo J_1^{IV} podle toho, je-li J_1 interval $[0, 3/8]$ nebo $[3/8, 1/2]$ nebo $[1/2, 7/8]$ nebo $[7/8, 1]$. Rozdělme interval J_1 opět na druhé dělicí intervaly; bod x leží uvnitř jednoho a jen jednoho z nich, jejž označím J_2; budiž interval $J_1 = [x_1^l, x_1^p]$; potom interval J_2 označím J_2^{I}, J_2^{II}, J_2^{III}, J_2^{IV} podle toho, je-li J_2 intervalem

$$[x_1^l, x_1^l + \tfrac{3}{8}(x_1^p - x_1^l)]\,, \quad [x_1^l + \tfrac{3}{8}(x_1^p - x_1^l), x_1^l + \tfrac{1}{2}(x_1^p - x_1^l)]\,,$$
$$[x_1^l + \tfrac{1}{2}(x_1^p - x_1^l), x_1^l + \tfrac{7}{8}(x_1^p - x_1^l)]\,, \quad [x_1^l + \tfrac{7}{8}(x_1^p - x_1^l), x_1^p]\,.$$

Tak postupuji dále a dostávám nekonečnou posloupnost intervalů

$$(J) \quad J_1, J_2, J_3, \ldots, J_n, \ldots ;$$

každý následující z nich je obsažen v každém předcházejícím, jejich délky konvergují s rostoucím n k nule, a bod x leží uvnitř všech těchto intervalů.

Posloupnost (J) je úplně stanovena, je-li dáno pořadí, v jakém po sobě následují intervaly J^{I}, J^{II}, J^{III}, J^{IV}. Zároveň je zřejmé, že posloupnost (J) stanoví jednoznačně bod x, a naopak, není-li x bodem dělicím, stanoví bod x jednoznačně příslušnou posloupnost (J).[4])

Označím pro další úvahy k_n směrnici n-té lomené čáry v intervalu J_n[5]); x_n^l, x_n^p levý resp. pravý krajní bod intervalu J_n; konečně symbolem J_n značím též délku intervalu J_n.

Uvažujme nyní libovolný bod $\langle x \rangle$ Bolzanovy čáry; ten je jednoznačně stanoven příslušnou posloupností (J) (to platí i pro body dělicí). Mohou pak nastat tyto případy:

1. Buď tato posloupnost obsahuje jen *konečný počet* J^{II} a J^{IV}, tedy nekonečně mnoho J^{I} nebo J^{III} (nebo obojích); k bodu $\langle x \rangle$ existuje bod sdružený $\langle x_n' \rangle$ vzhledem k J_n takový, že spojnice $\overline{\langle x \rangle \langle x_n' \rangle}$ má směrnici k_n[6]); roste-li n do nekonečna, konvergují J_n a tedy

---

4) Tato úvaha platí i pro body dělicí s následujícími změnami: a) od jistého n počínaje leží x na hranici všech J_n; b) bodu x jsou zde přiřazeny dvě posloupnosti (J), jedna, v níž od jistého n jsou samá J^{I}, druhá, v níž od jistého n jsou samá J^{IV}; pouze bodu $x = 0$ přísluší jediná posloupnost $J_1^{\mathrm{I}}, J_2^{\mathrm{I}}, J_3^{\mathrm{I}}, \ldots, J_n^{\mathrm{I}}, \ldots$ a bodu $x = 1$ jediná posloupnost $J_1^{\mathrm{IV}}, J_2^{\mathrm{IV}}, J_3^{\mathrm{IV}}, \ldots, J_n^{\mathrm{IV}}, \ldots$

5) Poznamenávám jednou provždy: je-li J_{n+1} buď J_{n+1}^{I} nebo J_{n+1}^{III}, je $k_{n+1} = \frac{5}{3}k_n$; je-li J_{n+1}^{II} nebo J_{n+1}^{IV}, je $k_{n+1} = -k_n$; protože $k_0 = 1$, je $|k_n| \geqq 1$ pro libovolné n.

6) V dalším směrnici spojnice bodů $\langle x \rangle$, $\langle x' \rangle$ označuji krátce $\lambda(x, x')$.

i $|x - x_n'| = J_n/2$ k nule, $|k_n|$ roste do nekonečna (viz pozn. 5 pod čarou); *nemůže tedy v bodě x existovat konečná derivace.*

2. Nebo tato posloupnost obsahuje *nekonečně mnoho* J^{II} nebo J^{IV} (nebo obojích); potom ke každému N lze nalézt $n > N$ takové, že J_{n+1} je J_{n+1}^{II} nebo J_{n+1}^{IV}. Existují opět body sdružené k $\langle x \rangle$, a to $\langle x_n' \rangle$ vzhledem k J_n, $\langle x_n'' \rangle$ vzhledem k J_{n+1} takové, že

$$\lambda(x, x_n') = k_n\,, \quad \lambda(x, x_n'') = k_{n+1}\,.$$

Ale s rostoucím N roste i n do nekonečna, x_n', x_n'' konvergují k x, $k_{n+1} = -k_n$ (viz pozn. 5 pod čarou). V tomto případě *neexistuje tedy v bodě x derivace konečná ani nekonečná.*

Body dělicí (až na bod $x = 1$) můžeme zahrnout pod případ 1. (viz pozn. 4 pod čarou); body sdružené $\langle x_n' \rangle$ leží potom od jistého n všechny vpravo od $\langle x \rangle$, takže *v bodech dělicích neexistuje konečná derivace zprava.* Ale dělicí body (až na bod $x = 0$) lze zahrnout též pod případ 2.; potom x_n', x_n'' leží od jistého n všechny vlevo od x, takže *v dělicích bodech neexistuje derivace zleva, ani nekonečná.*

Konečně poznamenávám: je-li v posloupnosti (J) nekonečně mnoho J_n^{I} nebo J_n^{III} i nekonečně mnoho J_n^{II} nebo J_n^{IV}, je

$$\limsup_{x' \to x} \lambda(x, x') = +\infty\,, \quad \liminf_{x' \to x} \lambda(x, x') = -\infty\,.$$

Tím je naše věta úplně dokázána.

II

Dokáži nyní: *v žádném vnitřním bodě intervalu $[0, 1]$ neexistuje ani nekonečná derivace.* K tomu cíli stanovím nejprve dolní a horní hranici Bolzanovy funkce v intervalu $[0, 1]$.

Bolzanova funkce nemůže nabývat své dolní hranice v intervalu $[1/2, 1]$, neboť $f(x + 1/2) = f(x) + 1/2$ pro $x \leqq 1/2$. Tato dolní hranice musí být dále nekladná. Předpokládejme, že by nastávala pro x z intervalu $[3/8, 1/2]$. Definuji-li bod x příslušnou posloupností (J), bude

$$J_1 = \tfrac{1}{8}\,, \quad x_1^l = \tfrac{3}{8}\,, \quad f(x_1^l) = \tfrac{5}{8}\,, \quad k_1 = -1\,;$$

ale

$$|k_n| \leqq \tfrac{5}{3}|k_{n-1}|\,, \quad J_n \leqq \tfrac{3}{8}J_{n-1}\,;$$

tedy

$$|k_n| \leqq (\tfrac{5}{3})^{n-1}\,, \quad J_n \leqq \tfrac{1}{8}(\tfrac{3}{8})^{n-1}\,.$$

Ale

$$|f(x_{n+1}^l) - f(x_n^l)| \leqq \tfrac{9}{8}|k_n|\,J_n\,,$$

takže

$$f(x_{n+1}) \geqq f(x_1) - \tfrac{9}{8}\cdot\tfrac{1}{8} - \tfrac{9}{8}\cdot\tfrac{1}{8}\cdot\tfrac{5}{8} - \ldots - \tfrac{9}{8}\cdot\tfrac{1}{8}(\tfrac{5}{8})^{n-1}\,,$$

a tedy tím spíše

$$f(x_{n+1}^l) \geqq \tfrac{5}{8} - \tfrac{9}{64}(1 - \tfrac{5}{8})^{-1} = \tfrac{1}{4}$$

pro libovolné n, a tedy i

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f(x_{n+1}^l) \geqq \tfrac{1}{4}$$

což odporuje předpokladu $f(x) \leqq 0$. Musí tedy funkce Bolzanova nabývat své dolní hranice v intervalu $[0, 3/8]$; ale na tento interval mohu použít téhož postupu (viz (A)) atd.; takže dostávám: Bolzanova funkce nabývá své dolní hranice pro $x \leqq (3/8)^n$, kde n je libovolné, tj. *funkce Bolzanova má v intervalu* $[0, 1]$ *dolní hranici* 0, *které nabývá pouze pro* $x = 0$.

Použijeme-li poznámky (A), můžeme ihned obecněji říci: v libovolném n-tém dělicím intervalu nabývá Bolzanova funkce své dolní nebo horní hranice na levém kraji toho intervalu, a to podle toho, má-li n-tá lomená čára v tomto intervalu směrnici kladnou či zápornou. Např. v intervalu $[7/8, 1]$ je horní hranice Bolzanovy funkce $9/8$, které nabývá pro $x = 7/8$.

Nyní snadno vyšetřím, v kterém bodě nabývá funkce Bolzanova své horní hranice. Musí to být především v intervalu $[1/2, 1]$ (viz poznámka (B)); nemůže to však být v intervalu $[7/8, 1]$, neboť v něm je horní hranice $9/8$, kdežto v intervalu $[1/2, 7/8]$ nabývá funkce hodnot větších. Je tedy

$$x_1^l = \tfrac{1}{2}, \quad x_1^p = \tfrac{7}{8} = 1 - \tfrac{1}{8}.$$

Obdobně uvažuji v tomto intervalu $[x_1^l, x_1^p]$ atd. a dostávám obecně

$$x_n^l = \tfrac{1}{2}[1 + \tfrac{3}{8} + (\tfrac{3}{8})^2 + \ldots + (\tfrac{3}{8})^{n-1}],$$
$$x_n^p = 1 - \tfrac{1}{8}[1 + \tfrac{3}{8} + \ldots + (\tfrac{3}{8})^{n-1}].$$

Společná limita těchto dvou posloupností je $x = 4/5$, příslušná hodnota $f(x)$ je

$$f(x) = \tfrac{1}{2}[1 + \tfrac{5}{8} + (\tfrac{5}{8})^2 + \ldots] = \tfrac{4}{3}.$$

Přihlížejíce k (A), můžeme říci:

Funkce Bolzanova má v intervalu $[0, 1]$ *absolutní minimum* 0 *pro* $x = 0$, *absolutní maximum* $4/3$ *pro* $x = 4/5$; *lokální extrémy jsou definovány takto*: *je-li* $[a, b]$ *libovolný* n*-tý dělicí interval a* k *směrnice* n*-té lomené čáry v něm, sestrojme bod o souřadnicích*

$$(M)\; x = a + \tfrac{4}{5}(b - a),$$
$$y = f(a) + \tfrac{4}{3}[f(b) - f(a)] = f(a) + \tfrac{4}{3}k(b - a);$$

tento bod dává lokální extrém Bolzanovy funkce, a to maximum nebo minimum podle toho, je-li k *kladné či záporné.* Jiných extrémů není; můžeme především vyloučit body dělicí (neboť v těch funkce zleva osciluje, viz odst. I). Kdyby bod x_0 byl nějaký lokální extrém Bolzanovy funkce, byl by *absolutním* extrémem v jistém intervalu $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$. Protože pak intervaly J_n příslušné posloupnosti (J) jsou od jistého n obsaženy uvnitř intervalu

$[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$, má funkce Bolzanova v intervalu J_n absolutní extrém v bodě x_0, jenž leží *uvnitř* intervalu J_n; je tedy $x_0 = x_n^l + \frac{4}{5}(x_n^p - x_n^l)$, tj. bod x_0 je jedním z bodů množiny M.

Tedy body, v nichž nastávají lokální extrémy Bolzanovy funkce, tvoří množinu spočetnou, všude hustou v intervalu $[0, 1]$ a nám úplně známou.

Tyto výsledky postačí k důkazu, že Bolzanova funkce nemá ani nekonečnou derivaci v žádném vnitřním bodě intervalu $[0, 1]$.

Jak z odst. I víme, stačí uvažovat body x, jejichž posloupnost (J) obsahuje pouze intervaly J^{I}, J^{III} od jistého n počínaje; prvních několik intervalů, v nichž to splněno není, mohu vynechat (viz (A)). Mimoto můžeme vyloučit případ, že (J) obsahuje (od jistého indexu) samá J^{I}, neboť potom by x byl bod dělicí, v němž derivace neexistuje (odst. I).

Dokáži především, že posloupnost (J) nesmí obsahovat nekonečně mnoho dvojic J_n^{III}, J_{n+1}^{III}. Neboť potom by bylo možno ke každému N nalézt $n > N$ takové, že po sobě následují intervaly J_n, J_{n+1}^{III}, J_{n+2}^{III}.

Existuje především k bodu $\langle x \rangle$ bod sdružený $\langle x_n' \rangle$ vzhledem k J_n takový, že $\lambda(x, x_n') = k_n$. Dále je

$$f(x) > f(x_n^l) + \tfrac{1}{2}k_nJ_n + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{5}{3}k_n \cdot \tfrac{3}{8}J_n\,,$$
$$f(x) > f(x_n^l) + \tfrac{13}{16}k_nJ_n\ (k_n = (\tfrac{5}{3})^n)\,.$$

K intervalu J_n přiléhá zprava n-tý dělicí interval J^* délky $\frac{1}{3}J_n$, směrnice n-té lomené čáry je v něm $k^* = -\frac{3}{5}k_n$ (neboť J_n je buď J_n^{I} nebo J_n^{III}). Tedy minimum v intervalu J^* nastává pro hodnotu

$$a_n = x_n^p + \tfrac{4}{5}J^* = x_n^l + J_n + \tfrac{4}{5} \cdot \tfrac{1}{3}J_n\,,$$

tedy $0 < a_n - x < \frac{19}{15}J_n$ a platí

$$f(a_n) = f(x_n^p) + \tfrac{4}{3}k^*J^* = f(x_n^l) + k_nJ_n - \tfrac{4}{3} \cdot \tfrac{1}{3}J_n \cdot \tfrac{3}{5}k_n = f(x_n^l) + \tfrac{11}{15}k_nJ_n\,.$$

Tedy

$$\lambda(x, a_n) = \frac{f(x) - f(a_n)}{x - a_n} < -(\tfrac{13}{16} - \tfrac{11}{15}) \cdot \tfrac{15}{19}k_n = -bk_n\,,$$

kde číslo $b > 0$ nezávisí na n.

Roste-li nyní N do nekonečna, roste i n i k_n do nekonečna, x_n' i a_n konvergují k x a platí $\lambda(x, x_n') = k_n$, $\lambda(x, a_n) < -bk_n$. Je tedy zřejmé, že v tomto případě neexistuje v bodě x derivace ani nekonečná, a nadto je

$$(1)\quad \limsup_{x' \to x} \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} = +\infty\,, \quad \liminf_{x' \to x} \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} = -\infty\,.$$

Obdobný výsledek dostaneme, předpokládáme-li, že posloupnost (J) obsahuje nekonečně mnoho dvojic J_n^{I}, J_{n+1}^{I} (a ovšem též nekonečně mnoho J^{III}).[7]

---

[7]) Stačí uvažovat trojici intervalů J_n^{III}, J_{n+1}^{I}, J_{n+2}^{I}.

Zbývá tedy jedině vyšetřovat posloupnosti (J), v nichž se od jistého indexu střídají intervaly J^{I}, J^{III}. Vynecháme-li konečný počet intervalů na počátku, zbývá vyšetřit bod, definovaný posloupností

$$J_1^{\mathrm{I}}, J_2^{\mathrm{III}}, J_3^{\mathrm{I}}, \ldots, J_{2n+1}^{\mathrm{I}}, J_{2n+2}^{\mathrm{III}}, \ldots$$

(který je ovšem reprezentantem celé spočetné bodové množiny, jako všude v těchto úvahách).

Platí (označíme-li $[0, 1] = J_0$)

$$x_0^l = 0\,, \quad x_1^l = 0, \quad x_{2n+1}^l = x_{2n}^l\,, \quad x_{2n+2}^l = x_{2n+1}^l + \tfrac{1}{2}J_{2n+1}\,;$$
$$k_0 = 1, \quad k_n = (\tfrac{5}{3})^n\,, \quad J_0 = 1, \quad J_n = (\tfrac{3}{8})^n\,;$$

tedy

$$x_{2n+2}^l = x_{2n}^l + \tfrac{1}{2}(\tfrac{3}{8})^{2n+1} = \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{3}{8} + (\tfrac{3}{8})^3 + (\tfrac{3}{8})^5 + \ldots + (\tfrac{3}{8})^{2n+1}\right],$$
$$f(x_{2n+2}^l) = f(x_{2n}^l) + \tfrac{1}{2}k_{2n+1}J_{2n+1} = \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{5}{8} + (\tfrac{5}{8})^3 + (\tfrac{5}{8})^5 + \ldots + (\tfrac{5}{8})^{2n+1}\right]$$

čili v limitě $x = 12/55, f(x) = 20/39$.

Obdobně je ovšem (podle (A))

$$x = x_{2n}^l + \tfrac{12}{55}J_{2n}\,, \quad f(x) = f(x_{2n}^l) + \tfrac{20}{39}k_{2n}J_{2n}\,.$$

Existuje nyní především bod $\langle x'_{2n}\rangle$ sdružený s $\langle x\rangle$ vzhledem k J_{2n}, takže je $\lambda(x, x'_{2n}) = k_{2n}$; označme si dále x''_{2n} bod $x_{2n}^l + \frac{1}{2}J_{2n}$; platí $f(x''_{2n}) = f(x_{2n}^l) + \frac{1}{2}k_{2n}J_{2n}$. Potom

$$\lambda(x, x''_{2n}) = \frac{\frac{20}{39} - \frac{1}{2}}{\frac{12}{55} - \frac{1}{2}}k_{2n} = -bk_{2n}\,,$$

kde $b > 0$ je nezávislé na n. Tedy ani zde neexistuje nekonečná derivace, a nadto platí zde opět vztahy (1).

Tím je věta, vyslovená na počátku tohoto odstavce, úplně dokázána.

III

Derivace neexistuje, jak jsme viděli, ani konečná ani nekonečná v žádném vnitřním bodě intervalu $[0, 1]$. Neexistuje však v některých bodech aspoň derivace zprava nebo zleva?

Uvažujme k tomu cíli body, v nichž nastává extrém, při čemž ovšem stačí omezit se na bod $x = 4/5$ [8]). Je $f(x) = 4/3$ a obdobně ovšem (podle (A))

$$x = x_n^l + \tfrac{4}{5}J_n\,, \quad f(x) = f(x_n^l) + \tfrac{4}{3}k_nJ_n\,.$$

---

[8]) Viz odst. II.

Platí

$$x_{n+1}^l = x_n^l + \tfrac{1}{2}J_n\,, \quad x_{n+1}^p = x_n^p - \tfrac{1}{8}J_n\,.$$

Je-li x' v intervalu $[x_n^l, x_{n+1}^l]$, je

$$f(x') \leqq f(x) - \tfrac{1}{2}k_n J_n \quad (\text{viz (B)})\,;$$

je-li x'' v intervalu $[x_{n+1}^p, x_n^p]$, je

$$f(x'') \leqq f(x_n^p) + \tfrac{1}{8}J_n k_n = f(x_n^l) + \tfrac{9}{8}J_n k_n\,.$$

Protože $0 < x - x' < J_n$, $0 < x'' - x < J_n$, je tedy

$$\frac{f(x) - f(x')}{x - x'} > \tfrac{1}{2}k_n\,, \quad \frac{f(x - f(x'')}{x - x''} < -(\tfrac{4}{3} - \tfrac{9}{8})\,k_n = -bk_n\,,$$

pří čemž $b > 0$ nezávisí na n. Ale každé $x' < x$ leží v jistém intervalu $[x_n^l, x_{n+1}^l]$; konverguje-li x' ku x, roste n a tedy i $k_n = (5/3)^n$ do nekonečna.

Je tedy

$$\lim_{x' \to x-} \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} = +\infty$$

a obdobně

$$\lim_{x'' \to x+} \frac{f(x) - f(x'')}{x - x''} = -\infty\,.$$

Tedy v bodě $x = 4/5$ existuje derivace zleva, rovná $+\infty$, a derivace zprava, rovná $-\infty$. Užijeme-li poznámky (A), dostáváme ihned: *Funkce Bolzanova má derivaci zleva $+\infty$ a zprava $-\infty$ v bodech, kde má lokální maximum; v minimech je derivace zleva $-\infty$, zprava $+\infty$.*

Je možné, aby derivace zleva i zprava existovaly obě současně ještě v jiných bodech? Můžeme především vyloučit body dělicí (derivace zleva neexistuje). Dále nesmí příslušná posloupnost obsahovat nekonečně mnoho J^{II}, jak snadno dokážeme.

Je-li totiž J_{n+1}^{II} a $k_n > 0$, je

$$f(x_n^l) + \tfrac{1}{2}k_n J_n - \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{8}k_n J_n \leqq f(x) \leqq f(x_n^l) + \tfrac{5}{8}k_n J_n\,.$$

Je tedy

$$\lambda(x, x_n^l) > (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{24})\,k_n \quad (0 < x - x_n^l < J_n)\,.$$

Uvažuji-li za druhé bod

$$x_n'' = x_n^l + \tfrac{4}{5}\cdot\tfrac{3}{8}J_n\,,$$

je

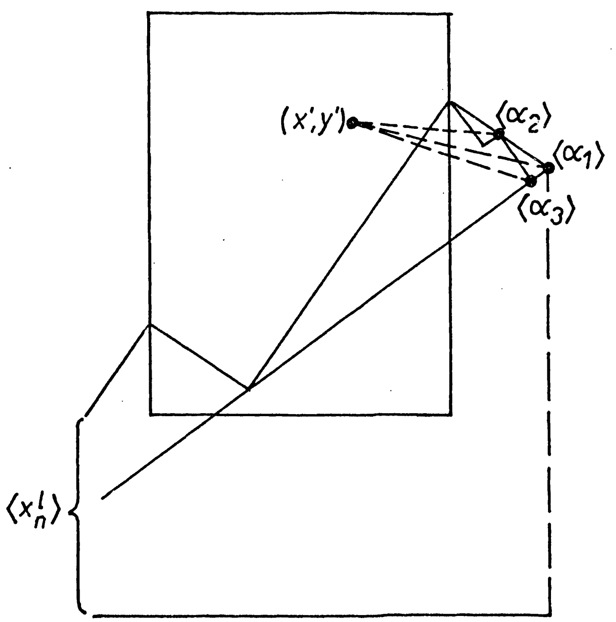
$$f(x''_n) = f(x^I_n) + \tfrac{4}{3} \cdot \tfrac{5}{8} k_n J_n \quad (0 < x - x'' < J_n),$$

a tedy

$$\lambda(x, x''_n) < -\left(\tfrac{4}{3} \cdot \tfrac{5}{8} - \tfrac{5}{8}\right) k_n .$$

Obdobné nerovnosti – pouze se změnou znamení $<$ – platí i pro $k_n < 0$. Z toho snadno plyne, že derivace zleva neexistuje, obsahuje-li (J) nekonečně mnoho J^{IV}.

Zbývá tudíž pouze uvažovat posloupnosti (J), jež obsahují pouze J^I a J^{III}, ne však samá J^I. Potom však platí vztah (1) a kdyby existovala derivace zleva i zprava, musila by být jedna $+\infty$, druhá $-\infty$, tj. v tomto bodě by nastával extrém. Tedy: *Obě derivace, zleva i zprava, existují současně jen v bodech spočetné množiny M* (odst. II), a je tam vždy jedna z nich rovna $+\infty$, druhá $-\infty$.



Obr. 2

Dosud jsme dostali derivace zprava i zleva nekonečné. Je možné, aby v některém bodě existovala derivace zprava nebo zleva *konečná*?

Vyšetřujme nejprve derivaci zleva. Příslušné (J), jak víme z odst. III, smí obsahovat od jistého indexu pouze J^I a J^{III} (ne však samá J^I). Je-li J^{III}_{n+1} a $\langle x'_n \rangle$ bod sdružený s $\langle x \rangle$ vzhledem k J_n, je $\lambda(x, x'_n) = k_n$; ale $x'_n < x$, $|k_n|$ roste do nekonečna současně s n, tedy konečná derivace zleva nemůže existovat.

Vyšetřujme dále derivaci zprava. Obsahuje-li (J) nekonečně mnoho J^{I}, je opět $\lambda(x, x_n') = k_n$ pro nekonečně mnoho n, při čemž $x_n' > x$ (neboť, je-li J_{n+1}^{I} a $\langle x_n' \rangle$ je sdružený bod s $\langle x \rangle$ vzhledem k J_n, je zde $x_n' > x$).

Zbývají tedy posloupnosti (J), jež obsahují (od jistého indexu) pouze J^{II}, J^{III}, J^{IV}, ne však samá J^{IV} (potom by to totiž byl bod dělicí, v němž konečná derivace zprava neexistuje, viz odst. I).

Budiž nyní n takové, že je J_{n+1}^{II} nebo J_{n+1}^{III}. Potom bod $\langle x \rangle$ leží v obdélníku, jehož strany mají rovnice

$$x = x_n^l + \tfrac{3}{8}J_n\,, \quad x = x_n^l + \tfrac{7}{8}J_n\,,$$
$$y = y_n^l + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{8}\right) k_n J_n\,, \quad y = y_n^l + \tfrac{4}{3}k_n J_n\,.$$

Budiž nyní (x', y') libovolný bod tohoto obdélníku, a spojme ho s body Bolzanovy čáry $\langle \alpha_1 \rangle$, $\langle \alpha_2 \rangle$, $\langle \alpha_3 \rangle$ o souřadnicích α_i, β_i (viz obr. 2), kde

$$\alpha_1 = x_n^p\,, \quad \beta_1 = y_n^p\,, \quad \alpha_2 = x_n^p - \tfrac{1}{16}J_n\,, \quad \beta_2 = y_n^p + \tfrac{1}{16}k_n J_n\,,$$
$$\alpha_3 = x_n^p - \tfrac{1}{64}J_n\,, \quad \beta_3 = y_n^p - \tfrac{1}{64}k_n J_n\,.$$

Označme $x' = x_n^l + \xi J_n$, $y' = y_n^l + \eta k_n J_n$; potom směrnice těch spojnic budou

$$\frac{y' - \beta_1}{x' - \alpha_1} = \frac{(\eta - 1)\, k_n J_n}{(\xi - 1)\, J_n}\,, \quad \frac{y' - \beta_2}{x' - \alpha_2} = \frac{\left(\eta - 1 - \frac{1}{16}\right) k_n J_n}{\left(\xi - 1 + \frac{1}{16}\right) J_n}\,,$$
$$\frac{y' - \beta_3}{x' - \alpha_3} = \frac{\left(\eta - 1 + \frac{1}{64}\right) k_n J_n}{\left(\xi - 1 + \frac{1}{64}\right) J_n}\,.$$

Probíhá-li bod (x', y') daný obdélník, je obor pro ξ, η

$$\tfrac{3}{8} \leqq \xi \leqq \tfrac{7}{8}\,, \quad \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{24} \leqq \eta \leqq \tfrac{4}{3}\,,$$

tj. nezávislý na n.

Tyto směrnice jsou spojité funkce ξ, η v daném oboru. Sestrojme si v každém bodě (x', y') rozdíl mezi největší a nejmenší z těchto tří směrnic; ten bude tvaru $\varphi(\xi, \eta) \cdot |k_n|$, kde $\varphi(\xi, \eta)$ je spojitá funkce ξ, η, nezávislá na n. Protože pro žádnou dvojici hodnot ξ, η nejsou všechny tři směrnice stejné, je $\varphi(\xi, \eta) > 0$ v daném oboru, a tedy i jeho minimum v daném oboru je jisté číslo $A > 0$, nezávislé ovšem na n. Následkem toho můžeme říci: máme-li libovolný interval J_n posloupnosti (J) takový, že je J_{n+1}^{II} nebo J_{n+1}^{III}, existují v intervalu J_n napravo od x dva body x_n', x_n'' takové, že

$$\lambda(x, x_n') - \lambda(x, x_n'') \geqq A|k_n|\,.$$

Takových hodnot n je zřejmě nekonečně mnoho; nechme n růst do nekonečna těmito hodnotami. Poněvadž pak s rostoucím n konvergují x_n', x_n'' ku x a je stále $|k_n| \geqq 1$, nemůže existovat *konečná* limita

$$\lim_{x' \to x+} \lambda(x, x') .$$

Tím je proveden důkaz: *V žádném bodě nemá Bolzanova funkce konečnou derivaci zprava ani zleva.*

V

Obrátím se nyní k číslům derivovaným. Čtenář snadno odvodí – postupem analogickým odstavci III – následující větu:

V dělicích bodech existuje derivace zprava (nekonečná); derivovaná čísla zleva jsou konečná, různá a co do absolutní hodnoty stejná.

Dokažme: *Existují body, v nichž všechna čtyři derivovaná čísla jsou konečná.* Uvažujme bod, definovaný posloupností $J_1^{\mathrm{II}}, J_2^{\mathrm{II}}, \ldots, J_n^{\mathrm{II}}, \ldots$ Zde je

$$k_n = (-1)^n , \quad J_n = \left(\tfrac{1}{8}\right)^n , \quad x_{n+1}^l = x_n^l + \tfrac{3}{8} J_n ,$$
$$f(x_{n+1}^l) = f(x_n^l) + (-1)^n \cdot \tfrac{5}{8} J_n ,$$

z čehož snadno plyne $x = 3/7$, $f(x) = 5/9$; obdobně

$$x = x_n^l + \tfrac{3}{7} J_n , \quad f(x) = f(x_n^l) + (-1)^n \cdot \tfrac{5}{9} J_n$$

(viz (A)). Je-li $x_{2n}^l \leqq x' \leqq x_{2n+1}^l$, je

$$f(x_{2n}^l) \leqq f(x') \leqq f(x_{2n}^l) + \tfrac{5}{6} J_{2n} ,$$
$$\left(\tfrac{3}{7} - \tfrac{3}{8}\right) J_{2n} \leqq x - x' \leqq J_{2n} .$$

Tedy

$$|f(x) - f(x')| < a J_{2n} , \quad |x - x'| > b J_{2n} ,$$

kde a, b jsou dvě čísla kladná, nezávislá na n; obdobné nerovnosti platí, je-li $x_{2n+1}^l \leqq x' \leqq x_{2n+2}^l$. Ale každý bod x' vlevo od x leží v jednom z intervalů $[x_n^l, x_{n+1}^l]$; tedy pro všechna $x' < x$ platí

$$\left| \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} \right| < C ,$$

kde $C > 0$ nezávisí na x'. Obdobný výsledek platí pro body $x'' > x$. Tedy vskutku všechna derivovaná čísla v bodě $x = 3/7$ jsou konečná (a ovšem, podle odst. IV, jsou potom derivovaná čísla zprava od sebe různá, a též zleva).

Naproti tomu dokáži větu:

Existuje jistá bodová množina mohutnosti kontinua, v níž je $\Lambda(x) = +\infty, \lambda(x) = -\infty,$ $\Lambda'(x) = +\infty, \lambda'(x) = -\infty.$[9]

Uvažujme k tomu cíli posloupnosti (J), jež obsahují pouze intervaly J_n^{III} a trojice po sobě jdoucích intervalů $(J_n^{\mathrm{II}}, J_{n+1}^{\mathrm{I}}, J_{n+2}^{\mathrm{IV}})$, a to obojí v nekonečném počtu. Každá taková posloupnost (J) definuje jistý bod x, a množina těchto posloupností F definuje jistou bodovou množinu E; body množiny E nejsou body dělicí a následkem toho je přiřazení bodů x a posloupností (J) vzájemně jednoznačné; mají tedy množiny E a F touž mohutnost. Ale posloupnost (J) množiny F je dána, je-li dáno pořadí, v jakém následují po sobě intervaly J^{III} a trojice intervalů. Lze tedy psát

$$(J) \equiv A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots,$$

kde A_n značí buď interval J^{III} nebo vytčenou trojici. Přiřaďme členu A_n číslo $\alpha_n = 0$, je-li $A_n = J^{\mathrm{III}}$, a $\alpha_n = 1$, je-li A_n trojice; potom množina F je vzájemně jednoznačně přiřazena množině E^* čísel

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{2^1} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{2^n} + \dots,$$

kde α_n je rovno libovolně 0 nebo 1, pouze s tou podmínkou, že není od jistého n stále $\alpha_n = 0$ ani stále $\alpha_n = 1$. Je tedy α libovolné číslo intervalu $[0, 1]$ vyjma čísla tvaru $p/2^n$ (p, n celá). Tedy množina E^* má skutečně mohutnost kontinua, a tedy i množina E.

Zbývá dokázat, že libovolný bod množiny E má vytčenou vlastnost. Ať je N jakkoliv velké, existuje $n > N$ takové, že je

$$J_{n+1}^{\mathrm{III}}, J_{n+2}^{\mathrm{II}}, J_{n+3}^{\mathrm{I}}, J_{n+4}^{\mathrm{IV}}.$$

Je tedy

$$k_{n+1} = \tfrac{5}{3}k_n, \quad k_{n+2} = -\tfrac{5}{3}k_n, \quad k_{n+3} = -(\tfrac{5}{3})^2 k_n.$$

Existují pak body $\langle x_n^i \rangle$, $\langle x_n^{ii} \rangle$, $\langle x_n^{iii} \rangle$, $\langle x_n^{iv} \rangle$, sdružené s $\langle x \rangle$ vzhledem k intervalům $J_n, J_{n+1}, J_{n+2}, J_{n+3}$, takže platí

$$\lambda(x, x_n^i) = k_n, \quad \lambda(x, x_n^{ii}) = \tfrac{5}{3}k_n, \quad \lambda(x, x_n^{iii}) = -\tfrac{5}{3}k_n,$$
$$\lambda(x, x_n^{iv}) = -(\tfrac{5}{3})^2 k_n.$$

---

[9]) Užívám označení Diniova:

$$\Lambda(x) = \limsup_{x' \to x+} \frac{f(x) - f(x')}{x - x'}, \quad \lambda(x) = \liminf_{x' \to x+} \frac{f(x) - f(x')}{x - x'},$$

$$\Lambda'(x) = \limsup_{x' \to x-} \frac{f(x) - f(x')}{x - x'}, \quad \lambda'(x) = \liminf_{x' \to x-} \frac{f(x) - f(x')}{x - x'}.$$

Je zřejmé, že $x_n^i < x$, $x_n^{ii} > x$, $x_n^{iii} > x$, $x_n^{iv} < x$.

Protože s rostoucím N roste i n i $|k_n|$ do nekonečna, x_n^{ii}, x_n^{iii} konvergují ku x zprava, x_n^i, x_n^{iv} zleva, je vytčená věta zřejmá.

Poznamenávám ještě, že lze vytčenou množinu E podstatně rozšířit, jakož i že lze stanovit další podrobnosti o derivovaných číslech Bolzanovy funkce. Ostatně čtenář snadno vyčte leckteré doplňky uvedených vět přímo z důkazů zde podaných.

VI

Ke konci poznamenávám ještě toto:

Budiž bod x definován posloupností (J); potom $x_{n+1}^l = x_n^l + a_n J_n/8$, kde $a_n = 0, 3, 4, 7$; dále $J_{n+1} = b_n J_n/8$, kde předchozím hodnotám a_n odpovídají po řadě hodnoty $b_n = 3, 1, 3, 1$. Dále $k_{n+1} = c_n' k_n$, kde c_n' má po řadě hodnoty $5/3, -1, 5/3, -1$; konečně $y_{n+1}^l = y_n^l + d_n k_n J_n/8$, kde d_n má po řadě hodnoty 0, 5, 4, 9.

Z těchto rekurentních vzorců snadno vyplývá: Každý bod intervalu $[0, 1]$ lze psát ve tvaru

$$x = \frac{a_0}{8} + \frac{b_0 a_1}{8^2} + \frac{b_0 b_1 a_2}{8^3} + \frac{b_0 b_1 b_2 a_3}{8^4} + \ldots;$$

potom je (zavedu-li ještě $b_n c_n' = c_n$)

$$f(x) = \frac{d_0}{8} + \frac{c_0 d_1}{8^2} + \frac{c_0 c_1 d_2}{8^3} + \frac{c_0 c_1 c_2 d_3}{8^4} + \ldots,$$

kde čísla a_n, b_n, c_n, d_n souvisí podle této tabulky:

a_n	0	3	4	7
b_n	3	1	3	1
c_n	5	-1	5	-1
d_n	0	5	4	9

V extrémech je od jistého n stále $a_n = 4$, takže všechny členy od jistého n počínaje tvoří řadu geometrickou; dostávám

$$x_e = \frac{a_0}{8} + \frac{b_0 a_1}{8^2} + \ldots + \frac{b_0 b_1 b_2 \ldots b_{n-2} a_{n-1}}{8^n} + \frac{4}{5} \frac{b_0 b_1 b_2 \ldots b_{n-1}}{8^n},$$

$$f(x_e) = \frac{d_0}{8} + \frac{c_0 d_1}{8^2} + \ldots + \frac{c_0 c_1 c_2 \ldots c_{n-2} d_{n-1}}{8^n} + \frac{4}{3} \frac{c_0 c_1 c_2 \ldots c_{n-1}}{8^n}.$$

Tím jsou analyticky dány všechny extrémy mimo $x = 0$, volím-li za n, a_0, a_1, ..., a_{n-1} postupně všechny přípustné hodnoty $(n = 1, 2, 3, \ldots, a_i = 0, 3, 4, 7)$. Maximum nebo minimum nastává zřejmě podle toho, je-li $c_0 c_1 c_2 \ldots c_{n-1}$ kladné či záporné, čili – což je totéž – je-li $a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1}$ (nebo $d_0 + d_1 + \ldots + d_{n-1}$) sudé či liché.

Zavedu-li parametr

$$\zeta = \frac{\alpha_0}{4} + \frac{\alpha_1}{4^2} + \ldots + \frac{\alpha_{n-1}}{4^n} + \ldots$$

a kladu-li $a_n = 0, 3, 4, 7$ podle toho, je-li $\alpha_n = 0, 1, 2, 3$, dostávám parametrické vyjádření Bolzanovy funkce, jež podali K. Petr a K. Rychlík.