Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie

II. Gedanken in Betreff einer künstig aufzustellenden Theorie der geraden Linien §1 - §43

In: Bernard Bolzano (author): Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie. (German). Prag: Karl Barth, 1804. pp. 44--[64].

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/400153

II.

Gedanken in Betreff einer künftig aufzustellenden Theorie der geraden Linie.

§. 1.

Zum Ersten etwas von den Begriffen: Einerleyheit und Gleichheit. Es ist zwar in einer geometrischen Untersuchung mein Amt nicht, die schulgerechten Definitionen dieser beyden Worte aufzusuchen. Aber den bestimmten Sinn, den ich mit ihnen verbinde, muß ich (weil er sonst noch schwankend wäre) doch angeben. Ich verstehe also unter Einerleyheit (identitas) den Begriff, der aus der Vergleichung eines Dinges (lediglich) mit sich selbst entspringt. Der Einerleyheit setz' ich contradictorisch entgegen die Verschiedenheit. Die Verschiedenheit theile ich abermals in die zwey contradictorischen species: Gleichheit und Ungleichheit. Sonach setzt Gleichheit die Verschiedenheit

heit voraus. Und es gelten die Redensarten: „jedes Ding ist mit sich selbst einerley"; (nicht aber: sich selbst gleich). „Zwey verschiedne Dinge sind entweder gleich, oder ungleich." (nie einerley). — Sagt man doch:" Das Ding A ist mit dem B einerley," so hat dieß eigentlich den Sinn: Man hat A und B problematisch als zwey verschiedne Dinge angenommen, und durch Schlüsse gefunden, daß sie in der That nicht verschieden, sondern einerley Ding sind. — Eigenschaften an Dingen können einerley oder verschieden genannt werden. In wiefern man sie aber hypostasirt, und selbst als Dinge betrachtet, sind sie eo ipso verschieden, und können nun gleich oder ungleich heissen.

§. 2.

Hiernächst lassen sich die Lehrsätze aufstellen: Dinge deren bestimmende Stücke einerley sind, sind selbst einerley Ding. Und umgekehrt (conv. simpl.) — Dinge deren bestimmende Stücke gleich sind, sind selbst gleiche Dinge. Und umgekehrt. — Gelegenheitlich lege ich auch folgende zwey Sätze zur Beurtheilung vor, die ich zum Behufe mathematischer Beweise anzunehmen, oft geneigt war. Wenn unter den bestimmenden Stücken zweyer Dinge eins verschieden ist (die übrigen aber einerley) so muß auch in den bestimmten Stücken eine Verschiedenheit seyn. Wenn unter den bestimmenden Stücken zweyer Dinge eines ungleich ist, (die übrigen aber gleich): so

muß

muß auch in den bestimmten Stücken eine Ungleichheit seyn.

§. 3.

Bevor der Geometer den Begriff der Gleichheit auf räumliche Dinge anwende, soll er erst die Möglichkeit gleicher räuml. Dinge darthun. Vielleicht, daß sich hiezu der, I. Abth. §. 19. aufgestellte Grundsatz brauchen ließe, der in seiner Allgemeinheit also lautet: Wir haben von keinem bestimmten räuml. Diuge (auch nur einem Punkte) eine Vorstellung a priori. Daher müssen mehrere ganz gleiche räuml. Dinge möglich seyn, von denen allen gleiche Prädicate gelten. Wenn also zu dem Punkte a irgend ein räuml. Ding A möglich ist, so muß auch zu dem verschiedenem Punkte b ein gleiches räuml. Ding B = A möglich seyn.

§. 4.

Da eine ächte Definition nur solche Merkmale des zu erklärenden Begriffs enthalten muß, die sein Wesen ausmachen, und ohne welchen er gar nicht gedacht werden kann: so sind die von dem Scholastiker Occam sich herschreibenden Erklärungen von Körper, Fläche, Linie und Punkt, nach welchen Körper diejenige Art von Ausdehnung ist, welche die Gränze keiner andern seyn kann, Fläche aber die Gränze eines Körpers ist, u. s. w. — als sehr unächt anzusehn; indem sie (wie auch Hr. Langsdorf anmerkt,

merkt, s. Anfangsgründe der Mathem. Vorr.) jedesmal die Vorstellung eines Körpers fordern, um sich auch nur einen Punkt oder eine Linie zu gedenken; wo es doch offenbar ist, daß wir uns eine Fläche, eine Linie, oder einen Punkt gar wohl denken können, und auch denken, ohne einem Körper, den sie begränzen. — Nicht so schlechterdings verwerflich wäre es meines Erachtens; wenn es jemand umkehrte, und solche Definitionen aufstellte, die zur Linie die Vorstellung von Punkten, zur Fläche die von Linien u. s. w. forderten.

§. 4.

Soviel ist, wie ich hoffe, ohne Widerspruch: daß der Begriff des Punkts — als eines bloßen Merkmals eines Raumes (σημειον), das selbst kein Theil des Raumes ist — in der Geometrie nicht entbehret werden könne. — Dieser Punkt ist allerdings ein bloß imaginärer Gegenstand, wie ich Hrn. Langsdorf gerne zugestehe. Auch Linie und Fläche sind dieß, und zwar alle drey noch in einem andern Sinne, als der geometrische Körper. Diesem nämlich kann in der Anschauung etwas adäquates gegeben werden, (und zwar alles, was in der Anschauung gegeben wird, ist Körper) nicht aber jenen. Und eben deßhalb dürfte vielleicht jede versuchte reine Anschauung von Linien und Flächen (etwa durch die Bewegung eines Punktes) unmögmöglich seyn. Die in dieser Abhandlung versuchten Definitionen von der geraden Linie §. 26, und der Ebene §. 43 sind eben nach der Voraussetzung gemacht, daß beyde bloße Gedankendinge sind.

§. 6.

Da Ein Punkt für sich allein betrachtet nichts Unterscheidbares darbietet, indem wir von keinem eine bestimmte apriorische Vorstellung haben: so ist der einfachste Gegenstand der geometrischen Betrachtung ein System zweyer Punkte. Aus einem solchen Zugleichdenken zweyer Punkte entspringen gewisse Prädicate für dieselben (Begriffe), die bey der Betrachtung eines einzelnen Punktes nicht vorhanden waren. Alles was sich in der Beziehung dieser zwey Punkte aufeinander, und zwar in der Beziehung (fig. 1) des b auf a bemerken läßt, zerlege ich in zwey Theilbegriffe: I. Dasjenige, was dem Punkte b in Beziehung auf a so zukömmt, daß es unabhängig ist von dem bestimmten Punkte a (qua praecise hoc est et non aliud); was folglich auch in der Beziehung auf einen andern Punkt, z. B. α gleich vorhanden seyn kann: genannt die Entfernung des Punktes b von a. II. Dasjenige, was dem Punkte b in Beziehung auf a so zukömmt, daß es abhängig ist bloß von dem bestimmten Punkte a; wovon nun getrennt werde, was schon in dem Begriffe der Entfernung liegt, d. h. was dem Punkte b auch in Rücksicht auf

noch

noch einen andern Punkt zukommen kann: genannt die Richtung, in welcher b zu a liegt.

§. 7.

Nun ist beyder Begriffe Möglichkeit zu zeigen. I. Der Entfernung. — Der bloße Begriff des Verschiedenseyns des Punktes b von a (des Auseinanderseyns) ist kein Theil des Begriffs der Beziehung des Punktes b auf a (des totius dividendi §. 6); sondern wird dabey nothwendig schon vorausgesetzt. Soll b auf a bezogen werden; so muß die Vorstellung, daß b von a verschieden ist, schon vorausgehn. Um also die Realität des Begriffs der Entfernung, als eines Theilbegriffs von dem erwähnten Ganzen darzuthun, muß man beweisen, daß er mehr enthalte, als etwa das bloße Verschiedenseyn des b von a. Dieß thue ich so: Sollte der Begriff der Entfernung nichts Andres enthalten, so müßte der andere Begriff der Richtung das totum divisum noch ganz begreifen, d. h. der ganze Begriff der Beziehung b auf a müßte nichts enthalten, als was lediglich von dem bestimmten Punkte a abhängt; mit andern Worten: das System ab könnte durch das völlig bestimmt werden, was dem Punkt b bloß abhängig von a zukömmt, also keinem andern Systeme zukommen kann; also hätten wir eine besondre apriorische Vorstellung von a, die wir von keinem andern Punkte hätten; welches gegen unsern Grundsatz ist. II. Der Begriff der Richtung kann nicht ganz leer seyn, weil sonst wieder der Begriff der Entf. den eingetheilten Begriff ganz erschöpfen müßte. Aber ex def. enthält dieser nur das, was dem Punkte b unabhängig von dem besondern Punkte a zukömmt, so daß er auch zukommen kann dem Systeme bα. Das einzutheilende Ganze aber enthält so viel, als dem Systeme ab nur allein zukömmt.

§. 8.

Da also beyde Begriffe der Entfernung und der Richtung einen Inhalt haben, so enhält jeder weniger als das eingetheilte Ganze; daher weder die Entf. allein, noch die Richt. allein den Punkt b bestimmt. Oder: es gibt mehrere Punkte b, β, welche eine gleiche Entfernung von a haben, und eben so mehrere Punkte b, p, welche in einerlei Richtung zu a liegen.

§. 9.

Die Annahme des Punktes a, und die Entfernung und Richtung des Punktes b bestimmen diesen (ex def.). Und umgekehrt der Punkt b bestimmt die Entf. von a, und die Richtung zu a. — Zwey verschiedene Richtungen also aus demselben Punkte a können keinen einzigen Punkt gemein haben, d. h. keinem gemeinschaftlich zukommen.

§. 10.

Lehrs. Zu einem gegebenen Punkte a (fig. 2) und in einer gegebenen Richtung aR gibt es Einen und nur Einen Punkt m, dessen Entfernung von a der gegebenen des Punktes y von x gleiche.

Bew.

Bew. Daß es einen Punkt zu a von der gegebenen Entfernung gebe, folgt daraus, weil es widrigenfalls einen Unterschied nicht aufeinander bezogener Punkte a, x gäbe. Daß es einen solchen Punkt auch in der gegebenen Richtung zu a gebe, folgt daraus, weil wir sonst eine besondere Vorstellung von einer bestimmten Richtung a R haben müßten. — Daß es endlich nur Einen gebe, folgt aus §. 9.

§. 11.

Ich suche bisher vergebens einen befriedigenden Beweis für den Lehrsatz zu erfinden: daß die Entfernung b von a gleich sey der Entfernung a von b. Indessen mag doch folgendes Raisonnement, ob es gleich mich selbst nicht befriedigt, beygefügt seyn, um vielleicht ein Besseres zu veranlassen. Wenn zwey Dinge A, B gleich sind, so muß auch eine solche Verbindung derselben möglich seyn, daß die Beziehung A auf B gleich sey der Beziehung B auf A. Denn der Grund der Unmöglichkeit müßte in einer Ungleichheit der Dinge liegen. Da nun alle Punkte gleiche Dinge sind, so muß eine solche Verbindung zweyer Punkte möglich seyn, dabey die Beziehung b auf a gleich sey der Beziehung a auf b. — Ist aber eine solche Verbindung nur möglich, so ist sie auch wirklich; denn die Verbindung zweyer Punkte ist bey bestimmter Entfernung nur eine Einzige. — Soll nun die Beziehung von b auf a gleichen der von a auf b, so muß die Entfernung des b von a gleich seyn der des a von b; denn die Richtungen können nicht verglichen werden.

§. 12.

Das System zweyer aus einem Punkte ausgehender Richtungen, heißt ein Winkel. Warum der Begriff des Winkels eigentlich auf Richtungen und nicht auf Linien gehe, habe ich schon I. Abth. §. 2. bedeutet.

§. 13.

Indeß hätt' ich auch noch eine andere Definition des Winkels in Vorschlag, die der Entwicklung der Begriffe von Richtung und Entfernung ganz analog ist. Man betrachte zwey Richtungen R, S aus demselben Punkte a (fig. 3.); und zertheile den ganzen Begriff der Beziehung der R. S auf R in folgende zwey Theilbegriffe. I. Das, was der R. S unabhängig von der bestimmten R. R (lediglich dieser) zukömmt — genannt der Winkel, den S mit R macht. II. Das, was der R. S nur in Bezug auf die R. R und keine andere zukömmt, so daß hievon dasjenige getrennt werde, was ihr auch in Bezug auf eine andere R. gleichermaßen zukommen kann — genannt die Ebene in der S zu R liegt. — (In dieser Bedeutung käme das Wort Ebene nur derjenigen Hälfte einer gewöhnlichen Ebene durch R und S zu, die auf der Seite von R liegt, darinn S ist). — Gegenwärtig aber bleibe ich bey der Erkl. §. 12.

§. 14.

§. 14.

In jedem Falle kömmt zu erweisen, daß die Vorstellung, die entsteht, wenn man S auf R bezieht, gleiche der, wenn man R auf S bezieht, d. h. der Winkel sar = ras. (Ähnlich dem Satze §. 11.) Auch hier habe ich noch keinen befriedigenden Beweis.

§. 15.

Wenn der Winkel zwischen den R. R, S (fig. 4.) von der Art ist, daß er die R. S durch die R. R bestimmt, d. h. daß es bey einerley R. R keine von S verschiedene Richtung geben kann, die mit R ein gleiches System bilde: so heißt der Winkel zwischen S und R ein Winkel von zwey Rechten, oder (wie Hr. Schultz ihn nennt) ein gerader Winkel. Die R. S heißt der R entgengesetzt. Zufolge §. 14. also auch die R. R der S entgegengesetzt. — Auch folgt ex def: Wenn die R. R, S (fig. 3.) einander nicht entgegengesetzt sind, so gibt es allemal noch von S verschiedene Richtungen, die mit R einen gleichen Winkel bilden.

§. 16.

Daß es aber zu einer jeden R. R nur eine einzige ihr entgegengesetzte R. S gebe, ist noch was Anderes, das nicht ex def. folgt; denn es könnte vielleicht verschiedne Winkel geben, die jeder nur einer einzigen R. S zukommen.

§. 17.

Lehrs. Wenn in den Richtungen (fig. 5.) aC, $a\Gamma$ die Punkte c, γ in gleichen Entfernungen von a, dann in den Richtnngen ca, γa abermals die Punkte m, μ in gleichen Entfernungen von c, γ genommen werden: so sind die Winkel $ca\mu = \gamma am$. Bew. Denn da die W. $Ca\Gamma = \Gamma aC$, so läßt sich leicht zeigen, daß die bestimmenden Stücke des W. $ca\mu$ gleich seyen den best. Stücken des W. γam.

§. 18.

Wenn die R. ab, ac, aus a (fig. 6.), und die Entfernungen ab, ac der Punkte b, c in denselben gegeben sind: so sind auch die Punkte b, c selbst bestimmt (§. 8.); folglich das System der drey Punkte a, b, c gegeben, welches ein Dreieck heißt. Auch die Entfernung bc, und die Winkel bey b, c sind bestimmt. — Hier hat man also ein Dreieck, das nur aus 3 Punkten und 3 Winkeln der Richtungen jeglicher zwey Punkte zu dem dritten — nicht aus drey Linien — besteht. Man sieht auch, wie mehrere Lehrsätze von den Dreiecken, die in der I. Abth. noch mit dem Begriffe der Linie vermengt sind, sich schon hier (mit geringen Veränderungen) vortragen lassen; ich behielt aber den im Grunde heterogenen Begriff dort bey, um durch solche Abstractionen nicht beschwerlich zu fallen.

§. 19.

§. 19.

Lehrs. Wenn die Richtung ac des Punktes c zu a durch ihren Winkel mit der Richtung ab des Punktes b zu a nicht bestimmt wird: so wird auch die Richtung bc durch den Winkel, den sie mit der ba bildet, nicht bestimmt. Bew. Nach der Voraussetzung gibt es wenigstens noch Eine von ac verschiedene Richtung, welche einen gleichen Winkel mit der ab bildet; nimmt man nun in ihr den Punkt γ in der Entfernung $a\gamma = ac$ an, so werden die Systeme $\gamma ab = cab$ (Dreiecke) gleich seyn, weil ihre bestimmenden Stücke gleich sind. Folglich die Winkel $abc = ab\gamma$, und die Entfernungen $bc = b\gamma$. Daher ist die R. bc mit der $b\gamma$ nicht einerley, denn sonst wären c, γ (§. 8.) einerley Punkt. Also gibt es verschiedene R. bc, $b\gamma$, welche einen gleichen Winkel mit der ba bilden.

§. 20.

Zus. Dasselbe gilt vom Winkel acb. — Und dieß ist eigentlich der Lehrsatz: daß in jedem Dreiecke drey Winkel sind. (I. Abth. §. 9.)

§. 21.

Wenn aber die R. ac, ab (fig. 7.) entweder einerley, oder entgegengesetzt sind, so müssen auch die Richtungen bey b, c einerley, oder entgegengesetzt seyn. Denn wäre bey Einem keins von beyden, so könnte (§. 19. 20.) auch bey a keines von beyden seyn.

§. 22.

Leicht läßt sich auch der allgemeine Satz beweisen: Wenn in einem Systeme von was immer für einer Anzahl Punkte das Gesetz herrscht, daß jeder einzelne Punkt mit noch einem zweyten zu einem gewissen dritten in einerley oder entgegengesetzter Richtung liegt: so gilt eben dieß von jeglichen zwey zu jeglichem dritten.

§. 23.

Lehrs. Wenn die zwey Richtungen (fig. 8.) oa, ob weder einerley, noch entgegengesetzt sind; so haben die zwey Richtungen ao, bo nur den einzigen Punkt o gemein. Bew. Angenommen, sie hätten noch den Punkt x gemein, so folgete (§. 21.) daß oa, ob einerley oder entgegeng. mit ox, folglich auch untereinander einerley oder entgegeng. wären, contra hyp.

§. 24.

Ich bin bis jetzt noch nicht im Stande, die Möglichkeit des Begriffs der entgegengesetzten Richtung darzuthun. Überhaupt, was ich nebst dem Bisherigen, (§. 11. 14. 21.) noch ferner unbewiesen aufzustellen habe, läßt sich in folgenden Satz zusammenziehen: „In einem Systeme von drey Punkten betrachtet man das Verhältniß der Richtungen, in denen jegliche zwey zu dem dritten liegen: wenn diese Richtungen bey Einem Punkte einerley oder entgegengesetzt sind: so sind sie an zwey Punkten einerley, an Einem entgegengesetzt."

Auf

Auf diese Voraussetzungen, die sich alle ohne dem Begriffe der geraden Linie erweisen lassen müssen, insofern also auch absque petitione principii für meinen Zweck angenommen werden können, läßt sich eine Theorie der geraden Linie gründen, deren vornehmste Sätze nun folgen.

§. 25.

Erkl. Man nenne (der Kürze wegen) den Punkt m (fig. 9.) innerhalb oder zwischen a und b, wenn die Richtungen ma, mb entgegengesetzt sind.

§. 26.

Erkl. Ein Ding, welches alle jene, und nur jene Punkte enthält, die zwischen den zwey Punkten a und b liegen, heißt eine gerade Linie zwischen a und b.

§. 27.

Anm. Die Möglichkeit dieses Dinges folgt aus dem in §. 24. Angenommenen. — Aus dem Folgenden zeigt sich auch, daß dieses Ding eine unendliche Anzahl von Punkten enthält, daher etwas von einem bloßen Systeme der Punkte der Qualität nach Verschiednes seyn muß.

§. 28.

Lehrs. Zwey gegebene Punkte bestimmen die g. L., die zwischen denselben liegt. Bew. Denn die g. L. zwischen a und b soll alle Punkte enthal-

ten,

ten, die z w i s c h e n a und b liegen, und sonst keine andere. Also gibt es nur ein e i n z i g e s Ding, das die g. L. zwischen a und b heißt.

§. 29.

L e h r s. Wenn die Entfernungen ab $= \alpha\beta$ (fig. 9.), so sind auch die Geraden ab $= \alpha\beta$. B e w. Denn ihre bestimmenden Stücke (§. 28.) sind gleich.

§. 30.

L e h r s. Zu jeglichen zwey gegebenen Punkten (fig. 10.) a, b gibt es Einen und nur Einen M i t t e l p u n k t, d. h. einen Punkt, der aus beyden auf gleiche Art bestimmt wird. B e w. In den entgegeng. R. $\gamma\alpha$, $\gamma\beta$ nehme man die Punkte α, β in willkührlichen gleichen Entfernungen $\gamma\alpha = \gamma\beta$; so wird γ aus α so bestimmt, wie aus β. Nun sey, wo möglich, δ noch ein andrer Punkt, der ebenfalls aus α eben so bestimmt werde, wie aus β. Folglich müssen die Entfernungen $\delta\alpha = \delta\beta$. Daher können die R. $\delta\alpha$, $\delta\beta$ nicht einerley seyn; sonst wären α, β einerley Punkt. Wären sie nun zwar verschieden, aber nicht entgegeng., so wären auch die R. $\alpha\beta$, $\alpha\delta$ verschieden, und nicht entgegeng. (§. 20.); also würde die R. $\alpha\delta$ durch die $\alpha\beta$, folglich auch der Punkt δ durch α, β nicht bestimmt. Demnach müssen $\delta\alpha$, $\delta\beta$ entgegengesetzt, folglich (§. 24.) $\alpha\beta$, $\alpha\delta$ einerley seyn. Aber auch die R. $\alpha\gamma$, $\alpha\beta$ sind einerley; also die R. $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$ einerley. Folglich (§. 24.) die R. ent-

we-

weder bey γ oder bey δ entgegengesetzt. Ich nehme das erstre an. (Gleicherweise wird im andern Fall geschlossen.) Man gedenke in der R. $\gamma\alpha$, die der $\gamma\delta$, oder $\gamma\beta$ entgegeng. ist, ε in der Entfernung $\gamma\varepsilon = \gamma\delta$, so folgt, weil auch $\gamma\alpha = \gamma\beta$, daß auch die Entfernungen $\alpha\varepsilon = \beta\delta$, indem sie auf gleiche Art bestimmt werden; und so wie $\beta\delta$, $\beta\alpha$ einerley R. sind, müssen auch $\alpha\varepsilon$, $\alpha\beta$ einerley R. seyn. Also (per dem.) $\alpha\varepsilon$, $\alpha\delta$ einerley R., und auch die Entfernungen $\alpha\varepsilon = \beta\delta = \alpha\delta$, also ε, δ einerley Punkt; welches widersprechend. Mithin ist der Punkt γ nur der Einzige, der aus α, β auf gleiche Art bestimmt wird. — Haben nun α, β einen Mittelpunkt, so müssen auch jegliche 2 andere Punkte a, b einen haben. (I. Abth. §. 19.)

§. 31.

Lehrs. Wenn der Punkt c (fig. 11.) **innerhalb** der Punkte a, b liegt; so sind die geraden Linien zwischen a, c und zwischen b, c **Theile**, deren **Ganzes** die gerade Linie zwischen a, b.

Bew. Es ist zu beweisen, daß jeder Punkt der Geraden ac, oder bc zugleich ein Punkt der ab, und jeder Punkt der ab ein Punkt entweder der ac, oder bc ist. I. Es sey m ein Punkt der ac, also (§. 26.) die R. ma, mc entgegeng., die cm, ca aber einerley. (§. 24.) Und da ex hyp. ca, cb entgegeng., so sind es auch cm, cb. Mithin (§. 24.) bc, bm einerley. Aber ebenfalls bc, ba einerley, also bm, ba einerley. Gleicherweise zeigt sich

am,

am, ab einerley; also (§. 24.) ma, mb entgegeng., folglich m ein Punkt in der Geraden ab. II. Es sey o ein Punkt in der Geraden ab, folglich die R. ao, ab und bo, ba einerley. Aber ex hyp. ca, cb entgegeng., folglich ac, ab einerley. Mithin ac, ao einerley. Folglich (§. 24) die ca, co entweder einerley oder entgegeng. Ist das erstere, so liegt also o in ger. L. ac. Ist das letztere, so zeigt sich eben so leicht, daß o in der ger. L. bc liegt.

§. 32.

Lehrs. Wenn die Punkte m, n (fig. 12.) beyde innerhalb der a, b liegen, so ist die Gerade mn ein Theil der Geraden ab. Bew. Auf ähnliche Art.

§. 33.

Wenn die Entfernungen (fig. 13.) ab = bc = cd = etc., dann die Richtungen ba, bc; ferner cb, cd; u. s. w. entgegengesetzt sind: so kann die gerade Linie zwischen a, u. d betrachtet werden als eine Größe, welche, wenn n+1 die Zahl der Punkte a bis d ist, die Zahl n ausdrückt, wenn ihr Maß die Gerade ab ist. Bew. Aus (§. 31) folgt, daß man die Gerade ac ansehen kann, als ein Ganzes, dessen ergänzende Theile die ab, bc sind, und wieder die Gerade ad, als ein Ganzes, der Theile ac, cd; folglich auch als ein Ganzes, dessen ergänzende Theile ab, bc, cd sind. U. s. w. Diese Theile ab, bc, cd, etc. sind aber einander gleich, weil die Entfernungen ab = bc = cd = etc. (§. 29.)

(§. 29.) Ihre Anzahl ist aber um eins geringer, als die Zahl der Punkte, wie leicht zu erweisen. Folglich u. s. w.

§. 34.

Lehrs. Jede gerade Linie ab (fig. 14.) kann in eine gegebene Anzahl gleicher Theile abgetheilt werden, welche zusammen die ganze ab wieder geben. Bew. Denn es kann bey Annahme irgend einer ger. L. $\alpha\gamma$, eine $\alpha\beta$ gedacht werden, welche aus n Theilen $= \alpha\gamma$ besteht (§. 33.). Mithin muß auch die ab einer solchen Theilung fähig seyn. (I. Abth. §. 19.)

§. 35.

Lehrs. Das Maß und die Zahl (also die Größe) bestimmen die gerade Linie, der sie zukommen. Bew. Sollten zwey ungleiche Linien, welchen dieselbe Größe zukömmt, möglich seyn, so gedenke man sie aus demselben Punkte a (fig. 15) in derselben Richtung; so müssen ihre zweyten Endpunkte b, β verschieden seyn. (§. 20). Folglich sind die Richtungen ba, bβ entweder einerley, oder entgegeng. Sey z. B. das letztere, so ist (§. 31) die ger. L. aβ ein Ganzes, dessen ergänzende Theile die ab, bβ sind. Also ist ab allein kein ergänzender Theil der aβ, folglich hat aβ keine Größe, die der ab gleich wäre.

§. 36.

Zus. Alle gerade Linien, die gleiche Größe haben, sind also einander gleich.

§. 37.

§. 37.

Lehrs. Wenn die Richtungen ca, cb (fig. 11) entgegengesetzt, und die Größen der Linien ac, cb bey einem gemeinsamen Maße durch die Zahlen m, n ausgedrückt sind: so ist die Größe der Geraden ab bey gleichem Maße durch die Zahl m + n ausgedrückt. Bew. Denn nach (§. 31) ist die L. ab ein Ganzes, dessen integrirende Theile ac, cb; u. s. w.

§. 38.

Lehrs. Wenn die Richtungen ab, ac (fig. 11) einerley, und die Größen der Linien ab, ac (fig. 10) bey einem gemeinsamen Maße durch die Zahlen m+n, m ausgedrückt sind: so ist die Größe der Geraden bc bey gleichem Maße durch die Zahl n ausgedrückt. Bew. Denn ac, cb sind die integranten Theile der Geraden ab, also ac + cb = ab, oder in Zahlen m + cb = m+n, daher bc = n.

§. 39.

Lehrs. Zu jeglichen drey Entfernungen (fig. 16.) ab, cd und $\alpha\beta$ gibt es noch eine vierte $\gamma\delta$ von der Beschaffenheit, daß alle Prädicate, welche aus der Vergleichung der beyden Entfernungen ab, cd entspringen, gleich seyen den Prädicaten, welche die Vergleichung der beyden $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ liefert. Bew. Widrigenfalls müßten wir eine besondere Vorstellung a priori von der bestimmten Entfernung ab haben, gemäß welcher etwas von ihr gälte, das von der $\alpha\beta$ nicht gilt.

§. 40.

§. 40.

Zus. Daß die Vergleichung zwischen ab, cd so weit getrieben werden könne, daß die daraus resultirenden Merkmale die cd aus der ab bestimmen: läßt sich auch leicht darthun. Und bestimmt ab die cd, so bestimmt auch $\alpha\beta$ die $\gamma\delta$.

§. 41.

Lehrs. Dasselbe (§. 39) gilt auch von geraden Linien. Bew. Weil diese durch die Entfernungen bestimmt werden. (§. 28. I. Abth. §. 17.)

§. 42.

Zus. Also gibt es zu jeglichen drey gegebenen Linien Eine und nur Eine (§. 40) vierte proportionale Linie.

§. 43.

Schlußanm. Diese wenigen Sätze sind wohl hinreichend die Art zu zeigen, wie ich eine vollständige Theorie der ger. Linie auf die voraus geschickten Grundsätze zu erbauen dachte. Zum Schlusse dieses Aufsatzes will ich eine Definition der Ebene beysetzen, nach welcher ich eine neue Theorie der Ebene zum größern Theil bereits entworfen habe. „Die Ebene des Winkels ras (fig. 3.) ist dasjenige Ding, welches alle und nur jene Punkte enthält, die durch ihr Verhältniß (ihre Winkel und Entfernungen) zu den zwey Richtungen R, S bestimmt werden können."

Prag,
gedruckt bei Gottlieb Haase. 1804.